Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Об оценивании L_p -нормы алгебраического полинома по его значениям в узлах равномерной сетки, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 12, 135–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 09:01:44

УДК 517.98

И. И. Шарапудинов

Об оценивании L_p -нормы алгебраического полинома по его значениям в узлах равномерной сетки

В работе получена оценка L_p -нормы, $p \geq 1$, произвольного алгебраического полинома степени $\leq n$ через его значения в $N > n$ узлах равномерной сетки. Из этой оценки, в частности, вытекает, что для $N \geq \theta n^2$, $\theta > 0$, L_p -норма полинома растёт при $n \rightarrow \infty$ не быстрее, чем его L_q -среднее, $q \geq p$, по узлам этой сетки, умноженное на некоторую степень n .

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $L_p[-1, 1]$ – пространство измеримых на $[-1, 1]$ функций $f = f(x)$, для которых определена норма

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|, \quad (1.1)$$

H^n – пространство алгебраических полиномов $p_n = p_n(x)$ степени n , $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ равномерная сетка узлов $x_j = -1 + 2j/(N-1)$, $0 \leq j \leq N-1$, на отрезке $[-1, 1]$. Для $p_n \in H^n$ кроме $\|p_n\|_p$ мы определим также норму

$$\|p_n\|_{p,N} = \left(\frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |p_n(x_j)|^p \right)^{1/p}, \quad \|p_n\|_{\infty,N} = \max_{0 \leq j \leq N-1} |p_n(x_j)|. \quad (1.2)$$

Хорошо известно, что в конечномерном пространстве H^n две произвольные нормы эквивалентны, следовательно, существуют конечные верхние грани

$$\gamma_{p,q}(n, N) = \sup_{p_n \in H_0^n} \frac{\|p_n\|_q}{\|p_n\|_{p,N}}, \quad \Gamma_{p,q}(n, N) = \sup_{p_n \in H_0^n} \frac{\|p_n\|_{q,N}}{\|p_n\|_p}, \quad (1.3)$$

где $1 \leq p, q \leq \infty$, H_0^n – подмножество алгебраических полиномов из H^n не равных нулю тождественно.

Известно [1], что если $1 \leq p \leq q \leq \infty$, то для величины

$$\gamma_{p,q}(n) = \sup_{p_n \in H_0^n} \frac{\|p_n\|_q}{\|p_n\|_p}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №95-01-01526).

найдется такая постоянная $c(p, q) > 0$, что

$$\gamma_{p,q}(n) \leq c(p, q)n^{2(1/p-1/q)}. \quad (1.4)$$

В настоящей статье показано (теоремы 3.1 и 6.1), что если $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 \leq n \leq \lambda\sqrt{N}$, $\lambda > 0$, то

$$\gamma_{p,q}(n, N) = c(\lambda, p, q)n^{2(1/p-1/q)}, \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{p,q}(n, N) \leq c(\lambda, p, q)n^{2(1/p-1/q)}. \quad (1.6)$$

При этом условие $n \leq \lambda\sqrt{N}$ окончательно в том смысле, что если $n/\sqrt{N} \rightarrow \infty$, то, например, $\Gamma_{2,2}(n, N) \rightarrow \infty$ (см. неравенство (3.10)).

Неравенства подобного типа для тригонометрических полиномов и равномерных сеток отрезка $[0, 2\pi]$ были получены в работах Бернштейна [2], Марцинкевича [3], Лозинского [4], Никольского [5]. В случае равномерной метрики на $[-1, 1]$ (случай $p = q = \infty$) неравенство (1.5) было получено в работах [6] и [7] (независимо). Кроме того, при $p = q = \infty$ неравенство (1.5) доказано в [8], а при $\lambda = \pi/\sqrt{2}$, $p = q = \infty$ оно доказано в [9] и (10).

§ 2. Некоторые результаты, связанные с полиномами Якоби и Лежандра

В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты, связанные с полиномами Якоби

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! \rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n \rho(x)), \quad (2.1)$$

где $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, и полиномами Лежандра $P_n^0(x) = P_n^{0,0}(x)$. Следующие свойства полиномов Якоби хорошо известны [4]:

$$\left. \begin{aligned} P_0^{\alpha,\beta}(x) &= 1, \quad P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{\alpha,\beta}(x) \\ &= (2n + \alpha + \beta - 1)((2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2) \\ &\quad \times P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x); \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$P_n^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{(n + \alpha + 1)P_n^{\alpha,\beta}(x) - (n + 1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)}{1 - x}; \quad (2.3)$$

$$P_n^{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{(n + \beta + 1)P_n^{\alpha,\beta}(x) + (n + 1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)}{1 + x}; \quad (2.4)$$

$$h_n = \int_{-1}^1 (P_n^0(x))^2 dx = \frac{2}{2n + 1}; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(t, x) &= \sum_{\nu=0}^n h_n^{-1} P_\nu^0(t) P_\nu^0(x) \\ &= \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}^0(t) P_n^0(x) - P_n^0(t) P_{n+1}^0(x)}{t - x}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 2.1. Если $j \geq 1$, то

$$(t-x) \sum_{k=0}^{j-1} (k+1) P_k^{1,0}(t) P_k^{0,1}(x) = \frac{j(j+1)}{2j+1} \left(P_j^{1,0}(t) P_{j-1}^{0,1}(x) - P_j^{0,1}(x) P_{j-1}^{1,0}(t) \right) - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} P_k^{1,0}(t) P_k^{0,1}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\alpha = 1$, $\beta = 0$, перепишем формулу (2.2) следующим образом:

$$\frac{k(k+1)}{2k+1} P_k^{1,0}(t) + \frac{k(k-1)}{2k-1} P_{k-2}^{1,0}(t) = k \left(t + \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \right) P_{k-1}^{1,0}(t). \quad (2.7)$$

Аналогично,

$$\frac{k(k+1)}{2k+1} P_k^{0,1}(x) + \frac{k(k-1)}{2k-1} P_{k-2}^{0,1}(x) = k \left(x - \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \right) P_{k-1}^{0,1}(x). \quad (2.8)$$

Из равенства (2.7), помноженного на $P_{k-1}^{0,1}(x)$, вычтем (2.8), умноженное на $P_{k-1}^{1,0}(t)$. Тогда при $k \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{k(k+1)}{2k+1} \left(P_k^{1,0}(t) P_{k-1}^{0,1}(x) - P_k^{0,1}(x) P_{k-1}^{1,0}(t) \right) \\ & - \frac{k(k-1)}{2k-1} \left(P_{k-1}^{1,0}(t) P_{k-2}^{0,1}(x) - P_{k-1}^{0,1}(x) P_{k-2}^{1,0}(t) \right) \\ & = k \left(t - x + \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} \right) P_{k-1}^{1,0}(t) P_{k-1}^{0,1}(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Кроме того, при $k = 1$ имеем

$$\frac{2}{3} \left(P_1^{1,0}(t) P_0^{0,1}(x) - P_1^{0,1}(x) P_0^{1,0}(t) \right) = \left(t - x + \frac{2}{3} \right) P_0^{1,0}(t) P_0^{0,1}(x). \quad (2.10)$$

Суммируя правые и левые части равенства (2.9) от $k = 2$ до j и учитывая при $k = 1$ равенство (2.10), мы приходим к утверждению леммы 2.1.

При $-1 \leq t \leq 1$, $n \geq 1$ справедлива следующая весовая оценка

$$|P_n^{\alpha,\beta}(t)| \leq \frac{c(\alpha,\beta)}{n^{1/2}} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}. \quad (2.11)$$

Здесь и далее c , $c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$, $c_k(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ означают положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах (например, допускаются записи вида $c(\alpha, \beta) < c(\alpha, \beta)$).

Если $f \in L_p[-1, 1]$, то через $S_n(f) = S_n(f, x)$ мы обозначим сумму Фурье порядка n по полиномам Лежандра $P_n^0(x)$, т.е.

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}_k P_k^0(x), \quad (2.12)$$

где

$$\widehat{f}_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_k^0(t) dt$$

– коэффициенты Фурье–Лежандра функции f . Далее, пусть

$$v_{m,n}(f) = v_{m,n}(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=m}^{n+m} S_k(f, x) \quad (2.13)$$

средние Валле–Пуссена для сумм Фурье–Лежандра. Из (2.12), (2.13) с учетом (2.6) имеем

$$\begin{aligned} v_{m,n}(f, x) &= \int_{-1}^1 f(t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=m}^{n+m} \mathcal{K}_k(t, x) dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t) \frac{1}{n+1} (I_{n+m}(t, x) - I_{m-1}(t, x)) dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$I_s(t, x) = \sum_{k=0}^s \mathcal{K}_k(t, x). \quad (2.15)$$

Положим

$$\mathcal{L}_n^N(t) = \frac{2}{N(n+1)} \sum_{j=0}^{N-1} |I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)|. \quad (2.16)$$

Поведение этой величины при $-1 \leq t \leq 1$, $N, n \rightarrow \infty$ играет основную роль при оценке величины $\Gamma_{p,q}(n, N)$, определенной равенством (1.3). Предварительно мы оценим $|I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)|$. Воспользовавшись формулой Кристоффеля–Дарбу (2.6), мы можем переписать (2.15) следующим образом:

$$\begin{aligned} I_s(t, x) &= \sum_{k=0}^s \frac{k+1}{2} \frac{(P_{k+1}^0(t) - P_k^0(t))(P_{k+1}^0(x) + P_k^0(x))}{t-x} \\ &\quad + \sum_{k=0}^s \frac{k+1}{2} \frac{P_k^0(t)P_k^0(x) - P_{k+1}^0(t)P_{k+1}^0(x)}{t-x} \\ &= E_1^s(t, x) + E_2^s(t, x). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Далее, из (2.3) и (2.4), полагая $\alpha = \beta = 0$, находим

$$P_{k+1}^0(t) - P_k^0(t) = -(1-t)P_k^{1,0}(t), \quad P_{k+1}^0(x) + P_k^0(x) = (1+x)P_k^{0,1}(x)$$

и, следовательно,

$$(P_{k+1}^0(t) - P_k^0(t))(P_{k+1}^0(x) + P_k^0(x)) = -(1-t)(1+x)P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(x). \quad (2.18)$$

Сопоставляя (2.17) и (2.18) с леммой 2.1, имеем

$$\begin{aligned}
 E_1^s(t, x) &= -\frac{(1-t)(1+x)}{2(t-x)} \sum_{k=0}^s P_k^{1,0}(t) P_k^{0,1}(x) (k+1) \\
 &= -\frac{(1-t)(1+x)(s+1)(s+2)}{2(t-x)^2(2s+3)} \left(P_{s+1}^{1,0}(t) P_s^{0,1}(x) - P_{s+1}^{0,1}(x) P_s^{1,0}(t) \right) \\
 &\quad + \frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2} \sum_{k=0}^s \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} P_k^{1,0}(t) P_k^{0,1}(x) \\
 &= E_{11}^s(t, x) + E_{12}^s(t, x).
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Из (2.17) и (2.19) находим

$$\begin{aligned}
 |I_{2n}(t, x) - I_{n-1}(t, x)| &\leq |E_{11}^{2n}(t, x) - E_{11}^{n-1}(t, x)| \\
 &\quad + |E_{12}^{2n}(t, x) - E_{12}^{n-1}(t, x)| + |E_2^{2n}(t, x) - E_2^{n-1}(t, x)|.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Первую разность в правой части (2.20) преобразуем с помощью равенства (2.3), которое мы перепишем следующим образом:

$$P_{n+1}^{\alpha, \beta}(t) = \frac{n+\alpha+1}{n+1} P_n^{\alpha, \beta}(t) - \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)} (1-t) P_n^{\alpha+1, \beta}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 P_s^{1,0}(t) P_{s+1}^{0,1}(x) - P_s^{0,1}(x) P_{s+1}^{1,0}(t) &= -\frac{1}{s+1} P_s^{0,1}(x) P_s^{1,0}(t) \\
 &\quad + \frac{2s+3}{2(s+1)} \left((1-t) P_s^{2,0}(t) P_s^{0,1}(x) - (1-x) P_s^{1,1}(x) P_s^{1,0}(t) \right).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Из (2.19) и (2.21) имеем

$$\begin{aligned}
 E_{11}^s(t, x) &= \frac{(s+2)(1-t)(1+x)}{4(t-x)^2} \left((1-t) P_s^{2,0}(t) P_s^{0,1}(x) - (1-x) P_s^{1,1}(x) P_s^{1,0}(t) \right) \\
 &\quad - \frac{(s+2)(1-t)(1+x)}{2(2s+3)(t-x)^2} P_s^{0,1}(x) P_s^{1,0}(t).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{2n}(t, x) - E_{11}^{n-1}(t, x) &= \frac{(1+x)(1-t)}{4(t-x)^2} \left((1-t) \left(P_{2n}^{2,0}(t) P_{2n}^{0,1}(x) (2n+2) - (n+1) P_{n-1}^{2,0}(t) P_{n-1}^{0,1}(x) \right) \right. \\
 &\quad \left. - (1-x) \left((2n+2) P_{2n}^{1,1}(x) P_{2n}^{1,0}(t) - (n+1) P_{n-1}^{1,1}(x) P_{n-1}^{1,0}(t) \right) \right) \\
 &\quad + \frac{(1-t)(1+x)}{2(t-x)^2} \left(\frac{n+1}{2n+1} P_{n-1}^{0,1}(x) P_{n-1}^{1,0}(t) - \frac{2n+2}{4n+3} P_{2n}^{0,1}(x) P_{2n}^{1,0}(t) \right),
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

а из (2.19)

$$E_{12}^{2n}(t, x) - E_{12}^{n-1}(t, x) = \frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2} \sum_{k=n}^{2n} \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} P_k^{1,0}(t) P_k^{0,1}(x). \quad (2.24)$$

Отметим также, что в силу (2.17)

$$\begin{aligned} E_2^{2n}(t, x) - E_2^{n-1}(t, x) &= \frac{1}{2(t-x)} \sum_{k=n}^{2n} P_k^0(t) P_k^0(x) \\ &+ \frac{1}{2(t-x)} \left(n P_n^0(t) P_n^0(x) - (2n+1) P_{2n+1}^0(t) P_{2n+1}^0(x) \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Воспользуемся теперь оценкой (2.11). Для $0 \leq t < 1$, $-1 < x < 1$ это дает

$$|P_s^{2,0}(t) P_s^{0,1}(x)| \leq \frac{c}{s} (1-t)^{-5/4} (1-x)^{-1/4} (1+x)^{-3/4}, \quad (2.26)$$

$$|P_s^{1,1}(x) P_s^{1,0}(t)| \leq \frac{c}{s} (1-x^2)^{-3/4} (1-t)^{-3/4}, \quad (2.27)$$

$$|P_s^{0,1}(x) P_s^{1,0}(t)| \leq \frac{c}{s} (1-x)^{-1/4} (1+x)^{-3/4} (1-t)^{-3/4}. \quad (2.28)$$

Из (2.23), (2.24), (2.26)–(2.28) вытекают оценки

$$\begin{aligned} &|E_{11}^{2n}(t, x) - E_{11}^{n-1}(t, x)| \\ &\leq c \frac{(1+x)^{1/4}}{(t-x)^2} \left((1-t)^{3/4} (1-x)^{-1/4} + ((1-t)(1-x))^{1/4} \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$|E_{12}^{2n}(t, x) - E_{12}^{n-1}(t, x)| \leq c \frac{(1+x)^{1/4}}{n(t-x)^2} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1/4}, \quad (2.30)$$

справедливые при $-1 < x < 1$, $0 \leq t < 1$. Если, кроме того,

$$0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}, \quad t_1 = t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}, \quad t_2 = t + \frac{\sqrt{1-t^2}}{n},$$

то при $n \leq k \leq 2n$, $n \leq \lambda\sqrt{N}$, $\lambda > 0$, мы можем также вывести следующие, полезные для дальнейшего оценки:

$$\frac{2}{N} \sum_{-1 \leq x_j \leq -1/2} \frac{|P_k^0(x_j) P_k^0(t)|}{t - x_j} \leq \frac{c}{n^{1/2}}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \frac{|P_k^0(x_j) P_k^0(t)|}{t - x_j} \leq \frac{c}{n^{1/2}} |P_k^0(t)| \\ &\quad \times \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \frac{(1-x_j)^{-1/4}}{t - x_j} \leq \frac{c}{n^{1/2}} \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} (t - x_j)^{-5/4} \\ &\leq \frac{c(\lambda)n^{1/4}}{n^{1/2}(1-t^2)^{1/8}} \leq c(\lambda), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{N} \sum_{t_2 \leq x_j \leq 1} \frac{|P_k^0(x_j)P_k^0(t)|}{x_j - t} &\leq |P_k^0(t)| \frac{2}{N} \sum_{t_2 \leq x_j \leq 1} \frac{|P_k^0(x_j)|}{x_j - t} \\
 &\leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}} \frac{2}{N} \sum_{t_2 \leq x_j \leq (1+t)/2} (x_j - t)^{-5/4} \\
 &\quad + \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}} \frac{2}{N} \sum_{(1+t)/2 \leq x_j \leq 1-1/n^2} (1 - x_j)^{-5/4} \\
 &\quad + c \frac{2}{N} \sum_{1-1/n^2 \leq x_j \leq 1} (x_j - t)^{-1} \leq c(\lambda). \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

Перейдем к оценке величины $\mathcal{L}_n^N(t)$ при условии $n \leq \lambda\sqrt{N}$, $\lambda > 0$. Сначала рассмотрим случай $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$. Разобьем сумму (2.16) по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_n^N(t) &= \frac{2}{N(n+1)} \sum_{x_j \in \Omega_N} \\
 &= \frac{2}{N(n+1)} \left(\sum_{y_1 \leq x_j \leq y_2} + \sum_{y_2 < x_j \leq y_3} + \sum_{y_3 < x_j \leq y_4} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{y_4 < x_j < y_5} + \frac{2}{N(n+1)} |I_{2n}(t, 1) - I_{n-1}(t, 1)| \right) \\
 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5, \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

где $y_1 = -1$, $y_2 = -1/2$, $y_3 = t_1$, $y_4 = t_2$, $y_5 = 1$. Опеним u_i . Из (2.20) при $i \neq 3$ имеем

$$\begin{aligned}
 u_i &= \frac{2}{N(n+1)} \sum |I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)| \\
 &\leq \frac{2}{N(n+1)} \sum |E_{11}^{2n}(t, x_j) - E_{11}^{n-1}(t, x_j)| \\
 &\quad + \frac{2}{N(n+1)} \sum |E_{12}^{2n}(t, x_j) - E_{12}^{n-1}(t, x_j)| \\
 &\quad + \frac{2}{N(n+1)} \sum |E_2^{2n}(t, x_j) - E_2^{n-1}(t, x_j)| \\
 &= u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}, \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем точкам $x_j \in \Omega_N$, которые удовлетворяют неравенству $y_i \leq x_j < y_{i+1}$. Из (2.29) и (2.30) замечаем, что

$$u_{11} \leq \frac{c(\lambda)}{n}, \quad u_{12} \leq \frac{c(\lambda)}{n^2}. \tag{2.36}$$

С другой стороны, из (2.35) и (2.31) следует, что

$$u_{13} \leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}}. \tag{2.37}$$

Сопоставляя (2.36) и (2.37) с (2.35), находим

$$u_1 \leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}}. \quad (2.38)$$

Для оценки u_2 также воспользуемся неравенством (2.35). Из (2.29), пользуясь оценкой $(1 - x_j)^{1/4} \leq (1 - t)^{1/4} + (t - x_j)^{1/4}$, имеем

$$\begin{aligned} u_{21} &= \frac{2}{N(n+1)} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} |E_{11}^{2n}(t, x_j) - E_{11}^{n-1}(t, x_j)| \\ &\leq \frac{c}{n} \left(\frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \left(\frac{1-t}{1-x_j} \right)^{1/4} \frac{(1-t)^{1/2}}{(t-x_j)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \frac{(1-x_j)^{1/4}}{(t-x_j)^2} (1-t)^{1/4} \right) \\ &\leq \frac{c}{n} \left(\frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \frac{(1-t)^{1/2}}{(t-x_j)^2} + \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \frac{(1-t)^{1/4}}{(t-x_j)^{7/4}} \right) \\ &\leq c(\lambda). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Далее, из (2.30) находим

$$\begin{aligned} u_{22} &= \frac{2}{N(n+1)} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} |E_{12}^{2n}(t, x_j) - E_{12}^{n-1}(t, x_j)| \\ &\leq \frac{c}{n^2} \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \left(\frac{1-t}{1-x_j} \right)^{1/4} (t-x_j)^{-2} \\ &\leq \frac{c}{n^2} \frac{2}{N} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq 1} (x_j - t)^{-2} \leq c(\lambda). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Оценим u_{23} . Из (2.25) и (2.32) имеем

$$\begin{aligned} u_{23} &= \frac{2}{N(n+1)} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} |E_2^{2n}(t, x_j) - E_2^{n-1}(t, x_j)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{N(n+1)} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \frac{|P_k^0(t)P_k^0(x_j)|}{t-x_j} \\ &\quad + \frac{1}{N(n+1)} \sum_{-1/2 \leq x_j \leq t_1} \frac{n|P_n^0(t)P_n^0(x_j)| + (2n+1)|P_{2n+1}^0(t)P_{2n+1}^0(x_j)|}{t-x_j} \\ &\leq c(\lambda). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Сопоставляя (2.39)–(2.41), получаем

$$u_2 \leq c(\lambda). \quad (2.42)$$

Оценим u_3 . Если $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$, то из (2.11) и (2.15) имеем

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{2}{N} \sum_{t_1 \leq x_j \leq t_2} \frac{1}{n+1} |I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{2}{N} \sum_{t_1 \leq x_j \leq t_2} \frac{2k+1}{2} |P_k^0(x_j) P_k^0(t)| \\
&\leq \frac{c}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l k^{1/2} |P_k^0(t)| \frac{2}{N} \sum_{t_1 \leq x_j \leq t_2} (1 - x_j)^{-1/4} \\
&\leq \frac{c}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l k^{1/2} |P_k^0(t)| (t_2 - t_1) \frac{1}{(1 - t_2)^{1/4}} \\
&\leq \frac{c}{(n+1)^2} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l 1 < c.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Оценим u_4 , для чего снова обратимся к неравенству (2.35) и оценкам (2.29) и (2.30). Поскольку $((1-t)(1-x_j))^{1/4} \leq (1-t)^{3/4}(1-x_j)^{-1/4}$, а для $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$ имеем $(1-t)^{1/4} \leq n(1-t)^{3/4}/2$, то из указанных оценок получаем

$$\begin{aligned}
u_{41} + u_{42} &\leq \sum_{t_2 \leq x_j < 1} \left(|E_{11}^{2n}(t, x_j) - E_{11}^{n-1}(t, x_j)| + |E_{12}^{2n}(t, x_j) - E_{12}^{n-1}(t, x_j)| \right) \\
&\leq \frac{c}{n} \left(\frac{2}{N} \sum_{t_2 \leq x_j < 1} \left(\frac{(1-t)^{3/4}}{(x_j - t)^2} (1 - x_j)^{-1/4} + \frac{((1-t)(1-x_j))^{1/4}}{(x_j - t)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{N} \sum_{t_2 \leq x_j < 1} \frac{1}{n(x_j - t)^2} \left(\frac{1-t}{1-x_j} \right)^{1/4} \right) \\
&\leq \frac{c}{nN} \sum_{t_2 \leq x_j < 1} \frac{(1-t)^{3/4}}{(x_j - t)^2 (1 - x_j)^{1/4}} \\
&\leq \frac{c}{n} (1-t)^{3/4} \int_{t_2}^1 \frac{dx}{(x-t)^2 (1-x)^{1/4}} \\
&\leq \frac{c}{n} (1-t^2)^{3/4} \int_{t_2}^1 \frac{dx}{(x-t)^2 (1-x^2)^{1/4}} \\
&\leq \frac{c}{n} (1-t^2)^{3/4} \int_{t'_2}^1 \frac{dx}{(x-t)^2 (1-x^2)^{3/4}} \\
&\leq \frac{c}{n} \varphi^{3/2} \int_0^{\varphi-1/n} \frac{\sin^{1/2} \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

где $\varphi = \arccos t$, $t'_2 = t \cos(1/n) + \sqrt{1-t^2} \sin(1/n) = \cos(\varphi - 1/n)$. Так как при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ справедливо неравенство

$$|\cos \theta - \cos \varphi| \geq (\theta^2 - \varphi^2)/\pi^2,$$

то

$$\int_0^{\varphi-1/n} \frac{\sin^{1/2} \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} \leq c\varphi^{-3/2} \int_0^{\varphi-1/n} \frac{d\theta}{(\varphi - \theta)^2} \leq cn\varphi^{-3/2}. \quad (2.45)$$

Сопоставляя (2.44) с (2.45), находим

$$u_{41} + u_{42} \leq c. \quad (2.46)$$

Кроме того, в силу (2.25) и (2.33)

$$u_{43} \leq c(\lambda). \quad (2.47)$$

Оценки (2.46) и (2.47), взятые вместе, дают

$$u_4 \leq c. \quad (2.48)$$

Наконец, для u_5 мы имеем

$$\begin{aligned} u_5 &= \frac{1}{n+1} |I_{2n}(t, 1) - I_{n-1}(t, 1)| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{2}{N} \frac{2k+1}{2} |P_k^0(1)P_k^0(t)| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{2}{N} \frac{2k+1}{2} \leq c(\lambda). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Подставляя оценки (2.38), (2.42), (2.43), (2.48), (2.49) в равенство (2.34), в случае $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$ мы получаем

$$\mathcal{L}_n^N(t) \leq c(\lambda), \quad (2.50)$$

где $n \leq \lambda\sqrt{N}$.

Перейдем к случаю $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$. Тогда в силу (2.11) вместо (2.29) и (2.30) мы получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |E_{11}^{2n}(t, x) - E_{11}^{n-1}(t, x)| &\leq \frac{c}{(t-x)^2} (1-t)(1+x)^{1/4} \\ &\quad \times n^{1/2} ((1-x)^{-1/4} + (1-x)^{1/4}n), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$|E_{12}^{2n}(t, x) - E_{12}^{n-1}(t, x)| \leq c \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/4} (t-x)^{-2} (1-t)n^{1/2}, \quad (2.52)$$

где $-1 \leq x < 1$. Чтобы оценить $\mathcal{L}_n^N(t)$ при $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$, разобьем сумму (2.16) по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^N(t) &= \frac{2}{N(n+1)} \sum_{-1 \leq x_j \leq -1/2} + \frac{2}{N(n+1)} \sum_{-1/2 < x_j \leq 1-8n^{-2}} \\ &\quad + \frac{2}{N(n+1)} \sum_{1-8n^{-2} < x_j \leq 1} = H_1 + H_2 + H_3. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Суммы H_1 и H_2 оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для u_1 и u_2 , используя вместо оценок (2.29) и (2.30) оценки (2.51) и (2.52). При $n \leq \lambda\sqrt{N}$ это дает

$$H_1 \leq c(\lambda), \quad H_2 \leq c(\lambda). \quad (2.54)$$

Что касается H_3 , то воспользовавшись оценкой (2.11), имеем

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{2}{N} \sum_{1-8n^{-2} < x_j \leq 1} \frac{1}{n+1} |I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{2k+1}{2} |P_k^0(t)| \frac{2}{N} \sum_{1-8n^{-2} \leq x_j \leq 1} |P_k^0(x_j)| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l \frac{2k+1}{2} 8n^{-2} \leq c. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Из (2.53)–(2.55) выводим оценку

$$\mathcal{L}_n^N(t) \leq c(\lambda), \quad (2.56)$$

где $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$, $n \leq \lambda\sqrt{N}$.

Теперь мы можем сформулировать следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. Пусть λ – фиксированное положительное число, тогда для всех n и N таких, что $n \leq \lambda\sqrt{N}$, имеет место неравенство

$$\mathcal{L}_n^N(t) \leq c(\lambda), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость леммы для $0 \leq t \leq 1$ вытекает из оценок (2.50) и (2.56). Если же $-1 \leq t \leq 0$, то утверждение леммы 2.2 вытекает из равенства $\mathcal{L}_n^N(-t) = \mathcal{L}_n^N(t)$, которое, в свою очередь, следует из симметрии $P_n^0(-t) = (-1)^n P_n^0(t)$ и определения величины $\mathcal{L}_n^N(t)$.

Положим

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 |I_{2n}(t, x) - I_{n-1}(t, x)| dt. \quad (2.57)$$

Сопоставляя (2.16) и (2.57) и учитывая симметрию $I_k(t, x) = I_k(x, t)$, заметим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n^N(x) = \mathcal{L}_n(x). \quad (2.58)$$

Из леммы 2.2 и равенства (2.58) следует, что

$$\mathcal{L}_n(t) \leq c, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (2.59)$$

§3. Об ограничении L_p -нормы алгебраического полинома снизу

Здесь мы получим оценку сверху для величины $\Gamma_{p,q}(n, N)$, определенной вторым из равенств (1.3). Заметим, что для произвольного полинома $p_n \in H^n$

$$\frac{\|p_n\|_{q,N}}{\Gamma_{p,q}(n, N)} \leq \|p_n\|_p,$$

поэтому если мы оценим величину $\Gamma_{p,q}(n, N)$ сверху, то, тем самым, будет установлена оценка снизу для нормы $\|p_n\|_p$. Основным итогом предыдущих рассмотрений является следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\lambda > 0$, $n \leq \lambda\sqrt{N}$, тогда найдется такая постоянная $c(p, q, \lambda)$, что

$$\Gamma_{p,q}(n, N) \leq c(p, q, \lambda) n^{2(1/p-1/q)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что среднее Валле-Пуссена $v_n(f) = v_{n,n}(f)$ для сумм Фурье–Лежандра, определенное равенством (2.13), представляет собой проектор на пространство всех алгебраических полиномов p_n степени n , т.е.

$$v_n(p_n, x) = p_n(x).$$

Следовательно, в силу (2.14)

$$p_n(x) = \int_{-1}^1 p_n(t) \frac{1}{n+1} (I_{2n}(t, x) - I_{n-1}(t, x)) dt.$$

Отсюда, в частности, для $x_j \in \Omega_N$ имеем

$$|p_n(x_j)| \leq \int_{-1}^1 |p_n(t)| \frac{1}{n+1} |I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)| dt. \quad (3.1)$$

Перепишем (3.1) в следующем виде:

$$|p_n(x_j)| \leq \mathcal{L}_n(x_j) \int_{-1}^1 |p_n(t)| \frac{|I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)|}{(n+1)\mathcal{L}_n(x_j)} dt.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Иенсена, находим

$$\begin{aligned} |p_n(x_j)|^q &\leq (\mathcal{L}_n(x_j))^q \left(\int_{-1}^1 |p_n(t)| \frac{|I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)|}{(n+1)\mathcal{L}_n(x_j)} dt \right)^q \\ &\leq (\mathcal{L}_n(x_j))^{q-1} \int_{-1}^1 |p_n(t)|^q \frac{1}{n+1} |I_{2n}(t, x_j) - I_{n-1}(t, x_j)| dt, \end{aligned}$$

откуда, в свою очередь, выводим

$$\frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |p_n(x_j)|^q \leq \overline{\mathcal{L}_n}^{p-1} \int_{-1}^1 |p_n(t)|^q \mathcal{L}_n^N(t) dt, \quad (3.2)$$

где $\overline{\mathcal{L}}_n = \max_{x_j \in \Omega_N} \{\mathcal{L}_n(x_j)\}$. Воспользуемся леммой 2.2. Тогда из (3.2) при $n \leq \lambda\sqrt{N}$ имеем

$$\frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |p_n(x_j)|^q \leq c(\lambda) \overline{\mathcal{L}}_n^{q-1} \int_{-1}^1 |p_n(t)|^q dt. \quad (3.3)$$

Отсюда, в силу (2.59) находим при $n \leq \lambda\sqrt{N}$

$$\|p_n\|_{q,N} \leq (c(\lambda))^{1/q} c^{(q-1)/q} \|p_n\|_q. \quad (3.4)$$

Воспользуемся оценкой (1.4). Тогда из (3.4) выводим

$$\|p_n\|_{q,N} \leq (c(\lambda)c^{p-1})^{1/p} c(p,q) n^{2(1/p-1/q)} \|p_n\|_p. \quad (3.5)$$

Теорема 3.1 доказана.

Рассмотрим вопрос о том, насколько существенным является содержащееся в условии теоремы 3.1 ограничение $n \leq \lambda\sqrt{N}$. Мы ограничимся наиболее простым случаем $p = q = 2$. Положим

$$p_n(x) = \mathcal{K}_n(x, 1) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k^0(x). \quad (3.6)$$

Известно (см. [11, гл. IV, § 4.5]), что

$$\mathcal{K}_n(x, 1) = \frac{n+1}{2} P_n^{1,0}(x). \quad (3.7)$$

Из (3.6) имеем

$$\|p_n\|_2 = \left(\int_{-1}^1 (\mathcal{K}_n(x, 1))^2 dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1). \quad (3.8)$$

С другой стороны, из (3.6) и (3.7) находим

$$\begin{aligned} \|p_n\|_{2,N} &= \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{4} (P_n^{1,0}(x_j))^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{4N}}(n+1) P_n^{1,0}(x_{N-1}) = \frac{1}{\sqrt{4N}}(n+1) P_n^{1,0}(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4N}}(n+1)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Сопоставляя (3.8) и (3.9), получаем

$$\frac{n+1}{\sqrt{2N}} \leq \frac{\|p_n\|_{2,N}}{\|p_n\|_2} \leq \Gamma_{2,2}(n, N). \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что требование $n \leq \lambda\sqrt{N}$, содержащееся в условии теоремы 3.1, существенно в том смысле, что $\Gamma_{2,2}(n, N) \rightarrow \infty$, если $n/\sqrt{N} \rightarrow \infty$.

§ 4. Некоторые результаты, связанные с полиномами Чебышёва, ортогональными на равномерной сетке

При оценке сверху величины $\gamma_{p,q}(n, N)$, определенной в § 1, нам понадобятся некоторые результаты, связанные с полиномами Чебышёва $T_n^{\alpha,\beta}(z, N)$, $0 \leq n \leq N-1$, образующими ортогональную систему на множестве $\{0, 1, \dots, N-1\}$ с весом

$$\mu(z) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(z+\beta+1)\Gamma(N-z+\alpha)}{\Gamma(z+1)\Gamma(N-z)}, \quad \alpha, \beta > -1. \quad (4.1)$$

Будем считать, что полиномы Чебышёва нормированы условием

$$T_n^{\alpha,\beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Тогда

$$\sum_{z=0}^{N-1} \mu(z) T_n^{\alpha,\beta}(z, N) T_m^{\alpha,\beta}(z, N) = \delta_{nm} h_{n,N}^{\alpha,\beta}, \quad (4.2)$$

где

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (4.3)$$

$$a^{[0]} = 1, \quad a^{[n]} = a(a-1)\cdots(a-n+1).$$

При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить через $\Gamma(\alpha+\beta+2)$. В случае $\alpha = \beta = 0$ мы применяем более простые обозначения

$$T_n(z) = T_n(z, N) = T_n^{0,0}(z, N), \quad h_{n,N} = h_{n,N}^{0,0}.$$

Положим

$$\tau_n(t) = \tau_{n,N}(t) = \frac{1}{h_{n,N}^{1/2}} T_n\left(\frac{N-1}{2}(1+t), N\right). \quad (4.4)$$

В силу (4.2) $\{\tau_{n,N}(t)\}_{n=0}^{N-1}$ образует ортонормированную с весом $\mu(t) = 2/N$ систему на множестве

$$\Omega_N = \left\{ -1 + \frac{2j}{N-1} \right\}_{j=0}^{N-1},$$

т. е.

$$\frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} \tau_n(t) \tau_m(t) = \delta_{nm}. \quad (4.5)$$

Мы будем пользоваться обозначениями и результатами работы [7]. Пусть $0 \leq \alpha, \beta$ — целые, $\lambda > 0$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда

$$\left| T_n^{\alpha,\beta}\left(\frac{N-1}{2}(1+t), N\right) \right| \leq \frac{c}{n^{1/2}} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \quad (4.6)$$

где $c = c(\alpha, \beta, \lambda)$.

Пусть

$$J_{l,N}(t, x) = \sum_{r=0}^l \tau_r(t) \tau_r(x), \quad (4.7)$$

$$I_{k,N}(t, x) = \sum_{l=0}^k J_{l,N}(t, x), \quad (4.8)$$

$$Q_n^{\alpha,\beta}(t) = Q_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = T_n^{\alpha,\beta} \left(\frac{N-1}{2}(1+t) - 1, N-1 \right), \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} X_1^k(t) = X_1^k(t, x) &= \frac{(1-x)(1+t)}{x-t} \sum_{l=0}^k \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} \\ &\times \frac{l+2}{2} Q_l^{0,1}(t) Q_l^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} X_2^k(t) = X_2^k(t, x) &= \sum_{l=0}^k \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} \\ &\times \frac{l+1}{2} \frac{T_{l,N}(x) T_{l,N}(t) - T_{l+1,N}(x) T_{l+1,N}(t)}{x-t}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $T_{l,N}(x) = T_l \left(\frac{N-1}{2}(1+x), N \right)$. В [7, (4.9), (4.11)] показано, что

$$I_{k,N}(t, x) = X_1^k(t, x) + X_2^k(t, x). \quad (4.12)$$

Далее, пусть

$$\begin{aligned} Y_1^k(t, x) &= \frac{(1-x)(1-t)}{(x-t)^2} \frac{k+2}{4} \frac{(N-3)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} \\ &\times \left(\left(\left(1-x - \frac{2}{N-1} \right) T_k^{2,0} \left(\frac{N-1}{2}(1+x), N-2 \right) Q_k^{0,1}(t) \right. \right. \\ &- (1-t) T_k^{1,1} \left(\frac{N-1}{2}(1+t) - 1, N-2 \right) Q_k^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \\ &\left. \left. - \frac{2(N-2)}{(2k+3)(N-1)} Q_k^{0,1}(t) Q_k^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\lambda_n^{\alpha,\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)} + \frac{q(n, \alpha, \beta)}{N-1}, \quad |q(n, \alpha, \beta)| \leq c(\alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned} Y_2^k(t, x) &= \frac{(1-x)(1+t)}{2(x-t)^2} \sum_{l=0}^k \left(\lambda_l^{1,0} - \lambda_l^{0,1} + \frac{2}{N-1} \right) \\ &\times \frac{(N-2)^{[l]}}{(N+l)^{[l]}} (l+1) Q_l^{0,1}(t) Q_l^{1,0} \left(x + \frac{2}{N-1} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Тогда (см. [7, (4.11), (4.12)])

$$X_1^k(t, x) = Y_1^k(t, x) + Y_2^k(t, x) \quad (4.15)$$

(отметим, что в правых частях равенств (4.11) и (4.12) из [7] пропущен множитель $\frac{1}{2}$ и, кроме того, в правой части равенства (4.12) в квадратных скобках вместо $1/(k+1)$ должен стоять множитель $2(N-2)/((N-1)(2k+3))$). Исходя из (4.6), (4.9), (4.13)–(4.15), в [7], в частности, доказано (см. [7, (4.16)]), что

$$|X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| \leq \frac{c(\lambda)}{(x-t)^2} (1+t)^{1/4} \times \left((1-x)^{3/4} (1-t)^{-1/4} + ((1-x)(1-t))^{1/4} + \frac{1}{n} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1/4} \right), \quad (4.16)$$

где $x \neq t$, $-1 \leq t < 1$, $0 \leq x \leq 1$, $n \leq \lambda\sqrt{N}$, $2n \leq N-1$. Если, кроме того, $1-4n^{-2} \leq x \leq 1$, то из неравенства (4.38) работы [7] непосредственно вытекает следующая оценка:

$$|X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| \leq \frac{c(\lambda)}{(x-t)^2} (1+t)^{1/4} (1-x)n^{1/2} ((1-t)^{-1/4} + n(1-t)^{1/4}), \quad (4.17)$$

где $-1 \leq t < 1$, $n \leq \lambda\sqrt{N}$, $2n \leq N-1$.

Из соотношений (4.17) и (4.18) работы [7] имеем

$$\begin{aligned} |X_2^{2n}(t, x) - X_2^{n-1}(t, x)| &\leq \frac{1}{|x-t|} \left| \sum_{l=n}^{2n} \frac{(N-2)^{[l]}}{2(N+l)^{[l]}} T_{l,N}(t) T_{l,N}(x) \right| \\ &+ \frac{1}{|x-t|} \left| - \sum_{l=n+1}^{2n-1} \frac{(N-2)^{[l]} (2l+1)l}{(N+l)^{[l]} (N-l-1)} T_{l,N}(t) T_{l,N}(x) \right| \\ &+ \frac{1}{|x-t|} \frac{(N-2)^{[2n]} (2n+1)}{(N+2n)^{[2n]}} |T_{2n+1,N}(t) T_{2n+1,N}(x)| \\ &+ \frac{1}{|x-t|} \frac{(N-2)^{[n]} n}{(N+n)^{[n]}} |T_{n,N}(t) T_{n,N}(x)|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Пусть $0 \leq x \leq 1-4n^{-2}$, $x_1 = x - \sqrt{1-x^2}/n$, $x_2 = x + \sqrt{1-x^2}/n$. Тогда из (4.6) при $n \leq l \leq 2n$, $n \leq \lambda\sqrt{N}$ мы выводим

$$\int_{-1}^{-1/2} \frac{|T_{l,N}(t) T_{l,N}(x)|}{x-t} dt \leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}}, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{x_1} \frac{|T_{l,N}(t) T_{l,N}(x)|}{x-t} dt &\leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}} |T_{l,N}(x)| \int_{-1/2}^{x_1} \frac{dt}{(x-t)(1-t)^{1/4}} \\ &\leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}} \int_{-1/2}^{x_1} \frac{dt}{(x-t)^{5/4}} \leq \frac{c(\lambda)n^{1/4}}{n^{1/2}(1-x^2)^{1/8}} \leq c(\lambda), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^1 \frac{|T_{l,N}(t) T_{l,N}(x)|}{t-x} dt &\leq |T_{l,N}(x)| \int_{x_2}^1 \frac{|T_{l,N}(t)|}{t-x} dt \\ &\leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}} \int_{x_2}^{(1+x)/2} \frac{dt}{(t-x)^{5/4}} + \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}} \int_{(1+x)/2}^{1-n^{-2}} (1-t)^{-5/4} dt \\ &+ c(\lambda) \int_{1-n^{-2}}^1 \frac{dt}{t-x} \leq c(\lambda). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Отметим еще следующую оценку:

$$\begin{aligned} |\tau_{n,N}(t)| &\leq c(\lambda) \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2}, \\ 0 \leq n &\leq \lambda\sqrt{N}, \quad -1 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (4.22)$$

вытекающую из (4.1), (4.4) и (4.6).

§5. Основные леммы

Пусть $2n \leq N-1$, $-1 \leq x \leq 1$,

$$V_n(x, N) = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} \frac{1}{n+1} |I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)|, \quad (5.1)$$

$$W_n(x) = W_n(x, N) = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 |I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)| dt. \quad (5.2)$$

Основную роль в дальнейшем играют следующие две леммы.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\lambda > 0$, $2n \leq N-1$. Тогда найдется такая постоянная $c = c(\lambda)$, что

$$\|V_n(\cdot, N)\|_\infty \leq c$$

равномерно относительно $0 \leq n \leq \lambda\sqrt{N}$, $N = 2, 3, \dots$.

Утверждение этой леммы содержится в качестве частного случая в теореме, доказанной в работе [7] (см. [7, §4]).

ЛЕММА 5.2. Пусть $\lambda > 0$, $2n \leq N-1$. Тогда найдется такая постоянная $c = c(\lambda)$, что

$$W_n(x, N) \leq c$$

равномерно относительно $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq n \leq \lambda\sqrt{N}$, $N = 2, 3, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы оценить $W_n(x)$ при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, разобьем интеграл (5.2) по схеме

$$\begin{aligned} W_n(x) &= \int_{-1}^1 = \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^1 \\ &= R_1(x) + R_2(x) + R_3(x) + R_4(x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

и воспользуемся оценкой

$$\begin{aligned} &|I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)| \\ &\leq |X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| + |X_2^{2n}(t, x) - X_2^{n-1}(t, x)|, \end{aligned} \quad (5.4)$$

вытекающей из равенства (4.12). Тогда из (4.16), (4.18) и (4.19) выводим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{-1/2} |X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| dt &\leq \frac{c(\lambda)}{n+1}, \\ \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{-1/2} |X_2^{2n}(t, x) - X_2^{n-1}(t, x)| dt &\leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}} \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (5.3) и (5.4) находим

$$R_1(x) \leq \frac{c(\lambda)}{n^{1/2}}. \quad (5.5)$$

Далее, из (4.16), (4.18) и (4.20) при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, учитывая неравенство $(1-t)^{1/4} \leq (1-x)^{1/4} + |x-t|^{1/4}$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \int_{-1/2}^{x_1} |X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| dt \\ & \leq \frac{c(\lambda)}{n} \left(\int_{-1/2}^{x_1} \frac{(1-x)^{1/2}}{(x-t)^2} dt + \int_{-1/2}^{x_1} \frac{(1-x)^{1/4}}{(x-t)^{7/4}} dt \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{x_1} \frac{dt}{(x-t)^2} \right) \leq c(\lambda), \\ & \frac{1}{n+1} \int_{-1/2}^{x_1} |X_2^{2n}(t, x) - X_2^{n-1}(t, x)| dt \leq c(\lambda). \end{aligned}$$

Поэтому из (5.3) и (5.4) выводим

$$R_2(x) \leq c(\lambda), \quad 0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}. \quad (5.6)$$

Оценим $R_3(x)$. Если $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$, то из (4.29) выводим

$$\begin{aligned} R_3(x) &= \frac{1}{n+1} \int_{x_1}^{x_2} |I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)| dt \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l \int_{x_1}^{x_2} |\tau_r(x) \tau_r(t)| dt \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l |\tau_r(x)| \int_{x_1}^{x_2} |\tau_r(t)| dt \\ &\leq \frac{c(\lambda)}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l |\tau_r(x)| \int_{x_1}^{x_2} (1-t)^{-1/4} dt \\ &\leq \frac{c(\lambda)}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l |\tau_r(x)| (x_2 - x_1) \frac{1}{(1-x_2)^{1/4}} \\ &\leq \frac{c(\lambda)}{n^2} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l 1 \leq c(\lambda). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Оценим, наконец, $R_4(x)$ при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$. Имеем

$$\begin{aligned} R_4(x) &\leq \frac{1}{n+1} \int_{x_2}^1 |X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| dt \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \int_{x_2}^1 |X_2^{2n}(t, x) - X_2^{n-1}(t, x)| dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из (4.16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \int_{x_2}^1 |X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| dt &\leq \frac{c(\lambda)}{n+1} \int_{x_2}^1 \frac{(1-x)^{3/4}(1-t)^{-1/4}}{(t-x)^2} dt \\ &+ \frac{c(\lambda)}{n+1} \int_{x_2}^1 \frac{(1-x)^{1/4}(1-t)^{1/4}}{(t-x)^2} dt + \frac{c(\lambda)}{n^2} \int_{x_2}^1 \frac{(1-x)^{1/4}}{(t-x)^2(1-t)^{1/4}} dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Далее, как показано в [7, (4.29), (4.30)],

$$\frac{1}{n} \int_{x_2}^1 \frac{(1-x)^{3/4}(1-t)^{-1/4}}{(t-x)^2} dt = \frac{1}{n} (1-x)^{3/4} \int_{x_2}^1 \frac{dt}{(t-x)^2(1-t)^{1/4}} \leq c. \quad (5.10)$$

Кроме того,

$$\frac{1}{n} \int_{x_2}^1 \frac{(1-x)^{1/4}(1-t)^{1/4}}{(t-x)^2} dt \leq \frac{(1-x)^{1/2}}{n} \int_{x_2}^1 \frac{dt}{(t-x)^2} \leq c, \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{n^2} \int_{x_2}^1 \frac{(1-x)^{1/4}(1-t)^{-1/4}}{(t-x)^2} dt \leq \frac{c(1-x)^{3/4}}{n} \int_{x_2}^1 \frac{dt}{(t-x)^2(1-t)^{1/4}} \leq c. \quad (5.12)$$

Сопоставляя (5.9)–(5.12), при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$ получаем

$$\frac{1}{n+1} \int_{x_2}^1 |X_1^{2n}(t, x) - X_1^{n-1}(t, x)| dt \leq c(\lambda). \quad (5.13)$$

Далее, в силу (4.18), (4.21)

$$\frac{1}{n+1} \int_{x_2}^1 |X_2^{2n}(t, x) - X_2^{n-1}(t, x)| dt \leq c(\lambda). \quad (5.14)$$

Из (5.8), (5.13) и (5.14) получаем

$$R_4(x) \leq c(\lambda). \quad (5.15)$$

Подставляя оценки (5.5)–(5.7), (5.15) в равенство (5.3), приходим к утверждению леммы 5.2 при $0 \leq x \leq 1 - 4n^{-2}$.

Перейдем к случаю $1 - 4n^{-2} \leq x \leq 1$. Чтобы оценить $W_n(x, N)$, разобьем интеграл (5.2) по схеме

$$W_n(x) \leq \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{1-8n^{-2}} + \int_{1-8n^{-2}}^1 = b_1(x) + b_2(x) + b_3(x). \quad (5.16)$$

Здесь $b_1(x)$ и $b_2(x)$ оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для $R_1(x)$ и $R_2(x)$, используя вместо (4.16) оценку (4.17). Это дает

$$b_1(x) + b_2(x) \leq c(\lambda), \quad n \leq \lambda\sqrt{N}. \quad (5.17)$$

Что касается $b_3(x)$, то воспользовавшись оценкой (4.22), имеем

$$\begin{aligned}
b_3(x) &= \frac{1}{n+1} \int_{1-8n^{-2}}^1 |I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)| dt \\
&\leq \int_{1-8n^{-2}}^1 \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} |J_l(t, x)| dt \\
&\leq \int_{1-8n^{-2}}^1 \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^l |\tau_k(t) \tau_k(x)| dt \\
&\leq \int_{1-8n^{-2}}^1 \frac{1}{n+1} \sum_{l=n}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} |\tau_k(t) \tau_k(x)| dt \\
&\leq \int_{1-8n^{-2}}^1 \sum_{k=0}^{2n} |\tau_k(t) \tau_k(x)| dt \\
&\leq c(\lambda) \int_{1-8n^{-2}}^1 \sum_{k=0}^{2n} (k+1) dt \\
&= c(\lambda) \frac{2n(2n+1)}{2} 8n^{-2} \leq c_1(\lambda).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Сопоставляя (5.16)–(5.18), приходим к утверждению леммы 5.2 для случая $1 - 4n^{-2} \leq x \leq 1$.

Остается случай, когда $-1 \leq x \leq 0$, который сводится к рассмотренному случаю $0 \leq x \leq 1$ с помощью равенства

$$W_n(-x, N) = W_n(x, N),$$

вытекающего из (5.2) и соотношения симметрии

$$\tau_n(-x) = (-1)^n \tau_n(x).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
W_n(-x, N) &= \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 |I_{2n,N}(t, -x) - I_{n-1,N}(t, -x)| dt \\
&= \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 \left| \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l \tau_r(t) \tau_r(-x) \right| dt \\
&= \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 \left| \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l \tau_r(-t) \tau_r(x) \right| dt \\
&= \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 \left| \sum_{l=n}^{2n} \sum_{r=0}^l \tau_r(t) \tau_r(x) \right| dt = W_n(x, N).
\end{aligned}$$

Лемма 5.2 полностью доказана.

§ 6. Об ограничении L_q -нормы алгебраического полинома сверху

Здесь мы получим оценку сверху для L_q -нормы произвольного полинома $p_n \in H^n$ и одновременно будет получена оценка сверху для величины $\gamma_{p,q}(n, N)$.

Обозначим через $S_n(f, x)$ сумму Фурье порядка n функции $f \in C[-1, 1]$ по ортонормированной системе полиномов Чебышёва $\tau_{k,N}(t)$, $0 \leq k \leq N-1$, т.е.

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}_k \tau_k(x), \quad (6.1)$$

где

$$\widehat{f}_k = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} f(t) \tau_k(t). \quad (6.2)$$

Положим ($2n \leq N-1$)

$$\begin{aligned} v_n(f) &= v_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=n}^{2n} S_\nu(f, x) \\ &= \sum_{t \in \Omega_N} f(t) \frac{1}{n+1} (I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если $p_n \in H^n$, то из (6.1)–(6.3) следует, что

$$p_n(x) = \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} p_n(t) \frac{1}{n+1} (I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)). \quad (6.4)$$

Из (6.4) имеем

$$|p_n(x)| \leq V_n(x) \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} |p_n(t)| \frac{1}{(n+1)V_n(x)} |I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)|.$$

Отсюда в силу неравенства Иенсена имеем ($p \geq 1$)

$$|p_n(x)|^p \leq (V_n(x))^{p-1} \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} |p_n(t)|^p \frac{1}{n+1} |I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |p_n(x)|^p dx &\leq \overline{V}_n^{p-1} \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} |p_n(t)|^p \\ &\quad \times \frac{1}{n+1} \int_{-1}^1 |I_{2n,N}(t, x) - I_{n-1,N}(t, x)| dx \\ &\leq \overline{V}_n^{p-1} \overline{W}_n \frac{2}{N} \sum_{t \in \Omega_N} |p_n(t)|^p, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\overline{V}_n = \|V_n(\cdot, N)\|_\infty, \quad \overline{W}_n = \|W_n\|_\infty.$$

Из лемм 5.1 и 5.2 следует, что

$$(\overline{V}_n^{p-1} \overline{W}_n)^{1/p} \leq c(\lambda, p). \quad (6.6)$$

Сопоставляя (6.5) и (6.6), выводим

$$\|p_n\|_p \leq c(\lambda, p) \|p_n\|_{p,N}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (6.7)$$

Предположим теперь, что $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тогда в силу (1.4) и (6.7)

$$\|p_n\|_q \leq c(p, q) n^{2(1/p-1/q)} \|p_n\|_p \leq c(\lambda, p, q) n^{2(1/p-1/q)} \|p_n\|_{p,N}.$$

Тем самым нами установлена

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\lambda > 0$, $n \leq \lambda \sqrt{N}$. Тогда

$$\gamma_{p,q}(n, N) \leq c(\lambda, p, q) n^{2(1/p-1/q)}.$$

В заключение автор благодарит Б. С. Кашина за полезные замечания.

Список литературы

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз., 1960.
2. Бернштейн С. Н. Sur une classe de formules d'interpolation // Изв. АН СССР. ОМОН. 1931. №9. С. 1151–1161.
3. Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Sci. Math. 1937. №8. Р. 127–130.
4. Лозинский С. М. О сходимости и суммируемости рядов Фурье и интерполяционных процессов // Матем. сб. 1944. Т. 14(56). №3. С. 175–268.
5. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
6. Coppersmith D., Rivlin T. J. The growth of polynomials bounded of equally spaced points // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. Р. 970–983.
7. Шарипудинов И. И. Об ограниченности в $C[-1, 1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Чебышёва // Матем. сб. 1996. Т. 187. №1. С. 143–160.
8. Schönhage A. Fehlerfortpflanzung bei Interpolation // Numer. Math. 1961. V. 3. Р. 62–71.
9. Ehlich H., Zeller K. Schwankung von Polynomen zwischen Gitterpunkten // Math. Z. 1964. V. 86. Р. 41–44.
10. Ehlich H., Zeller K. Numerische Abschätzung von Polynomen // Z. Angew. Math. Mech. 1965. V. 45. Р. T20–T22.
11. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз., 1962.

Дагестанский государственный университет,
Махачкала

Поступила в редакцию
22.04.1996