Общероссийский математический портал

А. С. Сорокин, Структурные формулы некоторых классов аналитических функций в конечносвязной области, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 12, 107–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:39:10

УДК 517.54

А. С. Сорокин

Структурные формулы некоторых классов аналитических функций в конечносвязной области

Дается распространение центральных теорем метода структурных формул для некоторых классов аналитических функций, полученных ранее для круга и кольца, на аналитические функции в конечносвязной круговой области.

Библиография: 10 названий.

В настоящей работе центральные теоремы метода структурных формул для некоторых классов аналитических функций, полученные ранее для круга и кольца, распространены на аналитические функции в конечносвязной круговой области.

Вывод формул основан на уже известных интегральных представлениях аналитических функций в конечносвязной круговой области (см. [1]–[3]).

Эти интегральные представления получены методом функциональных уравнений, основанным на разделении особенностей функции преобразования и на сведении задачи ее определения к системе функциональных уравнений, которые затем решаются методом последовательных подстановок.

В [1] было показано, как надлежащим изменением функциональных уравнений и методом последовательных подстановок достигается решение задачи для областей с любым расположением граничных кругов.

Указанные в теоремах 1.1–3.2 формулы, обобщающие структурные формулы на случай конечносвязных круговых областей, представляют собой развитие и усиление результатов Зморовича [4], [5], Паатеро [6], [7].

Известная структурная формула класса выпуклых, однолистных функций, регулярных в круге, была обобщена в 1953 году Зморовичем на случай кругового кольца [4].

В 1961 году Максимов [8] получил дальнейшее обобщение этой формулы на случай многосвязной круговой области. Решение дано в конструктивной форме, однако не для всех областей, а только для тех, которые удовлетворяют определенным условиям, обеспечивающим сходимость рядов, участвующих в образовании структурной формулы. Эти условия, говоря неформально, будут выполнены, когда радиусы внутренних окружностей конечносвязной круговой области достаточно малы, а радиус внешней окружности, охватывающей остальные, достаточно велик.

Из теорем 5.1, 5.2, содержащих структурные формулы для конечносвязных круговых областей с любым расположением граничных кругов, легко выводятся результаты Максимова [8].

§ 1. Структурная формула для аналитических функций в классе $\mathcal{B}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$

Пусть вещественные числа $R_k > 0$ и комплексные числа a_k ($a_0 = a_n = 0$), $k = 0, 1, \dots, n$, таковы, что выполнены неравенства

$$|a_k| < R_0 - R_k, \quad |a_k - a_j| > R_k + R_j, \quad k \neq j, \quad k, j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Будем рассматривать область $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ в плоскости z , представляющую собой пересечение круга $\mathcal{D}_0: |z| < R_0$ с внешностью кругов $\mathcal{D}_k: |z - a_k| \geq R_k$, $k = 1, \dots, n$, где a_k и R_k удовлетворяют условиям (1.1), и называть ее $(n+1)$ -связной круговой областью.

Назовем *функцией класса* $\text{VB}[a, b]$ каждую однозначную на сегменте $[a, b]$ вещественную функцию $\mu(\vartheta)$ с ограниченным изменением на этом сегменте, нормированную условием $\mu(a+0) = \mu(a) = 0$.

Далее, назовем *функцией класса* $\mathcal{B}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ каждую однозначную аналитическую в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию

$$\max_{0 \leq k \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{Re} f(a_k + \rho \exp(i\vartheta))| d\vartheta < L(f), \quad (1.2)$$

$$R_k < \rho < R_k^0 = \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

$$R_0 > \rho > R_0^0 = \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}, \quad (1.4)$$

где $L(f)$ — некоторая положительная постоянная, зависящая, вообще говоря, от выбора функции $f(z)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\tilde{\mu}_k(\vartheta) = \mu_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta))$, $k = 0, 1, \dots, n$, — функции класса $\text{VB}[-\pi, \pi]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{A}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{\mu}_m(\vartheta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) d\tilde{\mu}_k(\vartheta), \quad m = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

где

$$S_m(\zeta) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \neq k_2 \\ k_1 \neq k}}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \left(\frac{\zeta + \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)}{\zeta - \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)} \Big|_{b_k}^{a_m} - \frac{\zeta + \overline{E_{2\nu} L_k(z)}}{\zeta - \overline{E_{2\nu} L_k(z)}} \Big|_{b_k}^{a_m} \right), \quad (1.6)$$

$b_0 = 0$, $b_m = \infty$, $m = 1, \dots, n$, δ_k — символ Кронекера [1].

При этом

$$E_{2\nu}(z) = L_{k_1} \overline{L_{k_2}} \cdots L_{k_{2\nu-1}} \overline{L_{k_{2\nu}}}(z), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

$$E_0(z) \equiv z.$$

Кроме того,

$$L_k(\zeta) = \overline{a_k} + \frac{R_k^2}{\zeta - a_k}. \quad (1.8)$$

Далее, пусть

$$\mathcal{A}_0 + i\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z} dz, \quad (1.9)$$

$$R_0 > \rho > R_0^0 = \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}. \quad (1.10)$$

Тогда структурная формула

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta), z) d\tilde{\mu}_k(\vartheta) + \mathcal{A}_0 + i\mathcal{D}, \quad (1.11)$$

где

$$H_k(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \sum_{m=0}^n \frac{\zeta + \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)}{\zeta - \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)} \Big|_{b_m}^z, \quad (1.12)$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ классу $\mathcal{B}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Из формулы (1.11) следует

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(f(a_m + R_m \exp(i\vartheta))) \\ &= \mathcal{A}_0 + \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(H_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta), a_m + R_m \exp(i\vartheta)) \right) d\tilde{\mu}_k(\vartheta), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$m = 0, 1, \dots, n$. Очевидно, что каждую функцию $\tilde{\mu}_k(\vartheta)$, $k = 0, 1, \dots, n$, можно представить в виде

$$\tilde{\mu}_m(\vartheta) = \sigma_m(\vartheta) - \tau_m(\vartheta), \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

где $\sigma_m(\vartheta)$ и $\tau_m(\vartheta)$ — неубывающие на $[-\pi, \pi]$ функции с ограниченным изменением. Тогда, учитывая, что $\operatorname{Re} H_k(\zeta, z) > 0$, $\zeta \in \mathcal{C}_k(\zeta)$ ($\mathcal{C}_k(\zeta)$: $|\zeta - a_k| = R_k$, $k = 0, 1, \dots, n$), $z \in \mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, из (1.13) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{Re} f(a_k + R_k \exp(i\vartheta))| d\vartheta \leq \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma_m(\vartheta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau_m(\vartheta) \right) + |\mathcal{A}_0|,$$

$k = 0, 1, \dots, n$. Отсюда следует, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{B}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Необходимость. Рассмотрим функцию

$$H_k(\zeta, z; r_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \sum_{m=0}^n \frac{\zeta + \overline{\mathcal{L}_k} \mathcal{E}_{2\nu} \mathcal{L}_m(z)}{\zeta - \overline{\mathcal{L}_k} \mathcal{E}_{2\nu} \mathcal{L}_m(z)} \Big|_{b_m}^z, \quad (1.14)$$

где $0 < r_0 < 1$,

$$\mathcal{L}_k(z) = \overline{a_k} + \frac{(R_k r_0^{\delta_k})^2}{z - a_k}, \quad \mathcal{E}_{2\nu}(z) = \mathcal{L}_{k_1} \overline{\mathcal{L}_{k_2}} \cdots \overline{\mathcal{L}_{k_{2\nu}}}(z). \quad (1.15)$$

Ядерная функция $H_k(\zeta, z; r_0)$ играет для круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j r_0^{\delta_j}, a_j, j = 0, \dots, n)$ ту же роль, что и функция $H_k(\zeta, z)$ для круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Очевидно, что

$$\operatorname{Re} H_k(\zeta, z; r_0) \rightarrow \operatorname{Re} H_k(\zeta, z) \quad \text{при } r_0 \rightarrow 1$$

равномерно относительно z . Поскольку функция $f(z)$ регулярна в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j r_0^{\delta_j}, a_j, j = 0, \dots, n)$, то ее можно представить в этой области формулой

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(R_k r_0^{\delta_k}, \vartheta) H_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta), z; r_0) d\vartheta + \mathcal{A}_0 + i\mathcal{D}, \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} U_k(r, \varphi) &= \operatorname{Re} f(a_k + r \exp(i\varphi)), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ R_k < r < R_k^0 &= \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ R_0 > r > R_0^0 &= \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\} \end{aligned}$$

(см. [1]–[3]). Причем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_m(R_m r_0^{\delta_m}, \varphi) d\varphi \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(R_k r_0^{\delta_k}, \varphi) S_k(a_k + R_k \exp(i\varphi)) d\varphi, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 + i\mathcal{D} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz, \\ R_0 > r > R_0^0 &= \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}. \end{aligned}$$

Из формулы (1.16) получаем

$$U(r, \vartheta) = \mathcal{A}_0 + \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(R_k r_0^{\delta_k}, \varphi) \operatorname{Re} H_k(a_k + R_k r_0^{\delta_k} \exp(i\varphi), r \exp(i\vartheta); r_0) d\varphi. \quad (1.17)$$

Здесь $r \exp(i\vartheta) \in \mathcal{K}(R_j r_0^{\delta_j}, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Пусть величина r_0 в формуле (1.17) пробегает последовательность значений r_p , где $r_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow +\infty$, причем $0 < r_p < 1$, $p = 1, 2, \dots$.

Положим

$$U(\rho, \varphi) = U^+(\rho, \varphi) - U^-(\rho, \varphi), \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} U^+(\rho, \varphi) &= U(\rho, \varphi) \quad \text{при} \quad U(\rho, \varphi) \geq 0, \\ U^-(\rho, \varphi) &= -U(\rho, \varphi) \quad \text{при} \quad U(\rho, \varphi) \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$|U(\rho, \varphi)| = U^+(\rho, \varphi) + U^-(\rho, \varphi)$$

и из условия

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} |U(\rho_k, \varphi)| d\varphi &< L, \\ R_k < \rho_k < R_k^0 &= \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ R_0 > \rho_0 > R_0^0 &= \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} U^+(\rho_k, \varphi) d\varphi &< L, \quad \max_{0 \leq k \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} U^-(\rho_k, \varphi) d\varphi < L, \quad (1.19) \\ R_k < \rho_k < R_k^0 &= \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ R_0 > \rho_0 > R_0^0 &= \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}. \end{aligned}$$

Пользуясь (1.19), формулу (1.17) можно представить в виде

$$U(r, \vartheta) = \mathcal{A}_0 + \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} H_k(a_k + R_k r_p^{\delta_k} \exp(i\varphi), r \exp(i\vartheta); r_p) d\mu_k^{(p)}(\varphi), \quad (1.20)$$

где

$$\mu_m^{(p)}(\varphi) = \sigma_m^{(p)}(\varphi) - \tau_m^{(p)}(\varphi), \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

причем

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(p)}(\varphi) &= \int_{-\pi}^{\varphi} U_m^+(\rho_{j,p}, \psi) d\psi, \quad \tau_m^{(p)}(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} U_m^-(\rho_{j,p}, \psi) d\psi, \\ \rho_{j,p} &= R_j r_p^{\delta_j}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функции $\sigma_m^{(p)}(\varphi)$, $\tau_m^{(p)}(\varphi)$, $m = 0, 1, \dots, n$, — неубывающие на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Кроме того,

$$\mu_m^{(p)}(-\pi + 0) = \mu_m^{(p)}(-\pi) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_m^{(p)}(\varphi) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(a_k + R_k \exp(i\varphi)) d\mu_k^{(p)}(\varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_m(\rho, \varphi) d\varphi = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(\rho, \varphi) S_k(a_k + R_k \exp(i\varphi)) d\varphi, \end{aligned}$$

$m = 1, \dots, n$, где

$$\begin{aligned} R_k < \rho < R_k^0 &= \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ R_0 > \rho > R_0^0 &= \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}. \end{aligned}$$

Причем

$$\text{Var}(\sigma_m^{(p)}(\varphi))|_{[-\pi, \pi]} < L, \quad \text{Var}(\tau_m^{(p)}(\varphi))|_{[-\pi, \pi]} < L, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Полагая в (1.20) p стремящимся к $+\infty$, нетрудно убедиться на основании теоремы Хелли, что имеет место формула

$$U(r, \vartheta) = \mathcal{A}_0 + \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re } H_k(a_k + R_k \exp(i\varphi), r \exp(i\vartheta)) d\mu_k(\varphi),$$

где

$$\mu_k(\varphi) \in \text{VB}[-\pi, \pi], \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

причем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_m(\varphi) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(a_k + R_k \exp(i\varphi)) d\mu_k(\varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_m(\rho, \varphi) d\varphi = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(\rho, \varphi) S_k(a_k + R_k \exp(i\varphi)) d\varphi, \end{aligned}$$

$m = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} R_k < \rho < R_k^0 &= \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ R_0 > \rho > R_0^0 &= \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}. \end{aligned}$$

Здесь $r \exp(i\vartheta) \in \mathcal{K}(R_j r_0^{\delta_j}, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Так как r_0 можно считать сколь угодно близким к единице, то формула (1.20) доказана для всей круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$. Отсюда следует, что и формула (1.11) тоже установлена, так как известно, что при совпадении вещественных частей двух аналитических функций в некоторой области эти функции совпадают в этой области с точностью до чисто мнимой постоянной.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.1. Если в условиях теоремы 1.1 предположить, что функции $\mu(\vartheta)$, $\tilde{\mu}_k(\vartheta)$, $k = 0, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы на сегменте $[-\pi, \pi]$, то формула (1.11) превращается в формулу Шварца для конечно-связной круговой области [1], [2].

СЛЕДСТВИЕ 1.1.2. Если в условиях теоремы 1.1 положить $n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [4], [5].

СЛЕДСТВИЕ 1.1.3. Если в условиях теоремы 1.1 положить $n = 0$, то получаем известную теорему Паатеро [6], [7].

§2. Структурная формула для аналитических функций в классе $\mathcal{B}_1(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$

Назовем функцией класса $\mathcal{B}_N(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ каждую однозначную мероморфную в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функцию $f(z)$, имеющую в этой круговой конечносвязной области конечное число полюсов не выше N -го порядка и принадлежащую классам $\mathcal{B}(R_j, \delta'_j)$, $j = 1, \dots, n$, $\mathcal{B}(\delta'_0, R_0)$,

$$R_k < \delta'_k < R_k^0 = \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$R_0 > \delta'_0 > R_0^0 = \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\},$$

при достаточно малом $\delta'_j - R_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, $R_0 - \delta'_0 > 0$.

Заметим, что

$$\mathcal{B}_0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n) \equiv \mathcal{B}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n),$$

$$\mathcal{B}_M(R_j, a_j, j = 0, \dots, n) \supset \mathcal{B}_N(R_j, a_j, j = 0, \dots, n) \quad \text{при } M > N.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть

$$\omega_m(z; \alpha_p, \mathcal{C}_p) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{\mathcal{C}_p}}{\alpha_p} \overline{H_m(\overline{\alpha_p}, L_m(z))} - \frac{\mathcal{C}_p}{\alpha_p} H_m(\alpha_p, z) \right),$$

где

$$H_k(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \sum_{m=0}^n \frac{\zeta + \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)}{\zeta - \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)} \Big|_{b_m}^z,$$

$$b_0 = 0, \quad b_m = \infty, \quad m = 1, \dots, n,$$

$$E_{2\nu}(z) = L_{k_1} \overline{L_{k_2}} \cdots L_{k_{2\nu-1}} \overline{L_{k_{2\nu}}}(z), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

$$E_0(z) \equiv z, \quad L_k(\zeta) = \overline{a_k} + \frac{R_k^2}{\zeta - a_k},$$

а α_p и $\mathcal{C}_p$, $p = 1, \dots, N$, — комплексные числа такие, что

$$R_k < |\alpha_p| < R_k^0 = \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$R_0 > |\alpha_p| > R_0^0 = \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}, \quad p = 1, \dots, N.$$

Приведем

$$\operatorname{Re} \omega_m(z, \alpha_p, \mathcal{C}_p) \Big|_{|z-a_k|=R_k} = \begin{cases} 0, & k = m, \\ \lambda_{m,k}(p), & k \neq m, \end{cases} \quad \lambda_m = \sum_{p=1}^N \lambda_{0,m}(p).$$

Далее, пусть $\tilde{\mu}_k(\vartheta) \in \operatorname{VB}[-\pi, \pi]$, $k = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{\mu}_m(\vartheta) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) d\tilde{\mu}_k(\vartheta) - \operatorname{Re} \lambda_m \\ &+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \operatorname{Re} \lambda_k \beta_k, \quad m = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_m(\zeta) &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \neq k_2 \\ k_1 \neq m}}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \left(\frac{\zeta + \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)}{\zeta - \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)} \Big|_{b_k}^{a_m} - \frac{\zeta + \overline{E_{2\nu} L_k}(z)}{\zeta - \overline{E_{2\nu} L_k}(z)} \Big|_{b_k}^{\overline{a_m}} \right), \\ \beta_k &= \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{|z-a_k|=\rho_k} S_k(z) dz, \\ R_k &< \rho_k < R_k(1+\delta) < \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ R_0 &> \rho_0 > R_0(1-\delta) > \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 + i\mathcal{D} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z} dz, \\ R_0 &> \rho > R_0(1-\delta) > \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ и достаточно мало.

Тогда структурная формула

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{p=1}^N \omega_0(z; \alpha_p, \mathcal{C}_p) + \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta), z) d\tilde{\mu}_k(\vartheta) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{\mu}_0(\vartheta) + i\mathcal{D}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где N — число полюсов функции $f(z)$ в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ классу $\mathcal{B}_1(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Так как функция $\omega_0(z; \alpha_p, \mathcal{C}_p)$, $\alpha_p \in \mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, $p = 1, \dots, n$, мероморфна в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и имеет в этой области только один полюс, а именно, простой полюс в точке α_p с вычетом $\mathcal{C}_p$ [9, § 5, п. 23] и так как функция

$$\Psi(z) = f(z) - \sum_{p=1}^N \omega_0(z; \alpha_p, \mathcal{C}_p)$$

в силу теоремы 1.1 принадлежит классу $\mathcal{B}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, то $f(z) \in \mathcal{B}_1(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Необходимость. Пусть полюсами функции $f(z)$ класса $\mathcal{B}_1(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и ее вычетами относительно этих полюсов будут, соответственно, α_p и $\mathcal{C}_p$, где

$$R_k < |\alpha_p| < R_k^0 = \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$R_0 > |\alpha_p| > R_0^0 = \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}, \quad p = 1, \dots, N.$$

Образум функцию особенностей

$$\Phi(z) = \sum_{p=1}^N \omega_0(z; \alpha_p, \mathcal{C}_p).$$

Введем обозначение

$$\Psi(z) = f(z) - \Phi(z).$$

Легко видеть, что $\Psi(z) \in \mathcal{B}_0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$. Тогда по теореме 1.1 будем иметь

$$f(z) = \Phi(z) + \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta), z) d\mu_k^*(\vartheta) + \mathcal{A}_0^* + i\mathcal{D}^*, \quad (2.2)$$

где

$$\mu_k^*(\vartheta) \in \text{VB}[-\pi, \pi], \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Причем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_m^*(\vartheta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) d\mu_k^*(\vartheta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re } \Psi(a_m + \rho \exp(i\varphi)) d\varphi \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re } \Psi(a_k + \rho \exp(i\varphi)) S_k(a_k + R_k \exp(i\varphi)) d\varphi, \quad m = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$R_k < \rho < R_k^0 = \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$R_0 > \rho > R_0^0 = \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\},$$

где

$$S_m(\zeta) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \neq k_2 \\ k_1 \neq k}}^{k_2 \neq k} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \left(\frac{\zeta + \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)}{\zeta - \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)} \Big|_{b_k}^{a_m} - \frac{\zeta + \overline{E_{2\nu} L_k}(z)}{\zeta - \overline{E_{2\nu} L_k}(z)} \Big|_{\overline{b_k}}^{\overline{a_m}} \right).$$

Кроме того,

$$\mathcal{A}_0^* + i\mathcal{D}^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{\Psi(z)}{z} dz, \quad R_0 > \rho > R_0^0 = \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}.$$

Формула (2.2) и есть искомая.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(R_0 \exp(i\varphi)) &= 0, \\ \operatorname{Re} \Phi(a_k + R_k \exp(i\varphi)) &= -\operatorname{Re} \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m^* + i\mathcal{D}_m^* &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a_m|=\rho_m} \frac{f(z)}{z-a_m} dz + \operatorname{Re} \lambda_m + i \operatorname{Im} \lambda_m \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{|z-a_k|=\rho_k} \frac{f(z)}{z-a_k} S_k(z) dz + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n (\operatorname{Re} \lambda_k + i \operatorname{Im} \lambda_k) \beta_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{|z-a_k|=\rho_k} S_k(z) dz, \\ R_k < \rho_k < R_k(1+\delta) &< \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq k}} \{|a_m - a_k| - R_m\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ R_0 > \rho_0 > R_0(1-\delta) &> \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}, \end{aligned}$$

причем $\delta > 0$ и достаточно мало.

Положим

$$\mu_m^*(\vartheta) = \mu_m(\vartheta) + (\pi + \varphi) \left(\operatorname{Re} \lambda_m - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \operatorname{Re} \lambda_k \beta_k \right), \quad m = 1, \dots, n,$$

$$\mu_0^*(\vartheta) = \mu_0(\vartheta),$$

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m^* - \operatorname{Re} \lambda_m + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \operatorname{Re} \lambda_k \beta_k,$$

$$\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_m^* - \operatorname{Im} \lambda_m + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \operatorname{Im} \lambda_k \beta_k.$$

Тогда формула (2.2) принимает вид (2.1).

Возникает вопрос о единственности интегрального представления (2.1). Так как по заданной вещественной части функции $f(z)$ регулярная в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функция $f(z) - \Phi(z) - \mathcal{A}_0 - i\mathcal{D}$ определяется единственным образом, то функции $\mu_m(\varphi)$, $m = 0, 1, \dots, n$, определены с точностью до их значений в точках разрыва, причем эта неопределенность устраняется соответствующей нормировкой этих функций в их точках разрыва.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. *Если в условиях теоремы 2.1 предположить, что функции $\tilde{\mu}_k(\vartheta)$, $k = 0, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы на сегменте $[-\pi, \pi]$, то формула (2.1) превращается в обобщение формулы Шварца для конечносвязной круговой области на мероморфные функции, обладающие только простыми полюсами.*

СЛЕДСТВИЕ 2.1.2. *Если в условиях теоремы 2.1 положить $n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [5].*

§3. Структурная формула для мероморфных аналитических функций в $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$

Назовем функцией класса $\mathcal{B}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ каждую однозначную мероморфную в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию

$$f_1(z) \equiv \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{B}_1(R_j, a_j, j = 0, \dots, n). \quad (3.1)$$

Назовем функцией класса $\mathcal{B}^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ каждую однозначную мероморфную в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию

$$f_2(z) \equiv 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{B}_1(R_j, a_j, j = 0, \dots, n). \quad (3.2)$$

Имеют место теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\mu_k(\vartheta)$, $k = 0, 1, \dots, n$, — функции класса $\text{VB}[-\pi, \pi]$, удовлетворяющие соотношениям*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_m(\vartheta) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) d\mu_k(\vartheta) \\ &\quad - \lambda_m + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \lambda_k \beta'_k, \quad m = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\lambda_m = -\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N_0} \omega_0(\zeta; \alpha_j, p_j \alpha_j) + \sum_{k=1}^{N_p} \omega_0(\zeta; \beta_k, -s_k \beta_k) \right) \Big|_{|\zeta - a_m| = R_m}.$$

Здесь

$$\omega_m(z; \alpha_p, \mathcal{C}_p) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{\mathcal{C}_p}}{\alpha_p} \overline{H_m}(\overline{\alpha_p}, L_m(z)) - \frac{\mathcal{C}_p}{\alpha_p} H_m(\alpha_p, z) \right),$$

где

$$H_k(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \sum_{m=0}^n \frac{\zeta + \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)}{\zeta - \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)} \Big|_{b_m}^z, \\ b_0 = 0, \quad b_m = \infty, \quad m = 1, \dots, n, \\ \beta'_k = \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{|z-a_k|=\rho_k} S_k(z) dz,$$

δ_k – символ Кронекера, p_j , $j = 1, \dots, N_0$, и s_k , $k = 1, \dots, N_p$, – целые, неотрицательные числа.

Причем

$$S_m(\zeta) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \left(\frac{\zeta + \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)}{\zeta - \overline{L_m} E_{2\nu} L_k(z)} \Big|_{b_k}^{a_m} - \frac{\zeta + \overline{E_{2\nu} L_k}(z)}{\zeta - \overline{E_{2\nu} L_k}(z)} \Big|_{\overline{b_k}}^{\overline{a_m}} \right).$$

При этом

$$L_k(\zeta) = \overline{a_k} + \frac{R_k^2}{\zeta - a_k}, \\ E_{2\nu}(z) = L_{k_1} \overline{L_{k_2}} \cdots L_{k_{2\nu-1}} \overline{L_{k_{2\nu}}}(z), \quad \nu = 1, 2, \dots, \\ E_0(z) \equiv z.$$

Тогда структурная формула

$$f(z) = C z^{\alpha+\beta+i\mathcal{D}} Q(z) \exp\left(\frac{1}{2\pi} S(z)\right), \quad (3.4)$$

где C – комплексная постоянная, α – целое число, является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ классу $\mathcal{B}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Здесь

$$\beta = \sum_{\kappa=0}^n \delta_{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n A_{\kappa, \nu, k} (a_k + R_k \exp(i\vartheta)) d\mu_{\kappa}(\vartheta),$$

где

$$A_{\kappa, \nu, k}(\zeta) = \frac{2(\zeta - a_{\kappa})(N_{\kappa, \nu, k}(0) - N_{\kappa, \nu, k}(b_k))}{(\zeta - N_{\kappa, \nu, k}(0))(\zeta - N_{\kappa, \nu, k}(b_k))},$$

причем

$$N_{k, \nu, m}(z) = \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z).$$

При этом

$$Q(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \prod_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \prod_{k=0}^n \left(\frac{G_{m,\nu,k}(z, N_0)}{G_{m,\nu,k}(z, N_p)} \right), \quad (3.5)$$

где

$$G_{m,\nu,k}(z, N) = E_{m,\nu,k}(z, N) z^{F_{m,\nu,k}(N)},$$

$$E_{m,\nu,k}(z; \zeta, p_j) = \frac{(z - \overline{L_m M_{k,\nu,m}(\zeta)})^{\overline{p_j} D_{m,\nu,k}(\zeta)}}{(z - M_{k,\nu,m}(\zeta))^{p_j B_{m,\nu,k}(\zeta)}}.$$

Кроме того,

$$S(z) = \sum_{\kappa=0}^n \delta_{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n B_{\kappa,\nu,k}(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) \times \ln(z - M_{k,\nu,\kappa}(a_k + R_k \exp(i\vartheta))) d\mu_{\kappa}(\vartheta), \quad (3.6)$$

где

$$B_{\kappa,\nu,k}(\zeta) = \frac{2(\zeta - a_{\kappa})(N_{\kappa,\nu,k}(\infty) - N_{\kappa,\nu,k}(0))}{(\zeta - N_{\kappa,\nu,k}(0))(\zeta - N_{\kappa,\nu,k}(\infty))},$$

$$M_{m,\nu,k}(z) = \overline{L_m} L_{k_{2\nu}} \overline{L_{k_{2\nu-1}}} \cdots L_{k_2} \overline{L_{k_1}} L_k(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Вычисляя функцию $f_1(z) \equiv \frac{zf'(z)}{f(z)}$ на основании (3.3) и учитывая, что

$$H_k(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \sum_{m=0}^n \frac{\zeta + \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)}{\zeta - \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z)} \Big|_{b_m}^z,$$

получаем формулу (2.1), когда $\mathcal{D} = 0$. Отсюда следует, что $f_1(z) \in \mathcal{B}_1(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и $f(z) \in \mathcal{B}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Необходимость. Обозначая через $\alpha_j, j = 1, \dots, N_0$, нули, а через $\beta_k, k = 1, \dots, N_p$, — полюсы функции $f(z)$ в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, через p_j и s_k — кратности α_j и β_k , соответственно, получаем для $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ интегральное представление

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{N_0} \omega_0(z; \alpha_j, p_j \alpha_j) + \sum_{k=1}^{N_p} \omega_0(z; \beta_k, -s_k \beta_k) + \sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta), z) d\mu_k(\vartheta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_0(\vartheta) + i\mathcal{D}, \quad (3.7)$$

где

$$\mu_k(\vartheta) \in \text{VB}[-\pi, \pi], \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Причем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_m(\vartheta) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_k(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) d\mu_k(\vartheta) \\ &\quad - \lambda_m + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \lambda_k \beta'_k, \quad m = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta'_k &= \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{|z-a_k|=\rho_k} S_k(z) dz, \\ \lambda_m &= -\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{N_0} \omega_0(\zeta; \alpha_j, p_j \alpha_j) + \sum_{k=1}^{N_p} \omega_0(\zeta; \beta_k, -s_k \beta_k) \right) \Big|_{|\zeta-a_m|=R_m} \\ &= \sum_{j=1}^{N_0} p_j - \sum_{k=1}^{N_p} s_k. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 + i\mathcal{D} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z} dz, \\ R_0 > \rho > R_0(1-\delta) &> \max_{1 \leq m \leq n-1} \{R_m + |a_m|\}, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ и достаточно мало.

Пусть при любом натуральном ν

$$A_{\kappa, \nu, k}(\zeta) = \frac{2(\zeta - a_\kappa)(N_{\kappa, \nu, k}(0) - N_{\kappa, \nu, k}(b_k))}{(\zeta - N_{\kappa, \nu, k}(0))(\zeta - N_{\kappa, \nu, k}(b_k))}, \quad (3.8)$$

$$B_{\kappa, \nu, k}(\zeta) = \frac{2(\zeta - a_\kappa)(N_{\kappa, \nu, k}(\infty) - N_{\kappa, \nu, k}(0))}{(\zeta - N_{\kappa, \nu, k}(0))(\zeta - N_{\kappa, \nu, k}(\infty))}, \quad (3.9)$$

$$C_{\kappa, \nu, k}(\zeta) = \frac{2(\bar{\zeta} - \overline{a_\kappa})(\overline{N_{\kappa, \nu, k}} L_\kappa(0) - \overline{N_{\kappa, \nu, k}}(\bar{b}_k))}{(\bar{\zeta} - \overline{N_{\kappa, \nu, k}} L_\kappa(0))(\bar{\zeta} - \overline{N_{\kappa, \nu, k}}(\bar{b}_k))}, \quad (3.10)$$

$$D_{\kappa, \nu, k}(\zeta) = \frac{2(\bar{\zeta} - \overline{a_\kappa})(\overline{N_{\kappa, \nu, k}} L_\kappa(\infty) - \overline{N_{\kappa, \nu, k}} L_\kappa(0))}{(\bar{\zeta} - \overline{N_{\kappa, \nu, k}}(0))(\bar{\zeta} - \overline{N_{\kappa, \nu, k}}(\infty))}. \quad (3.11)$$

Нам потребуется функция

$$N_{k, \nu, m}(z) = \overline{L_k} E_{2\nu} L_m(z). \quad (3.12)$$

При этом

$$E_{2\nu}(z) = L_{k_1} \overline{L_{k_2}} \cdots L_{k_{2\nu-1}} \overline{L_{k_{2\nu}}}(z), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

где

$$L_k(z) = \overline{a_k} + \frac{R_k^2}{z - a_k}. \quad (3.14)$$

Функция $M_{m,\nu,k}(z)$, обратная $N_{k,\nu,m}(z)$, имеет вид:

$$M_{m,\nu,k}(z) = \overline{L_m} L_{k_{2\nu}} \overline{L_{k_{2\nu-1}}} \cdots L_{k_2} \overline{L_{k_1}} L_k(z). \quad (3.15)$$

Из формул (3.12)–(3.15) следует

$$\begin{aligned} N_{k,\nu,m}(z) &= N_{k,\nu,m}(\infty) \frac{z - M_{m,\nu,k}(0)}{z - M_{m,\nu,k}(\infty)}, \\ M_{m,\nu,k}(z) &= M_{m,\nu,k}(\infty) \frac{z - N_{k,\nu,m}(0)}{z - N_{k,\nu,m}(\infty)}. \end{aligned}$$

С целью более компактной записи сумм функций, определенных в $\mathcal{D}_m$, будем использовать следующие обозначения:

$$E_{m,\nu,k}(z; \zeta, p_j) = \frac{(z - \overline{L_m M_{k,\nu,m}(\zeta)})^{\overline{p_j} D_{m,\nu,k}(\zeta)}}{(z - M_{k,\nu,m}(\zeta))^{p_j B_{m,\nu,k}(\zeta)}}, \quad (3.16)$$

$$F_{m,\nu,k}(\zeta; p_j) = \overline{p_j} C_{m,\nu,k}(\zeta) - p_j A_{m,\nu,k}(\zeta), \quad (3.17)$$

$$F_{m,\nu,k}(N_0) = \sum_{j=1}^{N_0} F_{m,\nu,k}(\alpha_j, p_j), \quad (3.18)$$

$$F_{m,\nu,k}(N_p) = \sum_{h=1}^{N_p} F_{m,\nu,k}(\beta_h, s_h), \quad (3.19)$$

$$E_{m,\nu,k}(z; N_0) = \prod_{j=1}^{N_0} E_{m,\nu,k}(z; \alpha_j, p_j), \quad (3.20)$$

$$E_{m,\nu,k}(z; N_p) = \prod_{h=1}^{N_p} E_{m,\nu,k}(z; \beta_h, s_h). \quad (3.21)$$

Умножая обе части равенства (3.7) на $\frac{dz}{z}$, интегрируя и затем потенцируя, получаем

$$f(z) = C z^{\mathcal{A}_0 + \beta + i\mathcal{D}} Q(z) \exp\left(\frac{1}{2\pi} S(z)\right),$$

где C – комплексная постоянная, $\mathcal{A}_0$ – целое число.

Функции $Q(z)$ и $S(z)$ определяются, соответственно, формулами

$$Q(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \prod_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \prod_{k=0}^n \left(\frac{G_{m,\nu,k}(z, N_0)}{G_{m,\nu,k}(z, N_p)} \right), \quad (3.22)$$

где

$$G_{m,\nu,k}(z, N) = E_{m,\nu,k}(z, N) z^{F_{m,\nu,k}(N)},$$

и

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{\kappa=0}^n \delta_{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n B_{\kappa,\nu,k}(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) \\ &\quad \times \ln(z - M_{k,\nu,\kappa}(a_k + R_k \exp(i\vartheta))) d\mu_{\kappa}(\vartheta), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\beta = \sum_{\kappa=0}^n \delta_{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_2 \neq k \\ k_1 \neq k_2}} \sum_{k=0}^n A_{\kappa, \nu, k} (a_k + R_k \exp(i\nu)) d\mu_{\kappa}(\vartheta),$$

где $A_{\kappa, \nu, k}(\zeta)$ и $B_{\kappa, \nu, k}(\zeta)$ определяются, соответственно, формулами (3.8), (3.9).

Так как функция $f(z)$ однозначна в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, то $\mathcal{D} = 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. *Если в условиях теоремы 3.1 положить $R_0 = 1$, $n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [4].*

ТЕОРЕМА 3.2. *Структурная формула*

$$f(z) = C \int z^{\alpha-1} Q(z) \exp\left(\frac{1}{2\pi} S(z)\right) dz + C_1, \quad (3.24)$$

где C и C_1 – комплексные постоянные, α – целое число, является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ классу $\mathcal{B}^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Здесь функции $Q(z)$, $S(z)$ определяются, соответственно, формулами (3.22), (3.23).

Доказательство теоремы 3.2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 с учетом (3.2).

СЛЕДСТВИЕ 3.2.1. *Если в условиях теоремы 3.2 положить $R_0 = 1$, $n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [4].*

Между постоянными, входящими в формулу (3.7), существуют дополнительные соотношения (см. § 4, (4.27)), обеспечивающие равенство нулю вычетов подынтегральной функции относительно b_p , $p = 0, 1, \dots, N$.

Ограничимся рассмотрением только регулярных в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функций $f(z)$, для которых $\alpha \geq 1$, и обозначим множества таких функций, входящие в классы $\mathcal{B}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и $\mathcal{B}^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, соответственно, через $\tilde{\mathcal{B}}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и $\tilde{\mathcal{B}}^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

Из теорем 3.1 и 3.2 следуют теоремы.

ТЕОРЕМА 3.3. *Если однозначная мероморфная в круговой конечносвязной области $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функция $f(z)$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{B}}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, то функция $\int \frac{f(z)}{z} dz$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{B}}^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.*

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. *Если в условиях теоремы 3.3 положить $R_0 = 1$, $n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [4].*

СЛЕДСТВИЕ 3.3.2. *Если в условиях предыдущего следствия 3.3.1 устремить R_1 к нулю, то получаем известную теорему Александра [6].*

ТЕОРЕМА 3.4. Если регулярная функция $f(z)$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{B}}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, то функция $\int \frac{f(z)}{z} dz$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{B}}^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.1. Если в условиях теоремы 3.4 положить $R_0 = 1, n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [5].

СЛЕДСТВИЕ 3.4.2. Если в условиях предыдущего следствия 3.4.1 устремить R_1 к нулю, то получаем известную теорему Александра [7].

ТЕОРЕМА 3.5. Если регулярная функция $f(z)$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{B}}^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$, то функция $zf'(z)$ принадлежит классу $\tilde{\mathcal{B}}^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5.1. Если в условиях теоремы 3.5 положить $R_0 = 1, n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [5].

СЛЕДСТВИЕ 3.5.2. Если в условиях предыдущего следствия 3.5.1 устремить R_1 к нулю, то получаем известную теорему Александра [7].

§ 4. Построение решения задачи Шварца для мероморфных функций

Построим решение задачи Шварца в классе функций, мероморфных в $(n+1)$ -связной круговой области $\mathcal{K}$. Пусть заданы точки $b_1, b_2, \dots, b_n$, где функция $f^{**}(z)$ имеет кратные полюсы, кратностей, соответственно, $N_1, N_2, \dots, N_n$.

Нахождение такой функции $f^{**}(z)$ по известным значениям ее вещественной части $f_k^{**}(\zeta)$ на граничных компонентах $\mathcal{C}_k(\zeta)$: $|\zeta - a_k| = R_k, k = 0, 1, \dots, n$, сведем к решению специальных систем уравнений, используя возможность представить функцию $f^{**}(z)$ в следующем виде [9, гл. 3, § 1, п. 42]:

$$f^{**}(z) = M + \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) + \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \frac{B_p^j}{(z - b_j)^p}, \quad (4.1)$$

где $M, B_p^j, j = 1, \dots, H, p = 1, \dots, N_j$, — некоторые постоянные, $\varphi_k(z)$ — регулярная функция в $\mathcal{D}_k, k = 0, 1, \dots, n$.

В силу принятых обозначений, на граничных компонентах $\mathcal{C}_k(\zeta)$ области $\mathcal{K}$ имеют место соотношения

$$\operatorname{Re} f^{**}(\zeta) = f_m^{**}(\zeta), \quad \zeta \in \mathcal{C}_m(\zeta), \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Обратимся к выводу специальных систем уравнений для определения функций $\varphi_k(z), k = 0, 1, \dots, n$.

Умножим обе части равенства (4.2) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

и проинтегрируем произведение по $\mathcal{C}_m(\zeta), m = 0, 1, \dots, n$.

Преобразовав результат с помощью формул Коши для ограниченных и неограниченных областей с учетом

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_k(\infty) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

придем к искомой системе

$$\begin{aligned} M + \overline{M} + \varphi_0(z) + \sum_{k=1}^n \overline{\varphi_k} L_0(z) + \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(X_{p,0}^j(z) B_p^j + \psi_{p,0}^j(z) \overline{B_p^j} \right) &= F_0(z), \\ \varphi_m(z) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \overline{\varphi_k} L_m(z) \Big|_{\infty}^z + \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(X_{p,m}^j(z) B_p^j + \psi_{p,m}^j(z) \overline{B_p^j} \right) &= F_m(z), \\ m = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$F_m(z) = \frac{\delta_m}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_m(\zeta)} \frac{f_m^{**}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 0, \\ -1, & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

При этом

$$X_{p,m}^j(z) = \frac{\delta_m}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_m(\zeta)} \frac{1}{(\zeta - b_j)^p (\zeta - z)} d\zeta, \quad (4.7)$$

$$\psi_{p,m}^j(z) = \frac{\delta_m}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_m(\zeta)} \frac{1}{(L_m(\zeta) - \overline{b_j})^p (\zeta - z)} d\zeta, \quad (4.8)$$

$$m = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, H, \quad p = 1, \dots, N_j.$$

Полагая в (4.3) $z = 0$, получаем

$$F_0(0) = M + \overline{M} + \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(X_{p,0}^j(z) B_p^j + \psi_{p,0}^j(z) \overline{B_p^j} \right). \quad (4.9)$$

Вычитая почленно из (4.3) соотношение (4.9), имеем

$$\varphi_0(z) + \sum_{k=1}^n \overline{\varphi_k} L_0(z) = F_0'(z), \quad (4.10)$$

где

$$F_0'(z) = F_0(z) \Big|_0^z - \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(X_{p,0}^j(z) B_p^j + \psi_{p,0}^j(z) \overline{B_p^j} \right) \Big|_0^z. \quad (4.11)$$

Если ввести новые функции, определяемые формулами

$$F'_m(z) = F_m(z) - \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(X_{p,m}^j(z) B_p^j + \psi_{p,m}^j(z) \overline{B_p^j} \right) \Big|_{\infty}^z, \quad m = 1, \dots, n, \quad (4.12)$$

то из (4.10) и (4.4) следует, что функции $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) + \sum_{k=1}^n \overline{\varphi_k} L_0(z) \Big|_0^z &= F'_0(z), \\ \varphi_m(z) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \overline{\varphi_k} L_m(z) \Big|_{\infty}^z &= F'_m(z), \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Установим условия, при которых неоднородная задача Шварца имеет решение в классе однозначных аналитических функций с конечным числом полюсов различной кратности.

Отметим, что из (4.7) и (4.8) следует

$$\overline{X_{p,m}^j(\alpha_m)} = \psi_{p,m}^j(\alpha_m), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, H, \quad p = 1, \dots, N_j. \quad (4.14)$$

Умножим обе части равенства (4.2) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - a_m}$, $m = 1, \dots, n$, и проинтегрируем произведение по $\mathcal{C}_m(\zeta)$, $m = 1, \dots, n$. Преобразовав результат с помощью формул Коши, формул (4.7), (4.8), с учетом (4.5), (4.6), (4.12) получим

$$\delta_m F'_m(a_m) = M + \overline{M} + 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \varphi_k(a_m), \quad m = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Приступая к решению системы (4.13), введем прежде всего некоторые необходимые функции и дополнительные обозначения.

Для точек $\zeta \in \mathcal{C}_m(\zeta)$, $m = 0, 1, \dots, n$, имеет место соотношение

$$\left(\frac{1}{\zeta - \mathcal{A}} d\zeta \right) = \frac{1}{\zeta - \overline{L_m(\mathcal{A})}} d\zeta - \frac{1}{\zeta - a_m} d\zeta. \quad (4.16)$$

Из (4.7) и (4.8) с учетом (4.16) получаем

$$\overline{\psi_{p,k}^j} L_m(z) = X_{p,k}^j(a_k) - X_{p,k}^j \overline{L_k} L_m(z), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \overline{X_{p,k}^j} L_m(z) &= \psi_{p,k}^j(a_k) - \psi_{p,k}^j \overline{L_k} L_m(z), \quad j = 1, \dots, H, \quad p = 1, \dots, N, \\ k &\neq m, \quad k, m = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.18)$$

С целью более компактной записи сумм функций, определенных в $\mathcal{D}_m$, будем использовать следующие символы:

$$\sum_{\substack{k_{2\nu} \neq m \\ k_1 \neq k_2}} = \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1 \neq k_2}}^n \sum_{\substack{k_2=0 \\ k_2 \neq k_3}}^n \cdots \sum_{\substack{k_{2\nu-1}=0 \\ k_{2\nu-1} \neq k_{2\nu}}}^n \sum_{\substack{k_{2\nu}=0 \\ k_{2\nu} \neq m}}^n, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2\nu}(z) &= \overline{L_{k_1}} L_{k_2} \overline{L_{k_3}} \cdots \overline{L_{k_{2\nu-1}}} L_{k_{2\nu}}(z), \\ T_{k,\nu,m}(z) &= L_k \overline{\mathcal{D}_{2\nu}} L_m(z). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Пусть $\widehat{b_0} = 0$, $\widehat{b_m} = \infty$, $m = 1, \dots, n$. Тогда система (4.13) записывается более компактно

$$\varphi_m(z) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \overline{\varphi_k} L_m(z) \Big|_{\widehat{b_m}}^z = F'_m(z), \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

Систему (4.21) можно преобразовать в систему линейных функциональных уравнений, не содержащих сопряженных функций. С этой целью в (4.21) заменим k на k_1 и m на k . Подставив полученное значение $\varphi_k(z)$ во второе слагаемое левой части формулы (4.21), находим

$$\varphi_m(z) - \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1 \neq k}}^n \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \varphi_{k_1} \overline{L_k} L_m(z) \Big|_{\widehat{b_m}}^z = E_m(z), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (4.22)$$

где

$$E_m(z) = F'_m(z) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \overline{F'_k} L_m(z) \Big|_{\widehat{b_m}}^z. \quad (4.23)$$

Из (4.23) и (4.12) с учетом (4.17), (4.18) следует

$$\begin{aligned} E_m(z) &= \sum_{k=0}^n \left(F_k \overline{L_k} L_m(z) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(X_{p,k}^j \overline{L_k} L_m(z) B_p^j + \psi_{p,k}^j \overline{L_k} L_m(z) \overline{B_p^j} \right) \right) \Big|_{\widehat{b_m}}^z. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Посредством вычислений, аналогичных использованным в работе [1] (см. [1, §2, вывод системы уравнений (2.23)]), получаем

$$\varphi_m(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k \neq k_1}^{k_{2\nu} \neq m} E_k \mathcal{D}_{2\nu-1} L_m(z) \Big|_{\widehat{b_m}}^z + E_m(z), \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (4.25)$$

Из (4.25) и (4.24) с учетом (4.20), (4.5) находим решение системы (4.21) линейных функциональных уравнений

$$\varphi_m(z) = \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq m} \left(F_k T_{k,\nu,m}(z) - \sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(X_{p,k}^j T_{k,\nu,m}(z) B_p^j + \psi_{p,k}^j T_{k,\nu,m}(z) \overline{B_p^j} \right) \right) \Big|_{\widehat{b_m}}^z, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (4.26)$$

Подставив значение $\varphi_m(z)$ из (4.26) в правую часть соотношений (4.15), а значение $F'_m(z)$ из (4.12) в левую часть (4.15), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно B_p^j и $\overline{B_p^j}$

$$\sum_{j=1}^H \sum_{p=1}^{N_j} \left(G_{p,m}^j B_p^j + \overline{G_{p,m}^j} \overline{B_p^j} \right) = F''_m, \quad m = 1, \dots, n, \quad (4.27)$$

где

$$G_{p,m}^j = X_{p,m}^j(a_m) + X_{p,0}^j(0) + \sum_{\kappa=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n \left(X_{p,\kappa}^j T_{\kappa,\nu,k}(z) - X_{p,\kappa}^j \overline{L_{\kappa} T_{\kappa,\nu,k}(z)} \right) \Big|_{\widehat{b_k}}^{a_m}, \quad (4.28)$$

$$F''_m = F_m(a_m) + F_0(0) + \sum_{\kappa=0}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n \left(F_{\kappa} T_{\kappa,\nu,k}(z) - F_{\kappa} \overline{L_{\kappa} T_{\kappa,\nu,k}(z)} \right) \Big|_{\widehat{b_k}}^{a_m}. \quad (4.29)$$

Система (4.27) имеет n уравнений с

$$\widetilde{N} = 2 \sum_{j=1}^H N_j \quad (4.30)$$

неизвестными.

Пусть r – ранг системы (4.27). Будем считать, что первые r уравнений системы (4.27) образуют базис. Произведем перенумерацию неизвестных. Вместо B_p^j и $\overline{B_p^j}$ обозначим неизвестные $\widehat{B_p^j}$. Если $\widehat{B_p^j}$ – базисное неизвестное, то будем считать, что индексы $j, p \in \mathcal{P}_{\delta}$. Если же $\widehat{B_p^j}$ – свободное неизвестное, то $j, p \in \mathcal{P}_c$. Тогда (4.27) принимает вид:

$$\sum_{j,p \in \mathcal{P}_{\delta}} \widehat{G_{p,m}^j} \widehat{B_p^j} = F''_m - \sum_{j,p \in \mathcal{P}_c} \widehat{G_{p,m}^j} \widehat{B_p^j}, \quad m = 1, \dots, r. \quad (4.31)$$

Пусть Δ – основной определитель (4.31), $\Delta \neq 0$, $(\widehat{G_{p,m}^j})^*$ – алгебраическое дополнение элемента $\widehat{G_{p,m}^j}$ в определителе Δ . Из (4.31) по формулам Крамера имеем

$$\widehat{B_p^j} = \sum_{m=1}^r \frac{(\widehat{G_{p,m}^j})^*}{\Delta} \left(F_m'' - \sum_{j,p \in \mathcal{P}_c} \widehat{G_{p,m}^j} \widehat{B_p^j} \right), \quad j, p \in \mathcal{P}_\delta. \quad (4.32)$$

Если $r < n$, то правые части (4.27) подчинены $(n - r)$ условиям совместности системы [10, гл. 2, § 1]

$$F_m' = \sum_{k=1}^r \lambda_k^m F_k'', \quad m = r + 1, \dots, n, \quad (4.33)$$

где λ_k^m – определяются с помощью формул (4.28). Из (4.29), (4.5) следует, что (4.33) – условия согласованности граничных значений $f_m^{**}(\zeta)$ вещественной части искомой функции $f^{**}(z)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_m}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_m(\zeta)} \frac{f_m^{**}(\zeta)}{\zeta - a_m} d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi i} \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^m - 1 \right) \int_{\mathcal{C}_0(\zeta)} \frac{f_0^{**}(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \sum_{k=1}^r \lambda_k^m \frac{\delta_k}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_k(\zeta)} \frac{f_k^{**}(\zeta)}{\zeta - a_k} d\zeta \\ &+ \sum_{\kappa=0}^n \frac{\delta_\kappa}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_\kappa(\zeta)} f_\kappa^{**}(\zeta) \mathcal{H}'_{\kappa,m}(\zeta) d\zeta, \quad m = r + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где

$$\mathcal{H}'_{\kappa,m}(\zeta) = \sum_{k=1}^r \lambda_k^m \mathcal{H}_{\kappa,k}(\zeta) - \mathcal{H}_{\kappa,m}(\zeta), \quad (4.35)$$

$$\mathcal{H}_{\kappa,m}(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \neq k_2 \\ k_2 \neq k_1}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \left(\frac{1}{\zeta - T_{\kappa,\nu,k}(z)} - \frac{1}{\zeta - L_\kappa T_{\kappa,\nu,k}(z)} \right) \Big|_{\widehat{b_k}}^{a_m}. \quad (4.36)$$

Пусть $\mathcal{P}_\delta = \mathcal{P}'_\delta + \mathcal{P}''_\delta$, $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}'_c + \mathcal{P}''_c$, где $\mathcal{P}_\delta$ – множество индексов (j, p) , соответствующих базисным неизвестным B_p^j , $\mathcal{P}''_\delta$ – множество индексов (j, p) , соответствующих базисным неизвестным $\overline{B_p^j}$, $\mathcal{P}'_c$ – множество индексов (j_0, p_0) , соответствующих свободным неизвестным $B_{p_0}^{j_0}$, $\mathcal{P}''_c$ – множество индексов (j_0, p_0) , соответствующих свободным неизвестным $\overline{B_{p_0}^{j_0}}$. Из (4.32) следует

$$B_p^j = \sum_{m=1}^r \frac{(G_{p,m}^j)^*}{\Delta} \left(F_m'' - \sum_{j,p \in \mathcal{P}'_c} G_{p_0,m}^{j_0} B_{p_0}^{j_0} - \sum_{j,p \in \mathcal{P}''_c} \overline{G_{p_0,m}^{j_0}} \overline{B_{p_0}^{j_0}} \right), \quad j, p \in \mathcal{P}'_\delta, \quad (4.37)$$

$$\overline{B_p^j} = \sum_{m=1}^r \frac{(\overline{G_{p,m}^j})^*}{\Delta} \left(F_m'' - \sum_{j,p \in \mathcal{P}'_c} G_{p_0,m}^{j_0} B_{p_0}^{j_0} - \sum_{j,p \in \mathcal{P}''_c} \overline{G_{p_0,m}^{j_0}} \overline{B_{p_0}^{j_0}} \right), \quad j, p \in \mathcal{P}''_\delta. \quad (4.38)$$

Подставив в формулу (4.9) соотношения (4.37), (4.38), получаем

$$\begin{aligned} M + \overline{M} = F_0(0) - \sum_{m=1}^r G_m F_m'' + \sum_{j,p \in \mathcal{P}'_c} \left(X_{p_0,0}^{j_0}(0) + \sum_{m=1}^r G_{p_0,m}^{j_0} G_m \right) B_{p_0}^{j_0} \\ + \sum_{j,p \in \mathcal{P}''_c} \left(\psi_{p_0,0}^{j_0}(0) + \sum_{m=1}^r \overline{G_{p_0,m}^{j_0}} G_m \right) \overline{B_{p_0}^{j_0}}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где

$$G_m = \frac{1}{\Delta} \sum_{j,p \in \mathcal{P}'_\delta} X_{p_0,0}^{j_0}(0) (G_{p,m}^j)^* + \sum_{j,p \in \mathcal{P}''_\delta} \psi_{p_0,0}^{j_0}(0) (\overline{G_{p,m}^j})^*, \quad m = 1, \dots, r. \quad (4.40)$$

Используя разбиение множества индексов, правую часть формулы (4.1) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} f^{**}(z) = \operatorname{Re} M + i \operatorname{Im} M \\ + \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) + \sum_{j,p \in \mathcal{P}'_\delta} \frac{B_p^j}{(z - b_j)^p} + \sum_{j_0, p_0 \in \mathcal{P}'_c} \frac{B_{p_0}^{j_0}}{(z - b_{j_0,0})^{p_0}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Подставив в (4.41) соотношения (4.36)–(4.39), с учетом (4.29), (4.5) получаем

$$\begin{aligned} f^{**}(z) = \sum_{\kappa=0}^n \frac{\delta_\kappa}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_\kappa(\zeta)} f_\kappa^{**}(\zeta) H_\kappa(z, \zeta) d\zeta + i \operatorname{Im} M \\ + \sum_{j_0, p_0 \in \mathcal{P}'_c} X(z, j_0, p_0) B_{p_0}^{j_0} + \sum_{j_0, p_0 \in \mathcal{P}''_c} \psi(z; j_0, p_0) \overline{B_{p_0}^{j_0}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где

$$H_\kappa(z, \zeta) = \begin{cases} H'_{0,r}(z, \zeta) + \frac{1}{\zeta} \sum_{m=1}^r H_m(z) + \frac{1}{2\zeta}, & \text{если } \kappa = 0, \\ H'_{\kappa,r}(z, \zeta) + \frac{H_\kappa(z)}{\zeta - a_\kappa}, & \text{если } 1 \leq \kappa \leq r, \\ H'_{\kappa,r}(z, \zeta), & \text{если } r < \kappa \leq n. \end{cases} \quad (4.43)$$

При этом

$$\begin{aligned} H'_{\kappa,r}(z, \zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\zeta - T_{\kappa,\nu,k}(z)} \right) \Big|_{\widehat{b_k}}^z \\ + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \sum_{m=1}^r H_m(z) \left(\frac{1}{\zeta - T_{\kappa,\nu,k}(z)} \right) \Big|_{\widehat{b_k}}^{a_m} - \frac{1}{\zeta - \overline{L_\kappa T_{\kappa,\nu,k}(z)}} \Big|_{\widehat{b_k}}^{a_m} \Bigg), \\ \kappa = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Здесь

$$H_m(z) = \sum_{j,p \in \mathcal{P}'_\delta} \frac{(G_{p,m}^j)^*}{\Delta(z-b_j)^p} - \frac{1}{2}G_m - \sum_{\kappa=0}^n \sum_{\nu=0}^\infty \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\Delta} \\ \times \left(\sum_{j,p \in \mathcal{P}'_\delta} X_{p,\kappa}^j T_{\kappa,\nu,k}(z) (G_{p,m}^j)^* + \sum_{j,p \in \mathcal{P}''_\delta} \psi_{p,\kappa}^j T_{\kappa,\nu,k}(z) \overline{(G_{p,m}^j)^*} \right) \Big|_{\widehat{b_k}}^z, \\ m = 1, \dots, r. \quad (4.45)$$

Кроме того,

$$X(z; j_0, p_0) = (z - b_{j_0})^{-p_0} + \frac{1}{2}X_{p_0,0}^{j_0}(0) - \sum_{m=1}^r G_{p_0,m}^{j_0} H_m(z) \\ - \sum_{\kappa=0}^n \sum_{\nu=0}^\infty \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n X_{p_0,\kappa}^{j_0} T_{\kappa,\nu,k}(z) \Big|_{\widehat{b_k}}^z, \quad (j_0, p_0) \in \mathcal{P}'_c, \quad (4.46)$$

$$\psi(z; j_0, p_0) = \frac{1}{2}\psi_{p_0,0}^{j_0}(0) - \sum_{m=1}^r \overline{G_{p_0,m}^{j_0}} H_m(z) \\ - \sum_{\kappa=0}^n \sum_{\nu=0}^\infty \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n \psi_{p_0,\kappa}^{j_0} T_{\kappa,\nu,k}(z) \Big|_{\widehat{b_k}}^z, \quad (j_0, p_0) \in \mathcal{P}''_c. \quad (4.47)$$

Доказательство равномерной сходимости на $\mathcal{E}$, т.е. внутри $\mathcal{K} \setminus (\bigcup_j b_j)$, рядов интегрального представления (4.42) осуществляется по схеме, предложенной в [1, §4].

Задаваемая формулой (4.42) функция $f^{**}(z)$ при выполнении условий согласованности граничных значений (4.34) регулярна и однозначна в $\mathcal{K} \setminus (\bigcup_j b_j)$. Поступая так же, как и в [1, §4], докажем, что вещественная часть функции $f^{**}(z)$, задаваемой формулой (4.42), совпадает на $\mathcal{C}_m(\zeta)$ с $f_m^{**}(\zeta)$, $m = 0, 1, \dots, n$.

Итак, приходим к теореме.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть функция $f^{**}(z)$ аналитическая в конечносвязной круговой области $\mathcal{K}$, кроме заданных точек b_j , $j = 1, \dots, H$, где функция $f^{**}(z)$ имеет кратные полюсы, кратностей, соответственно, N_j , $j = 1, \dots, H$. Пусть вещественная часть функции $f^{**}(z)$ на граничных компонентах $\mathcal{C}_k(\zeta)$ принимает непрерывные значения $f_k^{**}(\zeta)$. Пусть r – ранг системы (4.27), $r \leq \min\{n, \tilde{N}\}$.

Возможны три случая.

1) Если $r = n \leq \tilde{N}$, где $\tilde{N}$ определяется формулой (4.30), тогда задача Шварца для мероморфных функций в $(n+1)$ -связной круговой области безусловно разрешима и решение, зависящее от $\tilde{N} - n + 1$ произвольных вещественных постоянных, определяется формулами (4.42)–(4.47) с учетом (4.40), (4.28).

2) Если $r < \min\{n, \tilde{N}\}$, то задача Шварца для мероморфных функций в $(n+1)$ -связной круговой области разрешима при выполнении $(n-r)$ условий

согласованности граничных значений функций $f_k^{**}(\zeta)$, $k = 0, 1, \dots, n$, определяемых соотношениями (4.34). Решение задачи, зависящее от $\tilde{N} - r + 1$ произвольных вещественных постоянных, определяется формулами (4.42)–(4.47).

3) Если $r = \tilde{N} < n$, то задача Шварца для мероморфных функций в $(n+1)$ -связной круговой области разрешима, когда $f_k^{**}(\zeta)$, $k = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют $(n-r)$ условиям (4.34), и имеет место формула

$$f^{**}(z) = \sum_{\kappa=0}^n \frac{\delta_{\kappa}}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\kappa}(\zeta)} f_{\kappa}^{**}(\zeta) H_{\kappa}(z, \zeta) d\zeta + i\mathcal{D}, \quad (4.48)$$

где $\mathcal{D}$ – произвольное вещественное число, $H_{\kappa}(z, \zeta)$ определяется формулами (4.43)–(4.47) с учетом (4.40), (4.28).

СЛЕДСТВИЕ 4.1.1. Если в формуле (4.48) положить $\tilde{N} = 0$, то получаем формулу Шварца для конечносвязных круговых областей [1].

СЛЕДСТВИЕ 4.1.2. Если в условиях предыдущего следствия 4.1.1 положить $n = 1$, то получаем известную формулу Виля [4].

СЛЕДСТВИЕ 4.1.3. Если в условиях следствия 4.1.2 устремить R_1 к нулю, то в результате предельного перехода получаем формулу Шварца [9].

§ 5. Многолистная формула

Тири–Ахизера–Голузина в $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть функция $f^{**}(z)$ аналитическая в конечносвязной круговой области $\mathcal{K}$, кроме заданных точек b_j , $j = 1, \dots, H$, где функция $f^{**}(z)$ имеет кратные полюсы, кратностей, соответственно, N_j , $j = 1, \dots, H$. Пусть r – ранг системы (4.27), $r \leq \min\{n, \tilde{N}\}$.

Возможны три случая.

1) Если $r = n = \tilde{N}$, где $\tilde{N}$ определяется формулой (4.30), тогда структурная формула

$$f^{**}(z) = C z^{\mathcal{A}_0 + \beta + i\mathcal{D}'} Q(z) \exp\left(\frac{1}{2\pi} S(z)\right), \quad (5.1)$$

зависящая от $\tilde{N} - n + 1$ произвольных вещественных постоянных

$$\operatorname{Re} B_p^j \quad \text{при} \quad j, p \in \mathcal{P}'_c \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} B_p^j \quad \text{при} \quad j, p \in \mathcal{P}''_c, \quad (5.2)$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f^{**}(z)$ классу $\mathcal{B}_N^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и определяется формулами (4.42)–(4.47) с учетом (4.40), (4.28). Причем

$$Q(z) = \prod_{j, p \in \mathcal{P}'_c} \left(\exp(B_{p_0}^{j_0} X(z; j_0, p_0)) \right) \prod_{j, p \in \mathcal{P}''_c} \left(\exp(\overline{B_{p_0}^{j_0}} \psi(z; j_0, p_0)) \right). \quad (5.3)$$

Кроме того,

$$S(z) = \sum_{\kappa=0}^n \delta_{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_{2\nu} \neq k \\ k_1 \neq k_2}} \sum_{k=0}^n B_{\kappa, \nu, k}(a_k + R_k \exp(i\vartheta)) \times \ln(z - M_{\kappa, \nu, \kappa}(a_k + R_k \exp(i\vartheta))) d\mu_{\kappa}(\vartheta). \quad (5.4)$$

2) Если $r < \min\{n, \tilde{N}\}$, то при выполнении $(n-r)$ условий

$$\begin{aligned} \delta_m \mathcal{A}_m &= \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^m - 1 \right) \mathcal{A}_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k^m \delta_k \mathcal{A}_k \\ &+ \sum_{\kappa=0}^n \frac{\delta_{\kappa}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}'_{\kappa, m}(a_{\kappa} + R_{\kappa} \exp(i\vartheta)) d\mu_{\kappa}(\vartheta), \quad m = r+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.5)$$

структурная формула, зависящая от $\tilde{N} - r + 1$ произвольных вещественных постоянных (5.2), является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f^{**}(z)$ классу $\mathcal{B}_N^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и определяется формулой (5.1).

3) Если $r = \tilde{N} < n$, то при выполнении $(n-r)$ условий (5.5) структурная формула

$$f^{**}(z) = C z^{\mathcal{A}_0 + \beta + i\mathcal{D}} Q(z) \exp\left(\frac{1}{2\pi} S(z)\right) \quad (5.6)$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f^{**}(z)$ классу $\mathcal{B}_N^*(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$. Здесь $S(z)$ определяется формулой (5.4), $\mathcal{D}$ — произвольное вещественное число. Причем

$$Q(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \prod_{\substack{k_{2\nu} \neq k \\ k_1 \neq k_2}} \prod_{k=0}^n \left(\frac{G_{m, \nu, k}(z, N_0)}{G_{m, \nu, k}(z, N_p)} \right). \quad (5.7)$$

Доказательство теоремы 5.1 проводится аналогично доказательству теоремы 3.2 с учетом интегральных представлений (4.42), (4.48).

СЛЕДСТВИЕ 5.1.1. Если в условиях теоремы 5.1 положить $R_0 = 1$, $n = 1$, то получаем известную теорему Зморевича [5].

СЛЕДСТВИЕ 5.1.2. Если в условиях теоремы 5.1 в случае 3) предположить, что R_k , $k = 1, \dots, n$, достаточно малы, а R_0 достаточно велико, то получаем известную теорему Максимова [8].

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть функция $f^{**}(z)$ аналитическая в конечносвязной круговой области $\mathcal{K}$, кроме заданных точек b_j , $j = 1, \dots, H$, где функция $f^{**}(z)$ имеет кратные полюсы, кратностей, соответственно, N_j , $j = 1, \dots, H$. Пусть r — ранг системы (4.27), $r \leq \min\{n, \tilde{N}\}$.

Возможны три случая.

1) Если $r = n \leq \tilde{N}$, где $\tilde{N}$ определяется формулой (4.30), тогда структурная формула

$$f^{**}(z) = C \int z^{\mathcal{A}_0-1+\beta+i\mathcal{D}'} Q(z) \exp\left(\frac{1}{2\pi} S(z)\right) dz + C_1, \quad (5.8)$$

зависящая от $\tilde{N} - n + 1$ произвольных вещественных постоянных

$$\operatorname{Re} B_p^j \quad \text{при} \quad j, p \in \mathcal{P}'_c \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} B_p^j \quad \text{при} \quad j, p \in \mathcal{P}''_c, \quad (5.9)$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f^{**}(z)$ классу $\mathcal{B}_N^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и определяется формулами (4.42)–(4.47) с учетом (4.40), (4.28). Причем

$$Q(z) = \prod_{j,p \in \mathcal{P}'_c} \left(\exp(B_{p_0}^{j_0} X(z; j_0, p_0)) \right) \prod_{j,p \in \mathcal{P}''_c} \left(\exp(\overline{B_{p_0}^{j_0}} \psi(z; j_0, p_0)) \right). \quad (5.10)$$

Кроме того,

$$S(z) = \sum_{\kappa=0}^n \delta_{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \sum_{k=0}^n B_{\kappa, \nu, k} (a_k + R_k \exp(i\vartheta)) \times \ln(z - M_{\kappa, \nu, \kappa} (a_k + R_k \exp(i\vartheta))) d\mu_{\kappa}(\vartheta). \quad (5.11)$$

2) Если $r < \min\{n, \tilde{N}\}$, то при выполнении $(n - r)$ условий

$$\begin{aligned} \delta_m \mathcal{A}_m &= \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^m - 1 \right) \mathcal{A}_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k^m \delta_k \mathcal{A}_k \\ &+ \sum_{\kappa=0}^n \frac{\delta_{\kappa}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}'_{\kappa, m} (a_{\kappa} + R_{\kappa} \exp(i\vartheta)) d\mu_{\kappa}(\vartheta), \quad m = r + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.12)$$

структурная формула, зависящая от $\tilde{N} - r + 1$ произвольных вещественных постоянных (5.9), является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f^{**}(z)$ классу $\mathcal{B}_N^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ и определяется формулой (5.8).

3) Если $r = \tilde{N} < n$, то при выполнении $(n - r)$ условий (5.12) структурная формула

$$f^{**}(z) = C \int z^{\mathcal{A}_0-1+\beta+i\mathcal{D}} Q(z) \exp\left(\frac{1}{2\pi} S(z)\right) dz + C_1 \quad (5.13)$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f^{**}(z)$ классу $\mathcal{B}_N^0(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$. Здесь $S(z)$ определяется формулой (5.11), $\mathcal{D}$ – произвольное вещественное число. Причем

$$Q(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \prod_{k_1 \neq k_2}^{k_{2\nu} \neq k} \prod_{k=0}^n \left(\frac{G_{m, \nu, k}(z, N_0)}{G_{m, \nu, k}(z, N_p)} \right).$$

Доказательство теоремы 5.2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.3 с учетом интегральных представлений (4.42), (4.48).

СЛЕДСТВИЕ 5.2.1. Если в условиях теоремы 5.2 положить $R_0 = 1$, $n = 1$, то получаем известную теорему Зморовича [5].

СЛЕДСТВИЕ 5.2.2. Если в условиях теоремы 5.2 в случае 3) предположить, что R_k , $k = 1, \dots, n$, достаточно малы, а R_0 достаточно велико, то получаем известную теорему Максимова [8].

СЛЕДСТВИЕ 5.2.3. Если в условиях теоремы 5.2 предположить, что функции $\mu_k(\vartheta)$, входящие в формулу (5.13), ступенчатые с точками разрыва ϑ_{k,j_k} , $k = 0, \dots, n$, $j_k = 1, \dots, \nu_k$, $-\pi < \vartheta_{k_1} < \dots < \vartheta_{k_{\nu_k}} < \pi$ и скачками в этих точках $2\pi\sigma_{k,j_k}$ ($\sigma_{k,j_k} > 0$, $\sum_{j_k=1}^{\nu_k} \sigma_{k,j_k} = 1$), то формула (5.13) дает регулярные, однолистные в $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ функции $f^{**}(z)$, отображающие $\mathcal{K}(R_j, a_j, j = 0, \dots, n)$ на области, ограниченные выпуклыми многоугольниками с вершинами $f^{**}(a_k + R_k \exp(i\vartheta_{k,j_k}))$ и внутренними углами при них, равными $\pi(1 - 2\sigma_{k,j_k})$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2.4. Если в условиях предыдущего следствия 5.2.3 положить $n = 1$, то получаем известную теорему Тири–Ахиезера–Голузина (см. [9, гл. 7, §4, п. 104, п. 9]).

Список литературы

1. Александров И. А., Сорокин А. С. Задача Шварца для многосвязных круговых областей // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13. №5. С. 971–1001.
2. Александров И. А., Сорокин А. С. О распространении вариационного метода Голузина–Куфарова на многосвязные области // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. №6. С. 1207–1210.
3. Сорокин А. С. Задача Келдыша–Седова для круговых многосвязных областей // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36. №1. С. 186–202.
4. Зморович В. А. О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце // Матем. сб. 1953. Т. 32 (74). №3. С. 633–652.
5. Зморович В. А. О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце // Матем. сб. 1956. Т. 40 (82). №2. С. 225–238.
6. Paatero V. Über die konforme Abbildung mehrblättriger Gebiete von beschränkter Randdrehung // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1952. V. 128. №2. P. 23–29.
7. Paatero V. Über die konformen Abbildungen von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1931. V. 33. №9. P. 1–79.
8. Максимов Ю. Д. Обобщение структурной формулы для выпуклых однолистных функций на случай многосвязной круговой области // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. №2. С. 284–287.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.–Л.: Физматгиз, 1973.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1953.

Сибирская государственная горно-металлургическая академия,
Новокузнецк

Поступила в редакцию
24.12.1996