Общероссийский математический портал

Ю. А. Алхутов, L_p -оценки решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:31:19

УДК 517.956

Ю. А. Алхутов

L_p -оценки решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка

В работе изучается задача Дирихле для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка с непрерывными в замкнутой области коэффициентами. Найдено необходимое и достаточное условие на границу ограниченной области, обеспечивающее однозначную L_p -разрешимость рассматриваемой задачи вместе с соответствующей коэрцитивной L_p -оценкой при всех $p > 1$.

Библиография: 18 названий.

Введение

Настоящая работа посвящена вопросу о L_p -разрешимости задачи Дирихле для эллиптических операторов дивергентного вида

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (1)$$

Предполагается, что коэффициенты a_{ij} определены в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с границей ∂D , непрерывны в $\overline{D}$ и удовлетворяют условию

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2, \quad \lambda = \text{const} > 0. \quad (2)$$

Для простоты изложения будем считать, что $a_{ij} \equiv a_{ji}$.

Пусть $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$ – замыкание финитных, бесконечно дифференцируемых в D функций $C_0^\infty(D)$ по норме $W_p^1(D)$, а $W_p^{-1}(D)$ – пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{W}_q^1(D)$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$).

Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = f \text{ в } D, \quad f \in W_p^{-1}(D), \quad u \in \overset{\circ}{W}_p^1(D), \quad (3)$$

решение которой понимается в смысле интегрального тождества с пробными функциями из $C_0^\infty(D)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00443).

Целью данной работы является нахождение необходимого и достаточного условия на границу области D , при выполнении которого эта задача однозначно разрешима для всех $p \in (1, \infty)$ вместе с соответствующей коэрцитивной оценкой

$$\|u\|_{\dot{W}_p^1(D)} \leq C \|f\|_{W_p^{-1}(D)}, \quad (4)$$

где постоянная C не зависит от u и f .

Разрешимость задачи (3) хорошо изучена в областях с изолированными особенностями на границе. В плоском случае рассмотрены угловые точки [1]–[3], в многомерном – конические точки, ребра, многогранные углы, и т. п. [1], [4]–[6]. Случай, когда особенности границы не локализованы, исследован в [7], где область D предполагается выпуклой.

Характерной особенностью упомянутых работ является использование техники распрямления регулярной части границы, что заведомо налагает на нее определенные свойства гладкости.

Преимущество предлагаемого в настоящей работе подхода состоит в том, что он основан только на оценках функции Грина вблизи границы и внутренней априорной L_p -оценке.

Прежде чем изложить основные результаты, ранее сформулированные в [8], [9], приведем используемые обозначения и определения.

Всюду далее $\mathfrak{L}$ – множество операторов вида (1) с непрерывными в $\overline{D}$ коэффициентами, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности, $B_r^{x_0}$ – открытый шар $\{x : |x - x_0| < r\}$, $S_r^{x_0}$ – сфера $\{x : |x - x_0| = r\}$, $\rho(x)$ – расстояние от точки $x \in D$ до границы ∂D , d – диаметр области D .

В последующем важную роль будет играть понятие L -гармонической меры для эллиптических операторов вида (1) с измеримыми в ограниченной области Ω коэффициентами. Вначале, следуя [10], определим для L обобщенное по Винеру решение задачи Дирихле с непрерывной на $\partial\Omega$ функцией ψ . Для этого продолжим ψ по непрерывности на $\overline{\Omega}$, сохранив за продолжением то же обозначение, и возьмем последовательность бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций, ограничения ψ_k которых на $\overline{\Omega}$ равномерно сходятся к ψ . Решив для каждой ψ_k задачу Дирихле $Lu_k = 0$ в Ω , $u_k - \psi_k \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, получим последовательность $\{u_k\}$, которая сходится равномерно в каждой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ к функции $u_\psi \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$, удовлетворяющей уравнению $Lu_\psi = 0$ в Ω . Построенная функция u_ψ не зависит ни от способа продолжения, ни от способа аппроксимации ψ и называется обобщенным по Винеру решением задачи Дирихле. Граничная точка $x_0 \in \partial\Omega$ называется регулярной, если $u_\psi(x) \rightarrow \psi(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$ для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции ψ .

Пусть E – открытое на $\partial\Omega$ множество, χ_E – характеристическая функция E . Положим для $x \in \Omega$

$$\omega(x, E, \Omega) = \sup u_\psi(x),$$

где точная верхняя грань берется по всем обобщенным по Винеру решениям задачи Дирихле u_ψ с граничными условиями $\psi \leq \chi_E$ на $\partial\Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для каждого $x \in \Omega$ величина $\omega(x, E, \Omega)$ называется L -гармонической мерой множества E в точке x относительно области Ω .

L -гармоническая мера произвольного множества E определяется по аналогии с конструкцией меры Лебега. Отметим, что запас измеримых множеств не зависит от выбора точки $x \in \Omega$. В частности, борелевские на $\partial\Omega$ множества L -гармонически измеримы.

Приведем некоторые из свойств функции $\omega(\cdot, E, \Omega)$ для L -гармонически измеримых множеств E (см., например, [10]):

- а) $\omega \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ и $L\omega = 0$;
- б) для регулярности граничной точки $x_0 \in \partial\Omega$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} \omega(x, E, \Omega) = 1,$$

если x_0 — внутренняя (относительно $\partial\Omega$) точка E , и

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} \omega(x, E, \Omega) = 0,$$

если x_0 — внутренняя точка $\partial\Omega \setminus E$.

При исследовании задачи (3) будем использовать L -гармоническую меру множества $E = S_r^{x_0} \cap D$ относительно области $\Omega = B_r^{x_0} \cap D$, где $x_0 \in \partial D$, и в дальнейшем положим $\omega_r^{x_0}(x) = \omega(x, S_r^{x_0} \cap D, B_r^{x_0} \cap D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если при некотором $\alpha \in (0, 1)$ для любых $r \in (0, d)$, $x_0 \in \partial D$ справедливо неравенство

$$\omega_r^{x_0}(x) \leq \mathcal{R}_\alpha^L \left(\frac{|x - x_0|}{r} \right)^\alpha, \quad x \in D \cap B_r^{x_0}, \quad (5)$$

в котором постоянная $\mathcal{R}_\alpha^L$ не зависит от r , x_0 и x , то будем говорить, что область D удовлетворяет R_α^L -условию.

Применительно к оператору Лапласа введенное понятие будем называть R_α -условием, а в случае его выполнения для всех $\alpha \in (0, 1)$ — R -условием.

Из R_α -условия и свойства б) L -гармонической меры следует регулярность всех точек границы ∂D . Поскольку точки, принадлежащие гладкому куску границы, регулярны, то отсюда вытекает, что функция $\omega_r^{x_0}(x)$ непрерывна во всех граничных точках области $D \cap B_r^{x_0}$ за исключением множества $\partial D \cap S_r^{x_0}$. При этом $\omega_r^{x_0}(x) = 1$ для $x \in S_r^{x_0} \cap D$ и $\omega_r^{x_0}(x) = 0$ для $x \in B_r^{x_0} \cap \partial D$.

В дальнейшем используется следующий принцип максимума: если функция $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ является ограниченным в Ω решением уравнения $Lu = 0$ и $\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq M$ во всех граничных точках x_0 , то $u(x) \leq M$ всюду в Ω .

Сформулируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если $L \in \mathfrak{L}$, то для однозначной разрешимости задачи (3) при всех $p \in (1, \infty)$ вместе с соответствующей коэрцитивной оценкой (4) необходимо и достаточно, чтобы область D удовлетворяла R_α^L -условию для всех $\alpha \in (0, 1)$.

Требование непрерывности коэффициентов существенно, а соответствующий контрпример можно найти в [7].

Данная теорема сводит вопрос о разрешимости задачи (3) к изучению граничного поведения L -гармонической меры. Следующий результат показывает, что можно ограничиться рассмотрением только оператора Лапласа.

ТЕОРЕМА 2. Если $L \in \mathfrak{L}$, то для справедливости R_α^L -условия при всех $\alpha \in (0, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы область D удовлетворяла R -условию.

Важную роль в доказательстве этих теорем играет одна весовая оценка функции Грина $G(x, y)$ задачи Дирихле для оператора L . От коэффициентов L требуются только измеримость и условие эллиптичности (2).

ТЕОРЕМА 3. Если область D удовлетворяет R_α^L -условию при $\alpha \in (2/3, 1)$, то для $\gamma \in (2 - \alpha, (2 + \alpha)/2)$ справедливо неравенство

$$\int_D G(x, y) \rho^{-\gamma}(y) dy \leq C \rho^{2-\gamma}(x),$$

в котором постоянная C не зависит от x и y .

Приведем еще достаточное условие разрешимости задачи (3) применительно к фиксированному показателю суммируемости p . Предварительно положим

$$\alpha_p = \begin{cases} 2/(p+1), & \text{если } p \in (1, 2], \\ 2(p-1)/(2p-1), & \text{если } p \in (2, \infty). \end{cases} \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 4. Если $L \in \mathfrak{L}$ и область D удовлетворяет R_α -условию при $\alpha \in (\alpha_p, 1)$, то задача (3) однозначно разрешима и для ее решения справедлива коэрцитивная оценка (4).

В случае липшицевой области D этот результат можно несколько усилить, выбирая $\alpha_p = p^{-1}$ при $p \in (1, 2]$ и $\alpha_p = (p-1)/p$ при $p \in (2, \infty)$.

Хотя приведенные условия не являются точными, интересно то, что задача (3) оказывается разрешимой для наперед выбранного p в области, которая удовлетворяет только условию внешнего конуса Пуанкаре. Условия на конус, обеспечивающие гельдеровость в граничной точке с заданным показателем α для гармонической меры $\omega_r^{x_0}(x)$, формулируются в терминах первого собственного числа оператора Лапласа–Бельтрами на сфере. Эти результаты хорошо известны, а подробную библиографию можно найти в обзоре [11].

Приведем геометрические условия на область D , обеспечивающие выполнение R -условия.

Пусть $\Omega = \{x = (x', x_n) : |x'| < f(x_n), 0 < x_n < a\}$, где f – неотрицательная, дифференцируемая на $[0, a)$ функция, такая, что $f'(+0) = f(0) = 0$.

Тогда если при некотором $r_0 > 0$ в произвольной точке границы x_0 можно выбрать ортогональную систему координат, в которой Ω не имеет общих точек с $D \cap B_{r_0}^0$, то D удовлетворяет R -условию.

Доказательство этого утверждения содержится в выводе оценки (1.2) леммы 1.2.

В частности, R -условие выполнено для областей следующего вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Область D удовлетворяет условию внешней сферы, если существует такое $r_0 > 0$, что для любой точки $x_0 \in \partial D$ найдется шар $B_{r_0}^y$, для которого $\overline{B_{r_0}^y} \cap \overline{D} = x_0$.

Сюда относятся и области с нелипшицевой границей, имеющие “пик наружу”.

Другие достаточные требования на границу для справедливости R -условия, связанные с первым собственным числом оператора Лапласа–Бельтрамина сфере, приведены в [12].

Вопрос о нахождении конструктивных терминов для описания областей, удовлетворяющих R -условию, остается открытым.

Работа состоит из двух частей. Первый параграф посвящен доказательству теоремы 3, которое основано на поточечных оценках функции Грина. Доказательство остальных сформулированных теорем, использующее сведение задачи (3) к весовым оценкам потенциала Грина, приводится в §2.

Условимся обозначать через C положительные постоянные, значения которых для нас несущественны.

§1. Оценки функции Грина и меры специальных приграничных множеств

В этом параграфе относительно коэффициентов оператора L предполагается измеримость и условие эллиптичности (2), а $G(x, y)$ означает функцию Грина задачи Дирихле для оператора L в ограниченной области D , удовлетворяющей R_α^L -условию. Как и ранее, под $\omega_r^{x_0}(x)$ будем понимать L -гармоническую меру, введенную в (5).

ТЕОРЕМА 1.1. *Справедливы неравенства*

$$G(x, y) \leq \begin{cases} C\rho^\alpha(x)\rho^\alpha(y)|x-y|^{2-n-2\alpha}, & |x-y| > \rho(x)/2, \\ C|x-y|^{2-n}, & |x-y| \leq \rho(x)/2, \end{cases} \quad (1.1)$$

если $n > 2$, и

$$G(x, y) \leq \begin{cases} C\rho^\alpha(x)\rho^\alpha(y)|x-y|^{-2\alpha}, & |x-y| > \rho(x)/2, \\ C \ln \frac{2\rho(x)}{|x-y|}, & |x-y| \leq \rho(x)/2, \end{cases} \quad (2.1)$$

если $n = 2$. При этом константа C зависит только от n , λ , α и постоянной $\mathcal{R}_\alpha^L$ из R_α^L -условия.

Поскольку схема рассуждений при $n = 2$ и $n > 2$ одна и та же, проведем доказательство для $n > 2$, указав затем на отличительную особенность плоского случая.

В дальнейшем, не оговаривая этого особо, будем пользоваться известной оценкой $G(x, y) \leq C(n, \lambda)|x-y|^{2-n}$ работы [13].

Вплоть до окончания доказательства теоремы 1.1, которое основано на двух вспомогательных утверждениях, полагается $r = |x-y|$, а z^* для $z \in D$ означает какую-либо точку, в которой реализуется расстояние от z до ∂D .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если $\rho(y) \geq \nu r$ для некоторого $\nu > 0$, то*

$$G(x, y) \leq C(n, \lambda, \mathcal{R}_\alpha^L, \nu)\rho^\alpha(x)r^{2-n-\alpha}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta = \sup_{\delta} \{\delta : B_{\delta}^{x^*} \cap B_{\nu r/2}^y = \emptyset\}$. По принципу максимума

$$\max_{z \in S_{\theta}^{x^*} \cap \overline{D}} G(z, y) \leq \max_{z \in S_{\nu r/2}^y} G(z, y) \leq C(n, \lambda, \nu) r^{2-n}.$$

То есть, с учетом R_{α}^L -условия и неравенства $\theta \geq \nu r/2$

$$G(z, y) \leq \max_{z \in S_{\theta}^{x^*} \cap \overline{D}} G(z, y) \cdot \omega_{\theta}^{x^*}(z) \leq C(n, \lambda, \nu) \mathcal{R}_{\alpha}^L \left(\frac{|z - x^*|}{r} \right)^{\alpha} r^{2-n}$$

при $z \in B_{\theta}^{x^*} \cap D$. Не ограничивая общности, можно считать $\rho(x) < \nu r/8$, так как иначе (3.1) следует из оценки $G(x, y) \leq C(n, \lambda) r^{2-n}$. Поэтому, выбирая в последнем неравенстве $z = x \in B_{\theta}^{x^*}$, получим (3.1). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если $\nu \in (0, 1/4)$, $s = 1/2 - \nu$ и $\rho(y) < \nu r$, то

$$G(x, y) \leq \mathcal{R}_{\alpha}^L(s \cdot r)^{-\alpha} \max_{z \in S_{sr}^{y^*} \cap \overline{D}} G(x, z) \rho^{\alpha}(y). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $x \notin B_{sr}^{y^*}$, поскольку

$$|y^* - x| \geq |x - y| - |y - y^*| > (1 - \nu)r.$$

Значит, по принципу максимума

$$G(x, z) \leq \max_{\xi \in S_{sr}^{y^*} \cap \overline{D}} G(x, \xi) \cdot \omega_{sr}^{y^*}(z) \quad \text{при } z \in B_{sr}^{y^*} \cap D.$$

Так как $y \in B_{sr}^{y^*}$, то полагая здесь $z = y$ и пользуясь R_{α}^L -условием, придем к (4.1). Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. В силу оценки $G(x, y) \leq C(\lambda, n)|x - y|^{2-n}$ достаточно рассмотреть только случай $|x - y| > \rho(x)/2$. Пусть ν и s — постоянные предложения 2.1, которые выберем позже. Будем предполагать $\rho(y) < \nu r$, так как иначе (1.1) следует из неравенства (3.1) предложения 1.1.

Заметим, что для $z \in B_{sr}^{y^*}$

$$|z - x| \geq |x - y| - |z - y| \geq r - |z - y^*| - \rho(y) > r/2$$

согласно условиям на s и ν . Значит, $B_{r/2}^x \cap B_{sr}^{y^*} = \emptyset$ и по принципу максимума

$$\max_{z \in S_{sr}^{y^*} \cap \overline{D}} G(x, z) \leq \max_{z \in S_{r/2}^x \cap \overline{D}} G(x, z).$$

Следовательно, если положить $M_i = \max_{z \in S_{r2^{-i}}^x \cap \overline{D}} G(x, z)$, то согласно оценке (4.1)

$$G(x, y) \leq \mathcal{R}_{\alpha}^L(s \cdot r)^{-\alpha} \rho^{\alpha}(y) M_1. \quad (5.1)$$

Далее, рассуждая по индукции, предположим, что M_i достигается в точке $z_i \in S_{r2^{-i}}^x \cap D$ и $\rho(z_i) < \nu r 2^{-i}$. Если $t_i = sr 2^{-i}$, $\tau_i = r 2^{-i-1}$, а ζ_i — какая-либо точка,

в которой реализуется расстояние от z_i до ∂D , то и выше можно показать, что $B_{t_i}^{\zeta_i} \cap B_{\tau_i}^x = \emptyset$ и $\max_{z \in S_{t_i}^{\zeta_i} \cap \overline{D}} G(x, z) \leq M_{i+1}$. Поэтому, пользуясь (4.1), получим рекуррентное соотношение

$$G(x, z_i) = M_i \leq \mathcal{R}_\alpha^L(s \cdot r \cdot 2^{-i})^{-\alpha} \rho^\alpha(z_i) M_{i+1} \leq \mathcal{R}_\alpha^L(\nu/s)^\alpha M_{i+1}.$$

Отсюда, если $\rho(z_i) < \nu r 2^{-i}$ для $i = 1, 2, \dots, k-1$, в силу (5.1) будем иметь

$$G(x, y) \leq (\mathcal{R}_\alpha^L \cdot s^{-\alpha})^k \nu^{\alpha(k-1)} (\rho(y)/r)^\alpha M_k. \quad (6.1)$$

Допустим, что мы можем таким образом дойти до номера $k = \left\lceil \log_2 \left(\frac{r}{\rho(x)} \right) \right\rceil + 1$, где $[t]$ – целая часть t . Поскольку $M_k \leq C(n, \lambda) \rho^{2-n}(x)$, то выбирая здесь $\nu \in (0, 1/4)$ (а вместе с ним и $s = 1/2 - \nu$) из неравенства $\mathcal{R}_\alpha^L(\nu/s)^\alpha \leq 2^{2-\alpha-n}$, придем к требуемой оценке (1.1).

Вновь вернемся к неравенству (6.1), предположив, что $\rho(z_k) \geq \nu r 2^{-k}$ для k , меньших чем $\left\lceil \log_2 \left(\frac{r}{\rho(x)} \right) \right\rceil + 1$. Тогда в силу предложения 1.1

$$M_k = G(x, z_k) \leq C(n, \lambda, \mathcal{R}_\alpha^L, \nu) \rho^\alpha(x) (2^{-k} r)^{2-n-\alpha}.$$

Теперь (1.1) следует из (6.1) и выбора s и ν . Теорема доказана.

Доказательство в плоском случае отличается только тем, что вместо оценки $G(x, y) \leq C(\lambda, n) |x - y|^{2-n}$ нужно использовать следующую.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если $D \subset \mathbb{R}^2$ и $\rho(y) \geq 2|x - y|$, то

$$G(x, y) \leq C(\lambda, \alpha, \mathcal{R}_\alpha^L) \ln \frac{2\rho(y)}{|x - y|}. \quad (7.1)$$

Для вывода (7.1) и последующих целей нам понадобятся некоторые факты из теории емкости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $E \subset D$ – компакт. Число

$$\text{Cap}_L(E, D) = \inf \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} dx,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям $\varphi \in C_0^\infty(D)$, равным единице в окрестности E , называется L -емкостью Грина компакта E .

Как известно (см. [13]), существует мера, сосредоточенная на E , которая реализует $\text{Cap}_L(E, D)$. Потенциал Грина $G^\mu(x)$ этой меры, называемой *равновесной*, обладает тем свойством, что $G^\mu(x) = 1$ для μ -почти всех $x \in E$. При этом

$$\text{Cap}_L(E, D) = \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} G_{x_i}^\mu G_{x_j}^\mu dx. \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Пусть $y \in D$, $\rho = \rho(y)$ и $r \leq \rho/2$. Вначале покажем, что

$$\text{Cap}_L(\overline{B}_r^y, D) \geq C(\lambda, \alpha, \mathcal{R}_\alpha^L) \ln^{-1}(2\rho/r). \quad (9.1)$$

Обозначим через y^* какую-либо точку ∂D , в которой реализуется расстояние от y до ∂D , и погрузим B_r^y в открытый куб $Q_{4\rho}$ с центром в y^* и ребрами длины 4ρ , параллельными координатным осям. Рассмотрим функцию $V_\mu(x) = 1 - G^\mu(x)$, где $G^\mu(x)$ – потенциал равновесной меры $\overline{B}_r^y$, полагая $V_\mu(x) = 1$ в $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Согласно принципу максимума и R_α^L -условию

$$V_\mu(x) > 1 - \omega_{\rho/2}^{y^*}(x) \geq 1 - \mathcal{R}_\alpha^L \left(\frac{2|x-z|}{\rho} \right)^\alpha \quad \text{в } D \cap B_{\rho/2}^{y^*}.$$

Значит,

$$V_\mu(x) \geq 1/2 \quad \text{в } B_{\delta\rho}^{y^*} \quad \text{при } \delta \leq \delta_0(\alpha, \mathcal{R}_\alpha^L). \quad (10.1)$$

По теореме вложения [14], [15]

$$\int_{Q_{4\rho}} V_\mu^2 dx \leq \frac{\text{const} \cdot \rho^2}{\text{Cap}(\overline{B}_r^y)} \int_{Q_{4\rho}} |\nabla V_\mu|^2 dx, \quad (11.1)$$

где $\text{Cap}(E)$ означает винеровскую емкость E по отношению к кубу $Q_{8\rho}$. Так как $\text{Cap}(\overline{B}_r^y) \geq \text{const} \cdot \ln^{-1}(2\rho/r)$ (см., например, [15]), то учитывая в (11.1) свойство (8.1) и неравенства (2) и (10.1), придем к оценке (9.1).

Для доказательства (7.1) положим $r = |x - y|$ и воспользуемся тем, что равновесная мера компакта сосредоточена на его внешней границе. Тогда в силу неравенства Харнака и симметричности функции Грина так же, как в [13], получим, что

$$C(\lambda) \text{Cap}_L(\overline{B}_r^y, D) G(x, y) \leq \text{Cap}_L(\overline{B}_r^y, D) \inf_{\xi \in S_r^y} G(\xi, y) \leq 1.$$

Теперь (7.1) следует из оценки (9.1). Предложение доказано.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется оценка меры специальных приграничных множеств, связанных с множеством уровня функции Грина.

Пусть $n \geq 2$, $\gamma \in (1, 2)$, а $\alpha \in (0, 1)$ – константа из R_α^L -условия. Определим для произвольной точки $x_0 \in D$ множества

$$\begin{aligned} E_{\gamma, \alpha} &= \{y : y \in D, G(x_0, y) \geq \rho^\alpha(x_0) \rho^\gamma(y) |x_0 - y|^{2-n-\alpha-\gamma}\}, \\ F_{r, \delta} &= \{y : y \in \overline{B}_r^{x_0} \cap D, \rho(y) \leq \delta\}, \\ H_{r, \delta}^{\gamma, \alpha} &= E_{\gamma, \alpha} \cap F_{r, \delta}. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Ниже через $\text{mes}_n(E)$ обозначена n -мерная мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1.1. *Справедливо неравенство*

$$\text{mes}_n(H_{r, \delta}^{\gamma, \alpha}) \leq C(n, \mathcal{R}_\alpha^L, \lambda, \alpha) \delta^{2-\gamma} r^{n-2+\gamma}. \quad (13.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим вначале L -емкость Грина компакта

$$\mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha} = \{y : y \in \overline{B}_r^{x_0} \setminus B_{r/2}^{x_0}, \delta/2 \leq \rho(y) \leq \delta\} \cap E_{\gamma,\alpha}.$$

Для этого покажем, что потенциал Грина $G^\mu(x)$ равновесной меры $\mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}$ удовлетворяет неравенству $G^\mu(x_0) \leq C(\mathcal{R}_\alpha^L)(\rho(x_0)/r)^\alpha$.

Действительно, если $\rho(x_0) \geq r/8$, то оценка очевидна и следует из принципа максимума. Пусть $\rho(x_0) < r/8$ и x_0^* — какая-либо точка, в которой реализуется расстояние от x_0 до ∂D . Как нетрудно видеть, $B_{r/8}^{x_0^*} \subset B_{r/4}^{x_0}$. Поэтому $B_{r/8}^{x_0^*} \cap \mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha} = \emptyset$ и согласно принципу максимума и R_α^L -условию

$$G^\mu(x) \leq \omega_{r/8}^{x_0^*}(x) \leq \mathcal{R}_\alpha^L \left(\frac{|x - x_0^*|}{r} \right)^\alpha \quad \text{при } x \in D \cap B_{r/8}^{x_0^*}.$$

Полагая здесь $x = x_0$, получим требуемую оценку, из которой, пользуясь определением множества $\mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}$, будем иметь

$$\text{Cap}_L(\mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}, D) \leq C(\mathcal{R}_\alpha^L) \delta^{-\gamma} r^{n-2+\gamma}. \quad (14.1)$$

Рассмотрим семейство замкнутых кубов $Q(x)$ с центрами в точках $x \in \mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}$, ребра которых параллельны координатным осям и имеют длину 2δ . Согласно известной теореме о покрытиях (см., например, [17]) из этого семейства можно выбрать конечное число покрывающих $\mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}$ кубов $\{Q_k\}$, $k = 1, \dots, l$, кратность покрытия которых зависит только от размерности пространства. Продолжив $G^\mu(x)$ нулем вне D , в силу свойства (8.1) из (2) и (14.1) получим, что

$$\sum_{k=1}^l \int_{Q_k} |\nabla G^\mu|^2 dx \leq C(n, \lambda, \mathcal{R}_\alpha^L) \delta^{-\gamma} r^{n-2+\gamma}. \quad (15.1)$$

Пусть Q_k — произвольный куб покрытия и $\tilde{Q}_k$ — концентрический ему куб с длиной ребра $3\delta/2$. Так как $\tilde{Q}_k \cap \partial D \neq \emptyset$, то найдется точка $z_k \in \tilde{Q}_k \cap \partial D$ такая, что $\text{dist}(z_k, \partial Q_k) \geq \delta/2$. Далее, $B_{\delta/8}^{z_k} \subset Q_k$ и $B_{\delta/8}^{z_k} \cap \mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha} = \emptyset$. Значит по принципу максимума и R_α^L -условию на область D

$$G^\mu(x) \leq \omega_{\delta/8}^{z_k}(x) \leq \text{const} \cdot \mathcal{R}_\alpha^L \left(\frac{|x - z_k|}{\delta} \right)^\alpha \quad \text{при } x \in B_{\delta/8}^{z_k} \cap D.$$

Следовательно, $G^\mu(x) < 1/2$ при $x \in B_{\delta r_0}^{z_k} \cap D$, где $r_0 = r_0(\mathcal{R}_\alpha^L, \alpha)$. Положим $\tilde{u}(x) = \max(G^\mu(x) - 1/2, 0)$. Так как $\tilde{u} \in W_2^1(Q_k)$ и $\tilde{u}(x) \equiv 0$ при $x \in B_{\delta r_0}^{z_k}$, то по теореме вложения [14]

$$\int_{Q_k} \tilde{u}^2(x) dx \leq C(n, \lambda, r_0) \delta^2 \int_{Q_k} |\nabla G^\mu(x)|^2 dx.$$

Отсюда, поскольку μ -почти всюду на $\mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}$ справедливо равенство $G^\mu(x) = 1$, с учетом (15.1) придем к неравенству

$$\text{mes}_n(\mathcal{V}_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}) \leq C\delta^2 \sum_{k=1}^l \int_{Q_k} |\nabla G^\mu(x)|^2 dx \leq C\delta^{2-\gamma} r^{n-2+\gamma},$$

где $C = C(n, \mathcal{R}_\alpha^L, \lambda, \alpha)$. Для завершения доказательства осталось применить найденную оценку к множествам

$$\{y : y \in \overline{B}_{r2^{-j+1}}^{x_0} \setminus B_{r2^{-j}}^{x_0}, \delta 2^{-i} \leq \rho(y) \leq \delta 2^{-i+1}\} \cap E_{\gamma,\alpha}$$

и, пользуясь условием $\gamma \in (1, 2)$, просуммировать по i, j соответствующий ряд. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть для определенности $n > 2$, а $E_{\gamma,\alpha}$ и $H_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}$ – множества, введенные в (12.1) для $x_0 = x \in D$. Вначале покажем, что

$$V_{\gamma,\alpha}(x) = \int_{E_{\gamma,\alpha}} G(x, y) \rho^{-\gamma}(y) dy \leq C(n, \lambda, \mathcal{R}_\alpha^L, \alpha, \gamma) \rho^{2-\gamma}(x). \quad (16.1)$$

Интегрируя по частям, в силу неравенств (1.1) получим

$$\begin{aligned} V_{\gamma,\alpha}(x) &\leq C \left[\rho^\alpha(x) \int_{\rho(x)/2}^\infty r^{1-n-2\alpha} \left(\int_{B_r^x \cap E_{\gamma,\alpha}} \rho^{\alpha-\gamma}(y) dy \right) dr \right. \\ &\quad \left. + \rho^{2-n-\alpha}(x) \int_{B_{\rho(x)/2}^x} \rho^{\alpha-\gamma}(y) dy + \int_0^{\rho(x)/2} r^{1-n} \left(\int_{B_r^x} \rho^{-\gamma}(y) dy \right) dr \right], \end{aligned} \quad (17.1)$$

где $C = C(n, \lambda, \mathcal{R}_\alpha^L, \alpha)$. Оценим интегралы в правой части (17.1).

Если $r \geq \rho(x)/2$ и $y \in D \cap B_r^x$, то $\rho(y) \leq 3r$. Поэтому, обозначив

$$A_{r,i} = \{y : y \in B_r^x, 3^{-i+1}r < \rho(y) \leq 3^{-i+2}r\} \cap E_{\gamma,\alpha},$$

с учетом строения множества $H_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{B_r^x \cap E_{\gamma,\alpha}} \rho^{\alpha-\gamma}(y) dy &\leq \sum_{i=1}^\infty (3^{-i}r)^{\alpha-\gamma} \text{mes}_n(A_{r,i}) \\ &\leq \text{const} \cdot \int_0^{9r} \delta^{\alpha-1-\gamma} \text{mes}_n(H_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}) d\delta \quad \text{при } r \geq \rho(x)/2. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Далее, поскольку

$$\rho(x)/2 \leq \rho(y) \leq 3\rho(x)/2 \quad \text{для } y \in B_{\rho(x)/2}^x \cap D, \quad (19.1)$$

то

$$\int_{B_r^x} \rho^{\alpha-\gamma}(y) dy \leq 4\rho^{\alpha-\gamma}(x)r^n \quad \text{и} \quad \int_{B_r^x} \rho^{-\gamma}(y) dy \leq 4\rho^{-\gamma}(x)r^n \quad (20.1)$$

при $r \leq \rho(x)/2$. Учитывая теперь в (17.1) неравенства (18.1), (20.1) и пользуясь оценкой (13.1) леммы 1.1, заключаем, что

$$V_{\gamma,\alpha}(y) \leq C \left[\rho^\alpha(x) \int_{\rho(x)/2}^{\infty} r^{\gamma-1-2\alpha} \left(\int_0^{9r} \delta^{1+\alpha-2\gamma} d\delta \right) dr + \rho^{2-\gamma}(x) \right],$$

где $C = C(n, \lambda, \mathcal{R}_\alpha^L, \alpha)$. Отсюда вытекает (16.1) (из предположений относительно γ и α).

Осталось показать, что

$$\int_{D \setminus E_{\gamma,\alpha}} G(x, y) \rho^{-\gamma}(y) dy \leq C(n, L, \mathcal{R}_\alpha^L, \alpha, \gamma) \rho^{2-\gamma}(x). \quad (21.1)$$

Пусть $Q_1 = (D \setminus E_{\gamma,\alpha}) \setminus B_{\rho(x)/2}^x$, $Q_2 = (D \setminus E_{\gamma,\alpha}) \cap B_{\rho(x)/2}^x$. Согласно определению множества $E_{\gamma,\alpha}$ имеем

$$\int_{Q_1} G(x, y) \rho^{-\gamma}(y) dy \leq \rho^\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho(x)/2}^x} |x - y|^{2-n-\alpha-\gamma} dy \leq C \rho^{2-\gamma}(x)$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \gamma)$. Из оценки функции Грина (1.1) и неравенства (19.1) найдем, что

$$\begin{aligned} \int_{Q_2} G(x, y) \rho^{-\gamma}(y) dy &\leq C \int_{B_{\rho(x)/2}^x} \rho^{\alpha-\gamma}(y) |x - y|^{2-n-\alpha} dy \\ &\leq C \rho^{\alpha-\gamma}(x) \int_{B_{\rho(x)/2}^x} |x - y|^{2-n-\alpha} dy \leq C \rho^{2-\gamma}(x), \end{aligned}$$

где $C = C(n, \lambda, \mathcal{R}_\alpha^L, \alpha, \gamma)$. Складывая найденные соотношения, получим (21.1). Случай $n = 2$ рассматривается аналогично с учетом оценок (2.1) функции Грина. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $p \in (1, \infty)$, $q = p/(p-1)$ и α_p — постоянная, определенная в (6). Если область D удовлетворяет R_α^L -условию при $\alpha \in (\alpha_p, 1)$, то для потенциала Грина

$$v(x) = - \int_D G(x, y) g(y) dy \quad (22.1)$$

с плотностью $g(y) \in C(\overline{D})$ справедливо неравенство

$$\|v \rho^{-1}\|_{L_q(D)} \leq C(n, \lambda, q, \mathcal{R}_\alpha^L, \alpha) \|g \rho\|_{L_q(D)}. \quad (23.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая $g \geq 0$ в D , из неравенства Гёльдера будем иметь

$$|v(x)|^q \leq \int_D G(x, y) g^q(y) \rho^{\gamma(q-1)}(y) dy \cdot \left(\int_D G(x, y) \rho^{-\gamma}(y) dy \right)^{q-1}.$$

Если $\gamma \in (2 - \alpha, (2 + \alpha)/2)$, то согласно теореме 3 получим

$$\|v\rho^{-1}\|_{L_q(D)}^q \leq C \int_D \left(\int_D G(x, y) \rho^{-s}(x) dx \right) g^q(y) \rho^{\gamma(q-1)}(y) dy,$$

где $s = 2 - q + \gamma(q - 1)$. Нетрудно проверить, что в силу выбора α_p постоянную γ можно подчинить дополнительному условию так, чтобы $s \in (2 - \alpha, (2 + \alpha)/2)$. Осталось, пользуясь симметричностью функции Грина, еще раз применить оценку теоремы 3 к внутреннему интегралу в правой части последнего неравенства. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если область D является липшицевой, то вместо (13.1) нужно воспользоваться неравенством $\text{mes}_n(H_{r,\delta}^{\gamma,\alpha}) \leq \text{const} \cdot \delta r^{n-1}$. В результате утверждение теоремы 3 окажется верным для $\gamma \in (2 - \alpha, 1 + \alpha)$, а в условиях следствия 1.1 можно положить

$$\alpha_p = \begin{cases} 1/p, & \text{если } p \in (1, 2], \\ (p-1)/p, & \text{если } p \in (2, \infty). \end{cases} \quad (24.1)$$

§ 2. L_p -оценки решения задачи Дирихле

В дальнейшем будем рассматривать только операторы из множества $\mathfrak{L}$ (см. обозначения).

Вначале приведем вспомогательное утверждение, позволяющее рассматривать последовательность задач в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы.

ЛЕММА 1.2. Если область D удовлетворяет R_α^L -условию, то существует последовательность $\{D_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, областей, для которых выполнено условие внешней сферы, так что $\overline{D_m} \subset D$, $D_m \rightarrow D$ при $m \rightarrow \infty$, и D_m удовлетворяют R_α^L -условию с общей для всех m постоянной $\mathfrak{R}_\alpha^L$ в неравенстве (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta_0 > 0$ столь мало, что открытое множество $\{x : x \in D, \rho(x) > \delta_0\}$ непусто, а $\{D_\delta\}$ — семейство расширяющихся при $\delta \rightarrow 0$ подобластей D , отстоящих от ∂D на расстоянии $\delta < \delta_0$. Для областей D_δ выполнено условие внешней сферы, и если мы покажем, что при $\delta < \delta_0/2$ они удовлетворяют R_α^L -условию равномерно по δ относительно постоянной в неравенстве (5), то лемма будет доказана.

Пусть $x_0 \in \partial D_\delta$, а $\omega_{r,\delta}^{x_0}(x)$ означает L -гармоническую меру множества $D_\delta \cap S_r^{x_0}$ в области $D_\delta \cap B_r^{x_0}$. Будем предполагать два возможных случая: а) $0 < r \leq 4\delta$ и б) $r > 4\delta$.

Покажем, что в случае а)

$$\omega_{r,\delta}^{x_0}(x) \leq C(n, L, \alpha) \left(\frac{|x - x_0|}{r} \right)^\alpha \quad \text{при } x \in D_\delta \cap B_r^{x_0} \quad (1.2)$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$. Предположим вначале $r \leq \delta$. Не ограничивая общности, можно считать $x \in D_\delta \cap B_{r/2}^{x_0}$, поскольку иначе (1.2) очевидно.

Согласно построению D_δ точке x_0 соответствует некоторая точка $y_0 \in \partial D$, в которой реализуется расстояние от ∂D_δ до ∂D , так что $D_\delta \cap B_\delta^{y_0} = \emptyset$ и $x_0 \in \partial D_\delta \cap S_\delta^{y_0}$. Рассмотрим область $G_{r,\delta} = (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\delta^{y_0}}) \cap B_r^{x_0}$ и L -гармоническую меру $\tilde{\omega}_{r,\delta}^{x_0}(x)$ множества $G_{r,\delta} \cap S_r^{x_0}$ в ней. Из L_p -оценок работы [16] следует, что для любого $p \in (1, \infty)$

$$\|\tilde{\omega}_{r,\delta}^{x_0}\|_{\dot{W}_p^1(G_{r/2,\delta})} \leq C(L, n, p)r^{n/p-1}.$$

Значит, при $p > n$ по теореме вложения Соболева

$$\tilde{\omega}_{r,\delta}^{x_0}(x) \leq C(L, n, p) \left(\frac{|x - x_0|}{r} \right)^{1-n/p} \quad \text{в } G_{r/2,\delta}.$$

Как нетрудно видеть, $D_\delta \cap B_r^{x_0} \subset G_{r,\delta}$. Следовательно, $\omega_{r,\delta}^{x_0}(x) < \tilde{\omega}_{r,\delta}^{x_0}(x)$ по принципу максимума, что влечет (1.2) после соответствующего выбора p .

Если $\delta < r \leq 4\delta$, то при $x \in D_\delta \setminus B_{\delta/4}^{x_0}$ неравенство (1.2) тривиально, а если $x \in D_\delta \cap B_{\delta/4}^{x_0}$, то $\omega_{r,\delta}^{x_0}(x) \leq \omega_{\delta/4,\delta}^{x_0}(x)$, и приходим к разобранному случаю.

Пусть теперь выполнено б), y_0 имеет тот же смысл, что и выше, а $\omega_r^{y_0}(x)$ означает L -гармоническую меру, определенную по отношению к области D .

Предположим вначале $x \in D_\delta \cap B_\delta^{x_0}$ и обозначим через $M_{r,\delta}$ точную верхнюю грань $\omega_{r/2}^{y_0}(x)$ по множеству $D_\delta \cap S_{2\delta}^{y_0}$. Так как $|x_0 - y_0| = \delta$, то $B_\delta^{x_0} \subset B_{2\delta}^{y_0} \subset B_{r/2}^{y_0} \subset B_r^{x_0}$ и $\omega_{r,\delta}^{x_0}(x) < M_{r,\delta} \cdot \omega_{\delta,\delta}^{x_0}(x)$ по принципу максимума. Отсюда, пользуясь R_α^L -условием относительно области D при оценке $M_{r,\delta}$ и применяя неравенство (1.2) к $\omega_{\delta,\delta}^{x_0}(x)$, получим

$$\omega_{r,\delta}^{x_0}(x) < C \cdot \mathcal{R}_\alpha^L \left(\frac{2\delta}{r} \right)^\alpha \left(\frac{|x - x_0|}{\delta} \right)^\alpha \leq C \cdot \mathcal{R}_\alpha^L \left(\frac{|x - x_0|}{r} \right)^\alpha, \quad (2.2)$$

где $C = C(n, \alpha)$. Далее, $B_{r/4}^{x_0} \subset B_{r/2}^{y_0}$ и, как и выше,

$$\omega_{r,\delta}^{x_0}(x) < \omega_{r/2}^{y_0}(x) \leq C(n, \alpha) \mathcal{R}_\alpha^L \left(\frac{|x - y_0|}{r} \right)^\alpha \quad \text{при } x \in B_{r/4}^{x_0} \cap D.$$

Если в этом неравенстве $x \in D_\delta \cap (B_{r/4}^{x_0} \setminus \overline{B_{\delta/2}^{x_0}})$, то $|x - y_0| \leq 3|x - x_0|$, что сразу приводит к (2.2). В оставшемся случае $x \in D_\delta \cap (B_r^{x_0} \setminus B_{r/4}^{x_0})$ оценка (2.2) очевидна. Лемма доказана.

В частности, в доказательстве (1.2) содержится следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если относительно D выполнено условие внешней сферы, то D удовлетворяет и R_α^L -условию при всех $\alpha \in (0, 1)$ для любого оператора $L \in \mathfrak{L}$.

Отметим, что утверждение леммы 1.2 сохранится и для области, удовлетворяющей R_α^L -условию при всех $\alpha \in (0, 1)$. В этом случае аппроксимирующая последовательность областей также будет удовлетворять этому свойству.

Рассмотрим задачу (3). Ее исследование будет основано на изучении вспомогательной задачи

$$Lv = g \quad \text{в } D, \quad g \in L_q(D), \quad v \in \dot{W}_q^1(D). \quad (3.2)$$

Всюду далее предполагается $q = p/(p-1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если область D удовлетворяет условию внешней сферы и $f, g \in C^\infty(\overline{D})$, то задачи (3) и (3.2) однозначно разрешимы при любом $p \in (1, \infty)$ и для их решений справедливы неравенства*

$$\|u\|_{\dot{W}_p^1(D)} \leq C(L, n, p) (\|f\|_{W_p^{-1}(D)} + \|u\rho^{-1}\|_{L_p(D)}) \quad (4.2)$$

и

$$\|v\|_{\dot{W}_q^1(D)} \leq C(L, n, q) (\|g\rho\|_{L_q(D)} + \|v\rho^{-1}\|_{L_q(D)}) \quad (5.2)$$

соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если относительно коэффициентов оператора L потребовать выполнения условия $a_{ij} \in C^\infty(\overline{D})$, то задачи (3) и (3.2) будут иметь единственные решения, удовлетворяющие условию Липшица в $\overline{D}$ (см., например, [18]). Справедливость неравенств (4.2) и (5.2), в которых зависимость постоянной C от L определяется только модулем непрерывности коэффициентов и константой в условии (2), следует из [16]. При рассмотрении весовых норм u и v в правых частях (4.2) и (5.2) воспользуемся представлением решений с помощью функции Грина (22.1). В результате согласно (23.1) и следствию 1.2 придем к оценкам норм u и v через правые части уравнений. При этом влияние оператора L скажется только модулем непрерывности его коэффициентов и константой λ в условии (2). Для завершения доказательства осталось аппроксимировать исходные задачи последовательностью гладких задач и выбрать слабо сходящиеся подпоследовательности решений. Полученные решения будут единственны, так как являются элементами $\dot{W}_2^1(D)$. Предложение доказано.

Согласно (4.2) для установления коэрцитивной оценки (4) достаточно показать, что

$$\|u\rho^{-1}\|_{L_p(D)} \leq C(L, n, p, D) \|f\|_{W_p^{-1}(D)}. \quad (6.2)$$

Привести непосредственное доказательство (6.2) технически сложно, и следующее утверждение сводит этот вопрос к существованию оценки

$$\|v\rho^{-1}\|_{L_q(D)} \leq C(L, n, p, D) \|g\rho\|_{L_q(D)} \quad (7.2)$$

для решения задачи (3.2).

Предварительно напомним, что если $f \in W_p^{-1}(D)$, то $f = \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i}$ для $f_i \in L_p(D)$. При этом $\|f\|_{W_p^{-1}(D)} = \inf \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_p(D)}$, где точная нижняя грань берется по всевозможным представлениям f функциями f_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *В условиях предложения 1.2 оценки (6.2) и (7.2) выполнены одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку решения u и v задач (3) и (3.2) принадлежат пространству $\dot{W}_2^1(D)$, то в силу интегрального тождества

$$\int_D u g \, dx = \int_D u L v \, dx = \int_D f v \, dx = - \sum_{i=1}^n \int_D f_i v_{x_i} \, dx, \quad (8.2)$$

где f_i – функции, участвующие в представлении f . Предположим, что имеет место (7.2). Тогда в силу (5.2) $\|v\|_{\dot{W}_q^1(D)} \leq C\|g\rho\|_{L_q(D)}$ и по неравенству Гёльдера

$$\int_D ug \, dx \leq C\|f\|_{W_p^{-1}(D)}\|g\rho\|_{L_q(D)},$$

где C не зависит от u , f и g . Отсюда, из произвольности g и выбора q следует (6.2). Точно так же, исходя из равенства (8.2) и оценки (4.2), доказывается и обратное утверждение. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность. Пусть $\{D_m\}$ – последовательность областей леммы 1.2, удовлетворяющих R_α^L -условию при $\alpha \in (\alpha_p, 1)$ (см. (6)), $f_m \in C^\infty(\overline{D})$ и $f_m \rightarrow f$ при $m \rightarrow \infty$ по норме пространства $W_p^{-1}(D)$. Рассмотрим задачи

$$\begin{aligned} Lu_m &= f_m \quad \text{в } D_m, \quad u_m \in \dot{W}_p^1(D_m), \\ Lv_m &= g \quad \text{в } D_m, \quad g \in C^\infty(\overline{D}), \quad v_m \in \dot{W}_q^1(D_m), \end{aligned} \tag{9.2}$$

которые однозначно разрешимы согласно предложению 1.2. Докажем для u_m коэрцитивную оценку (4) с постоянной, не зависящей от m . В силу (4.2) и предложения 2.2 достаточно показать, что v_m удовлетворяет в D_m неравенству (7.2). Так как R_α^L -условие относительно областей D_m выполнено равномерно по m , то требуемое утверждение вытекает из интегрального представления (22.1) для v_m и неравенства (23.1). Таким образом, последовательность $\{u_m\}$ слабо компактна в $\dot{W}_p^1(D)$ и из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению задачи (3). Отметим, что попутно нами установлена и разрешимость задачи (3.2) вместе с оценкой $\|v\|_{\dot{W}_q^1(D)} \leq C\|g\rho\|_{L_q(D)}$.

Докажем единственность решения. Пусть v – решение задачи (3.2) и $Lu = 0$ в D , $u \in \dot{W}_p^1(D)$. Можно считать, что $p \in (1, 2)$, поскольку в $\dot{W}_2^1(D)$ единственность известна. Рассмотрим функции $u^m, v^m \in C_0^\infty(D)$, сходящиеся при $m \rightarrow \infty$ к u и v по нормам соответствующих пространств. Согласно определению решений

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} u_{x_j}^m \, dx = \int_D g u^m \, dx \quad \text{и} \quad \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j}^m \, dx = 0.$$

Переходя в этих равенствах к пределу при $m \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\int_D ug \, dx = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности g следует, что $u = 0$.

Необходимость. Пусть $x_0 \in \partial D$, $r < d$, а $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – срезающая функция: $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) = 0$ в $B_{r/4}^{x_0}$, $\eta(x) = 1$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{r/2}^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq \text{const} \cdot r^{-1}$.

Рассмотрим задачу

$$Lw = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\eta_{x_i})_{x_j} \quad \text{в } D, \quad w \in \overset{\circ}{W}_p^1(D).$$

Согласно условиям теоремы эта задача имеет единственное решение, для которого справедлива коэрцитивная оценка (4). В рассматриваемом случае ее можно записать в виде $\|w\|_{\overset{\circ}{W}_p^1(D)} \leq C(L, n, D)r^{n/p-1}$. Поскольку $p \in (1, \infty)$ произвольно, то по теореме вложения Соболева

$$|w(x)| \leq C(L, n, \alpha, D)(|x - y|/r)^\alpha \quad (10.2)$$

для любых $x \in D$, $y \in \partial D$ и произвольного $\alpha \in (0, 1)$. Обозначим через w_1 решение задачи

$$Lw_1 = 0 \quad \text{в } D, \quad w_1 - \eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(D).$$

Тогда $w_1(x) = w(x) + \eta(x)$ и ввиду (10.2) найдется такое δ_0 , не зависящее от r , что $w_1(x) \geq 1/2$ в $\overline{D} \cap B_{\delta_0 r}^y$ для всех $y \in \partial D \cap S_r^{x_0}$. Поэтому, учитывая неравенство Харнака, из принципа максимума получим, что $\omega_r^{x_0}(x) \leq Cw_1(x)$ в $D \cap B_r^{x_0}$, где $C = C(L, n, D)$. Выбирая теперь в (10.2) $y = x_0$, придем к требуемой оценке для $\omega_r^{x_0}(x)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из приведенного доказательства вытекает, что задача (3) однозначно разрешима вместе с оценкой (4) для областей, удовлетворяющих R_α^L -условию при $\alpha \in (\alpha_p, 1)$. Если область D липшицева, то в качестве α_p можно выбрать постоянные в (24.1) из замечания к теореме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2 И 3. Пусть $L \in \mathfrak{L}$, $p \in (1, \infty)$, α_p – постоянная из (6) и область D удовлетворяет R_α^L -условию при $\alpha \in (\alpha_p, 1)$. Если показать, что для произвольного оператора $\tilde{L} \in \mathfrak{L}$ задача Дирихле

$$\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{в } D, \quad \tilde{f} \in W_p^{-1}(D), \quad \tilde{u} \in \overset{\circ}{W}_p^1(D) \quad (11.2)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее коэрцитивной оценке (4), то теоремы будут доказаны. Действительно, выбирая в качестве L оператор Лапласа Δ , в силу замечания 1.2 сразу придем к утверждению теоремы 3 и достаточности условия теоремы 2. Аналогично, полагая $\tilde{L} = \Delta$, получим и необходимость требования теоремы 2.

Пусть D_m – области леммы 1.2, для которых R_α^L -условие выполнено равномерно по m , а $\tilde{f}_m \in C^\infty(\overline{D})$ – последовательность функций, аппроксимирующих $\tilde{f}$ по норме пространства $W_p^{-1}(D)$. Обозначим через $\tilde{u}_m$ и $\tilde{v}_m$ решения задач

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{u}_m &= \tilde{f}_m \quad \text{в } D_m, \quad \tilde{u}_m \in \overset{\circ}{W}_p^1(D_m), \\ \tilde{L}\tilde{v}_m &= \tilde{g} \quad \text{в } D_m, \quad \tilde{g} \in C^\infty(\overline{D}), \quad \tilde{v}_m \in \overset{\circ}{W}_q^1(D_m), \end{aligned}$$

однозначная разрешимость которых вытекает из предложения 1.2. Поскольку по доказанному ранее в теореме 1 для решений u_m и v_m соответствующих задач (9.2)

справедливы равномерные по m L_p -оценки, то пользуясь методом замораживания коэффициентов [16], придем к соотношениям

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_m\|_{W_p^1(D_m)} &\leq C(L, n, D)(\|\tilde{f}_m\|_{W_p^{-1}(D)} + \|\tilde{u}_m\|_{L_p(D)}), \\ \|\tilde{v}_m\|_{W_q^1(D_m)} &\leq C(L, n, D)(\|\tilde{g}\|_{L_q(D)} + \|\tilde{v}_m\|_{L_q(D)}).\end{aligned}$$

Далее, точно так же, как и в предложении 2.2, устанавливается, что неравенства

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_m\|_{L_p(D)} &\leq C(L, n, D)\|\tilde{f}_m\|_{W_p^{-1}(D)}, \\ \|\tilde{v}_m\|_{L_q(D)} &\leq C(L, n, D)\|\tilde{g}\|_{L_q(D)}\end{aligned}\tag{12.2}$$

выполнены одновременно. Таким образом, осталось получить (12.2). Воспользуемся для v_m интегральным представлением (22.1) с помощью функции Грина оператора $\tilde{L}$ в области D_m . Теперь согласно оценкам (1.1) и (2.1) требуемое неравенство следует из ограниченности в L_q интегрального оператора со слабой полярной особенностью. Значит, последовательность $\tilde{u}_m$ слабо компактна в $W_p^{-1}(D)$, что доказывает существование решения задачи (11.2) вместе с соответствующей коэрцитивной оценкой. Единственность устанавливается точно так же, как в теореме 1. Теоремы доказаны.

Список литературы

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
2. Grisvard P. Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston: Pitman Publ., 1985.
3. Maslennikova V. N., Bogovskii M. E. Elliptic boundary value problems in unbounded domains with noncompact and nonsmooth boundaries // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. 1986. V. 56. P. 125–138.
4. Кондратьев В. А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. С. 1831–1843.
5. Вержбинский Г. М., Мазья В. Г. О замыкании в L_p оператора задачи Дирихле в области с коническими точками // Изв. вузов. Сер. матем. 1974. Т. 145. № 6. С. 8–19.
6. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. L_p -оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Труды ММО. 1978. Т. 37. С. 49–93.
7. Алхутлов Ю. А., Кондратьев В. А. Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 806–818.
8. Алхутлов Ю. А. О критерии L_p -разрешимости задачи Дирихле для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 135.
9. Алхутлов Ю. А. О L_p -разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка // Материалы междунар. конф. и Чебышёвских чтений, посв. 175-летию со дня рожд. П. Л. Чебышёва. Т. 1, 1996. С. 19–22.
10. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1988. С. 99–215.
11. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. № 2. С. 3–76.
12. Кондратьев В. А., Копачек И., Олейник О. А. О наилучших показателях Гёльдера для обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 1. С. 113–125.

13. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 1963. V. 17. P. 43–77.
14. *Кондратьев В. А.* О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений // *Труды ММО.* 1967. Т. 16. С. 293–318.
15. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
16. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962.
17. *Стейн Е.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
18. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию
18.04.1997