Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, О дополняемости канонического дивизора для расслоений Мори на коники, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 11, 99–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:29:23

УДК 512.7

Ю. Г. Прохоров

О дополняемости канонического дивизора для расслоений Мори на коники

Настоящая статья продолжает изучение экстремальных стягиваний с трехмерных многообразий на поверхность. Обсуждается гипотеза М. Рида о дополняемости канонического дивизора («общем слоне») и гипотеза об особенностях базы. Такие стягивания естественно появляются в бирациональной классификации трехмерных алгебраических многообразий. Ситуация изучается локально вблизи вырожденного слоя.

Библиография: 28 названий.

Введение

Мы продолжим изучение экстремальных стягиваний с трехмерных многообразий на поверхности (так называемых расслоений Мори на коники), начатое в [1]–[4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть (X, C) – росток трехмерного нормального комплексного пространства X вдоль компактной приведенной кривой C и пусть (S, o) – росток нормального двумерного комплексного пространства S в $o \in S$. Предположим, что X имеет особенности не хуже чем терминальные. Собственный морфизм $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ называется *расслоением Мори на коники*, если

- (i) $f^{-1}(o)_{\text{red}} = C$,
- (ii) $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$,
- (iii) дивизор $-K_X$ f -обилен.

Первым примером расслоений Мори на коники является расслоение на коники в классическом смысле: $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ называется (обычным) *расслоением на коники*, если (S, o) – неособая точка и существует вложение $i: (X, C) \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \times (S, o)$ такое, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times S}(X) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times S}(2, 0)$.

Естественно возникающий в теории минимальных моделей вопрос – классификация расслоений Мори на коники. Следующие две гипотезы интересны для приложений программы Саркисова к изучению бирациональных свойств трехмерных многообразий со структурой расслоений на коники (см. [5], [6]).

ГИПОТЕЗА 0.2 (специальный случай гипотезы об общем слоне М. Рида). Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники. Тогда общий элемент антиканонической линейной системы $| -K_X |$ имеет лишь дувалевские особенности.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00820) и Международного научного фонда (грант № М90 3000).

ГИПОТЕЗА 0.3. Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники. Тогда точка (S, o) неособа или является дювалевской особенностью типа A_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 0.4. В работе [7] В. В. Шокуровым было введено понятие *дополнения*. В нашей ситуации это определение выглядит следующим образом:

канонический дивизор K_X называется *1-дополняемым*, если для некоторого $F \in |-K_X|$ логдивизор $K_X + F$ логканоничен.

Согласно [7, 3.2.3] и обращению присоединения [7, 3.3, 9.5] общий дивизор $F \in |-K_X|$ имеет дювалевские особенности тогда и только тогда, когда $K_X + F$ чисто логтерминален (здесь используется то, что $K_X + F$ и K_F – дивизоры индекса 1, поэтому все дискрепантности – целые). Таким образом, гипотеза 0.2 эквивалентна 1-дополняемости K_X в сильном смысле.

Вероятно следует ожидать, что расслоение Мори на коники с достаточно особой базой является фактором обычного расслоения на коники по циклической группе (например, это следует из гипотезы 0.2, см. теорему 4.2). Таким образом, этот частный случай, возможно, является довольно общим. Такие факторы классифицированы в §2. К счастью, ситуация здесь не очень сложна и с точностью до аналитического изоморфизма имеются лишь три различных расслоения Мори на коники. В §3 будут полностью описаны расслоения Мори на коники индекса 2. Предполагая истинность гипотезы 0.2, мы получим грубую классификацию расслоений Мори на коники в §4. В частности, мы покажем (см. также [1]), что гипотеза 0.2 влечет гипотезу 0.3. Мы рассмотрим также много примеров. Используемые нами методы полностью элементарны. Здесь не используется техника работ Мори [8] или Шокурова [7]. Почти все результаты этой работы были анонсированы в препринтах [2] и [3].

Автор работал над этой проблемой в институте Макса Планка в феврале–апреле 1995 и математическом институте университета Варвика в ноябре–декабре 1995. Автор выражает глубокую благодарность сотрудникам этих институтов за гостеприимство. Различные аспекты работы обсуждались с В. А. Исковских, В. В. Шокуровым, М. Ридом и Д. Орловым. Я благодарен им за помощь и советы.

§1. Предварительные сведения

Всюду в этой статье под многообразием мы понимаем приведенное неприводимое комплексное пространство. Мы будем обозначать канонический дивизор (Вейля) нормального многообразия X через K_X . Если X – многообразие и $C \subset X$ – его подмногообразие, то через (X, C) будет обозначаться росток X вдоль C . Иногда мы будем заменять (X, C) на достаточно малый представитель $X \supset C$. Мы говорим, что многообразие X имеет терминальные особенности, подразумевая, что оно имеет особенности не хуже чем терминальные, в частности, X может быть неособым.

Нам понадобятся некоторые факты из классификации трехмерных терминальных особенностей.

Пусть (X, P) – терминальная особенность индекса $m \geq 1$ и пусть $\pi: (X^\#, P^\#) \rightarrow (X, P)$ – ее каноническое накрытие. Тогда $(X^\#, P^\#)$ – терминальная особенность

индекса 1. Известно [9], что $(X^\#, P^\#)$ – гиперповерхностная особенность, т.е. существует $\mathbb{Z}_m$ -эквивариантное вложение $(X^\#, P^\#) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$.

ТЕОРЕМА 1.1 [10]. *Если в обозначениях выше точка $(X^\#, P^\#)$ неособа, то она $\mathbb{Z}_m$ -изоморфна $(\mathbb{C}_{x_1, x_2, x_3}^3, 0)$ со следующим действием $\mathbb{Z}_m$*

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (\varepsilon^a x_1, \varepsilon^{-a} x_2, \varepsilon^b x_3),$$

где ε – первообразный корень степени m из 1, и a, b целые, взаимно простые с m числа. Обратно, каждая такая особенность терминальна.

Такая особенность обычно обозначается $\frac{1}{m}(a, -a, b)$ или $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_m(a, -a, b)$ и называется терминальной циклической факторособенностью.

ТЕОРЕМА 1.2 [11], [12]. *В обозначениях выше предположим, что точка $(X^\#, P^\#)$ особа, тогда она $\mathbb{Z}_m$ -изоморфна гиперповерхности $\{\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\}$ в $(\mathbb{C}_{x_1, x_2, x_3, x_4}^4, 0)$, где имеются две возможности для действия $\mathbb{Z}_m$:*

- (i) (основная серия) $(x_1, x_2, x_3, x_4; \phi) \longrightarrow (\varepsilon^a x_1, \varepsilon^{-a} x_2, \varepsilon^b x_3, x_4; \phi)$, где ε – первообразный корень степени m из 1, и a, b – целые взаимно простые с m числа,
- (ii) (исключительная серия) $m = 4$ и

$$(x_1, x_2, x_3, x_4; \phi) \longrightarrow (\sqrt{-1} x_1, -\sqrt{-1} x_2, \pm \sqrt{-1} x_3, -x_4; -\phi).$$

Циклические факторособенности обычно включаются в серию (i) с $\phi = x_4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Терминальные особенности индекса > 1 могут быть классифицированы по типу общего элемента линейной системы $|-K_X|$ (который должен иметь дювалевскую особенность). Например, существуют четыре типа терминальных особенностей индекса 2: $sA/2$, $sAx/2$, $sD/2$ и $sE/2$ [12] (мы используем обозначения работы [13]).

ЛЕММА 1.4. *Пусть (X, P) – росток трехмерной терминальной особенности и пусть $F \in |-K_{(X, P)}|$ – элемент антиканонической линейной системы. Если F – неприводимая неособая поверхность, то точка (X, P) неособа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 0.4 логдивизор $K_X + F$ чисто логтерминален. Тогда точка (X, P) неособа по [7, 3.7].

Хорошо известно, что любая дювалевская особенность (F, P) (и более общо, любая логтерминальная поверхностная особенность) является фактором неособого ростка $(\mathbb{C}^2, 0)$ по конечной группе G , действующей на $\mathbb{C}^2$ свободно вне 0. Порядок G называется топологическим индексом (F, P) . Аналогично лемме 1.4 можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1.5. *Пусть (X, P) – росток трехмерной терминальной особенности индекса $m > 1$ и пусть $F \in |-K_{(X, P)}|$ – антиканонический дивизор. Предположим, что поверхность F приведена, неприводима и точка (F, P) – дювалевская топологического индекса n . Тогда n делится на m . Более того, если $n = m$, то (X, P) – циклическая факторособенность и (F, P) имеет тип A_{m-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, логдивизор $K_X + F$ чисто логтерминален. Пусть $\pi: (X^\#, P^\#) \rightarrow (X, P)$ – каноническое накрытие и $F^\# := \pi^{-1}(F)$. Тогда $K_{X^\#} + F^\#$ также чисто логтерминален [7, 2.2]. Так как $F^\#$ связан (ср. [7, 5.7]), то он неприводим и особенность $(F^\#, P^\#)$ – дювалевская. Накрытие $F^\# \rightarrow F$ является этальным вне P , следовательно, топологический индекс (F, P) делится на степень этого накрытия, равную m . Если достигается равенство $n = m$, то точка $(F^\#, P^\#)$ неособа и по лемме ??? выше неособа также $(X^\#, P^\#)$.

Далее мы обсудим некоторые элементарные свойства расслоений Мори на коники.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 [14] (см. также 1.11). *Пусть $f: X \rightarrow S$ – расслоение Мори на коники. Предположим, что X содержит только точки индекса 1. Тогда поверхность S неособа и f – расслоение на коники (возможно с особым X).*

Следующее утверждение является немедленным следствием теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 (ср. [8, (1.2)]). *Пусть $f: X \rightarrow S$ – расслоение Мори на коники. Тогда*

$$R^i f_* \mathcal{O}_X = 0, \quad i > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.8 (ср. [8, (1.3)]). *Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники. Тогда*

- (i) *слой C – дерево рациональных кривых, т.е. $p_a(C_0) \leq 0$ для любой одномерной подсхемы C_0 с $\text{Supp}(C_0) \subset C$;*
- (ii) *$\text{Pic } X \simeq H^2(C, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^\rho$, где ρ – число компонент C .*

1.9. Конструкция. Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники. Предположим, что точка (S, o) особа. По легкому замечанию в [15] (см. также [16]), (S, o) – факторособенность. Это означает, что (S, o) – фактор неособой точки (S', o') по конечной группе G , где действие G на $S' - o'$ свободно. Следовательно, существует точное представление $G \hookrightarrow \text{GL}(T_{S', o'}) = \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Обозначим через $g: S' \rightarrow S$ факторморфизм и через X' нормализацию $X \times_S S'$. Мы имеем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (X', C') & \xrightarrow{h} & (X, C) \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ (S', o') & \xrightarrow{g} & (S, o) \end{array}$$

где $C' := f'^{-1}(o')$. Тогда G действует на (X', C') и, очевидно, $X = X'/G$ и $C = C'/G$. Так как действие G на $S' - o'$ свободно, свободно также действие на $X' - C'$. Поэтому X' имеет только терминальные особенности, так как $\text{codim } C' = 2$ (см., например, [17, 6.7]). Это дает нам, что действие G на X' свободно вне конечного множества точек $Q_1, \dots, Q_k \in X'$ (для каждой точки Q_i ее образ $P_i = h(Q_i)$ имеет индекс > 1). Так как $h: X' \rightarrow X$ не имеет дивизоров ветвления, антиканонический дивизор $-K_{X'} = h^*(-K_X)$ обилен над S' . Мы получим новое расслоение Мори на коники $f': (X', C') \rightarrow (S', o')$ над неособой базой.

С. Мукай указал автору, что, на самом деле, $X \times_S S'$ нормально, следовательно, мы можем положить $X' = X \times_S S'$.

ЛЕММА 1.10 (см. [1], [2], [18]). В обозначениях п. 1.9, группа G является циклической и имеет по крайней мере одну неподвижную точку на X' . В частности, (S, o) – циклическая факторособенность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p_a(C') = 0$, то легко показать индукцией по числу компонент C , что G имеет неподвижную точку $Q \in C'$ или инвариантную компоненту $C'_0 \subset C'$, $C'_0 \simeq \mathbb{P}^1$. Но во втором случае имеются два вложения $G \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ и $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, где $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ не содержит квазиотражений. По классификации конечных подгрупп, а $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$, группа G является циклической и имеет ровно две неподвижных точки на C'_0 . Следовательно, в каждом случае G имеет по крайней мере одну неподвижную точку $Q \in X'$. Выберем достаточно малую окрестность $U \subset X$ точки $P := h(Q)$. Имеется сюръективное отображение $\pi_1(U - P) \rightarrow G$. Но группа $\pi_1(U - P)$ – циклическая, так как (X, P) – фактор гиперповерхностной особенности по циклической группе. Это доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ 1.11. Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники. Тогда

- (i) (см. [14]) если X имеет индекс 1, то точка (S, o) неособа;
- (ii) если X имеет индекс 2, то точка (S, o) неособа или дювалевская типа A_1 ;
- (iii) если (S, o) имеет топологический индекс n , то X содержит по крайней мере одну точку индекса $\geq n$.

§ 2. Факторы расслоений на коники

По п. 1.9 и лемме 1.10 каждое расслоение Мори на коники $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ над особой базой является фактором другого расслоения Мори на коники $f': (X', C') \rightarrow (S', o')$ над неособой базой по циклической группе. В этом параграфе мы классифицируем расслоения Мори на коники $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ при дополнительном предположении, что многообразие X' горенштейново (и тогда $f': (X', C') \rightarrow (S', o')$ – обычное расслоение на коники по предложению 1.6). Сначала мы рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 2.1 (торический пример). Пусть $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – проекция. Определим действие группы $\mathbb{Z}_n$ на $\mathbb{C}_{u,v}^2$ и $\mathbb{P}_{x_0,x_1}^1 \times \mathbb{C}_{u,v}^2$ следующим образом:

$$(x_0, x_1; u, v) \rightarrow (x_0, \varepsilon x_1; \varepsilon^a u, \varepsilon^{-a} v),$$

где $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$, $a \in \mathbb{N}$ и $(n, a) = 1$. Обозначим $X = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2)/\mathbb{Z}_n$, $S = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n$. Тогда проекция $f: X \rightarrow S$ является расслоением Мори на коники. Многообразие X имеет на слое $f^{-1}(0)$ ровно две терминальные точки P_1, P_2 , которые являются циклическими факторами типа $\frac{1}{n}(a, -a, \pm 1)$, поверхность S имеет в 0 дювалевскую точку типа A_{n-1} .

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим следующую неособую гиперповерхность в $\mathbb{P}_{x_0,x_1,x_2}^2 \times \mathbb{C}_{u,v}^2$:

$$X' := \{x_0^2 + vx_1^2 + ux_2^2 = 0\}.$$

Пусть n – нечетное целое, $n = 2q + 1$, где $q \in \mathbb{N}$. Определим действие $\mathbb{Z}_n$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$ как

$$(x_0, x_1, x_2, u, v) \rightarrow (x_0, \varepsilon^{-q}x_1, \varepsilon^q x_2, \varepsilon u, \varepsilon^{-1}v),$$

где $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$. Если $\psi(u, v)$ – инвариант, то $\mathbb{Z}_n$ естественно действует на X' . Как и в примере 2.1, $f: X'/\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n$ – расслоение Мори на коники. Особое множество $X'/\mathbb{Z}_n$ состоит из двух терминальных циклических факторособенностей индекса n . Точка (S, o) – дювалевская типа A_{n-1} .

ПРИМЕР 2.3. Пусть X' – гиперповерхность в $\mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2}^2 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$, заданная уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \phi(u, v) = 0,$$

где $\phi(u, v)$ не имеет кратных множителей и содержит только мономы четной степени. Обозначим через $f': X' \rightarrow \mathbb{C}^2$ естественную проекцию. Тогда X' имеет только одну особую точку $P' = (x_0 = x_1 = u = v = 0)$ на $f'^{-1}(0)$. Определим действие $\mathbb{Z}_2$ на X' и $\mathbb{C}^2$ как

$$(x_0, x_1, x_2, u, v) \rightarrow (-x_0, x_1, x_2, -u, -v).$$

Пусть $X = X'/\mathbb{Z}_2$, $S = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Единственная неподвижная точка на X' – точка P' . Она задает точку $P \in X$ индекса 2, и многообразие X не содержит других особых точек. Поверхность S имеет дювалевскую особенность типа A_1 в 0. Можно различить следующие случаи для $\phi(u, v)$:

- (1) $\text{mult}_{(0,0)}(\phi) = 2$, тогда точка (X, P) терминальная типа $sA/2$;
- (2) $\text{mult}_{(0,0)}(\phi) \geq 4$, тогда точка (X, P) терминальная типа $sAx/2$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники. Предположим, что f является фактором расслоения на коники $f': (X', C') \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ по $\mathbb{Z}_n$ таким, что действие $\mathbb{Z}_n$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ свободно. Тогда существует аналитический изоморфизм между $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ и одним из примеров 2.1, 2.2 или 2.3. В частности, (S, o) – дювалевская особенность типа A_{n-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы зафиксируем образующую $s \in \mathbb{Z}_n$ и для $\mathbb{Z}_n$ -полуинварианта z определим его *вес* $\text{wt}(z)$ как целое число, определенное по модулю n , такое, что

$$\text{wt}(z) \equiv a \pmod{n} \iff s(z) = \varepsilon^a z,$$

где ε – первообразный корень степени n из 1.

По лемме Картана [19] можно выбрать координаты u, v на $\mathbb{C}^2$ так, что действие $\mathbb{Z}_m$ будет линейным, и тогда можно считать, что $u \rightarrow \varepsilon^a u$, $v \rightarrow \varepsilon^b v$, где $\varepsilon := \exp(2\pi i/m)$, и $(a, m) = (b, m) = 1$.

Пусть $X'_0 := f'^{-1}(0)$ – схемно-теоретический слой над 0. Тогда X'_0 изоморфен конике в $\mathbb{P}^2$ (см. предложение 1.6). Имеются следующие три случая 2.5, 2.6 и 2.9.

2.5. Слой X'_0 – невырожденная коника. Тогда в аналитической ситуации по теореме Грауэрта–Фишера $X' \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ и мы можем предположить, что действие $\mathbb{Z}_n$ в некоторой системе координат (x_0, x_1) в $\mathbb{P}^1$ и (u, v) в $\mathbb{C}^2$ будет

$$(x_0, x_1, u, v) \rightarrow (x_0, \varepsilon x_1, \varepsilon^a u, \varepsilon^b v), \quad \text{где } (a, m) = (b, m) = 1$$

(здесь мы можем положить $\text{wt}(x_0) = 0$, так как (x_0, x_1) – однородные координаты). Имеется ровно две неподвижные точки на X' :

$$Q_0 = \{x_0 = u = v = 0\}, \quad Q_1 = \{x_1 = u = v = 0\}.$$

Они задают нам две точки индекса n на $X'/\mathbb{Z}_n$ типов $\frac{1}{n}(-1, a, b)$ и $\frac{1}{n}(1, a, b)$ соответственно. По теореме 1.1 эти две точки терминальны, только если $a + b = n$ (напомним, что числа a, b определены по модулю n). Мы получаем пример 2.1.

2.6. Слой X'_0 приводим. Тогда $X'_0 = L_1 + L_2$ – пара прямых, пересекающихся в одной точке, которая является неподвижной относительно действия $\mathbb{Z}_n$. Обозначим эту точку через Q . Пусть $P := h(Q)$. Аналогично случаю 2.5 рассмотрим $\mathbb{Z}_n$ -эквивариантное вложение $X' \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2}^2 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ такое, что координаты x_0, x_1, x_2 – полуинварианты с весами

$$\text{wt}(x_0, x_1, x_2; u, v) = (0, p, q; a, b), \quad (a, n) = (b, n) = 1.$$

Имеются два подслучая 2.7 и 2.8.

2.7. Компоненты X'_0 являются $\mathbb{Z}_n$ -инвариантными. Покажем, что это невозможно. Мы можем выбрать однородные координаты x_0, x_1, x_2 в $\mathbb{P}^2$ так, что уравнение $X'_0 \subset \mathbb{P}^2$ будет $\{x_0 x_1 = 0\}$. Тогда X' задается уравнением

$$\begin{aligned} x_0 x_1 + \varphi_0(u, v) x_0^2 + \varphi_1(u, v) x_0 x_1 + \varphi_2(u, v) x_0 x_2 \\ + \phi(u, v) x_1^2 + \psi(u, v) x_1 x_2 + \zeta(u, v) x_2^2 = 0, \end{aligned}$$

где $\varphi_0(0, 0) = \varphi_1(0, 0) = \varphi_2(0, 0) = \phi(0, 0) = \psi(0, 0) = \zeta(0, 0) = 0$. Сделав замену $x'_1 = x_1 + \varphi_0 x_0 + \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2$, мы получим новое уравнение для X' :

$$x_0 x_1 + \phi(u, v) x_1^2 + \psi(u, v) x_1 x_2 + \zeta(u, v) x_2^2 = 0, \quad (1)$$

где $\phi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\zeta(u, v)$ – полуинварианты с подходящими весами и такие, что $\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = \zeta(0, 0) = 0$. Тогда $Q = \{x_0 = x_1 = u = v = 0\}$ и $(y_0 := x_0/x_2, y_1 := x_1/x_2, u, v)$ – локальные координаты в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$ в окрестности Q . Легко видеть, что

$$(X, P) \simeq \{y_0 y_1 + \phi(u, v) y_1^2 + \psi(u, v) y_1 + \zeta(u, v) = 0\} / \mathbb{Z}_n(-q, p - q, a, b). \quad (2)$$

Действие $\mathbb{Z}_n$ на X' имеет еще две неподвижные точки $Q_1 := \{x_0 = x_2 = u = v = 0\}$ и $Q_2 := \{x_1 = x_2 = u = v = 0\}$. Тогда $(z_0 = x_0/x_1, z_2 = x_2/x_1, u, v)$ – локальные координаты в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$ в окрестности Q_1 и, аналогично, $(t_1 = x_1/x_0, t_2 = x_2/x_0, u, v)$

– локальные координаты в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$ в окрестности Q_2 . Положим $P_i := h(Q_i)$, $i = 1, 2$. Аналогично (2) имеем

$$(X, P_1) \simeq \{z_0 + \phi(u, v) + \psi(u, v)z_2 + \zeta(u, v)z_2^2 = 0\}/\mathbb{Z}_n(-p, q - p, a, b)$$

и

$$(X, P_2) \simeq \{t_1 + \phi(u, v)t_1^2 + \psi(u, v)t_1t_2 + \zeta(u, v)t_2^2 = 0\}/\mathbb{Z}_n(p, q, a, b).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (X, P_1) &\simeq \mathbb{C}_{z_2, u, v}^3 / \mathbb{Z}_n(q - p, a, b), \\ (X, P_2) &\simeq \mathbb{C}_{t_2, u, v}^3 / \mathbb{Z}_n(q, a, b). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как действие $\mathbb{Z}_n$ на X' имеет лишь нульмерное множество неподвижных точек, то

$$(q, n) = (p - q, n) = 1. \quad (4)$$

Тогда по (2) и теореме 1.2 (X, P) – циклическая факторособенность. Это возможно, только если $\zeta(u, v)$ содержит член u или v . С точностью до перестановки u, v мы можем предположить, что $\zeta = u + \dots$. Из (1) получаем $\text{wt}(x_0x_1) = \text{wt}(ux_2^2)$. Таким образом, $p = a + 2q$. Тогда

$$(X, P) \simeq \mathbb{C}_{y_0, y_1, v}^3 / \mathbb{Z}_n(-q, p - q, b) = \mathbb{C}^3 / \mathbb{Z}_n(-q, a + q, b). \quad (5)$$

Мы утверждаем, что $a + b = 0$. Действительно, в противном случае $n > 2$ и из (3) мы имеем $b = a + q$, так как $p = a + 2q$ и $(q, n) = 1$. Следовательно, $(X, P) \simeq \mathbb{C}^3 / \mathbb{Z}_n(-q, b, b)$. Эта точка не может быть терминальной, если $n > 2$.

Противоречие показывает, что $a + b = 0$. Точка (X, P) терминальна в этом случае, только если $q = b$ (см. (5)). Но тогда $p - q = a + 2q - q = 0$, противоречие с (5).

2.8. $\mathbb{Z}_n$ переставляет компоненты X'_0 . Тогда n четно, $n = 2k$. Если $k > 1$, то фактор $X'/\mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ является расслоением Мори на коники, таким как в п. 2.7. Мы уже доказали, что это невозможно. Следовательно, $k = 1$, $n = 2$. Тогда легко видеть, что $\text{wt}(u) = \text{wt}(v) = 1$. Изменяя координаты, мы можем добиться того, что слой $X'_0 \subset \mathbb{P}^2$ задается как $\{x_0^2 + x_1^2 = 0\}$. Так как $\mathbb{Z}_2$ переставляет компоненты $\{x_0^2 + x_1^2 = 0\}$, мы можем предположить также, что $\mathbb{Z}_2$ действует на x_0, x_1 следующим образом: $x_0 \rightarrow -x_0, x_1 \rightarrow x_1$. Тогда можно изменить систему координат $(x_0, x_1, x_2; u, v)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$ так, что многообразие X' задается уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + \phi(u, v)x_2^2 = 0,$$

где $\phi(u, v)$ – инвариант с $\phi(0, 0) = 0$. Это означает, что ϕ содержит только мономы четной степени. Тогда $Q = \{x_0 = x_1 = u = v = 0\}$ – единственная особая точка на C' и $y_0 := x_0/x_2, y_1 := x_1/x_2, u, v$ – локальные координаты на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$ в окрестности Q . Следовательно,

$$(X, P) \simeq \{y_0^2 + y_1^2 + \phi(u, v) = 0\}/\mathbb{Z}_2.$$

Если эта точка терминальна, то с точностью до перестановки y_0, y_1 мы можем предположить, что $\text{wt}(y_0) = 1, \text{wt}(y_1) = 0$. Таким образом, $\text{wt}(x_2) = 0$. Наконец, особенности многообразия X' изолированы, только если ϕ не имеет кратных множителей. Таким образом, мы получаем пример 2.3.

2.9. Слой X'_0 является двойной прямой. Как и выше, рассмотрим $\mathbb{Z}_n$ -эквивариантное вложение $X' \subset \mathbb{P}^2_{x_0, x_1, x_2} \times \mathbb{C}^2_{u, v}$ такое, что действие $\mathbb{Z}_n$ будет

$$\text{wt}(x_0, x_1, x_2; u, v) = (0, p, q; a, b), \quad (a, n) = (b, n) = 1.$$

Мы можем предположить также, что слой $X'_0 \subset \mathbb{P}^2$ задается уравнением $\{x_0^2 = 0\}$. Тогда в некоторой системе координат $(x_0, x_1, x_2; u, v)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$, состоящей из полуинвариантов, многообразие X задается уравнением

$$x_0^2 + \phi(u, v)x_1^2 + \psi(u, v)x_1x_2 + \zeta(u, v)x_2^2 = 0,$$

где $\phi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\zeta(u, v)$ – полуинварианты такие, что $\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = \zeta(0, 0) = 0$. Локальной координатой вдоль слоя X'_0 является x_1/x_2 и $\text{wt}(x_1/x_2) = p - q$. Так как действие $\mathbb{Z}_n$ на X' свободно в коразмерности два, $(p - q, n) = 1$. Изменяя образующий группы $\mathbb{Z}_n$ мы можем добиться того, что $p - q = 1$. Неподвижными точками являются $Q_1 = \{u = v = 0, x_0 = x_1 = 0\}$ и $Q_2 = \{u = v = 0, x_0 = x_2 = 0\}$. За локальные координаты вблизи Q_1 и Q_2 в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2$ мы можем взять $(y_0 = x_0/x_2, y_1 = x_1/x_2, u, v)$ и $(z_0 = x_0/x_1, z_2 = x_2/x_1, u, v)$ соответственно. Точка $Q_1 \in X'$ задает особую точку $P_1 \in X$ типа

$$\{y_0^2 + \phi(u, v)y_1^2 + \psi(u, v)y_1 + \zeta(u, v) = 0\}/\mathbb{Z}_n(-q, 1, a, b). \quad (6)$$

Аналогично, точка $Q_2 \in X'$ задает особую точку $P_2 \in X$ типа

$$\{z_0^2 + \phi(u, v) + \psi(u, v)z_2 + \zeta(u, v)z_2^2 = 0\}/\mathbb{Z}_n(-p, -1, a, b). \quad (7)$$

Мы утверждаем, что точки (X, P_1) и (X, P_2) – из основной серии 1.2 (i). Действительно, предположим, например, что (X, P_1) – точка из исключительной серии 1.2 (ii). Тогда $n = 4$, $q = 2$, $p = 3$. Для P_2 все веса взаимно просты с $n = 4$. По теореме 1.2 P_2 – циклическая факторособенность и многообразие X' неособо в Q_2 . Это возможно, только если $\phi(u, v)$ содержит линейный член. Тогда $\text{wt}(\phi) = \text{wt}(z_0^2) = 2$. Это дает нам $a = \text{wt}(u) = 2$ или $b = \text{wt}(v) = 2$, противоречие с $(a, n) = (b, n) = 1$.

Теперь мы утверждаем, что многообразие X' неособо в Q_1 и Q_2 . Как выше, если $Q_1 \in X'$ – особая точка, то по теореме 1.2 имеем $q = 0$, $p = 1$. Снова по 1.2 P_2 – циклическая факторособенность и X' неособо в Q_2 . Это возможно, только если $\phi(u, v)$ содержит линейный член. С точностью до перестановки u, v мы можем считать, что $\phi = u + \dots$. Так как $\text{wt}(\phi) = \text{wt}(z_0^2) = -2$, мы имеем $a = \text{wt}(u) = -2$. Следовательно, n нечетно и

$$\begin{aligned} (X, P_1) &\simeq \{y_0^2 + \phi(u, v)y_1^2 + \psi(u, v)y_1 + \zeta(u, v) = 0\}/\mathbb{Z}_n(0, 1, -2, b), \\ (X, P_2) &\simeq \{z_0^2 + (u + \dots) + \psi(u, v)z_2 + \zeta(u, v)z_2^2 = 0\}/\mathbb{Z}_n(-1, -1, -2, b). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда

$$(X, P_2) \simeq \mathbb{C}^3_{z_0, z_2, v}/\mathbb{Z}_n(-1, -1, b). \quad (9)$$

Так как P_2 – терминальная точка и n нечетно, из (9) имеем $b = 1$. Но, с другой стороны, по (8) $1 + b = 0$ или $-2 + b = 0$, противоречие.

Следовательно, многообразие X' неособо в Q_1 и Q_2 . Из (6) и (7) следует, что $\phi(u, v)$ и $\zeta(u, v)$ содержат линейные члены. С точностью до перестановки u, v мы можем считать, что $\zeta = u + \dots$. Поэтому $a = -2q$. Более того $(X, P_1) = \frac{1}{n}(-q, 1, b)$. Если $\phi = u + \dots$, то по (7) $-2p = a = -2 + a$, следовательно, $n = 2$, $a = 0$, противоречие. Таким образом, $\phi = v + \dots$. Это дает нам $-2p = b = a - 2$ и $(X, P_2) = \frac{1}{n}(-p, -1, a)$. Так как b четно, n нечетно. Далее, $a = -2q$, $p = q + 1$ и $b = -2q - 2$. Таким образом,

$$\begin{aligned}(X, P_1) &= \frac{1}{n}(-q, 1, -2q - 2), \\ (X, P_2) &= \frac{1}{n}(-q - 1, -1, -2q).\end{aligned}\tag{10}$$

Сейчас мы покажем, что $n = 2q + 1$. Действительно, предположим противное. Тогда, так как точка (X, P_2) терминальна, из (10) мы имеем $q + 2 = 0$ или $3q + 1 = 0$. Но в первом случае $(X, P_1) = \frac{1}{n}(2, 1, 2)$. Эта точка может быть терминальной, только если $n = 3$ и $q = 1$. Во втором случае точка $(X, P_1) = \frac{1}{n}(-q, 1, -2q - 2)$ не может быть терминальной. Таким образом, наше утверждение доказано. В частности, мы имеем $a = -2q = 1$, $b = -2q - 2 = -1$. Наконец, в нашем случае $\text{wt}(x_0, x_1, x_2, u, v) = (0, -q, q; 1, -1)$ и, изменяя координаты в $\mathbb{C}^2$ следующим образом

$$u' = \zeta(u, v), \quad v' = \phi(u, v),$$

мы получим

$$X \simeq \{x_0^2 + vx_1^2 + \psi(u, v)x_1x_2 + ux_2^2 = 0\}/\mathbb{Z}_{2q+1}(0, -q, q; 1, -1).$$

Заменой координат, как в [20, 1.5.2], можно исключить член $\psi(u, v)x_1x_2$. Следовательно, X – такое, как в примере 2.2. Это доказывает теорему.

§ 3. Расслоения Мори на коники индекса 2

В этом параграфе мы изучим расслоения Мори на коники $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ индекса 2. Сначала мы рассмотрим случай неособой базы (т.е. $(S, o) \simeq (\mathbb{C}^2, 0)$). Методы, используемые здесь, аналогичны методам [13, ch. 4]. Первый основной результат настоящего параграфа – следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники над неособой поверхностью $(S, o) \simeq (\mathbb{C}^2, 0)$. Предположим что многообразие X имеет индекс 2. Тогда

(i) X содержит ровно одну точку P индекса 2, центральный слой C имеет не более четырех компонент, все они проходят через P и не пересекаются вне P .

(ii) $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ является фактором эллиптического расслоения $g: (Y, L) \rightarrow (S, o)$ по группе $\mathbb{Z}_2$, действующей тривиально на (S, o) . Здесь (Y, L) – росток трехмерного многообразия с горнштейновыми терминальными особенностями вдоль приведенной компактной кривой L , $L = (g^{-1}(o))_{\text{red}}$, и общий слой $Y_s := g^{-1}(s)$, $s \in S$, – неособая эллиптическая кривая. Более

того, K_Y (линейно) тривиален вблизи L . Таким образом, морфизм g разлагается в композицию

$$g: (Y, L) \xrightarrow{h} (X, C) \xrightarrow{f} (S, o),$$

где h – конечный морфизм степени 2.

(iii) Множество $\mathbb{Z}_2$ -неподвижных точек на Y – это изолированная точка Q такая, что $h(Q) = P$, и неособая поверхность $D \not\ni Q$, лежащая в неособой части Y .

(iv) Существует $\mathbb{Z}_2$ -эквивариантное вложение $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^2$ такое, что g совпадает с проекцией на второй множитель $\mathbb{C}^2 = S$, а Y является пересечением двух гиперповерхностей, имеющих степень 2 по первому множителю. При этом вложении действие $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ может быть записано в виде

$$(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v) \longrightarrow (-x_0, -x_1, -x_2, x_3; u, v) \quad (11)$$

и тогда $Q = \{x_0 = x_1 = x_2 = u = v = 0\}$, $D = \{x_3 = 0\} \cap Y$.

(v) При вложении из (iv) кривая L будет объединением ≤ 4 прямых, проходящих через Q . В частности, действие $\mathbb{Z}_2$ на L не переставляет компонент.

(vi) В условиях (iv) уравнения для $Y \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} q_1(x_0, x_1, x_2) = \psi_1(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v), \\ q_2(x_0, x_1, x_2) = \psi_2(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v), \end{cases}$$

где ψ_1, ψ_2 – инварианты, квадратичные по x_0, x_1, x_2, x_3 и $\psi_i(0, 0, 0, 1; 0, 0) = 0$, $i = 1, 2$, а для q_1, q_2 имеются следующие возможности:

- (a) $q_1 = x_0 x_1, q_2 = (x_0 + x_1 + x_2)x_2$, тогда центральный слой $f^{-1}(o)$ имеет ровно четыре приведенные компоненты,
- (b) $q_1 = x_0 x_1, q_2 = (x_0 + x_1)x_2$, тогда центральный слой $f^{-1}(o)$ имеет три компоненты, одна из них имеет кратность 2,
- (c) $q_1 = x_0 x_1 - x_2^2, q_2 = x_0 x_2$, тогда центральный слой $f^{-1}(o)$ имеет две компоненты, одна из них имеет кратность 3,
- (d) $q_1 = x_0 x_1, q_2 = x_2^2$, тогда центральный слой $f^{-1}(o)$ имеет две компоненты, обе двукратные,
- (e) $q_1 = x_0 x_1 - x_2^2, q_2 = x_0^2$, тогда центральный слой $f^{-1}(o)$ неприводим и имеет кратность 4,
- (f) $q_1 = x_0^2, q_2 = x_1^2$, тогда центральный слой $f^{-1}(o)$ также неприводим и имеет кратность 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Обратно, пусть $g: (Y, L) \rightarrow (S, o) \simeq (\mathbb{C}^2, 0)$ – эллиптическое расслоение с действием $\mathbb{Z}_2$, такое как в (i)–(ii) теоремы 3.1. Если точка $(Y, Q)/\mathbb{Z}_2$ терминальна, то $f: (X, C) := (Y, L)/\mathbb{Z}_2 \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники индекса два.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем теорему 3.1 в несколько этапов.

ЛЕММА 3.3. Пусть $f: X \rightarrow S$ – морфизм из нормального трехмерного многообразия с только терминальными особенностями на неособую поверхность. Предположим, что все слои f связны и одномерны. Тогда морфизм $f: X \rightarrow S$ плоский.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Терминальные особенности рациональны [21, 1-3-6] и, следовательно, X – многообразие Коэна–Маколея [22]. Тогда f плоский по [23, 23.1].

3.4. Конструкция (ср. [13, ch. 4]). Положим $m_i := (-2K_X \cdot C_i)$. Пусть B_i – объединение m_i различных дисков, пересекающих C_i трансверсально в общих точках, и пусть $B = \sum B_i$. Так как $\text{Pic } X = \mathbb{Z}^p$, то $B \in |-2K_X|$. Рассмотрим двулистное накрытие $h: Y \rightarrow X$ с дивизором ветвления B . Пусть также $L := (h^{-1}(C))_{\text{red}}$ и $D := (h^{-1}(B))_{\text{red}}$. Мы имеем композицию

$$g: (Y, L) \xrightarrow{h} (X, C) \xrightarrow{f} (S, o) \simeq (\mathbb{C}^2, 0).$$

Тогда $(X, C) \simeq (Y, L)/\mathbb{Z}_2$. По построению Y нормально, поэтому слои $g: Y \rightarrow \mathbb{C}^2$ связны. В окрестности каждой особой точки на X морфизм h неразветвлен в коразмерности 1, следовательно, Y имеет лишь терминальные особенности (см, например, [9, (3.1)] или [17, (6.7)]). Далее, мы имеем следующие равенства для дивизоров Вейля на Y

$$K_Y = h^*(K_X) + D, \quad D = h^*(-K_X).$$

Это дает нам $K_Y = 0$ и то, что Y имеет лишь терминальные горенштейновы особенности. Морфизм g плоский по лемме 3.3. Следовательно, g – расслоение на эллиптические кривые. Мы доказали (ii) и (iii).

3.5. Пусть $Y_s := g^{-1}(s)$ – схемно-теоретический слой над точкой $s \in S$ (таким образом, $L = (Y_o)_{\text{red}}$). Тогда Y_s – проективная горенштейнова одномерная схема и по формуле присоединения $\omega_{Y_s} = \mathcal{O}_{Y_s}$, в частности, $p_a(Y_s) = 1$. Рассмотрим дивизор Картье $A := D|_{Y_s}$. Так как морфизм g плоский, то $\deg A = 4$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть Y_s и A – такие как в п. 3.5. Тогда

- (i) для любой замкнутой одномерной подсхемы $Z \subset Y_s$, $Z \neq Y_s$, имеем $p_a(Z) \leq 0$;
- (ii) дивизор A очень обилен и определяет вложение $Y_s \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ такое, что Y_s является пересечением двух квадрик.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii). Мы воспользуемся следующим обобщенным вариантом известного классического результата.

ТЕОРЕМА 3.7 [24]. Пусть Z – проективная одномерная схема Коэна–Маколея и A – дивизор Картье на Z . Предположим, что для любой замкнутой одномерной подсхемы $Z' \subset Z$, горенштейновой в коразмерности 1, имеет место неравенство

$$\deg A|_{Z'} \geq 2p_a(Z') + 1. \quad (12)$$

Тогда A очень обилен.

Используя теорему Римана–Роха на Y_s , двойственность Серра и обильность A получим $h^1(\mathcal{O}_{Y_s}(A)) = 0$, $h^0(\mathcal{O}_{Y_s}(A)) = 4$. Применим теорему 3.7 к Y_s . Если

$Z' = Y_s$, то $p_a(Z') = 1$ и неравенство (12), очевидно, верно. Если же $Z' \neq Y_s$, то неравенство (12) верно по предложению 3.6 (i). Далее из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_s}(2A) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{I}$ – пучок идеалов Y_s в $\mathbb{P}^3$, нетрудно получить, что $h^0(\mathcal{I}(2)) \geq 2$. Так как $\deg Y_s = 4$, то две квадрики $q_1, q_2 \in H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}(2))$ высекают Y_s . Это доказывает (ii).

Теперь докажем (i). Имеем сюръекцию $(R^1 g_* \mathcal{O}_Y)_s \rightarrow H^1(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}) \rightarrow 0$. Так как $\omega_{Y/S} = \mathcal{O}_Y$, то пучок $R^1 g_* \mathcal{O}_Y$ локально свободен по [25]. Следовательно, $s \rightarrow h^1(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s})$ – постоянная функция. По двойственности Серра $h^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}) = h^1(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}) = 1$ для всех $s \in S$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_s} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{J}$ – пучок идеалов Z в Y_s . Отсюда получаем

$$1 - p_a(Y_s) = 1 - p_a(Z) + h^0(\mathcal{J}) - h^1(\mathcal{J})$$

или, эквивалентно, $p_a(Z) = 1 + h^0(\mathcal{J}) - h^1(\mathcal{J})$. Так как $H^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}) = \mathbb{C}$, то $h^0(\mathcal{J}) = 0$. С другой стороны, по двойственности Серра

$$h^1(\mathcal{J}) = \dim \operatorname{Hom}(\mathcal{J}, \omega_{Y_s}) = \dim \operatorname{Hom}(\mathcal{J}, \mathcal{O}_{Y_s}) > 0.$$

Следовательно, $p_a(Z) \leq 0$, что и доказывает предложение 3.6.

СЛЕДСТВИЕ 3.8 (из предложения 3.6 (ii)). *Существует вложение*

$$Y \hookrightarrow \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$$

такое, что Y задается двумя уравнениями, квадратичными по x_0, x_1, x_2, x_3 .

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3.1. Так как группа $\mathbb{Z}_2$ переводит дивизор B в себя, то действие $\mathbb{Z}_2$ продолжается на $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^2$, причем действие на втором сомножителе тривиально. Далее, пусть $P \in X$ – точка индекса 2, тогда $Q := h^{-1}(P)$ – одна точка и $h: (Y, Q) \rightarrow (X, P)$ – каноническое накрытие. Согласно теоремам 1.1 и 1.2 действие $\mathbb{Z}_2$ в касательном пространстве Зарисского $T_{Q, Y} \subset T_{Q, \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^2}$ имеет трехмерное антиинвариантное подпространство. Отсюда линейными заменами координат можно добиться того, что действие $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ будет как в (11). Множество неподвижных точек в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^2$ – это дивизор $\{x_3 = 0\}$, высекающий B на Y , и поверхность $\{x_0 = x_1 = x_2 = 0\}$, высекающая изолированную точку $Q = \{x_0 = x_1 = x_2 = u = v = 0\}$ на Y (по крайней мере локально вблизи слоя Y_o). Это доказывает утверждение (iv) теоремы 3.1.

Следовательно, $P = h(Q)$ – единственная точка индекса 2 на X . Далее, легко видеть из следствия 3.8, что многообразие Y может быть задано как базисное множество пучка квадрик от $x_0, \dots, x_3$ с коэффициентами из $\mathbb{C}\{u, v\}$. Выберем две $\mathbb{Z}_2$ -инвариантные квадрики из этого пучка. Получим уравнения для Y

$$\begin{cases} q_1(x_0, x_1, x_2) = \psi_1(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v), \\ q_2(x_0, x_1, x_2) = \psi_2(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v), \end{cases}$$

где q_1, q_2 – квадратичные функции, а функции ψ_1, ψ_2 – квадратичны по x_0, x_1, x_2, x_3 и $\psi_i(x_0, x_1, x_2, x_3; 0, 0) = 0, i = 1, 2$. Отсюда слой Y_o имеет вид $q_1 = q_2 = 0$ и, следовательно, он является объединением прямых, проходящих через Q . Таким образом, утверждения (v) и (i) теоремы 3.1 доказаны. Наконец, уравнения $q_1(x_0, x_1, x_2) = q_2(x_0, x_1, x_2) = 0$ задают пучок квадрик на $\mathbb{P}^2$. Проективным преобразованием мы можем привести его к одной из форм в (vi) теоремы 3.1. Теорема доказана.

Примеры. Ниже мы рассмотрим конкретные примеры расслоений Мори на коники индекса 2. В частности, мы покажем, что все случаи из утверждения (vi) теоремы 3.1 реализуются. Будут использованы обозначения п. 3.4 и теоремы 3.1, а также, как и в [13], обозначения $cA/2, cAx/2, cD/2, cE/2$ для терминальных особенностей индекса два.

ПРИМЕР 3.9. Пусть $Y \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_0 x_1 = (au + bu^2 + civ)x_3^2, \\ (x_0 + x_1 + x_2)x_2 = vx_3^2, \end{cases}$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$ – константы. Легко проверить, что Y неособо вблизи центрального слоя $g^{-1}(0)$, если $a \neq 0$, и имеет изолированную гиперповерхностную особенность в точке $Q = \{u = v = x_0 = x_1 = x_2 = 0\}$, если $a = 0, c \neq 0, b \neq 0$ такую, что ранг квадратичной части равен 3. Тогда фактор $X := Y/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ является расслоением Мори на коники, таким как в (a), (vi) теоремы 3.1, с единственной особой точкой P типа $cA/2$. Если $a \neq 0, P$ будет типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

ПРИМЕР 3.10. Пусть $Y \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_0 x_1 = u(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + avx_3^2, \\ (x_0 + x_1)x_2 = vx_3^2 + bux_0^2, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Тогда фактор $X := Y/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ является расслоением Мори на коники как в (b), (vi) теоремы 3.1. X содержит единственную негорнштейнову точку типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Если $a = b = 0$, то X имеет также обыкновенную двойную особую точку на кратной компоненте Y_o .

ПРИМЕР 3.11. Пусть $Y \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_0 x_1 - x_2^2 = ux_3^2, \\ x_0 x_2 = ux_1^2 + v(x_2^2 + x_3^2). \end{cases}$$

Тогда фактор $X := Y/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – расслоение Мори на коники с единственной особой точкой типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, такое как в (c), (vi) теоремы 3.1.

Следующий пример показывает, что все типы терминальных особенностей индекса 2 могут быть реализованы на расслоениях Мори на коники, таких как в (d), (vi) теоремы 3.1.

ПРИМЕР 3.12. Пусть $Y \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_0 x_1 = u x_3^2, \\ x_2^2 = u(x_0^2 + x_1^2) + (av + bv^2 + cv^3 + duv + eu^2v)x_3^2, \end{cases}$$

где $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ – константы. Если по крайней мере одна из констант a, b, c отлична от нуля, то Y имеет вблизи центрального слоя Y_0 изолированную особенность в $Q = \{x_0 = x_1 = x_2 = u = v = 0\}$ (или неособо). Как и выше, фактор $X := Y/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ – расслоение Мори на коники такое как в (d), (vi) теоремы 3.1 с единственной особой точкой $P := C_1 \cap C_2$. Мы имеем следующие возможности:

- 1) $a \neq 0$, тогда Y неособо, таким образом, $P \in X$ – типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$,
- 2) $a = 0, b \neq 0$, тогда $P \in X$ – типа $cAx/2$,
- 3) $a = b = e = 0, c \neq 0, d \neq 0$, тогда $P \in X$ – типа $cD/2$,
- 4) $a = b = d = 0, c \neq 0, e \neq 0$, тогда $P \in X$ – типа $cE/2$.

ПРИМЕР 3.13. Пусть $Y \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_0 x_1 - x_2^2 = u x_3^2, \\ x_0^2 = u x_2^2 + v(x_2^2 + x_3^2). \end{cases}$$

Тогда фактор $X := Y/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ является расслоением Мори на коники как в (e), (vi) теоремы 3.1.

Отметим, что для любого расслоения Мори на коники $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ с приводимым центральным слоем и любой компоненты $C' \subset C$ росток (X, C') является экстремальной окрестностью (не обязательно изолированной) в смысле Мори [8]. Тогда X может иметь на C' не более одной горенштейновой особой точки (см. [8, 6.2]). Следующий пример показывает, что это правило нарушается, если слой C неприводим.

ПРИМЕР 3.14. Пусть $Y \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_0^2 = u x_2^2 + v x_3^2, \\ x_1^2 = u x_3^2 + v x_2^2. \end{cases}$$

Тогда фактор $X := Y/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ является расслоением Мори на коники как в (f), (vi) теоремы 3.1. В этом случае X содержит одну точку типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и две обыкновенные двойные точки.

В заключение мы исследуем расслоения Мори на коники индекса 2 с особой базой.

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники индекса 2. Предположим, что точка (S, o) особа. Тогда (S, o) – дувалевская точка типа A_1 и f такое, как в примере 2.3 или как в примере 2.1 с $n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать конструкцию 1.9. Так как X содержит только точки индексов ≤ 2 , то по следствию 1.11 (S, o) – особенность типа A_1 . Мы утверждаем, что $f': (X', C') \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ – (обычное) расслоение на коники. По предложению 1.6 достаточно доказать, что X' горенштейново. Предположим противное. Отметим, что X' содержит только точки индексов ≤ 2 , так как $X' \rightarrow X$ неразветвлено в коразмерности 1. По теореме 3.1 X' содержит единственную точку, обозначим ее через Q , индекса 2. Тогда Q – неподвижная точка относительно действия $\mathbb{Z}_2$. Но тогда точка $P := h(Q)$ имеет индекс 4, противоречие. Следовательно, f' – расслоение на коники и по теореме 2.4 $f: (X, C) \rightarrow (X, C)$ такое, как в примере 2.1 или 2.3. Это доказывает теорему.

§ 4. Классификация при условии существования хорошего дивизора

В этом параграфе мы будем изучать расслоения Мори на коники при предположении существования хорошего элемента в $|-K_X|$. Отметим, что во всех известных примерах такой элемент существует.

ПРИМЕР 4.1. Пусть расслоение Мори на коники $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ такое, как в примере 2.2. Рассмотрим открытое подмножество $U_2 = \{x_2 \neq 0\} \subset X$. Локальными координатами в U_2 являются $(t_0 = x_0/x_2, t_1 = x_1/x_2, v)$. Рассмотрим также рациональную дифференциальную форму $\sigma = (1/t_0)(dt_0 \wedge dt_1 \wedge dv)$ на U_2 . Тогда легко видеть, что σ может быть продолжена на X' в окрестности C' . Так как форма σ $\mathbb{Z}_n$ -инвариантна, σ^{-1} определяет элемент $F \in |-K_X|$, образ дивизора $\{x_0 = 0\}$. Легко также проверить, что F содержит центральный слой $C = (f^{-1}(o))_{\text{red}}$ и имеет две особые точки типа A_{n-1} .

Аналогично, можно проверить, что в примере 2.1 общий элемент $F \in |-K_X|$ не содержит C и состоит из двух связных компонент. Этот дивизор имеет особую точку типа A_{n-1} на каждой компоненте.

Следующая теорема немного улучшает результаты [1].

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ – расслоение Мори на коники. Предположим, что гипотеза 0.2 для f верна. Тогда выполнено одно из следующих условий:

- (i) точка (S, o) неособа;
- (ii) точка (S, o) – дювалевская типа A_1 ;
- (iii) точка (S, o) – дювалевская типа A_3 , в этом случае кривая C неприводима, (X, C) имеет циклическую факторособенность P индекса 8 и не имеет других особых точек. Более того, $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ является фактором расслоения Мори на коники из (а), (vi) теоремы 3.1 с неособым Y по группе $\mathbb{Z}_4$, действующей на базе свободно в коразмерности 1 (см. также [4]).
- (iv) $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ такое, как в примере 2.1 или примере 2.2. В частности, (S, o) имеет тип A_{n-1} в этом случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка (S, o) особа и она не имеет типа A_1 . Мы будем использовать обозначения конструкции 1.9. Если X' имеет индекс 1, то по предложению 1.6 f' – расслоение на коники и по теореме 2.4 f – из

примера 2.1 или из примера 2.2. Таким образом, мы предположим, что X' индекса > 1 и покажем в этом случае, что $f: (X, C) \rightarrow (S, o)$ такое, как в (iii). Пусть $F \in |-K_X|$ – общий дивизор и $F' := h^{-1}(F)$. По нашему предположению F имеет только дювалевские особенности и так как накрытие $F' \rightarrow F$ неразветвлено в ко-размерности 1, F' также имеет только дювалевские особенности (ср. с леммой 1.4). Так как $(-K_X \cdot X_s) = 2$, где X_s – общий слой f , ограничение $f|_F: F \rightarrow S$ в общей точке конечно степени 2. Имеются следующие случаи 4.3, 4.4 и 4.6.

4.3. Множество $F' \cap C'$ не связно. Как и выше, так как $F' \in |-K_{X'}|$, мы видим, что морфизм $f|_{F'}: F' \rightarrow S'$ в общей точке конечен степени 2 и F' имеет две компоненты связности F'_1 и F'_2 . Пусть

$$f': F' \xrightarrow{f'_1} D' \xrightarrow{f'_2} S'$$

– факторизация Штейна. Тогда морфизм $f'_1: F' \rightarrow D'$ бимероморфен, а $f'_2: D' \rightarrow S'$ – конечный степени 2. В нашем случае D' имеет ровно две неприводимые компоненты D'_1 и D'_2 . Следовательно, мы имеем $D'_1 \simeq D'_2 \simeq S'$ и дивизор D' неособ (так как неособа поверхность S'). С другой стороны, по формуле присоединения $K_{F'} = 0$. Следовательно, морфизм f'_1 крепантный (т.е. $K_{F'} = f'_1{}^* K_{D'}$). Это означает, что F' неособ и $f'_1 = \text{id}$. По лемме 1.4 X' не содержит точек индекса > 1 , противоречие с нашими предположениями в начале доказательства.

4.4. $F' \cap C'$ – одна точка Q . Тогда $F \cap C = \{h(Q)\}$ – также одна точка P . Следовательно, морфизм $f|_F: F \rightarrow S$ конечен степени 2 и P – единственная точка индекса > 1 . Таким образом, $(F, P) \rightarrow (S, o)$ – двойное накрытие изолированных особенностей. Отсюда (S, o) – фактор дювалевской особенности (F, P) по некоторой инволюции τ .

Действия инволюций на дювалевских особенностях были классифицированы Катанезе [26]. Напомним, что (S, o) имеет топологический индекс $n \geq 3$ (иначе мы имеем случаи (i) или (ii) нашей теоремы). Учитывая что (S, o) – циклический фактор, из списка в [26] мы получим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5 [26]. Пусть (F, P) – росток дювалевской особенности и τ – аналитическая инволюция, действующая на (F, P) . Предположим, что фактор $(S, o) := (F, P)/\tau$ является циклической факторособенностью типа $\frac{1}{n}(a, b)$ с $n \geq 3$ (и $(a, n) = (b, n) = 1$). Тогда имеются следующие возможности для $(F, P) \rightarrow (S, o)$:

$$E_6 \xrightarrow{2:1} A_2, \quad n = 3, \quad (13)$$

$$A_{2n-1} \xrightarrow{2:1} A_{n-1}, \quad n \geq 3, \quad (14)$$

$$A_{2k} \xrightarrow{2:1} \frac{1}{2k+1}(k, 2k-1), \quad n = 2k+1, \quad k \geq 1, \quad (15)$$

$$A_k \xrightarrow{2:1} A_{2k+1}, \quad n = 2k+1, \quad k \geq 1, \quad (16)$$

$$A_{2k+1} \xrightarrow{2:1} \frac{1}{4k+4}(2k+1, 2k+1), \quad n = 4k+4, \quad k \geq 0. \quad (17)$$

Продолжим рассмотрение случая 4.4. Ограничение $h|_{F'}: (F', Q) \rightarrow (F, P)$ неразветвлено вне P и имеет степень n . Следовательно, точка (F', Q) – дювалевская. Легко видеть (см., например, [12, 4.10]), что (F, P) не имеет таких накрытий в случаях (16), (17). Особенность (F, P) из (15) допускает только накрытие неособой точкой (F', P') степени $n = 2k + 1$. Но тогда (X', Q) – неособая точка по лемме 1.4, противоречие с нашими предположениями в начале доказательства.

Пусть m – индекс (X, P) , $\pi: (X^\#, P^\#) \rightarrow (X, P)$ – каноническое накрытие и положим $F^\# := \pi^\#{}^{-1}F$. Как выше, имеем неразветвленное в коразмерности 1 $\mathbb{Z}_m$ -накрытие $\pi: (F^\#, P^\#) \rightarrow (F, P)$ дювалевских особенностей. Так как π пропускается через (X', Q) , мы имеем $m \geq n$.

В случае (13) $(F, P) = E_6$ по [12, 4.10] и допускает только циклическое накрытие типа $D_4 \xrightarrow{3:1} E_6$. Тогда $n = m = 3$. Следовательно, $(X^\#, P^\#) \simeq (X', Q)$ имеет индекс 1, противоречие.

Наконец, рассмотрим случай (14). Так как (X', Q) имеет индекс > 1 , мы имеем $m > n \geq 3$ и по [12, 4.10] накрытие $(F^\#, P^\#) \xrightarrow{m:1} (F, P)$ типа (неособая точка) $\xrightarrow{2n:1} A_{2k+1}$, $m = 2n$. Тогда индекс (X', Q) равен $m/n = 2$, точка $(X^\#, P^\#)$ неособа, и, следовательно, (X', Q) – циклическая факторособенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. В частности, f – такое, как в теореме 3.1. Пусть $X'_{o'} = f'^{-1}(o')$ – схемно-теоретический слой f' над o' . Далее Q – единственная неподвижная точка на C' при действии $\mathbb{Z}_n$. Следовательно, $\mathbb{Z}_n$ переставляет компоненты $\{C'_i\}$ кривой C' . В частности, число компонент $\geq n \geq 3$ и кратности компонент в $X'_{o'}$ равны между собой. Отсюда для $f': (X', C') \rightarrow (S', o')$ мы получаем только одну возможность (а), (vi) теоремы 3.1. Поэтому X'_o имеет ровно четыре компоненты, $n = 4$ и слой X'_o приведен. Тогда X' неособо вне Q . Мы получаем случай (iii) нашей теоремы.

4.6. Множество $F' \cap C'$ одномерно и связно. Тогда такое же $F \cap C$. Пусть $L := F' \cap C'$ (с приведенной структурой). На поверхности $F' = h^{-1}(F)$ мы имеем по формуле присоединения, что кривая L горенштейнова и $\omega_L = \mathcal{O}_L(L)$ (так как $\omega_{F'} = \mathcal{O}_{F'}$). Так как L стягивается морфизмом f' , дуализирующий пучок ω_L антибилен. Следовательно, L изоморфна приведенной конике в $\mathbb{P}^2$ (см., например, [27]), т.е. $L \simeq \mathbb{P}^1$ или L – пара пересекающихся прямых.

Пусть

$$f_F: F \xrightarrow{f_1} D \xrightarrow{f_2} S$$

– факторизация Штейна. Тогда морфизм $f_1: F \rightarrow D$ бимероморфен, а $f_2: D \rightarrow S$ конечен степени 2. По формуле присоединения $K_F = 0$. Следовательно, морфизм f_1 крепантен (т.е. $K_F = f_1^* K_D$) и D имеет только дювалевские особенности.

Существует общее минимальное разрешение $\sigma: \tilde{F} \rightarrow F \rightarrow D$. В нашем случае $f_2^{-1}(o)$ состоит из единственной точки $R = f_1(F \cap C)$ (и это – единственная особая точка на D). Пусть $\Gamma = \Gamma(\tilde{F}/D)$ – двойственный граф для σ . Обозначим вершины, соответствующие компонентам $h(L)$ (соответственно, f_2 -исключительным дивизорам), через $\bullet$ (соответственно, $\circ$). Тогда белые вершины образуют связные подграфы, соответствующие особым точкам (F, C) , а черные вершины соответствуют компонентам C , которые содержатся в F . Так как $f_1^{-1}(R) = L/\mathbb{Z}_2$, то Γ имеет не более двух черных вершин. Для $f_2: (D, R) \rightarrow (S, o)$ мы имеем те же возможности, что и для $(F, P) \rightarrow (S, o)$ в предложении 4.5. Рассмотрим эти подслучаи.

Подслучай (13). $(D, R) = E_6$, $(S, o) = A_2$, $n = 3$. Группа $\mathbb{Z}_3$ естественно действует на кривой $L := F' \cap C'$. Так как L – коника, $\mathbb{Z}_3$ не может переставлять ее компоненты. Следовательно, $\mathbb{Z}_3$ имеет две или три неподвижные точки Q_i на L . Тогда существуют по крайней мере две точки $P_1, P_2 \in X$ индексов ≥ 3 . Эти точки на F имеют по лемме 1.5 топологические индексы ≥ 3 . С другой стороны, граф минимального разрешения (F, P_i) должен быть белым подграфом в $\Gamma (\simeq E_6)$. Следовательно, каждая (F, P_i) имеет тип A_2 и существует только две неподвижных точки на L . Это возможно только, если кривая L неприводима и такова же $h(L) = F \cap C$. Таким образом, мы имеем только одну возможность для Γ

Следовательно, F содержит ровно две особые точки P_1, P_2 и они имеют тип A_2 . Многообразие X имеет в этих точках индекс 3. Так как $h^{-1}(P_i) = Q_i$ по лемме 1.5, X' горенштейново. Мы получим противоречие с нашими предположениями.

Подслучай (14). $(D, R) = A_{2n-1}$, $(S, o) = A_{n-1}$. Если кривая L неприводима или $\mathbb{Z}_n$ не переставляет ее компонент, то, как и выше, F содержит по крайней мере две точки с топологическими индексами $\geq n$. Тогда $\Gamma (= A_{2n-1})$ будет

$$\underbrace{\circ - \circ - \dots - \circ}_{n-1} - \bullet - \underbrace{\circ - \dots - \circ - \circ}_{n-1}. \quad (18)$$

Следовательно, F содержит ровно две особые точки и они имеют тип A_{n-1} . По лемме 1.5 X' горенштейново, противоречие.

Следовательно, кривая L приводима и $\mathbb{Z}_n$ переставляет ее компоненты. Тогда $h(L) = F \cap C$ неприводима и поэтому Γ имеет только одну черную вершину. Далее, $\mathbb{Z}_n$ -неподвижная точка Q_1 на X' дает нам точку $P_1 \in F$ топологического индекса nk , $k \in \mathbb{N}$ (см. лемму 1.5). Она соответствует белому подграфу в Γ типа A_{nk-1} . Таким образом, $k = 1$ и Γ снова имеет вид (18). Отсюда (F, P_1) – типа A_{n-1} . В частности, по лемме 1.4 Q_1 неособа. Второй белый подграф в Γ также соответствует особой точке $P_2 \in F$ типа A_{n-1} . Тогда индекс (X, P_2) делит n . Так как $\mathbb{Z}_n$ переставляет две компоненты L , $n = 2l$ четно и существует три $\mathbb{Z}_l$ -неподвижные точки на L : Q_1, Q_2 и Q_3 , где $h(Q_2) = h(Q_3) = P_2$. Следовательно, индекс P_2 делится на l . По нашему предположению (X', C') негоренштейново, следовательно, $(X', Q_2), (X', Q_3)$ имеют (один и тот же) индекс $m_0 > 1$ и (X', C') не содержит других точек индекса > 1 . Но тогда индекс (X, R) равен $m_0 l = m_0 n/2$ и делит n . Следовательно, $m_0 = 2$, это означает, что $f': (X', C') \rightarrow (S', o')$ – расслоение Мори на коники индекса 2, которое содержит две негоренштейновы точки Q_2, Q_3 , противоречие с теоремой 3.1.

Наконец, случаи (15), (16) и (17) невозможны, как в п. 4.4.

§ 5. Пример расслоения Мори на коники индекса 3

В заключение мы построим пример расслоения Мори на коники индекса 3 с неособой базой (и, следовательно, отличное от примеров 2.1 и 2.2).

Рассмотрим подмногообразие $V \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$, заданное двумя уравнениями

$$\begin{cases} a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_1^2 x_2 + a_4 x_2^2 x_1 + a_5 x_3^2 x_1 + a_6 x_3^2 x_2 = u x_0^3, \\ b_1 x_1^3 + b_2 x_2^3 + b_3 x_1^2 x_2 + b_4 x_2^2 x_1 + b_5 x_3^2 x_1 + b_6 x_3^2 x_2 = v x_0^3, \end{cases}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ – достаточно общие константы. Тогда V неособо и проекция на второй множитель $q: V \rightarrow \mathbb{C}^2$ задает расслоение на кривые степени 9 в $\mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2, x_3}^3 \times \mathbb{C}_{u, v}^2$. Центральный слой $q^{-1}(0)$ имеет ровно девять компонент $\Gamma_0, \dots, \Gamma_8$, где $\Gamma_0 := \{u = v = x_1 = x_2 = 0\}$. Определим действие $\mathbb{Z}_6$ на V следующим образом

$$(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v) \rightarrow (\varepsilon x_0, x_1, -x_2, x_3; u, v), \quad \varepsilon = \exp(2\pi i/3).$$

Сначала рассмотрим фактор $p: V \rightarrow Y := V/\mathbb{Z}_3$ и естественную проекцию $g: Y \rightarrow \mathbb{C}^2$. Множество $\mathbb{Z}_3$ -неподвижных точек – это дивизор $R := \{x_0 = 0\} \cap V$ и изолированная точка $O := \{x_1 = x_2 = x_3 = u = v = 0\}$. Локальные координаты на V в окрестности O будут $(x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0)$ с $\mathbb{Z}_3$ -весами

$$\text{wt}(x_1/x_0) = \text{wt}(x_2/x_0) = \text{wt}(x_3/x_0) = -1.$$

Следовательно, особое множество Y состоит из единственной точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ (обозначим ее через Q), она является канонической горенштейновой. Далее по формуле Гурвица имеем

$$K_V = p^* K_Y + 2R, \quad p^* K_Y = K_V - 2R = 0.$$

Поэтому канонический дивизор Y тривиален и $g: Y \rightarrow \mathbb{C}^2$ – расслоение на эллиптические кривые. Так как $\mathbb{Z}_3$ не переставляет кривые $\Gamma_0, \dots, \Gamma_8$, то центральный слой $g^{-1}(0)$ состоит из девяти компонент $L_0, L_1, \dots, L_8$, которые являются образами соответствующих компонент $\Gamma_0, \dots, \Gamma_8$ слоя $q^{-1}(0)$.

Теперь рассмотрим фактор $h: Y \rightarrow X := Y/\mathbb{Z}_2$ и естественный морфизм $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$. Компонента L_0 $\mathbb{Z}_2$ -инвариантна, а $\mathbb{Z}_2$ переставляет $L_i, i = 1, \dots, 8$, нетривиально. Следовательно, $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)/\mathbb{Z}_2$ имеет ровно пять компонент. Обозначим их через $C_0, \dots, C_4$. Для того чтобы доказать, что $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ – расслоение Мори на коники, мы должны исследовать особое множество многообразия X . Множество $\mathbb{Z}_2$ -неподвижных точек на V составляет неприводимый дивизор $D := \{x_2 = 0\} \cap V$. Поэтому множество $\mathbb{Z}_2$ -неподвижных точек на Y составляет в точности один неприводимый дивизор Вейля $F := p(D)$ такой, что $3F$ является дивизором Картье. Более того, D пересекает компоненты $\Gamma_0, \dots, \Gamma_8$ трансверсально.

Следующая лемма является легким упражнением.

ЛЕММА 5.1. Пусть (Y, Q) – циклическая факторособенность типа $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ с действием группы $\mathbb{Z}_2$. Предположим, что множество неподвижных точек является дивизором Вейля F таким, что $3F \sim 0$. Тогда $(Y, Q)/\mathbb{Z}_2$ – терминальная точка типа $\frac{1}{3}(1, 1, -1)$.

Наконец, по формуле Гурвица $0 = K_Y = h^*(K_X) + F$. Так как $(L_i \cdot F) > 0$, мы имеем $(h^*(-K_X) \cdot L_i) = (F \cdot L_i) > 0, i = 0, \dots, 8$. Поэтому $(-K_X \cdot C_i) > 0, i = 0, \dots, 4$, т.е. дивизор $-K_X$ относительно f -обилен (по крайней мере вблизи $f^{-1}(0)$).

Вывод. Мы построили расслоение Мори на коники $f: (X, C) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ такое, что его центральный слой C имеет ровно пять компонент и (единственная) особая точка P на X является циклической факторособенностью типа $\frac{1}{3}(1, 1, -1)$. Все компоненты C проходят через P и не пересекаются вне. Отметим, что накрытие $h: Y \rightarrow X$ — это в точности трюк с двойным накрытием Каваматы [28].

Список литературы

1. Прохоров Ю. Г. К проблеме общего слона для трехмерных $\mathbb{Q}$ -Фано расслоений над поверхностью // Фундаментальная и прикладная математика 1995. Т. 1. № 1. С. 263–280.
2. Prokhorov Yu. G. On $\mathbb{Q}$ -Fano fiber spaces with two-dimensional base // Preprint MPI 95/33.
3. Prokhorov Yu. G. On extremal contractions from 3-folds to surfaces // Preprint, Warwick 84/1995.
4. Prokhorov Yu. G. On extremal contractions from 3-folds to surfaces: the case of one non-Gorenstein point // Contemporary Math. AMS. 1997. V. 207. P. 119–141.
5. Исковских В. А. К проблеме рациональности для расслоений на коники // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 1. С. 114–121.
6. Исковских В. А. О критерии рациональности для расслоений на коники // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 7. С. 75–92.
7. Шокуров В. В. Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–201; 1993. Т. 57. № 6. С. 141–175.
8. Mori S. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. № 1. P. 117–253.
9. Reid M. Minimal models of canonical 3-folds. Algebraic Varieties and Analytic Varieties // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 1. P. 131–180.
10. Данилов В. И. Бирациональная геометрия торических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 971–982.
11. Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 1985. V. 98. P. 43–66.
12. Reid M. Young persons guide to canonical singularities. Algebraic Geometry, Bowdoin, 1985 // Proc. Symp. Pure Math. 1987. V. 46. P. 345–414.
13. Kollár J., Mori S. Classification of three-dimensional flips // J. Amer. Math. Soc. 1992. V. 5. № 3. P. 533–703.
14. Cutkosky S. Elementary contractions of Gorenstein 3-folds // Math. Ann. 1988. V. 280. P. 521–525.
15. Kollár J., Miyaoka Y., Mori S. Rationally connected varieties // J. Algebraic Geometry. 1992. V. 1. P. 429–448.
16. Ishii S. On Fano 3-folds with non-rational singularities and two-dimensional base // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1994. V. 64. P. 249–277.
17. Клеменс Х., Коллар Я., Мори С. Многомерная комплексная геометрия. М.: Мир, 1993.
18. Kollár J. Standard models of elliptic 3-folds // Preprint.
19. Cartan H. Quotient d'une space analytique par un groupe d'automorphismes // Algebraic Geometry and Topology. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. P. 90–102.
20. Beauville A. Variétés de Prym et jacobienne intermédiaires // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 1977. V. 10. P. 309–391.
21. Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model program. Algebraic Geometry, Sendai, 1985 // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
22. Kempf G. Cohomology and convexity. Toroidal Embeddings I // Lect. Notes in Math. V. 339, 1973. P. 41–52.
23. Matsumura H. Commutative Ring Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
24. Catanese F., Franciosi M., Hulek K., Reid M. Embeddings of curves and surfaces // Preprint alg-geom, 1986.
25. Hartshorne R. Residues and duality // Lect. Notes in Math. V. 20, 1966.

- 26. *Catanese F.* Automorphisms of rational double points and moduli spaces of surfaces of general type // *Compositio Math.* 1987. V. 61. №1. P. 81–102.
- 27. *Lipman J.* Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization // *Publ. Math. IHES.* 1969. V. 36. P. 195–279.
- 28. *Kawamata Y.* Crepant blowing-ups of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces // *Ann. Math.* 1988. V. 127. P. 93–163.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
21.01.1997

E-mail: prokhorov@mech.math.msu.su prokhorov@nw.math.msu.su