Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Арсеньева, В. Ф. Кириченко, Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 1, 21–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:38:32

УДК 514.76

О. Е. Арсеньева, В. Ф. Кириченко

Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей

В работе получен ряд результатов, касающихся геометрии конформно-полуплоских эрмитовых поверхностей как классического, так и гиперболического типа (обобщенных эрмитовых поверхностей), часть из которых обобщает и проясняет известные в этом направлении результаты Коды, Ито и других авторов. Эти результаты вскрывают ряд красивых и неожиданных связей между такими классическими характеристиками конформно-полуплоских (обобщенных) эрмитовых поверхностей, как эйнштейновость, постоянство голоморфной секционной кривизны, и др. Получена полная классификация компактных автодуальных эрмитовых RK -поверхностей, являющихся обобщенными многообразиями Хопфа, дающая полное решение проблемы Чена в этом классе эрмитовых поверхностей.

Библиография: 14 названий.

Эрмитовой поверхностью называется 4-мерное почти эрмитово многообразие со знакоопределенной метрикой и интегрируемой почти комплексной структурой. Если $\{M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ – эрмитова поверхность, то многообразие M можно рассматривать как двумерное комплексное многообразие, снабженное эрмитовой метрикой $\langle \langle X, Y \rangle \rangle = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1} \langle X, JY \rangle$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, (где $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M), т.е. как комплексный аналог римановых поверхностей, чем и объясняется название. Эрмитовы поверхности изучались с различных точек зрения многими авторами (см., например, [1]–[3]). Одна из важнейших особенностей геометрии эрмитовых поверхностей, как и всяких четырехмерных псевдоримановых многообразий, определяется тем, что группа Ли $SO(4, \mathbb{R})$ не является простой. Геометрическим следствием этого факта является существование канонического разложения модуля $\Lambda_2(M)$ 2-форм такого многообразия M в прямую сумму подмодулей $\Lambda_+(M)$ автодуальных и $\Lambda_-(M)$ антиавтодуальных форм. Многообразие M называется *автодуальным* (соответственно, *антиавтодуальным*), если ограничение эндоморфизма Вейля конформной кривизны на подмодуль $\Lambda_-(M)$ (соответственно, $\Lambda_+(M)$) равно нулю. Значение автодуальных и антиавтодуальных (иначе говоря, конформно полуплоских) многообразий определяется связью их геометрии с геометрией твисторного расслоения над такими многообразиями. Например, известная теорема Пенроуза–Атти–Хитчина–Сингера [4] утверждает, что каноническая почти комплексная структура пространства твисторов 4-мерного ориентированного риманова многообразия (M, g) интегрируема тогда и только тогда, когда (M, g) конформно полуплоско. В работе [5] Чен поставил проблему классификации конформно полуплоских эрмитовых поверхностей. В направлении решения этой проблемы был получен ряд результатов [6]. Однако существенные продвижения были получены лишь в случае келеровых поверхностей (т.е. 4-мерных келеровых многообразий). Например, Чен [5] и независимо и

другими методами Бургиньон [7] и Дердзински [8] получили классификацию компактных автодуальных келеровых многообразий, а Ито [9] – исчерпывающее описание антиавтодуальных келеровых многообразий.

В настоящей работе получен ряд результатов, касающихся геометрии конформно-полуплоских эрмитовых поверхностей как классического, так и гиперболического типа (обобщенных эрмитовых поверхностей), часть из которых обобщает и проясняет известные в этом направлении результаты Коды, Ито и других авторов. Эти результаты вскрывают ряд красивых и неожиданных связей между такими классическими характеристиками конформно-полуплоских (обобщенных) эрмитовых поверхностей, как эйнштейновость, постоянство голоморфной секционной кривизны, и др. Получена полная классификация компактных автодуальных эрмитовых RK -поверхностей, являющихся обобщенными многообразиями Хопфа, дающая полное решение проблемы Чена в этом классе эрмитовых поверхностей.

Пусть $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – 4-мерное ориентированное псевдориманово многообразие, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M , $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M , $\Lambda(M) = \bigoplus_{r=0}^\infty \Lambda_r(M)$ – алгебра Грассмана дифференциальных форм на M , $*$: $\Lambda_r(M) \rightarrow \Lambda_{4-r}(M)$ – оператор Ходжа, определяемый тождеством $\omega \wedge (*\theta) = \langle \omega, \theta \rangle \eta_g$, где $\omega, \theta \in \Lambda_r(M)$, η_g – форма объема на M , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – метрика на $\Lambda_r(M)$, индуцированная метрикой g . Как известно, $*^2 = (-1)^{r(4-r)+s}$, где s – отрицательный индекс инерции метрики g . В частности, $*$: $\Lambda_2(M) \rightarrow \Lambda_2(M)$ – инволюция, т.е. $*^2 = \text{id}$, тогда и только тогда, когда $s = 0$ либо 2 (мы считаем, что $4 - s \geq s$). В этом случае $\Lambda_2(M) = \Lambda_+(M) \oplus \Lambda_-(M)$, где $\Lambda_+(M)$ и $\Lambda_-(M)$ – собственные подмодули эндоморфизма $*$, соответствующие собственным значениям 1 и -1 соответственно. Их элементы называются, соответственно, *автодуальными* и *антиавтодуальными* формами.

Пусть теперь $\{g, J\}$ – почти эрмитова структура классического (с положительной определенной метрикой) либо гиперболического типа, короче, обобщенная почти эрмитова, или $GA\mathcal{H}$ -структура на M , $J^2 = \alpha \text{id}$, $\alpha = -1$ в классическом и $\alpha = 1$ в гиперболическом случаях, $\langle JX, JY \rangle = -\alpha \langle X, Y \rangle$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\Omega(X, Y) = \langle J^3 X, Y \rangle$ – фундаментальная форма структуры. Хорошо известно, что в гиперболическом случае g – нейтральная метрика, т.е. $s = 2$. Напомним [10], что 4-мерное $GA\mathcal{H}$ -многообразие, т.е. многообразие, наделенное $GA\mathcal{H}$ -структурой, наделено канонической ориентацией, порожденной 4-формой $\Omega \wedge \Omega$. Как известно, задание $GA\mathcal{H}$ -структуры (g, J) на многообразии M равносильно заданию G -структуры $\mathcal{G}$ со структурной группой $G = U(2, \mathfrak{K})$, где $\mathfrak{K}$ – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел в классическом случае либо кольцо $\mathbb{D}$ двойных чисел в гиперболическом случае. Элементы этой G -структуры, которую мы назовем *присоединенной G -структурой*, называются *A-реперами* [11]. Напомним построение A-реперов. Пусть $\{p, e_1, e_2, J e_1, J e_2\}$ – ортонормированный репер, согласованный со структурным эндоморфизмом J , $\|e_1\|^2 = 1$, $\|e_2\|^2 = -\alpha$. Тогда соответствующий ему A-репер $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\hat{1}}, \varepsilon_{\hat{2}}\}$ определяется как репер касательного пространства $T_p(M) \otimes \mathfrak{K}$, $p \in M$, с векторами $\varepsilon_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a + iJ^3 e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a - iJ^3 e_a)$; $a, d, c, \dots = 1, 2$; $\hat{a} = a + 2$; i – мнимая единица кольца $\mathfrak{K}$. Отметим, что $\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\varepsilon}_a$, $J\varepsilon_a = i\varepsilon_a$, $J\varepsilon_{\hat{a}} = -i\varepsilon_{\hat{a}}$, где $X \rightarrow \bar{X}$ – оператор естественной инволюции (сопряжения) в $\mathfrak{K}$ -модуле $T_p(M) \otimes \mathfrak{K}$. Легко проверить также [11], что на пространстве

G -структуры

$$(g_{jk}) = (g^{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (J^j_k) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad (1)$$

$(j, k = 1, 2, \hat{1}, \hat{2})$.

ЛЕММА 1 (см. [10]). Пусть (M, g, J) – 4-мерное обобщенное почти эрмитово многообразие, $\theta \in \Lambda_2(M)$. В этом случае

1) $\theta \in \Lambda_+(M)$ тогда и только тогда, когда на пространстве $\mathcal{G}$

$$(\theta_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & x + iz & iy & 0 \\ -x - iz & 0 & 0 & -i\alpha y \\ -iy & 0 & 0 & x - iz \\ 0 & i\alpha y & -x + iz & 0 \end{pmatrix};$$

2) $\theta \in \Lambda_-(M)$ тогда и только тогда, когда на пространстве $\mathcal{G}$

$$(\theta_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & iy & x + iz \\ 0 & 0 & -x + iz & i\alpha y \\ -iy & x - iz & 0 & 0 \\ -x - iz & -i\alpha y & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 4-мерное $GA\mathcal{H}$ -многообразие с интегрируемой структурой называется *обобщенной эрмитовой поверхностью*. Здесь интегрируемость структуры понимается как обращение в нуль тензора Нейенхейса

$$N(X, Y) = J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (2)$$

Обобщенные эрмитовы многообразия. Пусть (M, g, J) – почти эрмитово многообразие, ∇ – риманова связность метрики g . Ее структурные уравнения на пространстве расслоения реперов над M имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^i &= \omega^i_j \wedge \omega^j, \\ 2) \quad d\omega^i_j &= \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\{\omega^i\}$ и $\{\omega^i_j\}$ – компоненты форм смещения и римановой связности соответственно, $\{R^i_{jkl}\}$ – компоненты тензора R Римана–Кристоффеля; $i, j, k, l = 1, \dots, \dim M$. Заметим, что в силу вещественности форм смещения и связности, а также тензора R , верны соотношения:

$$\bar{\omega}^i = \omega^{\hat{i}}; \quad \bar{\omega}^i_j = \omega^{\hat{i}}_{\hat{j}}; \quad \bar{R}^i_{jkl} = R^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}; \quad \hat{i} = i \pm \frac{1}{2} \dim M.$$

Далее, поскольку J и g – тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$ соответственно, причем $\nabla g = 0$ по определению римановой связности, компоненты этих тензоров как функции на пространстве расслоения реперов над M удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 1) \quad dJ_j^i + J_k^i \omega_j^k - J_j^k \omega_k^i &= J_{j,k}^i, \\ 2) \quad dg_{ij} + g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\{J_{j,k}^i\}$ – компоненты тензора ∇J . С учетом соотношений (1) уравнения (4₁) и (4₂) на пространстве присоединенной G -структуры примут вид, соответственно:

$$1) \quad \omega_{\hat{b}}^a = \frac{i^3}{2} J_{\hat{b},k}^a \omega^k, \quad 2) \quad \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\frac{i^3}{2} J_{\hat{b},k}^{\hat{a}} \omega^k, \quad 3) \quad J_{b,k}^a = J_{\hat{b},k}^{\hat{a}} = 0; \quad (5)$$

$$1) \quad \varepsilon(a) \omega_b^a + \varepsilon(b) \omega_{\hat{a}}^b = 0, \quad 2) \quad \varepsilon(a) \omega_b^{\hat{a}} + \varepsilon(b) \omega_a^{\hat{b}} = 0, \quad 3) \quad \varepsilon(a) \omega_b^a + \varepsilon(b) \omega_{\hat{a}}^{\hat{b}} = 0 \quad (6)$$

($a, b, c, d, \dots = 1, \dots, \frac{1}{2} \dim M$; $\hat{a} = a + \frac{1}{2} \dim M$). Подставим (5) в (3₁):

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{i^3}{2} J_{b,c}^a \omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{i^3}{2} J_{[\hat{b},c]}^a \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{b}}, \\ d\omega^{\hat{a}} &= \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} - \frac{i^3}{2} J_{\hat{b},c}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b - \frac{i^3}{2} J_{[\hat{b},c]}^{\hat{a}} \omega^c \wedge \omega^{\hat{b}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где по индексам, заключенным в квадратные скобки, подразумевается альтернирование. Введем обозначение $\omega_i = g_{ij} \omega^j$. В частности, на пространстве присоединенной G -структуры $\omega_a = \varepsilon(a) \omega^{\hat{a}} = \varepsilon(a) \overline{\omega}^a$. С учетом этого и соотношений (6) уравнения (7) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_c &= \frac{i^3}{2} \varepsilon(b) J_{\hat{b},c}^a, \quad B^{abc} = -\frac{i^3}{2} \varepsilon(b, c) J_{[\hat{b},c]}^a, \\ B_{ab}{}^c &= -\frac{i^3}{2} \varepsilon(a, c) J_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad B_{abc} = \frac{i^3}{2} \varepsilon(a) J_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Системы функций $\{B^{ab}{}_c\}$, $\{B_{ab}{}^c\}$, $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ являются компонентами комплексных тензоров на многообразии M , называемых, соответственно, *виртуальным тензором первого рода*, *виртуальным тензором второго рода*, *структурным тензором первого рода* и *структурным тензором второго рода* $GA\mathcal{H}$ -многообразия M . Заметим, что согласно (6) $\varepsilon(a) J_{\hat{b},k}^a + \varepsilon(b) J_{\hat{a},k}^b = 0$. Умножая обе части этого равенства на $\varepsilon(a, b)$, получим: $\varepsilon(b) J_{\hat{b},k}^a + \varepsilon(a) J_{\hat{a},k}^b = 0$, и следовательно, $B^{ab}{}_c + B^{ba}{}_c = 0$. Аналогично, $B_{ab}{}^c + B_{ba}{}^c = 0$. Тем самым доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Виртуальные тензоры $GA\mathcal{H}$ -структуры кососимметричны по первой паре аргументов.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что структурные тензоры $GA\mathcal{H}$ -структуры кососимметричны по второй паре аргументов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу вещественности тензора ∇J из приведенных определений следует, что $\overline{B}_c^{ab} = \varepsilon(a, b, c)B_{ab}^c$, $\overline{B}^{abc} = \varepsilon(a, b, c)B_{abc}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. С учетом (5₁), (5₂) и (9) имеем:

$$\omega_b^a = \varepsilon(b)B^{ab}{}_c \omega^c; \quad \omega_b^{\hat{a}} = \varepsilon(a)B_{ab}{}^c \omega_c.$$

Далее, в силу отсутствия кручения римановой связности

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Следовательно, соотношение (2) можно переписать в форме

$$N(X, Y) = \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X - J\nabla_X(J)Y + J\nabla_Y(J)X.$$

Более того, ковариантно дифференцируя соотношение $J^2 = \alpha \text{id}$, получим, что $J\nabla_X(J)Y + \nabla_X(J)(JY) = 0$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, и следовательно,

$$N(X, Y) = \nabla_{JX}(J)Y + \nabla_X(J)(JY) - \nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX).$$

Из этой формулы следует, в частности, что

$$\begin{aligned} N_{bc}^{\hat{a}} &= (\nabla_{J\varepsilon_b}(J)\varepsilon_c)^{\hat{a}} + (\nabla_{\varepsilon_b}(J)(J\varepsilon_c))^{\hat{a}} - (\nabla_{J\varepsilon_c}(J)\varepsilon_b)^{\hat{a}} - (\nabla_{\varepsilon_c}(J)(J\varepsilon_b))^{\hat{a}} \\ &= 2i(J_{c,b}^{\hat{a}} - J_{b,c}^{\hat{a}}) = -4iJ_{[b,c]}^{\hat{a}} = -8\alpha\varepsilon(a)B_{abc}. \end{aligned}$$

Аналогично, $N_{b\hat{c}}^a = -8\alpha\varepsilon(b, c)B^{abc}$. Остальные компоненты тензора Нейенхейса на пространстве присоединенной G -структуры равны нулю. Тем самым доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Обобщенная почти эрмитова структура интегрируема тогда и только тогда, когда ее структурные тензоры – нулевые.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Интегрируемая обобщенная почти эрмитова структура называется *обобщенной эрмитовой* (короче, $G\mathcal{H}$ -) структурой.

С учетом предложения 2 и (8) первая группа структурных уравнений обобщенной эрмитовой структуры на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b, \\ 2) \quad d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b. \end{aligned} \tag{10}$$

Для нахождения второй группы структурных уравнений $G\mathcal{H}$ -структуры продифференцируем внешним образом соотношения (10).

Дифференцируя внешним образом (10₁), получим:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_b^a \wedge \omega^b + \Delta B^{ab}{}_c \wedge \omega^c \wedge \omega_b \\ - B^{a[h}{}_b B^{b|d]}{}_c \omega^c \wedge \omega_b \wedge \omega_d + B^{ah}{}_{[c} B^d{}_{|h|b]} \omega^c \wedge \omega^b \wedge \omega_d = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Delta\omega_b^a = d\omega_b^a - \omega_c^a \wedge \omega_b^c$, $\Delta B^{ab}_c = dB^{ab}_c - B^{hb}_c \omega_h^a - B^{ah}_c \omega_h^b + B^{ab}_h \omega_h^c$. Разложим формы $\Delta\omega_b^a$ и ΔB^{ab}_c по естественным базисам:

$$\begin{aligned} 1) \Delta\omega_b^a &= A_{bch}^{adr} \omega_d^c \wedge \omega_r^h + A_{bcr}^{ad} \omega_d^c \wedge \omega_r^r + A_{bc}^{adr} \omega_d^c \wedge \omega_r^r \\ &\quad + A_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d + A_{dc}^{ad} \omega^c \wedge \omega_d + A_b^{acd} \omega_c \wedge \omega_d, \\ 2) \Delta B^{ab}_c &= B^{ab}_{cd} \omega_r^d + B^{ab}_{cd} \omega^d + B^{ab}_c{}^d \omega_d. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя эти соотношения в (11), с учетом линейной независимости базисных форм получим:

$$\begin{aligned} 1) A_{bch}^{adr} &= 0, \quad 2) A_{[b|d|r]}^{ac} = 0, \quad 3) A_{bd}^{acr} - B^{ar}_{bd}{}^c = 0, \quad 4) A_{[bcd]}^a = 0, \\ 5) A_{[bc]}^{ad} - B^{ad}_{[bc]} + B^{ah}_{[b} B_{|h|c]}^d &= 0, \\ 6) A_b^{acd} + B^{a[c}_b{}^d] - B^{a[c}_h B^{h|d]}_b &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцируя внешним образом (10₂), получим:

$$\begin{aligned} -\Delta\omega_a^b \wedge \omega_b + \Delta B_{ab}{}^c \wedge \omega_c \wedge \omega^b \\ - B_{a[b}{}^h B_{|h|d]}^c \omega_c \wedge \omega^b \wedge \omega^d + B_{ah}{}^{[c} B^{h|b]}_d \omega_c \wedge \omega_b \wedge \omega^d = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta B_{ab}{}^c = dB_{ab}{}^c + B_{hb}{}^c \omega_a^h + B_{ah}{}^c \omega_b^h - B_{ab}{}^h \omega_h^c$. Разложим эту форму по естественному базису:

$$\Delta B_{ab}{}^c = B_{ab}{}^{cd} \omega_r^d + B_{ab}{}^c{}^d \omega^d + B_{ab}{}^c{}^d \omega_d.$$

Подставляя это разложение и (12₁) с учетом (13) в (14), в силу линейной независимости базисных форм получим:

$$\begin{aligned} A_{adr}^{bc} + B_{ar}{}^{bc}_d &= 0, \quad A_a^{[bcd]} = 0, \\ -A_{acd}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} - B_{a[c}^h B_{|h|d]}^b &= 0, \quad -A_{ac}^{[bd]} + B_{ac}{}^{[bd]} - B_{ah}{}^{[b} B^{h|d]}_c = 0. \end{aligned}$$

С учетом первого из этих соотношений, соотношения (13₂) и предложения 1 получаем, что $B_{ar}{}^{bc}_d = 0$, $A_{adr}^{bc} = 0$. С учетом замечания 2 и соотношения (13₃) получаем также, что $B^{ar}_{bc}{}^d = 0$, $A_{bc}^{adr} = 0$. Таким образом, вторая группа структурных уравнений $G\mathcal{H}$ -структуры на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид:

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + A_{bc}^{ad} \omega_c \wedge \omega_d + A_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d + A_b^{acd} \omega_c \wedge \omega_d.$$

Кроме того, применяя к обеим частям этого равенства оператор комплексного сопряжения и используя вещественность форм смещения и связности, с учетом (6₃) и линейной независимости базисных форм получим, что

$$\overline{A_{bc}^{ad}} = \varepsilon(a, b, c, d) A_{ad}^{bc}, \quad \overline{A_b^{acd}} = -\varepsilon(a, b, c, d) A_{acd}^b.$$

Собирая полученные данные, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. Полная группа структурных уравнений обобщенной эрмитовой структуры на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b, \\ 2) \quad d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b, \\ 3) \quad d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + A_{bc}^{ad} \omega^c \wedge \omega_d + A_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d + A_b^{acd} \omega_c \wedge \omega_d. \end{aligned} \quad (15)$$

При этом

$$\begin{aligned} 1) \quad dB^{ab}{}_c - B^{hb}{}_c \omega_h^a - B^{ah}{}_c \omega_h^b + B^{ab}{}_h \omega_c^h &= B^{ab}{}_c \omega_h^h + B^{ab}{}_c{}^h \omega_h, \\ 2) \quad dB_{ab}{}^c + B_{hb}{}^c \omega_a^h + B_{ah}{}^c \omega_b^h - B_{ab}{}^h \omega_h^c &= B_{ab}{}^c \omega_h^h + B_{ab}{}^c{}^h \omega_h; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad A_{[bcd]}^a &= 0, & 2) \quad A_{bcd}^a &= B_{b[c}{}^a{}_{d]} - B_{b[c}{}^h B_{|h|d]}{}^a, \\ 3) \quad A_a^{[bcd]} &= 0, & 4) \quad A_a^{bcd} &= -B^{b[c}{}^d{}_{a]} + B^{b[c}{}_h B^{h|d]}{}_a, \\ 5) \quad A_{[bc]}^{ad} &= B^{ad}{}_{[bc]} - B^{ah}{}_{[b} B_{|h|c]}{}^d, & 6) \quad A_{ad}^{[bc]} &= B_{ad}^{[bc]} - B_{ah}{}^{[b} B^{h|c]}{}_d. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычислим компоненты тензора R на пространстве присоединенной G -структуры. С одной стороны, положив в (3₂) $i = a, j = b$, с учетом замечания 3 получим:

$$\begin{aligned} d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \omega_c^a \wedge \omega_b^{\hat{c}} + \frac{1}{2} R^a{}_{bij} \omega^i \wedge \omega^j \\ &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d \omega^c \wedge \omega_d + \frac{1}{2} R^a{}_{bij} \omega^i \wedge \omega^j. \end{aligned}$$

Сравнивая с (15₃), с учетом линейной независимости базисных форм получим: $R^a{}_{bcd} = 2A_{bcd}^a, R^a{}_{bc}{}^d + B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d = A_{bc}^{ad}$, и значит,

$$1) \quad R_{\hat{a}bcd} = 2\varepsilon(a) A_{bcd}^a, \quad 2) \quad R_{\hat{a}bcd} = \varepsilon(a, d) (A_{bc}^{ad} - B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d). \quad (18)$$

Далее, дифференцируя внешним образом соотношение $\omega_b^{\hat{a}} = \varepsilon(a) B_{ab}{}^c \omega_c$, с учетом (3₂), (16₂) и (15₂) получим:

$$\begin{aligned} \omega_c^{\hat{a}} \wedge \omega_b^c + \omega_c^{\hat{a}} \wedge \omega_b^{\hat{c}} + \frac{1}{2} R^{\hat{a}}{}_{bij} \omega^i \wedge \omega^j \\ = \varepsilon(a) \{ -B_{hb}{}^c \omega_a^h - B_{ah}{}^c \omega_b^h + B_{ab}{}^h \omega_h^c + B_{ab}{}^c \omega_h^h + B_{ab}^{[ch]} \omega_h \} \wedge \omega_c \\ + \varepsilon(a) B_{ab}{}^c (-\omega_c^d \wedge \omega_d + B_{cd}{}^r \omega_r \wedge \omega^d). \end{aligned}$$

Сделаем необходимые сокращения с учетом замечания 3 и формулы (6₃):

$$\frac{1}{2} R^{\hat{a}}{}_{bij} \omega^i \wedge \omega^j = \varepsilon(a) \{ (-B_{ab}{}^h B_{hc}{}^d + B_{ab}{}^d \omega_c^h) \omega^c \wedge \omega_d - B_{ab}^{[cd]} \omega_c \wedge \omega_d \}. \quad (19)$$

Ввиду линейной независимости базисных форм находим отсюда, что $R^{\hat{a}}{}_{bcd} = 0$, $R^{\hat{a}}{}_b{}^{cd} = -2\varepsilon(a) B_{ab}^{[cd]}$. Заметим, что операция сопряжения позволяет последнюю формулу переписать в виде $R_{\hat{a}\hat{b}cd} = -2\varepsilon(a, b) B_{[cd]}^{ab}$. Таким образом,

$$1) \quad R_{abcd} = 0, \quad 2) \quad R_{\hat{a}\hat{b}cd} = -2\varepsilon(a, b) B_{[cd]}^{ab}. \quad (20)$$

Остальные компоненты тензора R получаются с учетом вещественности этого тензора и его классических свойств симметрии.

Заметим, что из (19) следует также, что $R_{abcd} = -B_{ab}{}^h B_{hc}{}^d + B_{ab}{}^d{}_c$. С учетом классических свойств симметрии тензора R это соотношение можно переписать в форме $R_{\hat{a}bcd} = B_{cd}{}^h B_{hb}{}^a + B_{dc}{}^a{}_b$. С учетом (18₁) имеем отсюда:

$$A_{bcd}^a = \frac{1}{2}(B_{cd}{}^h B_{hb}{}^a - B_{cd}{}^a{}_b). \quad (21)$$

Вычислим теперь компоненты тензора Риччи r $G\mathcal{H}$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры. Имеем по определению: $r_{ij} = R^k{}_{ijk}$, и значит, в частности:

$$\begin{aligned} 1) \ r_{ab} &= R^c{}_{abc} + R_{ab\hat{c}}^{\hat{c}} = \sum_{c=1}^2 \varepsilon(c)(R_{\hat{c}abc} + R_{\hat{c}bac}) = 2(A_{abc}^c + A_{bac}^c) \\ &= B_{bc}{}^h B_{ha}{}^c + B_{ac}{}^h B_{hb}{}^c - B_{bc}{}^c{}_a - B_{ac}{}^c{}_b = 2(B_{c(a}{}^h B_{b)h}{}^c + B_{c(a}{}^c{}_{b)}), \end{aligned}$$

где по индексам, заключенным в скобки, подразумевается симметризация,

$$\begin{aligned} 2) \ r_{\hat{a}\hat{b}} &= R^c{}_{\hat{a}\hat{b}c} + R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^{\hat{c}} \\ &= \sum_{c=1}^2 \varepsilon(c)(R_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}c} + R_{c\hat{a}\hat{b}\hat{c}}) = \sum_{c=1}^2 \varepsilon(c)(R_{\hat{c}\hat{b}ac} - R_{\hat{c}ac\hat{b}}) \\ &= -\varepsilon(b)(2B^{cb}{}_{[ac]} + A_{ac}^{cb} - B^{ch}{}_c B_{ha}{}^b) \\ &= \varepsilon(b)\{2B^{cb}{}_{[ca]} - (A_{ca}^{cb} + 2B^{cb}{}_{[ac]} - 2B^{ch}{}_a B_{|h|c}{}^b) + B^{ch}{}_c B_{ha}{}^b\} \\ &= \varepsilon(b)(-A_{ca}^{cb} + 4B^{cb}{}_{[ca]} - B^{ch}{}_a B_{ch}{}^b). \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом вещественности тензора Риччи имеем

$$\begin{aligned} r_{ab} &= 2(B_{c(a}{}^h B_{b)h}{}^c + B_{c(a}{}^c{}_{b)}), \\ r_{\hat{a}\hat{b}} &= 2\varepsilon(a, b)(B^{c(a}{}_h B^{b)h}{}_c + B^{c(a}{}_c{}^{b)}), \\ r_{a\hat{b}} &= r_{\hat{b}a} = \varepsilon(b)(-A_{ca}^{cb} + 4B^{cb}{}_{[ca]} - B^{ch}{}_a B_{ch}{}^b). \end{aligned} \quad (22)$$

Вычислим, наконец, компоненты тензора W Вейля конформной кривизны $G\mathcal{H}$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры. Напомним [10], что компоненты этого тензора вычисляются по формуле

$$W_{ijklm} = R_{ijklm} + \frac{1}{2}(r_{ik}g_{jm} + r_{jm}g_{ik} - r_{im}g_{jk} - r_{jk}g_{im}) + \frac{\varkappa}{6}(g_{im}g_{jk} - g_{ik}g_{jm}),$$

где $\varkappa = g^{ij}r_{ij}$ — скалярная кривизна многообразия. С учетом этого, а также соотношений (18) и (20) получаем:

$$\begin{aligned} 1) \ W_{abcd} &= 0, \\ 2) \ W_{\hat{a}bcd} &= 2\varepsilon(a)A_{bcd}^a + \frac{1}{2}(r_{bd}g_{\hat{a}c} - r_{bc}g_{\hat{a}d}), \\ 3) \ W_{\hat{a}\hat{b}cd} &= -2\varepsilon(a, b)B^{ab}{}_{[cd]} + \frac{1}{2}(r_{\hat{a}c}g_{\hat{b}d} + r_{\hat{b}d}g_{\hat{a}c} - r_{\hat{a}d}g_{\hat{b}c} - r_{\hat{b}c}g_{\hat{a}d}) \\ &\quad + \frac{\varkappa}{6}(g_{\hat{a}d}g_{\hat{b}c} - g_{\hat{a}c}g_{\hat{b}d}), \\ 4) \ W_{\hat{a}bcd} &= \varepsilon(a, d)\{A_{bc}^{ad} - B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d\} + \frac{1}{2}(r_{\hat{a}c}g_{bd} + r_{bd}g_{\hat{a}c}) - \frac{\varkappa}{6}g_{\hat{a}c}g_{bd}. \end{aligned} \quad (23)$$

Остальные компоненты тензора W получаются с учетом вещественности этого тензора и его свойств симметрии, аналогичных свойствам симметрии тензора R .

Обобщенные эрмитовы поверхности. Пусть (M, g, J) – обобщенная эрмитова поверхность. Тогда индексы $a, b, c, d, \dots$ пробегают значения 1 и 2. Введем в рассмотрение тензор C с компонентами $C^{ab}_c = B^{ab}_c + 2B^{h[a}_h \delta^{b]}_c$. Непосредственно проверяется, что $C^{12}_1 = C^{12}_2 = 0$, и значит, $C^{ab}_c = 0$, т.е. $B^{ab}_c = -2B^{h[a}_h \delta^{b]}_c$. Введем в рассмотрение функции $\alpha^a = -2B^{ha}_h$. Тогда $B^{ab}_c = \alpha^{[a} \delta^{b]}_c$. Аналогично, $B_{ab}^c = \alpha_{[a} \delta^c_{b]}$, где $\alpha_a = -2B_{ha}^h$. Итак,

$$B^{ab}_c = \alpha^{[a} \delta^{b]}_c, \quad B_{ab}^c = \alpha_{[a} \delta^c_{b]}. \quad (24)$$

Свернем это соотношение по индексам b и c :

$$\alpha^a = 2B^{ac}_c, \quad \alpha_a = 2B_{ac}^c. \quad (25)$$

С учетом (9) и (5₃) получим:

$$\alpha^a = i^3 \sum_{c=1}^2 \varepsilon(c) J_{\hat{c},c}^a = i^3 J_{\hat{b},c}^a g^{\hat{b}c} = i^3 J_{j,k}^a g^{jk}.$$

С другой стороны, по определению имеем: $\Omega(X, Y) = \langle J^3 X, Y \rangle = \alpha \langle JX, Y \rangle$, и значит, $\nabla_Z (\Omega)(X, Y) = \alpha \langle \nabla_Z (J)X, Y \rangle$, откуда $\Omega_{ij,k} = \alpha J_{i,k}^r g_{rj}$ или

$$\Omega_{ij,k} = -\alpha g_{ir} J_{j,k}^r.$$

Следовательно, $(\delta\Omega)_i = \Omega_{ij,k} g^{jk} = -\alpha g_{ir} g^{jk} J_{j,k}^r$, где δ – оператор кодифференцирования. В частности, на пространстве присоединенной G -структуры $(\delta\Omega)_{\hat{a}} = -\alpha g_{\hat{a}b} g^{jk} J_{j,k}^b = -i^2 \varepsilon(a) J_{j,k}^a g^{jk}$, и следовательно, с учетом (1)

$$(\delta\Omega \circ J)_{\hat{a}} = -i(\delta\Omega)_{\hat{a}} = \varepsilon(a) i^3 J_{j,k}^a g^{jk} = \varepsilon(a) \alpha^a = \alpha_{\hat{a}}.$$

Аналогично, $(\delta\Omega \circ J)_a = \alpha_a$ и, таким образом, функции $\{\alpha_a, \alpha_{\hat{a}}\}$ являются компонентами 1-формы $\omega = \delta\Omega \circ J$, называемой *формой Ли* многообразия. Тем самым доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Первая группа структурных уравнений обобщенной эрмитовой поверхности на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид*

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}_c \omega^c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b, \end{aligned}$$

причем виртуальные тензоры имеют строение $B^{ab}_c = \alpha^{[a} \delta^{b]}_c$, $B_{ab}^c = \alpha_{[a} \delta^c_{b]}$, где функции $\{\alpha_a, \alpha_{\hat{a}}\}$ на пространстве присоединенной G -структуры являются компонентами формы Ли эрмитовой поверхности.

Свернем (16) по индексам b и c . С учетом (25) получим:

$$\begin{aligned} d\alpha^a - \alpha^b \omega_b^a &= \alpha^a_h \omega^h + \alpha^{ah} \omega_h, \\ d\alpha_a - \alpha_b \omega_a^b &= \alpha_a^h \omega_h + \alpha_{ah} \omega^h. \end{aligned} \quad (26)$$

Дифференцируя с учетом (16) и (26) соотношения (24), ввиду линейной независимости базисных форм получим:

$$\begin{aligned} 1) \quad B^{ab}_{cd} &= \alpha^{[a}_d \delta^{b]}_c, & 2) \quad B^{ab}_c{}^d &= \alpha^{[a|d|} \delta^{b]}_c, \\ 3) \quad B_{ab}{}^{cd} &= \alpha_{[a}{}^d \delta^{c]}_b, & 4) \quad B_{ab}{}^c{}_d &= \alpha_{[a|d|} \delta^{c]}_b. \end{aligned} \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Непосредственно проверяется, что поскольку комплексная размерность обобщенной эрмитовой поверхности равна двум, из соотношений (27₁) и (27₃) вытекает, что

$$B^{ad}_{[bc]} = -\frac{1}{4}\alpha^h{}_h \delta^{ad}_{bc}, \quad B_{bc}{}^{[ad]} = -\frac{1}{4}\alpha^h{}_h \delta^{ad}_{bc},$$

где $\delta^{ad}_{bc} = \delta^a_b \delta^d_c - \delta^a_c \delta^d_b$.

Автодуальные обобщенные эрмитовы поверхности. Пусть M – автодуальная обобщенная эрмитова поверхность. В этом случае

$$W(\theta) = 0 \quad (\theta \in \Lambda_-(M)), \quad \text{т.е.} \quad W_{ijcd}\theta^{cd} + 2W_{ijc\hat{d}}\theta^{c\hat{d}} + W_{ij\hat{c}\hat{d}}\theta^{\hat{c}\hat{d}} = 0.$$

С учетом леммы 1 эти соотношения переписутся в виде

$$iyW_{ij1\hat{1}} - \alpha(x + iz)W_{ij1\hat{2}} + \alpha(x - iz)W_{ij2\hat{1}} + i\alpha yW_{ij2\hat{2}} = 0.$$

Поскольку эти соотношения должны выполняться тождественно относительно формы θ , они равносильны соотношениям

$$W_{ij1\hat{1}} + \alpha W_{ij2\hat{2}} = 0, \quad W_{ij1\hat{2}} = W_{ij2\hat{1}} = 0,$$

которые с учетом (1) и свойств симметрии тензора W можно переписать в форме $W^1{}_{1ij} = W^2{}_{2ij}$, $W^1{}_{2ij} = W^2{}_{1ij} = 0$, т.е.

$$W^a{}_{bij} = W_{ij}\delta^a_b, \quad \text{где} \quad W_{ij} = \frac{1}{2}W^h{}_{hij}. \quad (28)$$

В частности, с учетом (23₂) $W_{cd} = \frac{1}{2}W^h{}_{hcd} = A^h{}_{hcd}$. Следовательно, $W_{cd} = A^h{}_{hcd} = \frac{1}{2}(B_{cd}{}^r B_{rh}{}^h - B_{cd}{}^h{}_h)$. Прямой подсчет с учетом (24) и (27) показывает, что $W_{cd} = -\frac{1}{2}\alpha_{[cd]}$, и значит,

$$W^a{}_{bcd} = -\frac{1}{2}\alpha_{[cd]}\delta^a_b. \quad (29)$$

С учетом (23₂) очевидно, что это соотношение равносильно

$$A^a{}_{bcd} = -\frac{1}{4}\alpha_{[cd]}\delta^a_b + \frac{1}{2}r_{b[c}\delta^a_{d]}. \quad (30)$$

Заметим, что с учетом (1) непосредственно проверяется, что тождество $r_{cd} = 0$ равносильно тому, что эндоморфизм Риччи коммутирует со структурным эндоморфизмом J и, таким образом, мы получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Эндоморфизм Риччи обобщенной эрмитовой поверхности J -линееен тогда и только тогда, когда

$$r_{cd} = 0. \quad (31)$$

Далее, из (28) вытекает, что $W^a{}_{bc}{}^d = W_c{}^d \delta_b^a$, где с учетом (23₄)

$$\begin{aligned} 2W_c{}^d &= W^h{}_{hc}{}^d = A_{hc}^{hd} - B^{hr}{}_c B_{hr}{}^d + \frac{1}{2}(r_c^h \delta_h^d + r_h^d \delta_c^h) - \frac{\varkappa}{6} \delta_c^h \delta_h^d \\ &= A_{hc}^{hd} + B^{hr}{}_c B_{hr}{}^d + r_c^d - \frac{\varkappa}{6} \delta_c^d. \end{aligned}$$

Используя (22), получим отсюда, что $2W_c{}^d = 4B^{hd}{}_{[hc]} - \frac{\varkappa}{6} \delta_c^d$. С учетом замечания 4 $B^{hd}{}_{[hc]} = -\frac{1}{4} \alpha^h{}_h \delta_h^d$, и следовательно, $W_c{}^d = -\frac{1}{12} (6\alpha^h{}_h + \varkappa) \delta_c^d$, откуда

$$W^a{}_{bc}{}^d = -\frac{1}{12} (6\alpha^h{}_h + \varkappa) \delta_b^a \delta_c^d. \quad (32)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ввиду вещественности и свойств симметрии тензора W имеем: $\overline{W}^a{}_{bc}{}^d = \varepsilon(a, b, c, d) W^b{}_{ad}{}^c$ и в силу (32) $\overline{\alpha}^h{}_h = \alpha^h{}_h$. Но поскольку $\overline{\alpha}^h{}_h = \alpha^h{}_h$,

$$\alpha^h{}_h = \alpha_h{}^h = \alpha_h^h.$$

Таким образом, $W^a{}_{bc}{}^d = -\frac{1}{12} (6\alpha^h{}_h + \varkappa) \delta_b^a \delta_c^d$. С учетом (23₄) отсюда следует, что

$$A_{bc}^{ad} = B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d - \frac{1}{2} (r_c^a \delta_b^d + r_b^d \delta_c^a) + \frac{\varkappa}{6} \delta_c^a \delta_b^d - \frac{1}{12} (6\alpha^h{}_h + \varkappa) \delta_b^a \delta_c^d. \quad (33)$$

Заметим, что альтернируя это соотношение по индексам b и c , с учетом (17₅) получим, что $B^{ad}{}_{[bc]} = -r_{[b}^a \delta_{c]}^d - \frac{1}{8} (2\alpha^h{}_h - \varkappa) \delta_{bc}^{ad}$. С другой стороны, непосредственная проверка с учетом комплексной двумерности многообразия показывает, что

$$r_b^a \delta_c^d + r_c^d \delta_b^a - r_c^a \delta_b^d - r_b^d \delta_c^a = \frac{\varkappa}{2} \delta_{bc}^{ad}, \quad (34)$$

и следовательно, $B^{ad}{}_{[bc]} = -\frac{1}{4} \alpha^h{}_h \delta_{bc}^{ad}$, что, впрочем, вытекает также из замечания 4. Далее, с учетом (17₅) и (33) имеем:

$$\begin{aligned} A_{bc}^{ad} &= A_{[bc]}^{ad} + A_{(bc)}^{ad} = B^{ad}{}_{[bc]} + B^{ah}{}_b B_{c]h}{}^d - B^{ah}{}_c B_{b]h}{}^d \\ &\quad - r_{(c}^a \delta_{b)}^d + \frac{\varkappa}{12} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} - \frac{1}{24} (6\alpha^h{}_h - \varkappa) \tilde{\delta}_{bc}^{ad}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d$, или, после очевидных упрощений,

$$A_{bc}^{ad} = B^{ad}{}_{[bc]} + B^{ah}{}_c B_{bh}{}^d - r_{(b}^a \delta_{c)}^d - \frac{1}{24} (6\alpha^h{}_h - \varkappa) \tilde{\delta}_{bc}^{ad}. \quad (35)$$

Заметим, что эту формулу с учетом замечания 4 можно переписать в форме

$$A_{bc}^{ad} = B^{ah}{}_c B_{bh}{}^d - r_{(b}^a \delta_{c)}^d - \frac{1}{2} \alpha^h{}_h \delta_b^a \delta_c^d + \frac{\varkappa}{24} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}. \quad (36)$$

Заметим также, что в силу (24)

$$B^{ah}{}_c B_{bh}{}^d = \frac{1}{4} \left(\alpha^a \alpha_c \delta_b^d - \alpha^a \alpha_b \delta_c^d - \frac{1}{2} \|\omega\|^2 \delta_c^a \delta_b^d + \alpha^d \alpha_b \delta_c^a \right). \quad (37)$$

Обратно, если имеет место соотношение (36), то непосредственный подсчет с учетом (23₄) показывает, что $W^a{}_{dc}{}^d = -\frac{1}{12} (6\alpha^h{}_h + \varkappa) \delta_b^a \delta_c^d$, и, таким образом, (32) эквивалентно (36). Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенная эрмитова поверхность автодуальна тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} 1) \quad A_{bcd}^a &= -\frac{1}{4}\alpha_{[cd]}\delta_b^a + \frac{1}{2}r_{b[c}\delta_{d]}^a, \\ 2) \quad A_{bc}^{ad} &= B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d - r_{(b}^{(a}\delta_{c)}^d - \frac{1}{2}\alpha_h^h \delta_b^a \delta_c^d + \frac{\kappa}{24}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. С учетом (22), (24) и (27) нетрудно проверить, что для обобщенных эрмитовых поверхностей

$$r_{ab} = -\frac{1}{2}(\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + \alpha_a \alpha_b),$$

а следовательно, комплексная линейность тензора Риччи, т.е. соотношение (31), равносильна равенству $\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + \alpha_a \alpha_b = 0$.

Обобщенные эрмитовы поверхности с J -инвариантным тензором кривизны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $GA\mathcal{H}$ -многообразие называется RK -многообразием, если его тензор Римана–Кристоффеля инвариантен относительно структурного эндоморфизма, т.е.

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)JZ, JW \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M). \quad (38)$$

Это понятие обобщает соответствующее понятие классической эрмитовой геометрии [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Обобщенная эрмитова поверхность является RK -многообразием тогда и только тогда, когда*

$$\alpha_{ab} = -\frac{1}{2}\alpha_a \alpha_b. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что условие (38), записанное на пространстве присоединенной G -структуры, примет вид $R_{\hat{a}bcd} = 0$ или в силу (18₁) $A_{bcd}^a = 0$. Принимая во внимание (21), перепишем его в виде $B_{cd}{}^a{}_b = B_{cd}{}^h{}_b B_{hb}{}^a$ или с учетом (24) и (27)

$$\alpha_{bc}\delta_d^a - \alpha_{dc}\delta_b^a = -\frac{1}{2}(\alpha_b \alpha_c \delta_d^a - \alpha_d \alpha_c \delta_b^a). \quad (40)$$

Свертывая по индексам a и d , получим, что $\alpha_{bc} = -\frac{1}{2}\alpha_b \alpha_c$. Обратно, если верно это равенство, то, очевидно, справедливо (40), а значит, $A_{bcd}^a = 0$, т.е. эрмитова поверхность является RK -многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Поскольку $\{\alpha_a, \alpha_{\hat{a}}\}$ – компоненты 1-формы (формы Ли), они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\alpha_i + \alpha_j \omega_i^j = \alpha_{i,j} \omega^j,$$

где $\{\alpha_{i,j}\}$ – компоненты тензора $\nabla\omega$. В частности,

$$d\alpha_a + \alpha_b \omega_a^b + \alpha_{\hat{b}} \omega^{\hat{b}} = \alpha_{a,b} \omega^b + \alpha_{a,\hat{b}} \omega^{\hat{b}}.$$

В силу (26) и замечания 3 эти соотношения можно переписать в форме

$$\alpha_{ab} \omega^b + \alpha_{a\hat{b}} \omega^{\hat{b}} + \alpha^b B_{ba}{}^c \omega_c = \alpha_{a,b} \omega^b + \alpha_{a,\hat{b}} \omega^{\hat{b}}.$$

С учетом линейной независимости базисных форм получаем отсюда, что

$$1) \alpha_{ab} = \alpha_{a,b}, \quad 2) \alpha_a{}^b = -\alpha^c B_{ca}{}^b + \alpha_{a,\hat{c}}{}^{\hat{b}}. \quad (41)$$

С учетом этих соотношений имеем

$$\begin{aligned} \alpha_h^h &= -\alpha^c B_{ch}{}^h + \alpha_{h,\hat{c}}{}^{\hat{h}} = -\frac{1}{2} \alpha^c \alpha_c \delta_h^h + \frac{1}{2} \alpha^c \alpha_h \delta_c^h + \alpha_{h,\hat{c}}{}^{\hat{h}} \\ &= -\frac{1}{4} \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \alpha_{i,j} g^{ij} = -\frac{1}{4} \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \delta\omega. \end{aligned} \quad (42)$$

ЛЕММА 2. Внешний дифференциал формы Ли на обобщенной эрмитовой поверхности является антиавтотодуальной 2-формой тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$1) \alpha_{ab} = \alpha_{ba}, \quad 2) \alpha^h{}_h = \alpha_h{}^{\hat{h}}. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 2-форма $d\omega$ на обобщенной эрмитовой поверхности антиавтотодуальна тогда и только тогда, когда (с учетом ее вещественности)

$$1) (d\omega)_{ab} = 0, \quad 2) (d\omega)^h{}_h = 0.$$

Поскольку $d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} (\nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X)$, эти соотношения можно переписать в форме

$$1) \alpha_{a,b} = \alpha_{b,a}, \quad 2) \alpha^h{}_{,h} = \alpha_h{}^{\hat{h}}.$$

С учетом (41) эти соотношения, в свою очередь, равносильны (43).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Автотодуальная обобщенная эрмитова поверхность M является RK -многообразием тогда и только тогда, когда ее тензор Риччи J -линеен, а внешний дифференциал ее формы Ли является антиавтотодуальной формой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть M – RK -многообразие. Тогда в силу предложения 5 $\alpha_{ab} = -\frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b$. С учетом замечания 6 отсюда следует, что $r_{ab} = 0$, т.е. тензор Риччи многообразия M J -линеен. Кроме того, отсюда же следует первое из соотношений (43). Второе же из этих соотношений автоматически выполняется в силу замечания 5. С учетом леммы 2 заключаем, что форма $d\omega$ антиавтотуальна.

2) Обратно, если тензор Риччи многообразия M J -линеен, а форма $d\omega$ антиавтотуальна, то в силу (43₁) и замечания 6 заключаем, что имеет место соотношение (39), и значит, M является RK -многообразием.

Напомним [14], что (обобщенное) эрмитово многообразие называется *локально конформно-келеровым*, если его метрика локально допускает конформное преобразование в (обобщенную) келерову метрику (с тем же структурным оператором). Необходимым и достаточным условием локальной конформной келеровости многообразия является выполнение условий

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega, \quad d\omega = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Компактная автотуальная обобщенная эрмитова поверхность M с неизотропной 2-формой $d\omega$ (в частности, компактная автотуальная эрмитова поверхность) является RK -многообразием тогда и только тогда, когда M – локально конформно-келерово многообразие с J -линейным тензором Риччи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – компактная автотуальная обобщенная эрмитова поверхность с неизотропной 2-формой $d\omega$, являющаяся RK -многообразием. По предложению 6 тензор Риччи этого многообразия J -линеен, а 2-форма $d\omega$ антиавтотуальна, и значит,

$$(d\omega, d\omega) = \int_M d\omega \wedge (*d\omega) = - \int_M d\omega \wedge d\omega = - \int_M d(\omega \wedge d\omega) = 0$$

в силу классической теоремы Стокса. Ввиду неизотропности 2-формы $d\omega$ отсюда следует, что $d\omega = 0$, т.е. форма Ли многообразия замкнута, и значит, M – локально конформно-келерово многообразие. Обратное немедленно следует из предложения 6.

Обобщенные эрмитовы поверхности постоянной голоморфной секционной кривизны. Напомним [13], что *голоморфной секционной кривизной* почти эрмитова многообразия M в направлении вектора $X \in \mathfrak{X}(M)$ называется кривизна в двумерном направлении $X \wedge JX$. Почти эрмитово многообразие M называется *многообразием (точечно) постоянной голоморфной секционной кривизны c* , если

$$\langle R(X, JX)X, JX \rangle = c\|X\|^4, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Запишем это соотношение на пространстве присоединенной G -структуры:

$$(R_{\hat{a}bc\hat{d}} + cg_{\hat{a}b}g_{c\hat{d}})X^{\hat{a}}X^{\hat{d}}X^bX^d = 0.$$

Поскольку оно верно для любого $X \in \mathfrak{X}(M)$, оно равносильно соотношению $R^{(a)}_{(bc)^d} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}_{cd}^{ab}$. Если $M - G\mathcal{H}$ -многообразие, то с учетом (18₂)

$$A^{(ad)}_{(bc)} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad} + B^{h(a)}_{(cB_b)h}{}^d. \quad (44)$$

Заметим, что $A^{ad}_{bc} = A^{(ad)}_{(bc)} + A^{[ad]}_{(bc)} + A^{(ad)}_{[bc]} + A^{[ad]}_{[bc]} = A^{(ad)}_{(bc)} + A^{[ad]}_{(bc)} + A^{ad}_{[bc]}$. С учетом (17₅), (17₆) и (44) получаем:

$$\begin{aligned} A^{ad}_{bc} &= \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad} + B^{h(a)}_{(cB_b)h}{}^d - B_{h(b}{}^{[a}B^{d]h}{}_{c)} + B^{ad}_{[bc]} - B^{ha}_{[b}B_{c]h}{}^d \\ &= \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad} + B^{ha}{}_{h(b}{}^{(a}B^{d)h}{}_{c)} - B_{h(b}{}^{[a}B^{d]h}{}_{c)} + B^{ad}_{[bc]} - B^{ha}_{[b}B_{c]h}{}^d \\ &= \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad} + B_{h(b}{}^dB^{ah}{}_{c)} - B_{h[c}{}^dB^{ah}{}_{b]} + B^{ad}_{[bc]} \\ &= \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad} + B_{hb}{}^dB^{ah}{}_c + B^{ad}_{[bc]}. \end{aligned}$$

Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 4. *Обобщенное эрмитово многообразие является многообразием точно постоянной голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры выполняется соотношение*

$$A^{ad}_{bc} = B^{ad}_{[bc]} + B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d - \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}.$$

Пусть теперь M – автодуальная эрмитова поверхность точно постоянной голоморфной секционной кривизны с J -линейным тензором Риччи. С учетом формулы (35) и теоремы 4 для нее выполняется соотношение

$$r^{(a)}_{(b}\delta_c^d) = \frac{1}{24}(\varkappa - 6\alpha_h^h + 12c)\tilde{\delta}_{bc}^{ad}.$$

Свернем его по индексам d и c :

$$r^a_b = \frac{1}{8}(-6\alpha_h^h + 12c)\delta_b^a.$$

В свою очередь, сворачивая это соотношение по индексам a и b , получим, что

$$\varkappa = 6c - 3\alpha_h^h. \quad (45)$$

Поскольку в силу J -линейности тензора Риччи $r_{ab} = 0$, имеем отсюда $r^i_j = \frac{\varkappa}{4}\delta^i_j$, т.е. M – многообразие Эйнштейна.

Обратно, если автодуальная обобщенная эрмитова поверхность M является многообразием Эйнштейна, то с учетом (35) и соотношения $r^a_b = \frac{\varkappa}{4}\delta^a_b$ имеем:

$$\begin{aligned} A^{ad}_{bc} &= B^{ad}_{[bc]} + B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d - \frac{\varkappa}{4}\alpha^{(a)}_{(b}\delta_c^d) - \frac{1}{24}(6\alpha_h^h - \varkappa)\tilde{\delta}_{bc}^{ad} \\ &= B^{ad}_{[bc]} + B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d - \frac{1}{12}(3\alpha_h^h + \varkappa)\tilde{\delta}_{bc}^{ad}, \end{aligned}$$

и значит, M – многообразие точно постоянной голоморфной секционной кривизны $c = \frac{1}{6}(3\alpha_h^h + \varkappa)$. С учетом (42) мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Автодуальная обобщенная эрмитова поверхность является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда она является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны с J -линейным тензором Риччи. При этом*

$$c = \frac{\varkappa}{6} - \frac{1}{8}\|\omega\|^2 + \frac{1}{4}\delta\omega. \quad (46)$$

Этот результат существенно обобщает и усиливает известный результат Коды [6], утверждающий, что автодуальная эрмитова поверхность Эйнштейна является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны.

ТЕОРЕМА 6. *Компактная автодуальная эрмитова поверхность M точечно постоянной неотрицательной голоморфной секционной кривизны и неположительной скалярной кривизны локально голоморфно изометрична пространству $\mathbb{C}^2$, снабженному канонической келеровой структурой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ – вектор Ли, т.е. вектор, дуальный форме Ли, многообразия M . По определению $\delta\omega = \operatorname{div} \xi$ и в силу (46) $\operatorname{div} \xi = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{2}{3}\varkappa + 4c$. Поэтому если $\varkappa \leq 0$, $c \geq 0$, то $\operatorname{div} \xi \geq 0$. Следовательно, если M компактно, то

$$\int_M \operatorname{div} \xi \geq 0,$$

и в силу классической теоремы Грина $\operatorname{div} \xi = 0$, т.е. $\frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{2}{3}\varkappa + 4c = 0$, и значит, $\omega = \varkappa = c = 0$. В частности, M – 4-мерное келерово многообразие нулевой голоморфной секционной кривизны. Хорошо известно [13], что такое многообразие локально голоморфно изометрично пространству $\mathbb{C}^2$, снабженному канонической келеровой структурой.

Антиавтодуальные обобщенные эрмитовы поверхности. Пусть M – антиавтодуальная обобщенная эрмитова поверхность. В этом случае

$$W(\theta) = 0 \quad (\theta \in \Lambda_+(M)), \quad \text{т.е.} \quad W_{ijcd}\theta^{cd} + 2W_{ijc\hat{d}}\theta^{c\hat{d}} + W_{ij\hat{c}\hat{d}}\theta^{\hat{c}\hat{d}} = 0.$$

С учетом леммы 1 эти соотношения переписутся в виде

$$-\alpha(x + iz)W_{ij12} + iyW_{ij1\hat{1}} - i\alpha yW_{ij2\hat{2}} - \alpha(x - iz)W_{ij\hat{1}\hat{2}} = 0.$$

Поскольку эти соотношения должны выполняться тождественно относительно формы θ , они равносильны соотношениям

$$W_{ij12} = W_{ij\hat{1}\hat{2}} = 0, \quad W_{ij1\hat{1}} - \alpha W_{ij2\hat{2}} = 0.$$

В силу свойств симметрии тензора W эти соотношения можно переписать в форме

$$1) W_{abcd} = 0, \quad 2) W_{\hat{a}bcd} = 0, \quad 3) W_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0, \quad 4) W^h_{hcd} = 0. \quad (47)$$

Соотношение (47₁) совпадает с (23₁). Соотношение (47₂) в силу (23₂) равносильно соотношению

$$A_{bcd}^a = -\frac{1}{4}(r_{bd}\delta_c^a - r_{bc}\delta_d^a)$$

или с учетом (21) соотношению

$$B_{cd}{}^h B_{hb}^a - B_{cd}{}^a{}_b = -\frac{1}{2}(r_{bd}\delta_c^a - r_{bc}\delta_d^a).$$

Используя (24) и (27), после очевидных упрощений с учетом замечания 6 получим:

$$(\alpha_{bc} - \alpha_{cb})\delta_d^a = (\alpha_{bd} - \alpha_{db})\delta_c^a. \quad (48)$$

Свертывая это соотношение по индексам a и d , получим, что

$$\alpha_{bc} = \alpha_{cb}. \quad (49)$$

Обратно, если выполняется (49), то выполняется и (48), а значит, и (47₂).

Соотношение (47₃) в силу (23₃) равносильно соотношению

$$B^{ab}{}_{[cd]} = \frac{1}{4}(r_c^a\delta_d^b + r_d^b\delta_c^a - r_d^a\delta_c^b - r_c^b\delta_d^a) + \frac{\varkappa}{12}\delta_{dc}^{ab}$$

или с учетом замечания 4 и соотношения (34) равносильно соотношению

$$\alpha^h{}_h = -\frac{\varkappa}{6}.$$

В частности,

$$\alpha_h{}^h = \overline{\alpha}^h{}_h = \alpha^h{}_h = \alpha_h{}^h. \quad (50)$$

Соотношение (47₄) в силу (23₄) равносильно соотношению

$$A_{hc}^{hd} + B^{rh}{}_c B_{rh}{}^d + r_c^d - \frac{\varkappa}{6}\delta_c^d = 0. \quad (51)$$

С учетом (22) эти соотношения можно переписать в форме

$$4B^{hd}{}_{[hc]} - \frac{\varkappa}{6}\delta_c^d = 0,$$

и с учетом замечания 4

$$\alpha^h{}_h = -\frac{\varkappa}{6}.$$

Объединяя полученные данные, мы видим, что необходимым и достаточным условием антиавтодуальности обобщенной эрмитовой поверхности является выполнение соотношений

$$1) \alpha_{ab} = \alpha_{ba}, \quad 2) \varkappa = -6\alpha_h{}^h. \quad (52)$$

Заметим, что в силу (42) второе из этих соотношений равносильно соотношению

$$\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{\varkappa}{3}. \quad (53)$$

Из соотношений (52) с учетом леммы 2, соотношений (50) и (53) получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *Обобщенная эрмитова поверхность M антиавтотодуальна тогда и только тогда, когда*

- 1) *внешний дифференциал ее формы Ли ω является антиавтотодуальной 2-формой,*
- 2) $\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{\kappa}{3}.$

Этот результат существенно обобщает известный критерий Ито [9] антиавтотодуальности келеровых поверхностей, а также соответствующий результат одного из авторов для обобщенных келеровых поверхностей [10]. С помощью теоремы 7 нетрудно получить следующие результаты.

ТЕОРЕМА 8. *Компактная обобщенная эрмитова поверхность M с неизотропной 2-формой $d\omega$ (в частности, компактная эрмитова поверхность) антиавтотодуальна тогда и только тогда, когда*

- 1) *M — локально конформно-келерово многообразие,*
- 2) $\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{\kappa}{3}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — компактная антиавтотодуальная эрмитова поверхность. По теореме 7, 2-форма $d\omega$ антиавтотодуальна, и значит,

$$(d\omega, d\omega) = \int_M d\omega \wedge (*d\omega) = - \int_M d\omega \wedge d\omega = - \int_M d(\omega \wedge d\omega) = 0$$

в силу классической теоремы Стокса. Ввиду неизотропности 2-формы $d\omega$ отсюда следует, что $d\omega = 0$, т.е. форма Ли многообразия замкнута, и значит, M — локально конформно-келерово многообразие. Обратное немедленно следует из теоремы 7.

Этот результат существенно обобщает и проясняет известный критерий Коды антиавтотодуальности компактных эрмитовых поверхностей [6].

ТЕОРЕМА 9. *Компактная антиавтотодуальная эрмитова поверхность положительной скалярной кривизны является келеровым многообразием нулевой скалярной кривизны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вполне аналогично доказательству теоремы 6 с учетом соотношения (53).

ТЕОРЕМА 10. *Метрика компактной антиавтотодуальной эрмитовой поверхности локально конформна метрике нулевой скалярной кривизны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — компактная антиавтотодуальная эрмитова поверхность. По теореме 8 она является локально конформно-келеровым многообразием. Рассмотрим локальную келерову метрику на M , конформную исходной метрике. Поскольку свойство антиавтотодуальности инвариантно относительно конформных преобразований метрики, эта метрика антиавтотодуальна, а следовательно, в силу (53) ее скалярная кривизна равна нулю.

Паракелеровы обобщенные эрмитовы поверхности. Напомним, что почти эрмитово многообразие (M, J, g) называется *паракелеровым*, если для него выполняется *тождество Келера*

$$R(JX, JY) = R(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

С учетом классических свойств симметрии тензора R легко заметить, что это условие равносильно комплексной линейности операторов кривизны, т.е.

$$J \circ R(X, Y) = R(X, Y) \circ J, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (54)$$

Обобщая это понятие, введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $GA\mathcal{H}$ -многообразие называется *паракелеровым*, если его операторы кривизны J -линейны, т.е. выполняются соотношения (54).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Обобщенная эрмитова поверхность M является паракелеровым многообразием тогда и только тогда, когда*

- 1) M является RK -многообразием,
- 2) $\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственная проверка с учетом формулы (1) показывает, что условие (54) равносильно соотношениям $R_{ijab} = 0$ на пространстве при-соединенной G -структуры. Эти соотношения можно сгруппировать так:

$$1) R_{abcd} = 0, \quad 2) R_{\hat{a}bcd} = 0, \quad 3) R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0.$$

Первая группа этих соотношений выполняется автоматически в силу (20₁), вторая, как мы видели при доказательстве предложения 5, равносильна тому, что M является RK -многообразием, а третья в силу (20₂) и замечания 4 равносильна тому, что $\alpha_h^h = 0$, и в силу (42) она равносильна тому, что $\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Компактная паракелерова эрмитова поверхность является келеровым многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вполне аналогично доказательству теоремы 6.

С учетом теоремы 7 получаем также

СЛЕДСТВИЕ 2. *Антиавтотуальная обобщенная эрмитова поверхность является паракелеровым многообразием тогда и только тогда, когда она является RK -многообразием нулевой скалярной кривизны.*

Заметим, что в силу тождества (52₁), замечания 6 и предложения 5 справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Антиавтотуальная обобщенная эрмитова поверхность является RK -многообразием тогда и только тогда, когда ее тензор Риччи J -линеен.*

Форма Риччи обобщенных эрмитовых поверхностей. Пусть (M, J, g) – $GA\mathcal{H}$ -многообразие. Рассмотрим тензор

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{2} \langle (J^3 \circ r + r \circ J^3)X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

В случае, когда M – классическое почти эрмитово многообразие с J -линейным тензором Риччи, например, келерова многообразие, этот тензор вычисляется по формуле $\rho(X, Y) = \langle rX, JY \rangle$. В частности, в случае келерова многообразия он совпадает с классической формой Риччи [13]. Назовем его *формой Риччи* $GA\mathcal{H}$ -многообразия. Заметим, что на пространстве присоединенной G -структуры компоненты формы Риччи имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_{ab} &= \rho(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \frac{1}{2} \langle (J^3)_a^c r_c^h \varepsilon_h + (J^3)_a^{\hat{c}} r_{\hat{c}}^{\hat{h}} \varepsilon_{\hat{h}} + r_a^c (J^3)_c^h \varepsilon_h + r_a^{\hat{c}} (J^3)_{\hat{c}}^{\hat{h}} \varepsilon_{\hat{h}}, \varepsilon_b \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle i^3 r_a^h \varepsilon_h + i^3 r_a^{\hat{h}} \varepsilon_{\hat{h}} + i^3 r_a^h \varepsilon_h - i^3 r_a^{\hat{h}} \varepsilon_{\hat{h}}, \varepsilon_b \rangle = i^3 r_a^h \langle \varepsilon_h, \varepsilon_b \rangle = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, $\rho_{a\hat{b}} = \rho(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}) = i^3 r_a^h \langle \varepsilon_h, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle = i^3 \langle r_a^h \varepsilon_h, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle = i^3 r_{a\hat{b}}$. Кроме того, $\rho_{\hat{a}\hat{b}} = \bar{\rho}_{ab} = 0$, $\rho_{\hat{a}b} = -\rho_{b\hat{a}} = -i^3 r_{b\hat{a}}$. Следовательно, в локальной записи

$$\rho = 2i^3 r_a^h \omega^a \wedge \omega_b. \quad (55)$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть M – автодуальная обобщенная эрмитова поверхность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Форма Риччи многообразия M автодуальна,
- 2) M – многообразие Эйнштейна,
- 3) M – многообразие точечно постоянной голоморфной секционной кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность первого и второго утверждений непосредственно следует из леммы 1, предложения 4 (или формулы (29)) и соотношения (55). Эквивалентность второго и третьего утверждений составляет содержание теоремы 5.

ТЕОРЕМА 12. Обобщенная эрмитова поверхность является многообразием нулевой скалярной кривизны тогда и только тогда, когда ее форма Риччи антиавтодуальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из леммы 1 и соотношения (55).

Докажем в заключение следующую теорему.

ТЕОРЕМА 13. Антиавтодуальная обобщенная эрмитова поверхность точечно постоянной голоморфной секционной кривизны имеет автодуальную форму Риччи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – антиавтодуальная обобщенная эрмитова поверхность точечно постоянной голоморфной секционной кривизны c . В силу теоремы 5, замечания 4 и соотношения (52₂) для нее

$$A_{bc}^{ad} = \frac{\varkappa}{24} \delta_{bc}^{ad} + B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d - \frac{c}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

и значит,

$$A_{hc}^{hd} = \left(\frac{\varkappa}{24} - \frac{3c}{2} \right) \delta_c^d - B^{rh}{}_c B_{rh}{}^d.$$

С другой стороны, в силу (51)

$$A_{hc}^{hd} = -B^{rh}{}_c B_{rh}{}^d - r_c^d + \frac{\varkappa}{6} \delta_c^d.$$

Сравнивая эти соотношения, получаем, что

$$r_c^d = \left(\frac{\varkappa}{8} + \frac{3c}{2} \right) \delta_c^d.$$

Свернем это соотношение по индексам c и d : $\frac{\varkappa}{2} = \frac{\varkappa}{4} + 3c$, откуда $\varkappa = 12c$, и значит, $r_c^d = \frac{\varkappa}{4} \delta_c^d$. С учетом леммы 1 и (55) получаем, что форма Риччи многообразия M автодуальна.

С учетом предложения 8 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Антиавтодуальная обобщенная эрмитова поверхность точечно постоянной голоморфной секционной кривизны является многообразием Эйнштейна тогда и только тогда, когда она является RK -многообразием.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть M – антиавтодуальная обобщенная эрмитова поверхность точечно постоянной голоморфной секционной кривизны. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) M – паракелерово многообразие,
- 2) M – риччи-плоское многообразие,
- 3) M – многообразие нулевой скалярной кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2 предложения 7, M – паракелерово многообразие тогда и только тогда, когда M – RK -многообразие нулевой скалярной кривизны. С другой стороны, по только что доказанному M является многообразием Эйнштейна и, значит, условие $\varkappa = 0$ равносильно тому, что многообразие M риччи-плоско. Наконец, если M риччи-плоско, то, в частности, его тензор Риччи J -линеен, и по предложению 8, M является RK -многообразием. Согласно следствию 2 предложения 7 M – паракелерово многообразие.

Обобщенные многообразия Хопфа. Напомним, что эрмитово многообразие с параллельной формой Ли называется *обобщенным многообразием Хопфа*. Мы перенесем эту терминологию и на случай обобщенных эрмитовых многообразий. Обобщенные многообразия Хопфа играют важную роль при построении нелинейных сигма-моделей в квантовой теории поля, и их изучению посвящено значительное число работ (см., например, [14]).

Пусть M – $GA\mathcal{H}$ -многообразие. С учетом (42) мы видим, что условие $\nabla\omega = 0$ равносильно соотношениям

$$1) \alpha_{ab} = 0, \quad 2) \alpha_a{}^b = -\alpha^c B_{ca}{}^b.$$

В частности, для обобщенных эрмитовых поверхностей с учетом (24) эти соотношения примут вид

$$1) \alpha_{ab} = 0, \quad 2) \alpha_a{}^b = -\frac{1}{4}\|\omega\|^2 \delta_a^b + \frac{1}{2}\alpha^b \alpha_a. \quad (56)$$

Заметим, что поскольку форма Ли обобщенного многообразия Хопфа замкнута, условия антиавтотодуальности такой поверхности в силу теоремы 7 примут вид

$$\delta\omega = \frac{1}{2}\|\omega\|^2 - \frac{\varkappa}{3}.$$

С другой стороны, параллельность формы Ли влечет ее козамкнутость, в силу чего справедлива

ТЕОРЕМА 14. *Обобщенная эрмитова поверхность, являющаяся обобщенным многообразием Хопфа, антиавтотодуальна тогда и только тогда, когда*

$$\varkappa = \frac{3}{2}\|\omega\|^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Связная антиавтотодуальная обобщенная эрмитова поверхность, являющаяся обобщенным многообразием Хопфа, является многообразием постоянной скалярной кривизны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – векторное поле на таком многообразии. Тогда

$$d\varkappa(X) = X(\varkappa) = \frac{3}{2}X(\|\omega\|^2) = \frac{3}{2}X(\langle\omega, \omega\rangle) = 3\langle\nabla_X \omega, \omega\rangle = 0.$$

Следовательно, $d\varkappa = 0$, т.е. $\varkappa = \text{const.}$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Связная антиавтодуальная эрмитова поверхность M , являющаяся обобщенным многообразием Хопфа, является многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом ее скалярная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда M – келерово многообразие.*

Пусть теперь M – автодуальная обобщенная эрмитова поверхность, являющаяся обобщенным многообразием Хопфа. В силу теоремы 2 и соотношения (41₁) в этом случае $A_{bcd}^a = \frac{1}{2}r_{b[c}\delta_{d]}^a$ и в силу (21) и (56₁) $B_{cd}{}^h B_{hb}{}^a = r_{b[c}\delta_{d]}^a$. После упрощений с учетом (24) и (27) находим, что $\alpha_b \alpha_{[d}\delta_{c]}^a = 2r_{b[c}\delta_{d]}^a$. Свертывая это соотношение по индексам a и d , получим, что $r_{bc} = -\frac{1}{2}\alpha_b \alpha_c$. В частности, если M – RK -многообразие, то в силу предложения 8 $r_{bc} = 0$, и значит, $\alpha_b \alpha_c = 0$. Следовательно, $\alpha_c = 0$, $a^c = \bar{a}_c = 0$, т.е. $\omega = 0$, и значит, M – келерово многообразие. Поскольку оно автодуально, в силу теоремы 2 в [10] имеем:

$$A_{bc}^{ad} = t_{(b}^{(a}\delta_{c)}^d), \quad \text{где} \quad t_b^a = -r_b^a + \frac{\varkappa}{12}\delta_b^a.$$

Обратно, если M – 4-мерное келерово многообразие, для которого выполнено это соотношение, то в силу той же теоремы M автодуально. Доказана

ТЕОРЕМА 15. *Обобщенная эрмитова RK -поверхность M , являющаяся обобщенным многообразием Хопфа, автодуальна тогда и только тогда, когда*

$$A_{bc}^{ad} = t_{(b}^{(a}\delta_{c)}^d),$$

где с необходимостью $t_b^a = -r_b^a + \frac{\varkappa}{12}\delta_b^a$.

Следуя [10], назовем обобщенную эрмитову поверхность *неисключительной*, если ее эндоморфизм Риччи имеет по крайней мере один неизотропный собственный вектор в каждой ее точке. Примером такой поверхности, очевидно, является произвольная эрмитова поверхность. С учетом [10, теорема 3] получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякая автодуальная неисклнучительная обобщенная эрмитова RK -поверхность, являющаяся обобщенным многообразием Хопфа постоянной скалярной кривизны, локально голоморфно изометрична одному из следующих многообразий:*

- 1) комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$,
- 2) комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$,
- 3) комплексной гиперболической плоскости $\mathbb{C}H^2$,
- 4) двойному евклидову пространству $\mathbb{R}^2 \boxtimes \mathbb{R}^2$,
- 5) пространству нуль-пар $\mathbb{R}P^2 \boxtimes \mathbb{R}P^2$ вещественной проективной плоскости,
- 6) многообразию $S_\lambda^2 \times S_{-\lambda}^2$,

снабженных канонической келеровой структурой классического либо, соответственно, гиперболического типа. Здесь S_μ^2 обозначает двумерное многообразие постоянной кривизны μ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Автодуальная эрмитова RK -поверхность, являющаяся обобщенным многообразием Хопфа постоянной скалярной кривизны, локально голоморфно изометрична одному из следующих многообразий:

$$1) \mathbb{C}^2, \quad 2) \mathbb{C}P^2, \quad 3) \mathbb{C}H^2, \quad 4) S_\lambda^2 \times S_{-\lambda}^2,$$

снабженных канонической келеровой структурой.

СЛЕДСТВИЕ 3. Компактная автодуальная эрмитова RK -поверхность, являющаяся обобщенным многообразием Хопфа, голоморфно изометрично накрывается одним из следующих многообразий:

$$1) \mathbb{C}^2, \quad 2) \mathbb{C}P^2, \quad 3) \mathbb{C}H^2, \quad 4) S_\lambda^2 \times S_{-\lambda}^2,$$

снабженных канонической келеровой структурой.

Этот результат дает полное решение проблемы Чена в классе компактных автодуальных эрмитовых RK -поверхностей, являющихся обобщенными многообразиями Хопфа.

Список литературы

1. Tricerri F., Vaisman I. On some 2-dimensional Hermitian manifolds // Math. Z. 1986. V. 192. P. 205–216.
2. Vaisman I. Some curvature properties of complex surfaces // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1982. V. 32. P. 1–18.
3. De Andres L. C., Cordero L. A., Fernandes M., Mencia J. J. Examples of four-dimensional compact locally conformal Kaehler solvmanifolds // Geom. Dedicata. 1989. V. 29. №2. P. 227–232.
4. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1978. V. 362. P. 425–461.
5. Chen B. Y. Some topological obstructions to Bochner–Kaehler metrics and their applications // J. Differential Geom. 1978. V. 13. P. 547–558.
6. Koda T. Self-dual and anti-self-dual Hermitian surfaces // Kodai Math. J. 1987. V. 10. P. 335–342.
7. Bourguignon J.-P. Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein // Invent. Math. 1981. V. 63. P. 263–286.
8. Derdzinski A. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four // Compos. Math. 1983. V. 49. P. 405–433.
9. Itoh M. Self-duality of Kähler surfaces // Compos. Math. 1984. V. 51. P. 265–273.
10. Арсеньева О. Е. Автодуальная геометрия обобщенных келеровых многообразий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 137–148.
11. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–72.
12. Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with J -invariant Riemann curvature tensor // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. 1975–1976. V. 34. P. 487–498.
13. Кобаяши Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2: Мир, 1980.
14. Vaisman I. Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form // Rend. Mat. (6). 1979. V. 12. № 2. P. 263–284.