Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Глобальные асимптотики для четвертого трансцендента Пенлеве,
Матем. сб., 1997, том 188, номер 12, 11–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:20:47

УДК 517.9

В. Л. Верещагин

Глобальные асимптотики для четвертого трансцендента Пенлеве

Работа посвящена изучению асимптотических и аналитических свойств четвертого трансцендента Пенлеве при условии стремления модуля независимой переменной в бесконечность. Поставленная задача решается с помощью применения методов ВКБ, усреднения Уизема, изомонодромных деформаций. Выведено соответствующее уравнение модуляций, вычислено асимптотическое распределение нулей четвертого трансцендента. Главный член разложения для решения четвертого уравнения Пенлеве выписан в виде эллиптической функции, чьи параметры подчиняются упомянутому уравнению модуляций.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

Шесть уравнений Пенлеве являются известным объектом классической теории дифференциальных уравнений. В последние десятилетия интерес к ним значительно возрос в связи с открытием феномена их полной интегрируемости и наличием разнообразных приложений к теории нелинейных уравнений математической физики и интегрируемых систем.

В классических работах Пенлеве и его учеников (см. [1]) доказано, что все решения уравнений Пенлеве являются мероморфными функциями своей переменной, а их общие решения не могут быть выражены в терминах известных спецфункций. Задача исследования аналитических свойств трансцендентов Пенлеве и их асимптотического поведения впервые была поставлена в работах Бутру [2]. В дальнейшем, после разработки метода изомонодромных деформаций [3] были вычислены асимптотики вещественных решений первого (P_1)

$$u'' - 6u^2 + x = 0 \quad (1.1)$$

и второго (P_2)

$$u'' - xu - 2u^3 = \nu, \quad \nu \equiv \text{const} \quad (1.2)$$

уравнений Пенлеве (см. [4], [5]) при $x \rightarrow \pm\infty$. Затем в работах [6]–[9] были построены асимптотические формулы, аппроксимирующие общие решения первого, второго и третьего (P_3)

$$u'' + \frac{u'}{x} + \sin u = 0 \quad (1.3)$$

уравнений Пенлеве при $x \in \mathbb{C}$ и $|x| \rightarrow \infty$. Китаев [10] выписал асимптотики вещественных решений четвертого уравнения Пенлеве P_4 :

$$u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3u^3}{2} + 4xu^2 + u(a - 4d + 2x^2) - \frac{a^2}{2u}, \quad (1.4)$$

где a, d – произвольные параметры, при $x \rightarrow \pm\infty$ и $x \rightarrow \pm i\infty$. Четвертое уравнение Пенлеве (1.4) является главным объектом изучения в данной статье. Основная задача – вычисление асимптотических формул, приблизительно описывающих поведение решения P_4 в комплексной области переменного x при условии $|x| \rightarrow \infty$. Для упрощения выкладок будем считать параметр d равным нулю, а само исследуемое уравнение – имеющим вид

$$u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3u^3}{2} + 4xu^2 + u(a + 2x^2) - \frac{a^2}{2u}. \quad (1.5)$$

С помощью замены $u = xv$, $z = x^2$ преобразуем уравнение (1.5) к виду

$$4v_{zz} - 2\frac{v_z^2}{v} - \frac{2}{3}v^3 - 4v^2 - 2v = \frac{av - 2vz}{z} + \frac{1}{z^2}\left(\frac{v}{2} - \frac{a^2}{4v}\right). \quad (1.6)$$

В окрестности бесконечности правую часть (1.6) можно считать малой, что дает возможность предположить следующее приближение:

$$v(z) = V(z) + o(1), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (1.7)$$

$$4V_{zz} - 2\frac{V_z^2}{V} - \frac{3}{2}V^3 - 4V^2 - 2V = 0, \quad (1.8)$$

где функция $V(z)$ является эллиптической, а именно,

$$2 \int_{V_0}^V \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta^3 + 4\zeta^2 + 4\zeta + 4A)}} = z - z_0, \quad (1.9)$$

A, z_0 – константы интегрирования.

Факт выполнения приближения (1.7) не является очевидным, и его доказательство вместе с вычислением величин A, z_0 составляет основную задачу данной работы. Ниже будет выведено алгебраическое уравнение, определяющее параметр A . При вычислении сдвига фазы z_0 будем использовать методы изомонодромных деформаций [3] и ВКБ [11]. По своей идеологии и структуре данная статья в большой степени следует работе [12], объектом изучения которой было второе уравнение Пенлеве (1.2). В §2 будут изложены основные положения метода изомонодромных деформаций, используемые для интегрирования уравнений Пенлеве. В §§ 3, 4 выводятся асимптотические формулы для решения “уравнения по λ ” – основного уравнения L - A -пары в изомонодромной задаче. С помощью этого в §5 нули точного решения выражаются через первые интегралы уравнения (1.5). В результате §6 дает исходную модулированную эллиптическую функцию V и следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Общее комплексное решение четвертого уравнения Пенлеве (1.5) в секторе $0 < \arg x < \pi/2$ имеет следующую асимптотику при $|x| \rightarrow \infty$:*

$$u(x | h, g) = x(V(z - z_0 | A) + O(|z|^{-1} \operatorname{dist}(z, D)^{-2})), \quad (1.10)$$

где $z = x^2$, V – эллиптическая функция, определяемая уравнением $4V_z^2 = V(V^3 + 4V^2 + 4V + 4A)$ и условием $V(0 | A) = 0$. Параметр $A = A(\varphi)$ ($\varphi = \arg z$) определяется уравнением

$$\arg \oint_l \frac{\nu}{\zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \text{где} \quad \nu^2 = \zeta^4 + 4\zeta^3 + 4\zeta^2 + 4A\zeta, \quad l = N_1 \mathbf{a} + N_2 \mathbf{b},$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – базовые циклы на римановой поверхности (ζ, ν) , $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$, а фазовый сдвиг z_0 – формулой

$$z_0(A, h, g) = \frac{i}{\pi}(J_1 \log h + J_2 \log g),$$

где $J_{1,2} = 2 \oint_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \frac{d\zeta}{\nu}$; h, g – первые интегралы уравнения (1.5). Множество D совпадает с множеством полюсов V .

§ 2. Уравнение модуляций

Задачей данного параграфа является предварительный вывод условия, определяющего параметр модуляций $A(\varphi)$. Метод вывода использует идеи Бутру и теории усреднения Боголюбова–Уизема [11], [13].

Проинтегрируем уравнение (1.6) вдоль дуги $L = \{z : 0 \leq \arg z \leq \varphi, r = |z| \gg 1\}$. Нетрудно убедиться, что (1.6) превращается в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{v_z^2}{v} - \frac{v^3}{4} - v^2 - v = -2 \int_L \frac{v_z^2}{zv} dz + a \int_L \frac{v_z}{z} dz \\ + \left(\frac{v_z^2}{v} - \frac{v^3}{4} - v^2 - v \right) \Big|_{\arg z=0} + \int_L \frac{v_z}{z^2 v} \left(\frac{v}{2} - \frac{a^2}{4v} \right) dz. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Предположив, что условие приближения (1.7) выполнено и, таким образом, считая v “почти” эллиптической функцией, слабо деформируем контур L так, чтобы он не проходил через полюсы v и v_z . В таком случае последний интеграл в равенстве (2.1) мал при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, пренебрегая малыми членами, можно переписать (2.1)

$$\frac{v_z^2}{v} - \frac{v^3}{4} - v^2 - v = -2i \int_0^\varphi \frac{v_z^2}{v} d\theta + ai \int_0^\varphi v_z d\theta + \left(\frac{v_z^2}{v} - \frac{v^3}{4} - v^2 - v \right) \Big|_{\arg z=0}.$$

Конечный интеграл $\int_0^\varphi \frac{v_z^2}{v} (re^{i\theta}) d\theta$ оценим с помощью метода усреднения:

$$\int_0^\varphi \frac{v_z^2}{v} (re^{i\theta}) d\theta = \int_0^\varphi \left\langle \frac{v_z^2}{v} \right\rangle d\theta + o(1), \quad |z| = r \rightarrow \infty,$$

где $\langle \cdot \rangle$ – среднее дwoякопериодической функции

$$\left\langle \frac{v_z^2}{v} \right\rangle = \frac{\oint_l \frac{\nu}{\zeta} d\zeta}{\oint_l \frac{d\zeta}{\nu}}.$$

Здесь l считаем циклом, обходящим тор $M_{m,n} = \mathbb{C}/\{m\omega' + n\omega\}$, представляющий область определения функции V , $\nu^2 = \zeta^4 + 4\zeta^3 + 4\zeta^2 + 4A\zeta$. Следовательно, имеем уравнение на A

$$A(\varphi) = -2i \int_0^\varphi \left\langle \frac{v_z^2}{v} \right\rangle d\theta + A(0),$$

где $A(0) = \left(\frac{v_z^2}{v} - \frac{v^3}{4} - v^2 - v \right) \Big|_{\arg z=0}$. Дифференцируя по φ , получаем уравнение Уизема, эквивалентное предъявленному в [14],

$$\frac{dA}{d\varphi} = -2i \frac{\oint_l \frac{\nu}{\zeta} d\zeta}{\oint_l \frac{d\zeta}{\nu}}. \quad (2.2)$$

Отметив, что выполняется условие $\frac{\partial}{\partial A} \oint_l \frac{\nu}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} \oint_l \frac{d\zeta}{\nu}$, выводим следующее условие на решение уравнения (2.2):

$$\oint_l \frac{\nu}{\zeta} d\zeta = C e^{-i\varphi}, \quad (2.3)$$

где C – константа интегрирования. Легко видеть, что вопрос о нахождении решения дифференциального уравнения Уизема (2.2), таким образом, сводится к разрешению трансцендентного алгебраического уравнения (2.3).

Очевидно, в общем случае периоды ω и ω' несоизмеримы, и движение по L порождает эргодический поток на торе $M_{m,n}$. В этом случае цикл l определяет условно периодическую обмотку: $l \sim N_1 \mathbf{a} + N_2 \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – базисные циклы, N_1, N_2 – большие целые числа. Правая часть уравнения (2.3) ограничена, поэтому равенство

$$\left(N_1 \int_{\mathbf{a}} + N_2 \int_{\mathbf{b}} \right) \left(\frac{\nu}{\zeta} d\zeta \right) = C e^{-i\varphi}$$

при невырожденных циклах $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ возможно лишь в случае

$$\arg \oint_{\mathbf{a}} \frac{\nu}{\zeta} d\zeta = \arg \oint_{\mathbf{b}} \frac{\nu}{\zeta} d\zeta = -\varphi + \arg C.$$

Двум вырожденным случаям соответствуют значения $A = 0$ и $A = \frac{8}{27}$. Равенство $A = 0$ ведет к двойному вырождению и рациональным формулам. При $A = \frac{8}{27}$ точки ветвления римановой поверхности ν, ζ соответствуют значениям

$\zeta_{1,2,3,4} = -\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0$. В этом случае выполняется условие $\arg \oint \frac{\nu}{\zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2}$ при $\varphi = 0$. Следовательно, $\arg C = \frac{\pi}{2}$. Окончательно записываем условие Уизема (уравнение модуляций)

$$\arg \oint \frac{\nu}{\zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad (2.4)$$

которое определяет функцию $A(\varphi)$.

§ 3. Постановка задачи изомонодромного интегрирования линейной системы

Явление интегрируемости уравнений Пенлеве связано прежде всего с наличием соответствующих коммутативных представлений, описанных, например, в работе [15]. В частности, четвертому уравнению Пенлеве (1.4) отвечает пара матриц L и $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^2 + RQ & i\lambda Q \\ i\lambda R & -\frac{1}{2}\lambda^2 - RQ \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^3 + \lambda(x + RQ) + \frac{d}{\lambda} & i(\lambda^2 Q + 2xQ + Q') \\ i(\lambda^2 R + 2xR - R') & -\frac{1}{2}\lambda^3 - \lambda(x + RQ) - \frac{d}{\lambda} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $u = RQ$, λ — произвольный параметр, величины $R = R(x)$, $Q = Q(x)$ связаны равенством

$$RQ' - QR' - u^2 + 2xu = a = \text{const}. \quad (3.2)$$

Легко убедиться, что уравнение P_4 (1.4) является условием совместности следующей пары линейных уравнений:

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \mathcal{A}(\lambda)\psi, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = L(\lambda)\psi. \quad (3.4)$$

В уравнении (3.3) введем новые переменные

$$\lambda = x^{1/2}\xi = z^{1/4}\xi, \quad R = x^{1/2}r = z^{1/4}r, \quad Q = z^{1/4}q$$

и перепишем его в следующем виде:

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \mathcal{A}(\xi)\psi, \quad (3.5)$$

где

$$\mathcal{A}(\xi) = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi^3 + \xi(x + rq) & i\xi^2 q + 2iq + 2iq_z \\ i\xi^2 r + 2ir - 2ir_z & -\frac{1}{2}\xi^3 - \xi(x + rq) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Определим восемь секторов в комплексной плоскости:

$$\Omega_j = \left\{ \xi : \frac{2\pi(j-1) - \arg z}{4} \leq \arg \xi < \frac{2\pi j - \arg z}{4} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, 9; \quad \Omega_9 = \Omega_1.$$

В каждом секторе Ω_j имеется каноническое решение Ψ_j системы (3.5), заданное условием в окрестности бесконечности

$$\Psi_j(\xi) = (I + O(\xi^{-1})) \exp\left(z\sigma_3\left(\frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2\right)\right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \xi \in \Omega_j, \quad (3.7)$$

где I – единичная матрица, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Автоморфизм $\xi \mapsto -\xi$ переводит сектор Ω_j в Ω_{j+1} , а канонические решения $\Psi_j(\xi)$ связывает следующим образом:

$$\Psi_{j+4}(\xi) = \sigma_3 \Psi_j(-\xi) \sigma_3, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (3.8)$$

Системе (3.5) соответствует набор матриц Стокса S_j , определяемых условием

$$\Psi_{j+1} = \Psi_j S_j, \quad j = 1, 2, \dots, 8. \quad (3.9)$$

Все матрицы S_j треугольны и имеют единичную диагональ (см. [16]):

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1 & s_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Редукция (3.8) определяет условие $s_{j+4} = -s_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Циклическое соотношение $S_1 S_2 \cdots S_8 = I$ оставляет среди величин s_j две независимых, в качестве которых нам удобно выбрать следующие:

$$h = 1 + s_2 s_3, \quad g = \frac{1 + s_2 s_3}{1 + s_1 s_2}. \quad (3.11)$$

Величины h, g однозначно определяют решение v уравнения (1.6).

ТЕОРЕМА 3.1 [3], [15]. *Условие независимости величин h, g от z необходимо и достаточно для того, чтобы функция $v = v(z)$ удовлетворяла уравнению Пенлеве (1.6).*

Таким образом, величины h, g являются первыми интегралами уравнения (1.6). Далее мы будем предполагать, что h, g однозначно задают решения задачи (3.7), (3.9) при достаточно больших по модулю z , $0 < \arg z < \pi/2$, не лежащих в счетном множестве полюсов функции $v(z \mid h, g)$.

§ 4. Задача о вычислении асимптотического распределения нулей четвертого трансцендента Пенлеве

Ограничим наше исследование областью значений переменной z , для которых функция V (1.8) невырождена: $|z| \gg 1$, $0 < \arg z < \pi/2$. В этой области будем искать асимптотические формулы для нулей функции $v(z \mid h, g)$. Для этого поставим задачу Римана–Гильберта (3.7), (3.9) при условии

$$v(z_n \mid h, g) = r(z_n \mid h, g) q(z_n \mid h, g) = 0, \quad -4r_z(z_n \mid h, g) q_z(z_n \mid h, g) = \alpha^2. \quad (4.1)$$

Таким образом, линейное уравнение вида (3.5) значительно упрощается

$$\Psi_\xi = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi^3 + \xi & 2iq_z \\ -2ir_z & -\frac{1}{2}\xi^3 - \xi \end{pmatrix} \Psi. \quad (4.2)$$

Здесь и ниже для упрощения записи полагаем $z = z_n$.

Нужно асимптотически решить уравнение (4.2), соблюдая условия нормировки (3.7) и Стокса (3.9).

Определитель матрицы $\mathcal{A}(\xi)$ (4.2) задает риманову поверхность рода 2

$$\Gamma(\mu, \xi) : \mu^2 = \frac{1}{4}\xi^6 + \xi^4 + \xi^2 - \alpha^2 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - \xi_2^2)(\xi^2 - \xi_3^2). \quad (4.3)$$

Разрезы в ξ -плоскости проведены между точками ветвления по $[-\xi_3, -\xi_2]$, $[-\xi_1, \xi_1]$, $[\xi_2, \xi_3]$. Риманова поверхность Γ образуется путем склеивания двух листов ξ -плоскости по этим разрезам. Верхний лист зафиксируем следующим условием:

$$\mu \rightarrow \frac{1}{2}\xi^3 + \xi, \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad \text{Im } \xi = 0.$$

Канонические циклы на поверхности Γ зададим так, как указано на рис. 1.

Рис. 1

Пунктирная линия показывает путь по нижнему листу.

Интегрируя систему (4.2), мы будем иметь дело лишь с верхним листом римановой поверхности Γ , считая его разрезанной комплексной ξ -плоскостью.

Система (4.2) содержит в своей правой части большой множитель z , что позволяет применить метод ВКБ для приблизительного описания решения Ψ .

ЛЕММА 4.1. *Существуют решения системы (4.2), асимптотически описываемые формулой*

$$\Psi(\xi, z, \alpha) = C \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\xi^3 + \xi + \mu}{\mu}} \left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{2iq_z}{\frac{1}{2}\xi^3 + \xi + \mu} \\ \frac{2ir_z}{\frac{1}{2}\xi^3 + \xi + \mu} & 1 \end{pmatrix} + O(z^{-1}\mu^{-3/2}) \right) \times \exp \left(z \int_{\xi_0}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta \right), \quad (4.4)$$

где C — постоянная по ξ матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцировав систему (4.2) по ξ , сведем ее к паре скалярных уравнений второго порядка:

$$\psi_{1,\xi\xi} = \left(z^2 \mu^2 + z \left(\frac{3}{2} \xi^2 + 1 \right) \right) \psi_1, \quad \psi_{2,\xi\xi} = \left(z^2 \mu^2 - z \left(\frac{3}{2} \xi^2 + 1 \right) \right) \psi_2, \quad (4.5)$$

где $(\psi_1, \psi_2)^T$ – вектор-столбец матрицы Ψ .

Матрица $T = (t_{ij})$, $i, j = 1, 2$, приводящая матрицу $\mathcal{A}(\xi)$ (4.2) к диагональному виду, имеет следующий вид:

$$t_{11} = t_{22} = C \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \xi^3 + \xi + \mu}{\mu}}, \quad t_{12} = \frac{2iq_z C}{\sqrt{\mu(\frac{1}{2} \xi^3 + \xi + \mu)}}, \quad t_{21} = \frac{2ir_z C}{\sqrt{\mu(\frac{1}{2} \xi^3 + \xi + \mu)}}.$$

Произведя в системе (4.2) замену $\Phi = T\Psi$ и используя классический метод ВКБ, получаем требуемое.

Линии Стокса, задаваемые в плоскости ξ уравнениями

$$\operatorname{Re} \left(z \int_{\xi_j}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta \right) = 0, \quad \xi_j = \pm \xi_1, \pm \xi_2, \pm \xi_3, \quad (4.6)$$

ограничивают области, в которых задаются фундаментальные решения Ψ_j системы (4.2). Будем строить эти решения с помощью формулы (4.4) и дополнительных условий

$$\operatorname{Re} \left(z \int_{-\xi_1}^{\xi_1} \mu(\zeta) d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(z \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mu(\zeta) d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(z \int_{\xi_2}^{\xi_3} \mu(\zeta) d\zeta \right) = 0. \quad (4.7)$$

Таким образом, совокупность линий Стокса выглядит так, как показано на рис. 2.

Рис. 2

Кривые Γ_j , выходящие из точек поворота $\pm\xi_{1,2,3}$, на бесконечности асимптотически приближаются к лучам $\arg \xi = \frac{1}{4}(\pi j - \arg z)$, $j = 1, 2, \dots, 8$. Области Ω_j ограничены кривыми Γ_{j-1} и Γ_j , а также отрезками, соединяющими соответствующие точки поворота.

Определим канонические решения системы (4.2) в областях граничным условием

$$\Psi_j = (I + O(\xi^{-1})) \exp\left(z\sigma_3\left(\frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2\right)\right), \quad \xi \in \Gamma_j, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

В формуле (4.4) выберем множитель C таким образом, чтобы соответствующее решение было каноническим, т.е. выполнялась асимптотика (4.8).

ЛЕММА 4.2. *Интегралы, определяющие фазу в формуле (4.4) на бесконечности, имеют следующие асимптотики:*

$$\begin{aligned} \int_{\pm\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2 \pm \frac{1}{4} \oint_{2\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}} \mu(\zeta) d\zeta + O(\xi^{-2}), \\ \xi \in \Gamma_1 \text{ (знак “-”)}, \quad \xi \in \Gamma_5 \text{ (знак “+”)}, \\ \int_{\pm\xi_2}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2 \pm \frac{1}{4} \oint_{2\mathbf{b}+\mathbf{c}} \mu(\zeta) d\zeta + O(\xi^{-2}), \\ \xi \in \Gamma_4 \text{ (знак “+”)}, \quad \xi \in \Gamma_8 \text{ (знак “-”)}, \\ \int_{\pm\xi_3}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2 \pm \frac{1}{4} \oint_{\mathbf{c}} \mu(\zeta) d\zeta + O(\xi^{-2}), \\ \xi \in \Gamma_2 \text{ (знак “+”)}, \quad \xi \in \Gamma_6 \text{ (знак “-”)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим первый интеграл (4.9) в следующем виде:

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta = \int_{\xi_1}^{\xi} \left(\frac{1}{2}\zeta^3 + \zeta\right) d\zeta + \int_{\xi_1}^{\xi} \left(\mu(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 + 2)^2}\right) d\zeta,$$

где в качестве значения корня выбирается его ветвь на верхнем листе

$$\begin{aligned} &\int_{-\xi_1, \zeta \in \Gamma_1}^{\infty} \left(\mu(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 + 2)^2}\right) d\zeta \\ &= \int_{\infty, \zeta \in \Gamma_5}^{\xi_1} \left(\mu(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 + 2)^2}\right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\xi_1, \zeta \in \Gamma_1}^{\infty} + \int_{\infty, \zeta \in \Gamma_5}^{\xi_1} \right) \left(\mu(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 + 2)^2}\right) d\zeta, \end{aligned}$$

следовательно, деформируя контур интегрирования по римановой поверхности абелева дифференциала $\left(\mu(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 + 2)^2}\right) d\zeta$, получаем

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta = \frac{1}{8}\xi^4 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi_1^4 - \frac{1}{2}\xi_1^2 \pm \frac{1}{4} \oint_{2\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}} \left(\mu(\zeta) - \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2(\zeta^2 + 2)^2}\right) d\zeta,$$

откуда следует требуемое для первого интеграла (4.9). Остальные интегралы оцениваются аналогичным образом. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. *Канонические решения Ψ_1, Ψ_5 системы (4.2), определяемые условием (4.8), при больших значениях z имеют следующую асимптотику:*

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Phi(\xi, z, r_z, q_z) (1 + O(z^{-1} \mu^{-3/2})) \\ &\quad \times \exp \left(z \sigma_3 \left(\int_{-\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta + \frac{1}{4} \oint_{2\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}} \mu(\zeta) d\zeta \right) \right), \quad \xi \in \Omega_1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_5 &= \Phi(\xi, z, r_z, q_z) (1 + O(z^{-1} \mu^{-3/2})) \\ &\quad \times \exp \left(z \sigma_3 \left(\int_{\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta - \frac{1}{4} \oint_{2\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}} \mu(\zeta) d\zeta \right) \right), \quad \xi \in \Omega_5, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\Phi(\xi, z, r_z, q_z) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\xi^3 + \xi + \mu}{2\mu}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2iq_z}{\frac{1}{2}\xi^3 + \xi + \mu} \\ \frac{2ir_z}{\frac{1}{2}\xi^3 + \xi + \mu} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (4.10), (4.11) отличаются от (4.4) лишь множителем C . Из леммы 4.2 вытекает, что функции Ψ_1, Ψ_5 имеют асимптотику (4.8) на кривых Γ_1 и Γ_5 , соответственно. В областях определения Ω_1 и Ω_5 эти функции невырождены и в соответствии с леммой 4.1 удовлетворяют системе (4.2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Остальные канонические решения Ψ_j имеют асимптотику вида (4.8), где нормирующие множители подбираются согласно лемме 4.2.

Легко заметить, что приближения (4.10), (4.11) выполняются лишь вне окрестностей точек поворота $\pm\xi_1, \pm\xi_2, \pm\xi_3$, в которых $\mu = 0$. Более того, на кривых Γ_j эти асимптотики приобретают правый матричный множитель, являющийся множителем Стокса S_j (см. (3.9)). С целью вычисления величин S_j исследуем структуру решений Ψ в окрестности точек поворота и согласуем ее с асимптотиками (4.10), (4.11), отвечающими поведению решений вне упомянутых окрестностей.

§ 5. Асимптотики в окрестностях точек поворота

Матрицы Стокса $S_j = \Psi_j^{-1} \Psi_{j+1}$ удобно вычислять на границе Γ_j области Ω_j , для чего необходимо продолжить функцию Ψ_j на Γ_j . Проанализируем решения системы (4.2) в окрестностях точек поворота.

Полагая, что величина α в (4.2) конечна, заключаем, что точки поворота – простые и находятся на конечном расстоянии друг от друга. В этом случае в малой окрестности каждой из них решение системы (4.2) может быть приближено функцией Эйри [17, гл. 5].

ЛЕММА 5.1. *Существуют решения системы (4.2), в окрестности точек поворота, описываемые асимптотикой*

$$\Psi(\xi, z, \alpha) = z^{1/6} \begin{pmatrix} \omega & \beta \bar{\omega} \\ \omega/\beta & \bar{\omega} \end{pmatrix} D + O \left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \exp \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2} \right) \right), \quad \xi \in \Gamma_j, \quad (5.1)$$

где $\eta = z^{2/3}(\xi - \xi_j)$, $\gamma^2 = -\alpha \sum_{m \neq n} (\xi_n - \xi_j)(\xi_m - \xi_j)$, $\beta = -\sqrt{q_z/r_z}$, D – постоянная по η матрица, функции ω , $\bar{\omega}$ – линейно независимые решения уравнения Эйри:

$$\omega_{\eta\eta} + \frac{\gamma^2}{4}\eta\omega = 0; \quad (5.2)$$

на луче $\arg \eta = -\frac{2}{3} \arg \gamma$ функции ω и $\bar{\omega}$ имеют асимптотики

$$\begin{aligned} \omega(\eta) &= \eta^{-1/4} (1 + O(\eta^{-3/2})) \exp \left(i \left(\frac{\gamma}{3} \eta^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right), \\ \bar{\omega}(\eta) &= \eta^{-1/4} (1 + O(\eta^{-3/2})) \exp \left(-i \left(\frac{\gamma}{3} \eta^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фазовая функция μ в окрестности своего нуля $\xi = \xi_j$ имеет асимптотику

$$\mu(\xi) = \frac{i}{2} \gamma \sqrt{\xi - \xi_j} + O((\xi - \xi_j)^{3/2}). \quad (5.4)$$

Решения системы (4.2) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \omega_1(\eta) + z^{-1/3} \omega_3(\eta) + O(z^{-2/3}), \\ \psi_2 &= \omega_2(\eta) + z^{-1/3} \omega_4(\eta) + O(z^{-2/3}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где ψ_1, ψ_2 – компоненты вектор-столбца Ψ , задаваемые уравнениями (4.5). В эти уравнения подставим выражение (5.4) и переменную $\eta = z^{2/3}(\xi - \xi_j)$. Получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega_{1,2}}{d\eta^2} &= -\frac{\gamma^2}{4} \eta \omega_{1,2}, \\ \frac{d^2 \omega_{3,4}}{d\eta^2} &= -\frac{\gamma^2}{4} \eta \omega_{3,4} \pm z \left(\frac{3}{2} \xi_j^2 + 1 \right) \omega_{1,2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Имея в виду, что $\frac{1}{2} \xi^3 + \xi = \alpha + O(\eta z^{-2/3})$ и переписывая уравнение $\partial_\xi \Psi = \mathcal{A}(\xi) \Psi$ в окрестности точки ξ_j , получаем

$$\omega_2 = \frac{1}{\beta} \omega_1, \quad \omega_{1,\eta} = 2i\sqrt{r_z q_z} \omega_3 + 2iq_z \omega_4. \quad (5.7)$$

Выберем для первого столбца Ψ компоненты $\omega_{1,2}$ в виде $\omega_1 = z^{1/6} \omega$, $\omega_2 = -z^{1/6} \omega \sqrt{q_z/r_z}$, для второго – в виде $\omega_3 = z^{1/6} \bar{\omega}$, $\omega_4 = -z^{1/6} \bar{\omega} \sqrt{q_z/r_z}$, где функции Эйри $\omega, \bar{\omega}$ линейно независимы и удовлетворяют условиям (5.2), (5.3). Из этого факта и из равенств (5.6), (5.7) вытекает, что вторые члены асимптотик (5.5) имеют вид остаточного члена в формуле (5.1). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поведение функций Эйри, определяемых равенствами (5.2), (5.3), хорошо изучено (см., например, [17]). Так, выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \omega(\eta e^{-2\pi i/3}) &= e^{-\pi i/3} (\omega(\eta) - \bar{\omega}(\eta)), \quad \bar{\omega}(\eta e^{-2\pi i/3}) = e^{-\pi i/3} \omega(\eta), \\ \omega(\eta e^{-2\pi i/3}) &= e^{\pi i/3} \bar{\omega}(\eta), \quad \bar{\omega}(\eta e^{-2\pi i/3}) = e^{\pi i/3} (\bar{\omega}(\eta) - \omega(\eta)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Канонические решения Ψ_1 и Ψ_5 имеют следующие асимптотики на отрезке $[-\xi_1, \xi_1]$:*

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, z, r_z, q_z) &= \Phi(\xi, z, r_z, q_z) \exp\left(z\sigma_3 \int_{-\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i/\beta & 1 \end{pmatrix} \\ &\times D_1(1 + O(z^{-1}\mu^{-3/2})), \quad \xi \in [-\xi_1, \xi_1], \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \Psi_5(\xi, z, r_z, q_z) &= \Phi(\xi, z, r_z, q_z) \exp\left(z\sigma_3 \int_{\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta\right) \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ i/\beta & 0 \end{pmatrix} \\ &\times D_1(1 + O(z^{-1}\mu^{-3/2})), \quad \xi \in [-\xi_1, \xi_1], \end{aligned} \quad (5.10)$$

где

$$D_1 = \exp\left(\frac{z}{4}\sigma_3 \oint_{2\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}} \mu(\zeta) d\zeta\right),$$

матрица Φ определена формулой (4.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала выведем формулу (5.9), для чего изучим поведение решений в окрестности точки $-\xi_1$. Рассмотрим область, где величина $\xi + \xi_1$ мала, а $\eta = z^{2/3}(\xi + \xi_1)$ — велика. В этой области формулы (5.1) и (5.10) дают асимптотику решения системы (4.2) и, следовательно, они отличаются на постоянный множитель.

Вычислим асимптотику решения Ψ_1 на границе Γ_8 в малой окрестности точки $-\xi_1$. Для этого перепишем (4.10) в переменной η и учтем поведение фазовой функции μ (5.4):

$$\mu(\xi) = \frac{1}{2}\eta^{1/2}iz^{-1/3}\gamma + O((\xi + \xi_1)^{3/2}), \quad \text{где } \gamma^2 = -\alpha(\xi_2 + \xi_1)(\xi_3 + \xi_1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} z^{1/6} \eta^{-1/4} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1/\beta & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2}iz\gamma\sigma_3 \int_{-\xi_1}^{\xi} (\zeta + \xi_1) d\zeta &= \frac{i}{2}\gamma\sigma_3\eta^{3/2}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \left(e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} z^{1/6} \eta^{-1/4} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1/\beta & 0 \end{pmatrix} + O(z^{-1/2}\eta^{-3/4}) \right) \\ &\times \exp\left(\frac{i}{3}\gamma\sigma_3\eta^{3/2} + O(z^{-2/3}\eta^{-5/2})\right) D_1 \end{aligned} \quad (5.11)$$

при $\xi \in \Gamma_8, \xi \rightarrow -\xi_1$.

Теперь подставим асимптотики (5.3) функций Эйри в формулу (5.1) и сравним полученное выражение с (5.11). Отсюда выводим выражение для множителя D (5.1):

$$D = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} D_1.$$

Переходя с кривой Γ_8 на границу $[-\xi_1, \xi_1]$ (оставаясь по-прежнему в малой окрестности точки $-\xi_1$), нужно в формуле (5.1) сделать замену $\eta \mapsto \eta e^{2\pi i/3}$. Используя свойства функций Эйри (5.8), при $\xi \in [-\xi_1, \xi_1]$ получаем

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\xi, z, r_z, q_z) &= \Psi_1(\xi_1 + \eta e^{-2\pi i/3} z^{-2/3}, z, r_z, q_z) \Big|_{\eta=\eta e^{2\pi i/3}} \\
&= z^{1/6} \begin{pmatrix} \omega(\eta e^{-2\pi i/3}) & \beta \bar{\omega}(\eta e^{-2\pi i/3}) \\ \frac{1}{\beta} \omega(\eta e^{-2\pi i/3}) & \bar{\omega}(\eta e^{-2\pi i/3}) \end{pmatrix} \Big|_{\eta=\eta e^{2\pi i/3}} D + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right) \\
&= z^{1/6} e^{-\pi i/3} \begin{pmatrix} \omega - \bar{\omega} & \beta \omega \\ \frac{1}{\beta}(\bar{\omega} - \omega) & \omega \end{pmatrix} \Big|_{\eta=\eta e^{2\pi i/3}} D + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right) \\
&= z^{1/6} e^{-\pi i/3} \begin{pmatrix} \bar{\omega} & \beta \omega \\ \frac{1}{\beta} \bar{\omega} & \omega \end{pmatrix} \Big|_{\eta=\eta e^{2\pi i/3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/\beta & 1 \end{pmatrix} D + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right) \\
&= z^{1/6} e^{-\pi i/3} (\eta e^{2\pi i/3})^{-1/4} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1/\beta & 1 \end{pmatrix} \exp\left(-i\sigma_3 \left(\frac{1}{3} \gamma \eta^{3/2} e^{\pi i} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/\beta & 1 \end{pmatrix} D \\
&\quad + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right) \\
&= z^{1/6} \eta^{-1/4} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1/\beta & 1 \end{pmatrix} i \exp\left(\frac{i}{3} \sigma_3 \gamma \eta^{3/2}\right) \begin{pmatrix} e^{-\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{\pi i/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\beta & -1 \end{pmatrix} D \\
&\quad + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right),
\end{aligned}$$

откуда выводим

$$C = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\beta & -1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i/\beta & 1 \end{pmatrix} D_1$$

и получаем формулу (5.9).

Выражение (5.10) выводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Psi_5(\xi, z, r_z, q_z) &= \sigma_3 \Psi_1(\xi, z, r_z, q_z) \sigma_3 \\
&= z^{1/6} \begin{pmatrix} \omega & -\bar{\omega} \beta \\ -\omega/\beta & \bar{\omega} \end{pmatrix} D + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right) \\
&= z^{1/6} \begin{pmatrix} \omega(\eta e^{-2\pi i/3}) & -\beta \bar{\omega}(\eta e^{-2\pi i/3}) \\ -\frac{1}{\beta} \omega(\eta e^{-2\pi i/3}) & \bar{\omega}(\eta e^{-2\pi i/3}) \end{pmatrix} \Big|_{\eta=\eta e^{2\pi i/3}} D \\
&\quad + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right) \\
&= z^{1/6} \begin{pmatrix} \omega & -\bar{\omega} \beta \\ -\frac{\omega}{\beta} & \bar{\omega} \end{pmatrix} \Big|_{\eta=\eta e^{2\pi i/3}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 1/\beta & 1 \end{pmatrix} e^{-\pi i/3} D \\
&\quad + O\left(z^{-1/6} \eta^{3/4} \left(\pm \frac{i}{3} \gamma \sigma_3 \eta^{3/2}\right)\right), \quad \xi \in [-\xi_1, \xi_1].
\end{aligned}$$

Дальнейшие выкладки аналогичны использованным при выведении формулы (5.9). Теорема доказана.

§ 6. Асимптотическое распределение нулей четвертого трансцендента Пенлеве

Основной задачей данного параграфа является установление связи между первыми интегралами h, g (3.11) уравнения Пенлеве и инвариантами римановой поверхности Γ (4.3), а также вычисление асимптотик нулей функции $v(z)$ в окрестности бесконечности по z . Таким образом, получаются алгебраические уравнения $h = h(z, \alpha)$, $g = g(z, \alpha)$, которые нетрудно исследовать. Иначе говоря, это дает возможность вывести асимптотические формулы нулей $z_{m,n}$ функции $v(z)$ при $z \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Первые интегралы h, g уравнения Пенлеве (1.6) удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$h = 1 + s_2 s_3 = \exp\left(-\frac{z}{2} \int_0^{\xi_1^2} \frac{\sqrt{\zeta R_3(\zeta)}}{\zeta} d\zeta\right) (1 + o(1)), \quad z \rightarrow \infty, \quad (6.1)$$

$$g = \frac{1 + s_2 s_3}{1 + s_1 s_2} = \exp\left(\frac{z}{2} \int_{\xi_1^2}^{\xi_2^2} \frac{\sqrt{\zeta R_3(\zeta)}}{\zeta} d\zeta\right) (1 + o(1)), \quad z \rightarrow \infty, \quad (6.2)$$

где $R_3(y) = y^3 + 4y^2 + 4y - 4\alpha^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала вычислим матрицу

$$S_1 S_2 S_3 S_4 = \begin{pmatrix} 1 + s_2 s_3 & \frac{s_2 s_3 (2 + s_2 s_3)}{s_1 + s_3 + s_1 s_2 s_3} \\ s_1 + s_3 + s_1 s_2 s_3 & 1 + s_2 s_3 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Обозначим

$$H = \exp\left(-\frac{z}{2} \oint_{\mathbf{c}} \mu(\zeta) d\zeta\right), \quad G = \exp\left(z \oint_{\mathbf{a}} \mu(\zeta) d\zeta\right), \quad F = \exp\left(z \oint_{\mathbf{b}} \mu(\zeta) d\zeta\right)$$

и, используя формулы (5.9), (5.10), получим

$$\begin{aligned} S_1 S_2 S_3 S_4 &= \Psi_1^{-1} \Psi_5 = D_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i/\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ i/\beta & 0 \end{pmatrix} D_1 (1 + o(1)) \\ &= \begin{pmatrix} H & \frac{i\beta H^2}{GF} \\ \frac{GF(1 - H^{-2})}{i\beta} & H \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее равенство с формулой (6.3), выводим, что $h = H + o(1)$. Пользуясь автоморфизмом $\xi \mapsto -\xi$, мы можем переписать интегралы на поверхности Γ в виде эллиптических интегралов на поверхности $\Gamma'(\nu, y)$: $\nu^2 = yR_3(y)$ рода 1. Таким образом, получается формула (6.1). Выражение (6.2) выводится с помощью вычисления матрицы $S_4 S_5 S_6 S_7$ путем выполнения аналогичных действий. Теорема доказана.

Для того чтобы найти асимптотическое распределение нулей $z_{m,n}$ функции $v(z)$, нужно разрешить уравнения (6.1), (6.2) относительно величин z и α , полагая h и g фиксированными параметрами. Будем искать эти решения в виде асимптотических рядов по малому параметру z^{-1} :

$$z = z_{m,n} = nJ_1 + mJ_2 + z_0(\varphi) + O\left(\frac{1}{|m| + |n|}\right), \quad (6.4)$$

$$-\alpha^2 = A(\varphi) + \frac{d(\varphi)}{2z} + O(|z|^{-2}), \quad |m| + |n| \rightarrow \infty, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (6.5)$$

$$I_{1,2} = \oint_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \sqrt{\frac{1}{2}\xi^6 + \xi^4 + \xi^2 + A} d\xi, \quad J_{1,2} = \oint_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{4}\xi^6 + \xi^4 + \xi^2 + A}}. \quad (6.6)$$

Функция $v(z)$ близка к эллиптической функции $V(z - z_0 \mid A)$ (1.9). С другой стороны, записывая величины J_1, J_2 в виде интегралов на римановой поверхности Γ' рода 1, получаем, что они представляют собой пару элементарных периодов функции $V(z - z_0 \mid A)$. Поэтому выбор формулы (6.4) выглядит обоснованным.

ЛЕММА 6.1. Пусть величины I_1, I_2 и J_1, J_2 заданы формулами (6.6). Тогда выполняется равенство $J_2 I_1 - J_1 I_2 = -4\pi i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Униформизация римановой поверхности

$$(x, y = \sqrt{xR_3(x)}), \quad R_3(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 4A,$$

в тор $\{z \in T^2\}$ дается формулами

$$\begin{aligned} x(z) &= \zeta(z + \sigma) - \zeta(z - \sigma) - 2\zeta(\sigma), \\ y(z) &= \wp(z - \sigma) - \wp(z + \sigma) \end{aligned} \quad (6.7)$$

(см. стандартные обозначения теории функций Вейерштрасса в [18]), причем выполняются условия:

$$2\zeta(\sigma) - \zeta(2\sigma) = 1, \quad \wp(\sigma) = \frac{1}{3}.$$

Из этого следует, что

$$R_3(x(z)) = \frac{1}{2}\wp'(z - \sigma) - \frac{1}{2}\wp'(z + \sigma) + \wp(z + \sigma) + \wp(z - \sigma) + 4A - \frac{2}{3} + \wp'(\sigma).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \oint_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} R_3(x(z)) dz, \\ I_1 &= -4\eta + 2\omega\left(4A - \frac{2}{3} + \wp'(\sigma)\right), \quad I_2 = -4\eta' + 2\omega'\left(4A - \frac{2}{3} + \wp'(\sigma)\right), \end{aligned}$$

где $2\omega, 2\omega'$ — примитивные периоды функций $x(z)$ и $y(z)$, $J_1 = 2\omega$, $J_2 = 2\omega'$ и, следовательно,

$$J_2 I_1 - J_1 I_2 = -8\eta\omega' + 8\eta'\omega = -4\pi i.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполняются уравнения (6.1) и (6.2). Тогда

1) функция A в формуле (6.5) удовлетворяет условиям

$$\arg I_1 = -\varphi + \pi k_1, \quad \arg I_2 = -\varphi + \pi k_2, \quad (6.8)$$

где $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$, $z_{m,n} = (r + O(1))e^{i\varphi}$;

2) целые числа m, n в асимптотике (6.4) удовлетворяют оценке

$$nI_1 + mI_2 = O(1), \quad |m| + |n| \rightarrow \infty; \quad (6.9)$$

3) функции d и z_0 удовлетворяют равенствам

$$d = -\frac{4i}{\pi}(I_1 \log h + I_2 \log g) - 4(nI_1 + mI_2), \quad (6.10)$$

$$z_0 = \frac{i}{\pi}(J_1 \log h + J_2 \log g). \quad (6.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражения (6.4), (6.5) подставим в формулы (6.1), (6.2), используя обозначение $z = z_{m,n} = r'e^{i\varphi} + O(1)$, $r' \rightarrow \infty$. Левые части уравнений (6.1), (6.2) постоянны, поэтому показатели экспонент в правых частях должны удовлетворять условиям

$$\operatorname{Re} \left(z_{m,n} \oint_{\mathbf{a}', \mathbf{b}'} \frac{\sqrt{\zeta R_3(\zeta)}}{\zeta} d\zeta \right) = O(1), \quad r' \rightarrow \infty, \quad (6.12)$$

где $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ – базовые циклы на римановой поверхности Γ' . Из (6.12) вытекает следующее:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\exp \left(i \left(\varphi + \arg \oint_{\mathbf{a}', \mathbf{b}'} \frac{\sqrt{\zeta R_3(\zeta)}}{\zeta} d\zeta \right) \right) \right) &= O\left(\frac{1}{r'}\right), \\ \arg \oint_{\mathbf{a}', \mathbf{b}'} \frac{\sqrt{\zeta R_3(\zeta)}}{\zeta} d\zeta &= -\varphi + \pi k_{1,2} + O\left(\frac{1}{r'}\right), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$. Оценим фазовые интегралы

$$\oint_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \mu(\zeta) d\zeta = I_{1,2} + \frac{d}{4z} J_{1,2} + O(|z|^{-2}). \quad (6.14)$$

Из последнего уравнения и (6.13) вытекает (6.8). Теперь подставим в показатели экспонент (6.1), (6.2) асимптотики (6.4), (6.14):

$$\begin{aligned} \frac{z_{m,n}}{4} \oint_{\mathbf{a}} \mu(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{4}(nJ_1 + mJ_2 + z_0 + O(|z|^{-1})) \left(I_1 + \frac{d}{4z} J_1 + O(|z|^{-1}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(m(J_2 I_1 - J_1 I_2) + J_1(nI_1 + mI_2) + z_0 I_1 + \frac{d}{4} J_1 \right) + O(|z|^{-1}). \end{aligned}$$

Используя лемму 6.1, перепишем последнее выражение в следующем виде:

$$\frac{z_{m,n}}{4} \oint_{\mathbf{a}} \mu(\zeta) d\zeta = -\pi i m + \frac{1}{4} \left(z_0 I_1 + \frac{d}{4} J_1 + \delta J_1 \right) + O(|z|^{-1}), \quad (6.15)$$

где $\delta = nI_1 + mI_2$. Аналогичным образом выводится формула

$$-\frac{z_{m,n}}{4} \oint_{\mathbf{b}} \mu(\zeta) d\zeta = -\pi i n - \frac{1}{4} \left(z_0 I_2 + \frac{d}{4} J_2 + \delta J_2 \right) + O(|z|^{-1}). \quad (6.16)$$

Собирая в равенствах (6.15), (6.16) конечные по z члены, получаем систему

$$\begin{aligned} z_0 I_1 + \frac{d}{4} J_1 &= 4 \log g - \delta J_1, \\ z_0 I_2 + \frac{d}{4} J_2 &= 4 \log h - \delta J_2, \end{aligned}$$

откуда выводим формулы (6.10), (6.11).

Из (6.12) следует, что $\operatorname{Re}(nI_1 + mI_2) = O(1)$ при $|m|, |n| \rightarrow \infty$, а так как выполнено условие (6.13), то получаем оценку (6.9). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть четвертый трансцендент Пенлеве $v(z \mid h, g)$, заданный уравнением (1.6) и первыми интегралами h, g , имеет нули $z_{m,n}$ при больших $|z|$ в окрестности луча $\arg z = \varphi$, $0 < \varphi < \pi/2$. Тогда асимптотика $z_{m,n}$ при $|m| + |n| \rightarrow \infty$ представлена формулой (6.4), где величина z_0 определена выражением (6.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По фиксированным значениям φ, g, h определим величины A, d, z_0 и эллиптические интегралы $I_{1,2}, J_{1,2}$ (6.6). Пусть $\hat{v}(z)$ – решение уравнения (1.6) с начальными условиями

$$\hat{v}(z_{m,n}) = 0, \quad \frac{\hat{v}_z^2}{\hat{v}}(z_{m,n}) = -\alpha^2.$$

Тогда величины $\hat{h}, \hat{g}$, представленные данными монодромии системы (4.2), имеют по теореме 6.1 асимптотику вида (6.1), (6.2):

$$\hat{h} = h(1 + o(1)), \quad \hat{g} = g(1 + o(1)), \quad |z_{m,n}| \rightarrow \infty.$$

Согласно теореме 6.1 величины $\hat{h}, \hat{g}$ и h, g не зависят от z , поэтому $\hat{h} = h, \hat{g} = g$. Значит, $v = \hat{v}$, а нули $z_{m,n}$ функции v имеют асимптотику (6.4). Теорема доказана.

§ 7. Четвертый трансцендент Пенлеве как модулированная эллиптическая функция

Изложенное выше позволяет перейти к рассмотрению вопроса о представлении функции Пенлеве $v(z \mid h, g)$ в области $|z| \gg 1$, $0 < \arg z < \pi/2$ в виде асимптотического ряда, главным членом которого является модулированная эллиптическая функция $V(z - z_0 \mid A)$, заданная условиями (1.8), (2.4) и (6.11). Рассмотрим уравнение Пенлеве (1.6)

$$4v_{zz} - 2\frac{v_z^2}{v} - \frac{2}{3}v^3 - 4v^2 - 2v = \frac{av - 2v_z}{z} + \frac{1}{z^2}\left(\frac{v}{2} - \frac{a^2}{4v}\right) \quad (7.1)$$

и его приближение

$$4V_{zz} - 2\frac{V_z^2}{V} - \frac{3}{2}V^3 - 4V^2 - 2V = 0 \quad (7.2)$$

в круге $D_{m,n} = \{z : |z - z_{m,n}| < \max\{|J_1|, |J_2|\}\}$, где J_1, J_2 — эллиптические интегралы (6.6). Поставим задачу Коши с начальными условиями

$$v(z_{m,n}) = 0, \quad \frac{v_z^2}{v}(z_{m,n}) = -\alpha^2, \quad (7.3)$$

$$V(z_{m,n}) = 0, \quad \frac{V_z^2}{V}(z_{m,n}) = A. \quad (7.4)$$

Нетрудно убедиться, что решение задачи (7.2), (7.4) представляется эллиптической функцией вида (6.7) с периодами J_1, J_2 , простыми полюсами, расположенными в точках

$$z_r = z_{m,n} \pm \sigma + r_1 J_1 + r_2 J_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, \quad (7.5)$$

и двойными нулями — в точках

$$z_s = z_{m,n} + s_1 J_1 + s_2 J_2. \quad (7.6)$$

В области больших значений $|z| \gg 1$, где $\alpha^2 + A = O(z_{m,n}^{-1})$, ищем приближение функции Пенлеве (7.1), (7.3) в круге $D_{m,n}$ в виде асимптотического ряда

$$v(z) = V(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{V_j(z)}{z_{m,n}^j}, \quad z \in D_{m,n}, \quad (7.7)$$

причем коэффициенты V_j удовлетворяют рекуррентной системе линейных уравнений вида

$$4V_{j,zz} - 4\frac{V_z}{V_j}V_{j,z} - \left(\frac{9}{2}V^2 + 8V + 2 - 2\frac{V_z^2}{V}\right)V_j = f_j, \quad (7.8)$$

где $f_j = f_j(V, V_1, \dots, V_{j-1}, V_z, V_{1,z}, \dots)$.

ЛЕММА 7.1. Пусть величины f_j допускают оценку

$$|f_j(z)| < \sum_{z_r \in D_{m,n}} C_r |z - z_r|^{-N}, \quad N \geq 3, \quad (7.9)$$

где z_r — полюсы функции V (7.5).

Тогда решение V_j уравнения (7.8) с начальными условиями $V_j(z_{m,n}) = 0$, $V_{j,z}(z_{m,n}) = B_j$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} V_j(z) \right| < \sum_{z_r \in D_{m,n}} \tilde{C}_r |z - z_r|^{-N+2-k}. \quad (7.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что функция V_z удовлетворяет однородному уравнению (7.8). Следовательно, решение (7.8) с указанными начальными данными представляется формулой

$$V_j = V_z \int_{z_{m,n}}^z \frac{V}{V_\xi^2} d\xi \int_{z_{m,n}}^\xi \left(f_j \frac{V_\zeta}{V} + \frac{B_j A}{V_\zeta} \right) d\zeta. \quad (7.11)$$

В круге $D_{m,n}$ величина V_z имеет конечное число простых нулей и полюсов второго порядка в точках z_r , так что выполняются неравенства

$$\prod_{r,s} \frac{C_{r,s}^- |z - z_s|}{|z - z_r|^2} \leq |V_z| \leq \prod_{r,s} \frac{C_{r,s}^+ |z - z_s|}{|z - z_r|^2}. \quad (7.12)$$

Следовательно, второе слагаемое правой части (7.11) подчиняется оценке

$$\left| V_z \int_{z_{m,n}}^z \frac{V}{V_\xi^2} d\xi \int_{z_{m,n}}^\xi \frac{d\zeta}{V_\zeta} \right| < \sum_{z_r \in D_{m,n}} \widehat{C}_r |z - z_r|^{-2}. \quad (7.13)$$

Оценим первое слагаемое в круге $D_{m,n}$:

$$\left| \int_{z_{m,n}}^z \frac{V}{V_\xi^2} d\xi \int_{z_{m,n}}^\xi f_j \frac{V_\zeta}{V} d\zeta \right| < \int_{z_{m,n}}^z \sum_r \frac{M_r d\xi}{|\xi - z_r|^{N-3}} < \sum_r \frac{\widetilde{M}_r}{|z - z_r|^{N-4}}.$$

Умножив последнее выражение на V_z и используя оценку (7.12), получим неравенство (7.10) для $k = 0$. Для любого $k \geq 1$ продифференцируем формулу (7.11) k раз и, пользуясь теми же оценками, получим требуемое. Лемма доказана.

Пусть теперь параметры, определяющие эллиптическую функцию V , зависят от “медленной” переменной $\varphi = \arg z$ через уравнение модуляций (2.4).

ЛЕММА 7.2. Пусть $V = V(z - z_0(\varphi)|A(\varphi))$ – модулированная эллиптическая функция (1.8). Тогда для коэффициентов асимптотического ряда (7.7) выполняются оценки

$$|V_j(z)| < \sum_{z_r \in D_{m,n}} \widetilde{C}_r |z - z_r|^{-j}, \quad z \in D_{m,n}. \quad (7.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим полную производную по z

$$\frac{d}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{iz} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

и оценим величины f_j . В уравнении (7.8) для V_1 правая часть равна

$$\begin{aligned} f_1 &= 8iV_{z\varphi} - 4i \frac{V_\varphi V_z}{V} + aV - 2V_z, \\ V_{z\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sqrt{V^4 + 4V^3 + 4V^2 + 4AV} \\ &= \frac{VA_\varphi}{V_z} + 4A_\varphi(V^3 + 3V^2 + 2V + A) \int_0^V \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta^4 + 4\zeta^3 + 4\zeta^2 + 4A\zeta)^{3/2}}, \end{aligned}$$

так как

$$V_\varphi = 4V_z A_\varphi \int_0^V \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta^4 + 4\zeta^3 + 4\zeta^2 + 4A\zeta)^{3/2}}.$$

Следовательно, $f_1 = O(|z - z_r|^{-3})$ и требуемая оценка (7.14) для V_1 выполнена в силу леммы 7.1.

Формулируем предположение индукции: пусть лемма 7.2 верна для $j \leq N$. Докажем ее выполнение для $j = N + 1$. Выпишем общий вид величины f_{N+1} :

$$\begin{aligned} f_{N+1} = & \frac{4}{V} \sum_{i+j=N+1} \left(V_{i,z} V_{j,z} - \frac{V_z}{V} V_{i,z} V_j \right) + \frac{4}{V^2} \sum_{i+j+k=N+1} V_{i,z} V_{j,z} V_k \\ & + \frac{4i}{V} \left(V_\varphi \left(V_{N,z} - \frac{V_z}{V} V_N \right) + V_z V_{N,\varphi} + \sum_{i+j=N} V_{i,\varphi} \left(V_{j,z} - \frac{V_z}{V} V_j \right) \right) \\ & - \frac{4i}{V} \left(\frac{V_\varphi}{V} \sum_{i+j=N} V_i V_{j,z} - \frac{1}{V} \sum_{i+j+k=N} V_i V_{j,z} V_{k,\varphi} \right) \\ & + \frac{2}{V} \sum_{i+j=N-1} \left(V_{i,\varphi} V_{j,\varphi} - \frac{V_\varphi}{V} V_{i,\varphi} V_j \right) + \frac{4}{V^2} \sum_{i+j+k=N-1} V_{i,\varphi} V_{j,\varphi} V_k - \frac{2}{V^2} V_{N-1} V_\varphi^2 \\ & - \frac{4}{V} V_{N-1,\varphi} V_\varphi - \frac{25}{2} V \sum_{i+j=N+1} V_i V_j - \frac{3}{2} \sum_{i+j+k=N+1} V_i V_j V_k - a V_N + 2 V_{N,z} + 2i V_{N-1,\varphi} \\ & - \frac{1}{2} V_{N-2} - \frac{a^2}{4V^2} V_{N-2} + 8i V_{N,z\varphi} - 4 V_{N-1,\varphi\varphi}. \end{aligned}$$

Используя индуктивное предположение и оценивая кубические по V_j и их производным члены, получим $f_{N+1} = O(|z - z_r|^{-N-3})$. Согласно лемме 7.1 выполняется условие

$$|V_{N+1}(z)| < \sum_{z_r \in D_{m,n}} \tilde{C}_r |z - z_r|^{-N-1},$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $v(z \mid h, g)$ – решение уравнения Пенлеве (1.6), а $V(z - z_0(\varphi) \mid A(\varphi))$ – решение уравнения (1.8) с начальными условиями

$$V(0 \mid A) = 0, \quad \frac{V_z}{V}(0 \mid A) = A,$$

где $\varphi = \arg z$, A удовлетворяет уравнению Уизема (2.4),

$$z_0 = \frac{i}{\pi} (J_1 \log h + J_2 \log g),$$

$J_{1,2}$ – полные эллиптические интегралы (6.6). Тогда при всех $|z| \gg 1$, $0 < \arg z < \pi/2$ выполняется оценка

$$|v - V| = O(|z|^{-1} \text{dist}(z, D)^{-2}), \quad (7.15)$$

где D – множество полюсов функции V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем фиксированное φ и вычислим для него из уравнений (2.4), (6.6) величины $A(\varphi)$ и $J_{1,2}$, $I_{1,2}$. С помощью условия (6.9) вычислим целые числа m и n , затем найдем асимптотики (6.10), (6.11) для величин $z_{m,n}$ и α . Пусть эллиптическая функция V определяется формулой (1.9). Если переменная φ фиксирована, то функция V периодична с периодами J_1 и J_2 , так что

$$\begin{aligned} V(z - z_{m,n} \mid A) &= V(z + mJ_2 + nJ_1 - z_0 + O(z_{m,n}^{-1}) \mid A) \\ &= V(z - z_0 \mid A) + O(z_{m,n}^{-1} V_z(z - z_0 \mid A)). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Применив в круге $D_{m,n}$ лемму 7.2, выводим условие (7.15). Асимптотики (6.10), (6.11) выполняются для достаточно больших по модулю нулей $z_{m,n}$ функции Пенлеве, поэтому функция $V(z - z_0(\varphi) \mid A(\varphi))$ удовлетворяет оценке (7.16). Покрывая все множество $|z| \gg 1$, $0 < \arg z < \pi/2$ кругами $D_{m,n}$, получаем требуемое. Теорема доказана.

Список литературы

1. Painlevé P. Sur les equations differentielles du second ordre et d'ordre superieur, dont l'integrale generale est uniforme // Acta Math. 1902. V. 25. P. 1–86.
2. Boutroux P. Etude asymptotique de transcendents de M. Painlevé dont est les solutions des equations differentielles du second ordre // Ann. L'Ecole Norm. Super. 1914. V. 31. P. 99–155.
3. Flaschka H., Newell A. C. Monodromy- and spectrum-preserving deformations. I // Comm. Math. Phys. 1980. V. 76. P. 65–116.
4. Караев А. А. Асимптотика решений уравнения Пенлеве первого рода // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. №10. С. 1684–1694.
5. Караев А. А. Асимптотические формулы для функций Пенлеве второго рода // ТМФ. 1988. Т. 77. №3. С. 323–332.
6. Караев А. А. Global asymptotics of the first Painlevé transcendent // Preprint INS#225. New York: Clarkson University, 1993.
7. Новокшенов В. Ю. Модулированная эллиптическая функция как решение второго уравнения Пенлеве в комплексной плоскости // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. №2. С. 288–291.
8. Novokshenov V. Yu. Radial-symmetric solution of the cosh-Laplace equation and the distribution of its singularities // Preprint #64, SFB 288. Berlin, 1993.
9. Joshi N., Kruskal M. D. An asymptotic approach to the connection problem for the first and the second Painlevé equations // Phys. Lett. A. 1988. V. 130. №3. P. 129–137.
10. Китаев А. В. Об автомодельных решениях модифицированного нелинейного уравнения Шрёдингера // ТМФ. 1985. Т. 64. №3. С. 347–369.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.
12. Новокшенов В. Ю. Анзац Бутру для второго уравнения Пенлеве в комплексной области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 55. №6. С. 1229–1251.
13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
14. Vereschagin V. L. Nonlinear quasiclassics and the Painlevé equations // Talk at International Workshop “Singular Limits in Dispersive Waves – 2”. Zvenigorod, 1995.
15. Jimbo M., Miwa T. Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II // Phys. D. 1981. V. 2D. №3. P. 407–448.
16. Арнольд В. И., Ильясенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. I // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7–150.

17. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
18. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. V. 3. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.

Иркутский ВЦ СО РАН

Поступила в редакцию
04.06.1996