Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Багдасаров, Максимизация функционалов в $H^\omega[a, b]$, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 2, 3–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:52:22

УДК 517.988

С. К. Багдасаров

Максимизация функционалов в $H^\omega[a, b]$

В данной статье мы охарактеризуем структуру и опишем свойства экстремальных функций, задачи

$$\int_a^b h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b],$$

где ψ – интегрируемая функция с нулевым средним и конечным множеством точек перемены знака на $[a, b]$, $H^\omega[a, b]$ – класс абсолютно непрерывных функций на $[a, b]$, чей модуль непрерывности мажорируется данным выпуклым модулем непрерывности ω .

Библиография: 48 названия.

§ 0. Введение в теорию классов $W^r H^\omega(\mathbb{I})$

0.1. Введение. В диссертации Д. Джексона [1], ознаменовавшей собой начало нового этапа в теории приближений, впервые погрешность *индивидуальной* функции $f \in C^r[a, b]$ конечномерными подпространствами была выражена в терминах модуля непрерывности r -й производной $f^{(r)}$ (см. [2, гл. 6]). С. М. Никольский [3] предложил рассматривать *классы функций* $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ с модулем непрерывности $\omega(f^{(r)}; t)$, мажорируемым выпуклым модулем непрерывности ω . После этих публикаций возник широкий круг вопросов, связанных с наилучшими аппроксимативными характеристиками классов $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ и их периодических аналогов алгебраическими и тригонометрическими многочленами данной размерности, полиномиальными сплайнами и другими конечномерными функциональными подпространствами. Ввиду сравнительно простой структуры экстремальных функций наиболее законченные результаты в смысле достижения точных констант и совершенства используемых методов были получены в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ для *линейных* модулей непрерывности $\omega(t) = Kt$, т.е. в *соболевских классах* $KW_\infty^{r+1}(\mathbb{I})$. В случае нелинейного ω попытки полного решения экстремальных задач увенчались успехом, главным образом, в периодических аналогах $\widetilde{W^r H^\omega}$ классов $W^r H^\omega(\mathbb{I})$.

В теории экстремальных задач в соболевских классах исключительное место принадлежит *совершенным*, или *идеальным*, сплайнам степени r , т.е. функциям, чья r -я производная принимает чередующиеся значения 1 и -1 на соседних интервалах. К примеру, идеальные полиномиальные сплайны доставляют экстремум в таких проблемах теории приближений, как *задача наилучшей аппроксимации классов* $W_\infty^r(\mathbb{I})$ *подпространствами данной размерности*, или *задача о поперечниках*. Кроме того, *эйлеровы*, *чебышёвские* и *пинкусовские* совершенные

сплайны являются экстремальными в проблеме *строгих неравенств для норм промежуточных производных* функций из классов $W_\infty^r(\mathbb{I})$, где $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{I} = [0, 1]$, соответственно. Таким образом, дальнейший прогресс в получении точных результатов в теории экстремальных задач в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ невозможен без описания *аналогов* совершенных сплайнов в $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ для нелинейного ω .

Ставя перед собой задачу построения завершённой теории экстремальных проблем на классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$, в настоящей статье мы заложим *основы* этой теории – будет введено само понятие и установлены разнообразные структурные, предельные и экстремальные свойства *совершенных ω -сплайнов*. В заключение мы продемонстрируем приложения полученных результатов в решении одной из наиболее ярких проблем действительного анализа – колмогоровской задачи об экстремальных в точных неравенствах для норм промежуточных производных функций из $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ с ограниченной чебышёвской нормой.

0.2. Организация и структурное подразделение статьи. Во вступительном параграфе мы введем в рассмотрение классы $W^r H^\omega[a, b]$ и их периодические аналоги $\widetilde{W^r H^\omega}$ и упомянем некоторые результаты теории экстремальных задач в $\widetilde{W^r H^\omega}$ и соболевских классах $W_\infty^r(\mathbb{I})$. В §1 мы введем ключевое понятие V_n^0 -разбиения интервала $[a, b]$, в терминах которых будет охарактеризовано строение *совершенного ω -сплайна* $x_{\omega, \psi}$ – экстремали задачи максимизации

$$\int_a^b h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad (*)$$

где ψ – интегральное ядро с нулевым средним и конечным множеством точек перемены знака на отрезке $[a, b]$. Основной результат статьи, теорема X, и его следствия проясняют структурные и предельные свойства совершенных ω -сплайнов и дают количественное решение задачи (*) в терминах *экстремальных перестановок* ядра $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t) dt$. В §2 мы определим (ε, σ) - и ε -модификации интегральных ядер и приведем план доказательства теоремы X, приведенного в §3. Наконец, в §4 будет описана структура семейства *чебышёвских* и *золотарёвских* ω -сплайнов, экстремальных в колмогоровской задаче максимизации нормы промежуточной производной ограниченных функций из класса $W^r H^\omega(\mathbb{I})$.

В порядке убывания иерархии статья разбита на *параграфы*, *пункты* и *подпункты*. В нумерации параграфа X, пункта X.Y, подпункта X.Y.Z первая цифра обозначает номер параграфа, вторая – номер пункта, и третья – номер подпункта. Трёхзначная нумерация используется и для идентификации определений, замечаний и математических утверждений. Формулы *внутри* данного параграфа X нумеруются двумя цифрами (Y.i), обозначающими номер i формулы в X.Y. В случае ссылки на формулу *за пределами* данного параграфа используется соответствующая трёхзначная метка.

0.3. Совершенные сплайны в соболевских классах $W_\infty^r(\mathbb{I})$ и $\widetilde{W}_\infty^r$. Для $r \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} W_\infty^r(\mathbb{I}) &:= \{f \in \mathbb{AC}^{r-1}(\mathbb{I}) : \|f^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \leq 1\}, \\ \widetilde{W}_\infty^r &:= \{f \in W_\infty^r(\mathbb{R}) : f(t) = f(t + 2\pi) \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

В теории экстремальных задач в соболевских классах $W_\infty^r(\mathbb{I})$ и $\widetilde{W}_\infty^r$ исключительная роль принадлежит *совершенным сплайнам*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3.1. Пусть $r, n \in \mathbb{Z}_+$. Функция $T(x)$ называется *совершенным сплайном степени r с узлами $\{t_i\}_{i=1}^n$* , $-\infty =: t_0 < \dots < t_n < t_{n+1} := +\infty$, если для некоторого $K \neq 0$

$$T(x) = \frac{Kx^r}{r!} + \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i + \frac{2K}{r!} \sum_{i=1}^n (-1)^i (x - t_i)_+^r, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Совершенные сплайны $T(x)$ выделяются среди других функций класса $KW_\infty^r(\mathbb{I})$ тем свойством, что их r -я производная альтернирует между значениями K и $-K$ на последовательных промежутках (t_i, t_{i+1}) , $i = 0, \dots, n$.

Мы упомянем наиболее яркие проблемы в $W_\infty^r(\mathbb{I})$ и $\widetilde{W}_\infty^r$, в которых совершенные сплайны возникают в качестве экстремальных функций.

А. Н. Колмогоров [4] предложил использовать следующую характеристику аппроксимации данного класса функций конечномерными подпространствами данной размерности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3.2. Пусть X — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$ и $C \subset X$ — уравновешенное множество в X ($x \in C \leftrightarrow -x \in C$). *Поперечники C в X* определяются следующим образом:

$$d_n(C; X) = \inf_{L_n} \sup_{x \in C} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|_X, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

где нижняя грань берется по всем n -мерным подпространствам L_n в X .

В 1969 году В. М. Тихомировым [5] (см. также [6]) были вычислены все поперечники $d_n(W_\infty^r[-1, 1]; C[-1, 1])$ и описаны экстремальные аппроксимативные конечномерные подпространства. При этом для каждого натурального $n \geq r$ были доказаны существование и единственность сплайна $T_{n,r}$ формы (3.1) с $n-r$ узлами $\{t_i = t_i(n, r)\}_{i=1}^{n-r}$ и полным набором точек альтернанса $\{x_i = x_i(n, r)\}_{i=0}^n$. Тогда для $n \geq r$ n -й поперечник класса $W_\infty^r[-1, 1]$ совпадает с нормой $\|T_{n,r}\|_{C[-1,1]}$, а оптимальный метод приближения линейен — интерполяция сплайнами степени $r-1$ с узлами $\{t_i\}_{i=1}^{n-r}$ в нулях $\{u_i = u_i(r, n)\}_{i=1}^n$ функции $T_{n,r}(x)$. Поскольку полином $T_{r,r}(x) = (2^{-r+1}/r!) \cos(r \arccos(x))$ совпадает с классическим многочленом Чебышёва, за функциями $\{T_{n,r}\}_{n \geq r}$ закрепилось название *чебышёвские сплайны*.

В разнообразных постановках задача о вычислении четных поперечников $d_{2n}(\widetilde{W}_\infty^r; \widetilde{L}_q)$ при $1 \leq q \leq \infty$ в *периодических L_q -классах* была решена Тихомировым [5], Рубаном [7], Лигуном [8], Маковозом [9] и Пинкусом [10]. Оказалось, что во всех этих случаях четные поперечники совпадают с L_q -нормой соответствующего эйлерова сплайна наибольшего отклонения от экстремальных сплайновых подпространств.

Мичелли и Пинкус [11] также вычислили поперечники $d_n(W_\infty^r; L_q)$, $1 \leq q < \infty$, непериодических соболевских классов в терминах L_q -нормы определенных совершенных сплайнов $\varphi_{n,r}(q)$ (см. [12]). Все доказательства перечисленных результатов и обширная библиография содержатся в гл. 6 монографии [12] и гл. 10 книги [2], а также в комментариях к этим главам.

В 1939 году Колмогоров [13] заложил фундамент нового направления в экстремальных задачах и классическом анализе – *теории неравенств для норм промежуточных производных* гладких функций на прямой и полупрямой. Первые результаты в тематике точных неравенств для норм производных типа

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbf{L}_q(\mathbb{I})} \leq K \|f\|_{\mathbf{L}_p(\mathbb{I})}^\alpha \|f^{(r)}\|_{\mathbf{L}_s(\mathbb{I})}^\beta \quad (3.3)$$

принадлежат Ландау [14] и Адамару [15], вычислившим точные константы в (3.3) в случаях $m = 1$, $r = 2$, $p = q = s = \infty$ для $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$. В конце тридцатых годов Шилов [16] нашел строгие неравенства (3.3) для $p = q = s = \infty$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $2 \leq r \leq 5$ и сформулировал гипотезу, оказавшуюся верной: *множеств экстремалей в неравенстве (3.3) для $p = q = s = \infty$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ исчерпывается периодическими функциями вида $f(t) = \gamma \varphi_{\lambda,r}(t + \rho)$, $\gamma, \rho \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$* , где

$$\varphi_{\lambda,r}(t) = \frac{4}{\pi \lambda^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin((2\nu+1)\lambda t - (\pi r)/2)}{(2\nu+1)^{r+1}} \quad (3.4)$$

– такая $2\pi/\lambda$ -периодическая функция, что $\varphi_{\lambda,r}^{(r)}(t) = \text{sign}(\lambda t)$.

Функции вида (3.4) фигурировали уже в работах Фавара [17], Ахиезера и Крейна [18] в тридцатые годы и даже в исследованиях Эйлера – недаром эти периодические функции часто называются *эйлеровыми сплайнами*. Колмогоров [13] в 1939 году дал полное решение задачи, подтверждающее гипотезу Шилова и дающее точные константы в неравенстве (3.3) в случае $p = q = s = \infty$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$:

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbb{R})} \leq c_{rm} \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbb{R})}^{1-m/r} \|f^{(r)}\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbb{R})}^{m/r}, \quad (3.5)$$

где

$$c_{rm} := \frac{K_{r-m}}{K_m^{1-m/r}}, \quad K_l := \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(l+1)}}{(2\nu+1)^{l+1}}, \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

известны как *константы Фавара*.

Качественное описание экстремальных функций в задаче

$$|f^{(m)}(0)| \rightarrow \sup, \quad f \in W_\infty^{r+1}(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbb{I})} \leq B, \quad (3.6)$$

для $0 < m \leq r$ в оставшихся случаях полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и отрезка $\mathbb{I} = [0, 1]$ было предложено Кавареттой и Шенбергом [19] (см. также [20]) и Карлиным [21], соответственно. Задача (3.6) для $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, $r = 2$ была решена разными методами Маториным [22] и Стечкиным [23]. Проблема характеристики экстремалей задачи

$$f^{(m)}(\xi) \rightarrow \sup, \quad f \in W_\infty^{r+1}[0, 1], \quad \|f\|_{C[0,1]} \leq B, \quad (3.7)$$

при $0 < m \leq r$ для внутренней точки $\xi \in (0, 1)$ нашла свое успешное разрешение в работе Пинкуса [24]. Проблемой максимизации промежуточной производной нормированных многочленов во внутренней точке отрезка занимался еще

Марков [25], а полное описание экстремальных золотарёвских (см. [26]) и чебышёвских многочленов принадлежит Вороновской [27] и Гусеву [28]. Наконец, Магарил-Ильяев [29] показал, что именно совершенные сплайны являются экстремальными в следующей, наиболее общей, задаче о точных колмогоровских неравенствах:

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \leq \mathcal{C}_{rm} \|f\|_{L_p(\mathbb{I})}^{\frac{r-m}{r+p-1}} \|f^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})}^{\frac{m+p-1}{r+p-1}}, \quad p \geq 1. \quad (3.8)$$

Разнообразные интерполяционные свойства, в частности, *основная теорема алгебры для совершенных сплайнов* и экстремальные свойства совершенных сплайнов освещены в статьях Пинкуса [24], Карлина [21], Мичелли, Ривлина и Винограда [30], а также в книгах Малоземова, Певного [6] и Тихомирова [31].

Особая роль полиномиальных совершенных сплайнов в теории соболевских классов $W_\infty^r[a, b]$ объясняется их экстремальностью в задаче

$$\int_a^b h^{(r-1)}(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in W_\infty^r[a, b], \quad h^{(r-1)}(a) = E \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

где ψ – некоторое интегральное ядро с конечным или монотонно упорядоченным счетным множеством точек перемены знака на $[a, b]$. При этом форма ядра $\psi(t)$ определяется типом экстремальной задачи в классе $W_\infty^r[a, b]$ (см., например, [20] или [32]). Действительно, используя тождество

$$\int_a^b h^{(r-1)}(t) \psi(t) dt = -\Psi(a) h^{(r-1)}(a) - \int_a^b h^{(r)}(t) \Psi(t) dt, \quad (3.10)$$

где $\Psi(x) = \int_b^x \psi(t) dt$, мы получаем формулу для r -й производной функции x^* , экстремальной в (3.9),

$$\frac{d^r}{dt^r} x^*(t) = -\operatorname{sign} \Psi(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (3.11)$$

и количественное выражение максимума в (3.9)

$$\sup_{h \in W_\infty^r[a, b]: h^{(r-1)}(a) = E} \int_a^b h^{(r-1)}(t) \psi(t) dt = \|\Psi\|_{L_1[a, b]} + E \int_a^b \psi(x) dx. \quad (3.12)$$

Таким образом, функция x^* – совершенный сплайн степени r .

ЗАМЕЧАНИЕ 0.3.1. Из формулы (3.11) следует, что генерирующие ядра Ψ_1 и Ψ_2 с одинаковыми множествами точек перемены знака порождают одну и ту же функцию $\frac{d^r}{dt^r} x^*(t)$ вне зависимости от их структуры на $[a, b]$. Эта, на первый взгляд несущественная, особенность совершенных сплайнов является причиной того, что разные задачи в соболевских классах могут иметь совпадающие множества экстремальных функций. К примеру, ни золотарёвские сплайны задачи (3.6), ни эйлеровы или чебышёвские сплайны колмогоровской задачи

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W_\infty^r(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \leq B, \quad 0 < m < r, \quad (3.13)$$

для $\mathbb{I} = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}_+$ не зависят от порядка производной m . Кроме того, каждый из чебышёвских сплайнов из задачи о поперечниках также является экстремальным золотарёвским сплайном задачи (3.6).

Во всех упоминавшихся проблемах рассматривались функциональные классы $KW_\infty^r(\mathbb{I})$, определяемые неравенством $\|f^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \leq K$, эквивалентным ограничению $\omega(f^{(r-1)}; t) \leq Kt$, $0 \leq t \leq |\mathbb{I}|$. В наших обобщениях мы рассмотрим классы функций, задаваемые неравенствами вида $\omega(f^{(l-1)}; t) \leq \omega(t)$ для произвольного *выпуклого модуля непрерывности* ω . Ограничения такого типа дают возможность не только контролировать верхнюю грань $f^{(l)}$, но и сохранять информацию о порядке роста функции $f^{(l-1)}$. Это наблюдение приводит нас к следующим *определениям* функциональных классов с общим мажорирующим модулем непрерывности и *постановкам* новых проблем.

0.4. Функциональные классы $W^r H^\omega(\mathbb{I})$. Нам понадобится ряд определений – модуля непрерывности $\omega(f; t)$ непрерывной функции f , выпуклого модуля непрерывности ω и классов $W^r H^\omega(\mathbb{I})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4.1. Для $f \in C[a, b]$ *модуль непрерывности* $\omega(f; \cdot)$ определяется на промежутке $[0, b-a]$ следующим образом:

$$\omega(f; t) = \sup_{|x-y| \leq t} |f(x) - f(y)|, \quad t \in [0, b-a]. \quad (4.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4.2. Функция $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *выпуклым модулем непрерывности*, если $\omega(0) = 0$ и для всех пар (t_1, t_2) : $0 \leq t_1 < t_2$, имеют место неравенства

$$\omega(t_1) \leq \omega(t_2), \quad \omega(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \geq \alpha \omega(t_1) + (1-\alpha)\omega(t_2) \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (4.2)$$

В случае строгой выпуклости и возрастания ω называется *строго выпуклым модулем непрерывности*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4.3. Для выпуклого модуля непрерывности ω *функциональные классы* $W^r H^\omega[a, b]$ и $\widetilde{W^r H^\omega}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} W^r H^\omega[a, b] &:= \{x \in \mathbb{A}\mathbb{C}^r[a, b] : \omega(x^{(r)}; t) \leq \omega(t), t \in [0, b-a]\}, \\ \widetilde{W^r H^\omega} &:= \{x \in W^r H^\omega(\mathbb{R}) : x(t+2\pi) = x(t), t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В случае $r = 0$ будет использоваться обозначение $H^\omega[a, b] := W^0 H^\omega[a, b]$.

За *гёльдеровскими классами*, определяемыми мажорирующими модулями непрерывности $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$, зарезервируем обозначение

$$W^r H^\alpha[a, b] := W^r H^{\omega_\alpha}[a, b], \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.4)$$

Как уже отмечалось, *соболевский класс* $W_\infty^{r+1}[a, b]$ совпадает с $W^r H^1[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.4.1. Вообще говоря, *модулем непрерывности* принято называть (см. [2]) любую заданную на $\mathbb{R}_+$ *непрерывную неубывающую полуаддитивную* ($\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2) \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2$) функцию $\omega(t)$, в нуле равную нулю. В данной работе имеется в виду именно *выпуклый* модуль непрерывности.

После выхода в свет работы [3] Никольского было опубликовано значительное число работ, посвященных аппроксимативным свойствам периодических классов $\widetilde{W^r H^\omega}$. В частности, был широко исследован круг вопросов, связанных с вычислением поперечников периодических классов $\widetilde{W^r H^\omega}$ в равномерной и интегральной метрике. Нечетные поперечники классов $\widetilde{W^r H^\omega}$ в равномерной метрике были найдены Корнейчуком [33], [34], а четные – Рубаном [35]. Лоренц [36, гл. 9] дал точную оценку поперечников $d_{2k-1}(\widetilde{W^r H^\omega}; C[-\pi, \pi])$, $k \in \mathbb{N}$, снизу, основанную на *лемме о поперечнике шара* (см. [5]). Точные оценки Моторного, Рубана [37] снизу и Корнейчука [38] сверху позволили вычислить значения поперечников класса $\widetilde{W^r H^\omega}$ в $L_1[-\pi, \pi]$. Экстремальные функции всех этих задач также фигурируют в задаче Моторного о наилучших квадратурных формулах на классах $\widetilde{W^r H^\omega}$ (см. [39]).

0.5. Лемма Корнейчука. Одним из ключевых элементов теории экстремальных классов в периодических классах $\widetilde{W^r H^\omega}$ является *лемма Корнейчука* о максимизации функционала

$$h \mapsto \int_a^b h(t)\psi(t) dt, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad (5.1)$$

где ψ – производная *простого ядра* Ψ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5.1. Функция $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t) dt$ называется *простым ядром*, если ее производная $\psi(\cdot) \in L_1[a, b]$ такова, что $\int_a^b \psi(x) dx = 0$ и для некоторых точек a', b' : $a < a' \leq b' < b$, свойства

$$\xi\psi(x) > 0, x \in [a, a']; \quad \psi(x) = 0, x \in [a', b']; \quad \xi\psi(x) < 0, x \in [b', b]; \quad (5.2)$$

выполняются почти всюду на упомянутых отрезках для $\xi \in \{\pm 1\}$.

В случае простого ядра Ψ уравнение $|\Psi(t)| = y$ для $y \in (0, \|\Psi\|_{C[a, b]})$ имеет в точности два решения: $\alpha_y \in (a, a')$ и $\beta_y \in (b', b)$ (см. рис. 0.5.1).

Корнейчук [40], [2] дал количественное решение задачи (5.1) в терминах *перестановки простого ядра* Ψ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5.2. С простым ядром Ψ на отрезке $[a, b]$ свяжем функцию $\rho: [a, (a' + b')/2] \rightarrow [(a' + b')/2, b]$, определяемую из уравнений

$$\begin{cases} \Psi(t) = \Psi(\rho(t)), & t \in [a, a'], \quad \rho(t) \in [b', b], \\ \rho(t) = a' + b' - t, & t \in [a', \frac{a' + b'}{2}]. \end{cases} \quad (5.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.5.1. Если ω – выпуклый модуль непрерывности, то

(i) в каждой точке $x > 0$ ω имеет односторонние производные

$$\omega'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\omega(x) - \omega(x-h)}{h}, \quad \omega'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\omega(x+h) - \omega(x)}{h};$$

(ii) функции ω'_+ и ω'_- не возрастают на $(0, +\infty)$ и $\omega'_+(x) \leq \omega'_-(x)$, $x > 0$;
 (iii) функция ω абсолютно непрерывна на $(0, +\infty)$.

Односторонние производные $\omega'_+(\cdot)$ и $\omega'_-(\cdot)$ позволяют выделить из эквивалентных классов суммируемых функций производную ω' , определенную всюду на $(0, +\infty)$:

$$\omega'(u) := \frac{1}{2}(\omega'_+(u) + \omega'_-(u)), \quad u > 0. \quad (5.5)$$

Экстремаль f_0 и величина верхней грани функционала (5.5) описываются в следующем результате (Корнейчук [2, лемма 7.4.1]).

ЛЕММА 0.5.2 (Корнейчука). Пусть $\Psi(t) := \int_a^t \psi(y) dy$ – простое ядро на $[a, b]$, и $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности. Тогда

$$M_\omega(\psi) := \sup_{f \in H^\omega[a, b]} \left| \int_a^b f(t) \psi(t) dt \right| = \int_0^{b-a} \Re(\Psi; t) \omega'(t) dt \quad (5.6)$$

и верхняя грань в (5.6) достигается на функциях $\mathcal{X} \cdot f_0(x) + D$, $D \in \mathbb{R}$, $\mathcal{X} \in \{\pm 1\}$, где производная $f_0(x)$ выражается формулой

$$\frac{d}{dx} f_0(x) = \begin{cases} \omega'(\rho(x) - x), & a \leq x \leq c, \\ \omega'(x - \rho^{-1}(x)), & c \leq x \leq b, \quad c := \frac{a' + b'}{2}, \end{cases} \quad (5.7)$$

а функция $\rho(x)$ определена в (5.3).

Отметим тот факт, что производная экстремали функционала (5.1) определена однозначно лишь на носителе $[a, a'] \cup [b', b]$ ядра ψ (график f_0 на рис. 0.5.1 изображен сплошной линией), на нуль-интервале (a', b') ядра ψ возможны различные продолжения f_0 .

Отметим одно экстремальное свойство функции f_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.5.3. Экстремальная функция f_0 имеет полный модуль непрерывности на интервале $[a, b]$:

$$\omega(f_0; t) = \omega(t), \quad 0 \leq t \leq b - a. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.7) для любого x : $0 \leq x \leq c := \frac{1}{2}(a' + b')$, мы имеем

$$\begin{aligned} f_0(\rho(x)) - f_0(x) &= \int_c^{\rho(x)} \omega'(t - \rho^{-1}(t)) dt - \int_c^x \omega'(\rho(u) - u) du \\ &= \int_c^x \omega'(\rho(u) - u)(\rho'(u) - 1) du \\ &= \int_c^x \omega'(\rho(u) - u) d(\rho(u) - u) = \omega(\rho(x) - x). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Остается заметить, что функция $\rho(t) - t$ возрастает от 0 до $b - a$, когда t убывает от c до 0.

Корнейчук [12] предложил определенный *фиксированный*, независимый от ω , метод разложения ядер Ψ с n точками перемены знака на $[a, b]$ на сумму $I(n) = O(n^2)$ простых ядер $\{\Phi_i\}_{i=1}^{I(n)}$. Идея *разбиения Корнейчука* проиллюстрирована на рис. 0.5.2.

Рис. 0.5.2. Разбиение ядра Ψ на сумму простых ядер

Интересно, что грубое неравенство

$$\int_a^b h(t) \Psi'(t) dt \leq \int_0^{b-a} \left(\sum_{i=1}^{I(n)} \Re(\Phi_i; t) \right) \omega'(t) dt \quad (5.10)$$

достаточно для получения строгих оценок поперечников $d_n(\widetilde{W^r H^\omega}; C[-\pi, \pi])$ (см. [38], [44]). Функция

$$\Phi(\Psi; t) := \sum_{i=1}^{I(n)} \Re(\Phi_i; t), \quad 0 \leq t \leq b - a, \quad (5.11)$$

в терминах которой получена оценка (5.10), была названа Корнейчуком Σ -*перестановкой* ядра Ψ . Оператор Σ -перестановки сохраняет и интегральную норму, и вариацию $\bigvee_a^b \Psi$ ядра $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t) dt$ в следующем смысле:

$$\|\Psi\|_{L_1[a, b]} = \|\Re(\Psi; \cdot)\|_{L_1[0, b-a]}, \quad \Re(\Psi; 0) = \frac{1}{2} \bigvee_a^b \Psi = \frac{1}{2} \|\psi\|_{L_1[a, b]}. \quad (5.12)$$

Отличный обзор дальнейших приложений аппарата Σ -перестановок и систематический обзор результатов в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ вплоть до 1985 года предложен Корнейчуком в статье [45], посвященной вкладу С. М. Никольского в теорию приближений.

0.6. Вспомогательные результаты. Доказательство основного результата статьи основано на приложении *теоремы Брауэра*.

ТЕОРЕМА 0.6.1. Пусть $\mathbb{S}^n = \{s = (s_1, \dots, s_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} s_i = 1\}$ — n -мерный симплекс, и $\eta(s) = (\eta_1(s), \dots, \eta_{n+1}(s))$ — непрерывное отображение из симплекса $\mathbb{S}^n$ в себя (другими словами, $\eta(s) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ и $\sum_{i=1}^{n+1} \eta_i(s) = 1$ для всех $s \in \mathbb{S}^n$). Тогда существует неподвижная точка $s^* \in \mathbb{S}^n$ отображения η , т.е. $\exists s^* \in \mathbb{S}^n$ такая, что $\eta(s^*) = s^*$.

Следующий результат также используется в доказательстве теоремы X.

ЛЕММА 0.6.2. Пусть $a \leq c < d \leq b$, ω — строго выпуклый модуль непрерывности, и функции $f_1 \in H^\omega[a, b]$, $f_2 \in H^\omega[c, d]$ обладают следующими свойствами:

- (i) $f_1(c) = f_2(c)$, $f_1(d) = f_2(d)$ и $f_1(x) \geq f_2(x)$, $x \in (c, d)$;
- (ii) производная $f_2'(x)$ определена в каждой точке на $[c, d]$, $f_2(x)$ и $f_2'(x)$ не возрастают на (c, d) .

Тогда функция

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in [a, c] \cup [d, b], \\ f_2(t), & t \in (c, d), \end{cases} \quad (6.1)$$

принадлежит классу $H^\omega[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x \in [c, d], \quad y \in [a, c] \cup [d, b]. \quad (6.2)$$

Случай 1: $x \in [c, d]$, $y \in [d, b]$. Поскольку $f_1(x) \geq f_2(x)$, $x \in [c, d]$, и $f_1(d) = f_2(d)$, существует такая точка $v = v_x$: $x \leq v \leq d$, что $f_1(v) = f_2(x)$. Тогда из неравенства $x \leq v$, включения $f_1 \in H^\omega[a, b]$ и (6.1) вытекает необходимая оценка

$$|f(x) - f(y)| = |f_2(x) - f_1(y)| = |f_1(v) - f_1(y)| \leq \omega(y - v) \leq \omega(y - x). \quad (6.3)$$

Случай 2: $x \in [c, d]$, $y \in [a, c]$. Предположим, что $f(x) - f(y) > \omega(x - y)$. Из свойства $f_1(x) \geq f_2(x)$, $x \in (c, d)$, получаем цепь неравенств

$$\omega(x - y) < f(x) - f(y) = f_2(x) - f_1(y) \leq f_1(x) - f_1(y),$$

противоречащую включению $f_1 \in H^\omega[a, b]$.

Если $f(x) - f(y) < -\omega(x - y)$, то существует такая точка $z \in [c, d]$, что

$$f(z) - f(y) = -\omega(z - y), \quad f'(z) < -\omega'(z - y), \quad (6.4)$$

где $f'(t) := f_2'(t)$, $t \in [c, d]$.

Положим $H(t) = f(y) - \omega(t - y)$, $t \in [y, b]$. В терминах H неравенства (6.4) эквивалентны соотношениям

$$f(z) = H(z), \quad f'(z) \leq H'(z). \quad (6.5)$$

Поскольку $H'(t) := -\omega'(t - y)$ возрастает на $[y, b]$, а $f'(t) := f_2'(t)$ не возрастает на $[z, d]$, из (6.5) и равенства $f_1(d) = f_2(d)$ вытекают неравенства

$$f'(t) < H'(t), \quad f(t) < H(t), \quad t \in (z, d]. \quad (6.6)$$

В частности, $f_1(d) - f_1(y) =: f(d) - f(y) \leq H(d) - f(y) := -\omega(d - y)$, что противоречит принадлежности функции f_1 классу $H^\omega[a, b]$.

§ 1. Теорема X и ее следствия

Зафиксируем интервал $[a, b]$, $-\infty < a < b \leq +\infty$. В данном параграфе мы опишем структуру экстремалей интегрального функционала

$$\int_a^b h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad (*)$$

для ядер $\psi \in L_1[a, b]$ с нулевым средним и конечным или счетным множеством точек перемены знака на конечном или бесконечном вправо интервале $[a, b]$. В последнем случае будет предполагаться, что точка b является пределом последовательности точек перемены знака ядра ψ . Повсюду в нашей статье мы будем называть эту проблему задачей (*).

1.1. Совершенные ω -сплайны.

1.1.1. Определения и обозначения. Мы будем придерживаться следующей терминологии.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.1.1. Пусть $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$: $N_1 < N_2$. Запись $\alpha \triangleright \xi \blacktriangleright \beta$ используется для обозначения наборов точек $\xi = \{\xi_i = \xi(i)\}_{i=N_1}^{N_2}$, наделенных свойствами

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi(N_1) \leq \xi(N_1 + 1) \leq \dots \leq \xi(N_2) = \beta, \quad \text{если } N_2 \in \mathbb{N}, \\ \alpha &= \xi(N_1), \quad \xi(i) \leq \xi(i + 1), \quad i \geq N_1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \xi(i) = \beta, \quad \text{если } N_2 = +\infty. \end{aligned}$$

Аналогично, $\alpha \blacktriangleleft \xi \triangleleft \beta$ при условии, что

$$\begin{aligned} \beta &= \xi(N_1) \geq \xi(N_1 - 1) \geq \dots \geq \xi(N_2) = \alpha, \quad \text{если } N_2 \in \mathbb{N}, \\ \beta &= \xi(N_1), \quad \xi(i) \geq \xi(i + 1), \quad i \geq N_1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \xi(i) = \alpha, \quad \text{если } N_2 = +\infty. \end{aligned}$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.1.2. Пусть $\Psi \in L_1[\alpha, \beta]$, $-\infty \leq \alpha < b \leq +\infty$. Для отражения того факта, что ψ *положительна* (*отрицательна*) почти всюду на (α, β) , используется обозначение $\text{sign}(\psi; [a, b]) = j$, $j = 1(-1)$:

$$\text{sign}(\psi; [a, b]) = j \iff \text{meas}\{x \in [a, b] : -j\psi(x) \geq 0\} = 0.$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.1.3. *Запись* $I = \square$ используется для обозначения интервала $I = [\gamma, \gamma]$ с пустой внутренностью.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.1.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Через $\mathcal{X}(E; t)$ обозначим функцию

$$\mathcal{X}(E; t) = \begin{cases} 1, & t \in E, \\ 0, & t \notin E, \end{cases} \quad (1.1)$$

которую в дальнейшем будем называть *индикатором подмножества* E .

Введем в рассмотрение *классы ядер без нуль-интервалов на* $[a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Пусть $j \in \{-1, 0, +1\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\psi \in \mathbf{L}_1[a, b]$. *Ядро* $\psi \in \mathbf{L}_1[a, b]$ *принадлежит классу* $\mathcal{M}_n^j[a, b]$ *при* $n \geq 2$ *тогда и только тогда, когда* $\text{sign} \int_a^b \psi(x) dx = j$ *и существует такой набор точек* $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=0}^n$, *что* $\alpha_{i-1} < \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, $a \triangleright \alpha \blacktriangleright b$ *и*

$$\text{sign}(\psi; [\alpha_{i-1}, \alpha_i]) = (-1)^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Набор $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ естественно назвать множеством *точек перемены знака* ядра $\psi \in \mathcal{M}_n^j[a, b]$. По определению

$$\mathcal{M}_1^l[a, b] := \emptyset, \quad l = 0, 1, \quad \mathcal{M}_1^{-1}[a, b] := \{\psi \in \mathbf{L}_1[a, b] : \text{sign}(\psi; [a, b]) = -1\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2. Пусть $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Наборы индексов* $\{J_i(N)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *и пар индексов* $\mathcal{P}(N)$ *определяются следующим образом.*

- (1) Для $N = 1, 2, 3$ $J_i(N) = L_i = \emptyset$, $i = 1, \dots, N$.
- (2) Для $N \geq 4$ $J_i(N) = \emptyset$, $i = N - 2, N - 1, N$; $L_i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3$;
 $J_i(N) = \{j = i + 1 + 2k, k \in \mathbb{N} : j \leq N\}$, $1 \leq i \leq N - 3$; $L_i = \{l = i - 1 - 2k, k \in \mathbb{N} : l \geq 1\}$, $4 \leq i \leq N$.
- (3) $\mathcal{P}(N) = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq i \leq N - 3, j \in J_i(N)\}$.

Структура экстремалей функционала (*) будет описана в терминах V_n^0 -разбиений интервала $[a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $j \in \{-1, 0, 1\}$. Разбиение

$$\mathcal{V} = (\{A_i, B_i, C_i\}_{i=1}^n; \{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(N)})$$

интервала $[a, b]$ на подынтервалы (атомы) назовем V_n^0 -*разбиением* при выполнении следующих требований:

- (A) $C_i = [\gamma_{3i-3}, \gamma_{3i-2}]$, $B_i = [\gamma_{3i-2}, \gamma_{3i-1}]$, $A_i = [\gamma_{3i-1}, \gamma_{3i}]$, $i = 1, \dots, n$, для такого набора $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=0}^{3n}$, что $a \triangleright \gamma \blacktriangleright b$;
- (B) $C_i = \square$, $i = 1, 2, 3$; $B_i = \square$, $i = n - 2, n - 1, n$;
- (C) $B_i = \bigcup_{j \in J_i(n)} B_{ij}$, $1 \leq i \leq n - 3$, где $B_{ij} = [\xi_i(\frac{j-i+1}{2}), \xi_i(\frac{j-i-1}{2})]$, $j \in J_i(n)$, для таких $\xi_i = \{\xi_i(k)\}_{k=1}^{|J_i(n)|}$, что $\gamma_{3i-2} \blacktriangleleft \xi_i \blacktriangleleft \gamma_{3i-1}$;
- (D) $C_i = \bigcup_{l \in L_i} C_{il}$, $4 \leq i \leq n$, где $C_{il} = [\varkappa_i(\frac{i-l-1}{2}), \varkappa_i(\frac{i-l+1}{2})]$, $l \in L_i$, для таких $\varkappa_i = \{\varkappa_i(k)\}_{k=1}^{|L_i|}$, что $\gamma_{3i-2} \triangleright \varkappa_i \blacktriangleright \gamma_{3i-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.1. Перечислим разбиения отрезка $[a, b]$ на подынтервалы $\{A_i, B_i, C_i\}_{i=1}^N$ V_N^0 -разбиения в их естественном порядке следования:

$$\begin{aligned} N=2: & A_1; \quad N=3: A_1 A_2; \quad N=4: B_1 A_1 A_2 A_3 C_4; \\ N=5: & B_1 A_1 B_2 A_2 A_3 C_4 A_4 C_5; \quad N=6: B_1 A_1 B_2 A_2 B_3 A_3 C_4 A_4 C_5 A_5 C_6; \\ N \geq 7: & B_1 A_1 B_2 A_2 B_3, \quad \{A_k C_{k+1} B_{k+1}\}_{k=3}^{N-4}, \quad A_{N-3} C_{N-2} A_{N-2} C_{N-1} A_{N-1} C_N. \end{aligned}$$

Рис. 1.1.1 проясняет строение типичного V_8^0 -разбиения.

РИС. 1.1.1. V_8^0 -разбиение

1.1.2. Формулировка основного результата. В данном пункте мы изложим решение проблемы максимизации

$$\int_a^b h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b],$$

для $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$. В теореме X мы покажем, что ядро $\Psi(t) = \int_a^t \psi(x) dx$ разложимо на сумму не более чем $L(n) = n^2/4$ (для четных n) или $L(n) = (n^2 - 1)/4$ (для нечетных n) простых ядер $\{\Phi_i(\cdot) = \Phi_i(\omega; \cdot)\}_{i=1}^{L(n)}$, наделенных свойствами:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \Psi(t) &= \sum_{i=1}^{L(n)} \Phi_i(t), \quad a \leq t \leq b; \\ \text{(ii)} \quad \sup_{h \in H^\omega[a, b]} \int_a^b h(t)\psi(t) dt &= \sum_{i=1}^{L(n)} \sup_{h \in H^\omega[a, b]} \int_a^b h(t)\Phi'_i(t) dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

ТЕОРЕМА X. Пусть $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$ и $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ — точки перемены знака ядра ψ . Существуют решение $x_{\omega, \psi}$ задачи (*) и V_n^0 -разбиение $\mathcal{V}(\omega, \psi)$ интервала $[a, b]$ со следующими свойствами:

- (A) $\alpha_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n-1$;
- (B) $\int_{B_{ij} \cup C_{ji}} \psi(t) dt = 0$, $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$;
- (C) $\int_{A_i} \psi(t) dt = 0$, $i = 1, \dots, n-1$;

(D) для всех пар $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$ функция $x_{\omega, \psi}$ экстремальна в задаче

$$\int_a^b h(t) \psi_{ij}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad (1.3)$$

$$\psi_{ij}(t) := \psi(t) \cdot \mathcal{X}(B_{ij} \cup C_{ji}; t), \quad t \in [a, b]; \quad (1.4)$$

(E) для всех $i = 1, \dots, n-1$ функция $x_{\omega, \psi}$ экстремальна в задаче

$$\int_a^b h(t) \psi_i(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad (1.5)$$

$$\psi_i(t) := \psi(t) \cdot \mathcal{X}(A_i; t), \quad t \in [a, b]. \quad (1.6)$$

1.2. Структурные особенности совершенных ω -сплайнов.

1.2.1. Формулы для совершенных ω -сплайнов. Включения $\alpha_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n-1$, и порядок атомов произвольного V_n^0 -разбиения в замечании 1.1.1 позволяют нам найти *знаковое распределение* ядра ψ на атомах экстремального разбиения $\mathcal{V}$:

$$\text{sign } \psi(t) = \begin{cases} (-1)^i & \text{на } \begin{cases} B_{ij}, & (i, j) \in \mathcal{P}(n), \\ [\gamma_{3i-1}, \alpha_i], & i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \\ (-1)^{i+1} & \text{на } \begin{cases} C_{ji}, & (i, j) \in \mathcal{P}(n), \\ [\alpha_i, \gamma_{3i}], & i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \end{cases} \quad (2.1)$$

где $[\gamma_{3i-1}, \gamma_{3i}] := A_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

Согласно (2.1) и утверждениям (B), (C) теоремы X каждое из ядер

$$\Psi_{ij}(t) = \int_a^t \psi_{ij}(y) dy, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n), \quad \Psi_i(t) = \int_a^t \psi_i(y) dy, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

является *простым* в смысле определения 0.5.1. Следовательно, для описания структуры экстремальных функций задач (1.3) и (1.5) можно воспользоваться формулой (0.5.7) леммы 0.5.2:

$$\frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1} \omega'(\rho_{ij}(t) - t), & t \in B_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n), \\ (-1)^{i+1} \omega'(t - \rho_{ij}^{-1}(t)), & t \in C_{ji}, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n), \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\rho_{ij}: B_{ij} \rightarrow C_{ji}$ определяются уравнениями

$$\Psi_{ij}(t) = \Psi_{ij}(\rho_{ij}(t)), \quad t \in B_{ij}, \quad \rho_{ij}(t) \in C_{ji}, \quad (2.4)$$

и

$$\frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1} \omega'(\rho_i(t) - t), & t \in [\gamma_{3i-1}, \alpha_i], \quad i = 1, \dots, n-1, \\ (-1)^{i+1} \omega'(t - \rho_i^{-1}(t)), & t \in [\alpha_i, \gamma_{3i}], \quad i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.5)$$

Рис. 1.2.1. V_5^0 -разбиение и график $x_{\omega, \psi}$ и Ψ для $\psi \in \mathcal{M}_5^0[a, b]$

где $\rho_i: [\gamma_{3i-1}, \alpha_i] \rightarrow [\alpha_i, \gamma_{3i}]$ определяются уравнениями

$$\Psi_i(t) = \Psi_i(\rho_i(t)), \quad t \in [\gamma_{3i-1}, \alpha_i], \quad \rho_i(t) \in [\alpha_i, \gamma_{3i}]. \quad (2.6)$$

Схематические графики функций $x_{\omega, \psi}$, $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$, и соответствующие V_n^0 -разбиения для различных значений n и j проиллюстрированы на рис. 1.2.1 ($n = 5$) и рис. 1.2.2 ($n = 6$), а также на рис. 1.2.4 ($n = 4$) в случае конкретного порождающего ядра ψ и $\omega(t) = t^{1/2}$.

 Рис. 1.2.2. V_6^0 -разбиение и график $x_{\omega, \psi}$ и Ψ для $\psi \in \mathcal{M}_6^0[a, b]$

1.2.2. Теорема единственности совершенных ω -сплайнов. Теорема единственности гарантирует однозначность решения задачи (*) с точностью до аддитивной постоянной.

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть ядро ψ удовлетворяет условиям теоремы X. Производная экстремальной функции задачи (*) и V_n^0 -разбиение со свойствами, сформулированными в теореме X, единственны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения и определения теоремы X. Поскольку внутренности носителей ядер $\{\psi_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^{n-1}$ не

пересекаются, для любой функции $f \in H^\omega[a, b]$ верно равенство

$$\int_a^b f(t)\psi(t) dt = \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)} \int_a^b f(t)\psi_{ij}(t) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{A_i} f(t)\psi_i(t) dt. \quad (2.7)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H^\omega[a, b]} \int_a^b f(t)\psi(t) dt \\ & \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)} \sup_{f \in H^\omega[a, b]} \int_a^b f(t)\psi_{ij}(t) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{f \in H^\omega[a, b]} \int_{A_i} f(t)\psi_i(t) dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Равенство в (2.8) для функции $f \in H^\omega[a, b]$ имеет место тогда и только тогда, когда f экстремальна в задачах (1.3) и (1.5). Согласно лемме 0.5.2 Корнейчука производная экстремальной функции в задачах (1.3) и (1.5) *однозначно* определяется на интервалах $\{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ и $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ формулами (2.3), (2.4) и (2.5), (2.6), соответственно.

Повсюду в нашей работе V_n^0 -разбиение $\mathcal{V}(\omega, \psi)$ из теоремы X будет называться *экстремальным V_n^0 -разбиением задачи (*)*.

1.2.3. Экстремальная перестановка $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; t)$. Количественное решение задачи (*) будет выражено в терминах *экстремальной перестановки* $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Для данного ядра $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$ и выпуклого модуля непрерывности ω определим простые ядра $\{\Psi_{ij}(\cdot) = \Psi_{ij}(\omega; \cdot)\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ формулами (1.4), (2.2), а $\{\Psi_i(\cdot) = \Psi_i(\omega; \cdot)\}_{i=1}^{n-1}$ — формулами (1.6), (2.2).

Экстремальная перестановка $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; t)$ определяется на отрезке $[0, b-a]$ следующим образом:

$$\mathfrak{R}_\omega(\Psi; t) := \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)} \mathfrak{R}(\Psi_{ij}(\omega); t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{R}(\Psi_i(\omega); t), \quad 0 \leq t \leq b-a. \quad (2.9)$$

Мы особенно подчеркиваем тот факт, что в отличие от Σ -перестановки $\Phi(\Psi, \cdot)$ из (0.5.11), определенной Корнейчуком в [40] и [2, (6.28)] (см. также соотношение (0.5.10) и предшествующие ему рассуждения), экстремальная перестановка $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; \cdot)$ существенно *зависит* от ω .

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Предположим, что выполнены условия и приняты обозначения теоремы X и определения 1.2.1. Тогда*

$$\sup_{h \in H^\omega[a, b]} \int_a^b h(t)\psi(t) dt = \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\omega(\Psi; x)\omega'(x) dx. \quad (2.10)$$

Истинность (2.10) немедленно следует из оценки (2.8) и формулы (0.5.6) леммы Корнейчука. Экстремальная перестановка $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; \cdot)$, как и Σ -перестановка Корнейчука $\Phi(\Psi; \cdot)$, сохраняет вариацию ядра Ψ . Однако интегральная норма экстремальной перестановки ядра Ψ превосходит L_1 -норму Σ -перестановки Ψ , если хотя бы один из атомов $\{B_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{D}(n)}$ или $\{C_{j,i}\}_{(i,j) \in \mathcal{D}(n)}$ невырожден:

$$\mathfrak{R}_\omega(\Psi; 0) = \Phi(\Psi; 0) = \frac{1}{2} \bigvee_a^b \Psi = \frac{1}{2} \|\Psi\|_{L_1[a,b]}, \quad (2.11)$$

$$\|\mathfrak{R}_\omega(\Psi; \cdot)\|_{L_1[0, b-a]} \geq \|\Phi(\Psi; \cdot)\|_{L_1[0, b-a]} = \|\Psi\|_{L_1[a,b]}.$$

1.2.4. Невырожденность A -атомов в случае строго выпуклого ω . Из формулы (2.5) вытекает, что

$$\text{sign} \frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1}, & t \in A_i, \ i = 1, \dots, n-1, \\ (-1)^{i+1}, & t \in B_{ij}, C_{ji}, \ (i, j) \in \mathcal{D}(n). \end{cases} \quad (2.12)$$

Следовательно, производная $\frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t)$ экстремальной функции меняет знак на $[a, b]$ не более $n-2$ раз (*не более*, поскольку некоторые из интервалов $A_i(\omega, \psi)$, $B_i(\omega, \psi)$ или $C_i(\omega, \psi)$ для $i = 1, \dots, n-1$ могут вырождаться в точки). Как показывает следующий результат, в случае *строго выпуклого* на $[0, b-a]$ модуля непрерывности производная $\frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t)$ имеет *в точности* $n-2$ точки перемены знака на промежутке $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 1.2.3. *Предположим, что ω — строго выпуклый модуль непрерывности на промежутке $[0, b-a]$ и $\mathcal{V}$ — экстремальное V_n^0 -разбиение задачи (*). Тогда каждый из интервалов $A_i = [\gamma_{3i-1}, \gamma_{3i}]$, $i = 1, \dots, n-1$, имеет непустую внутренность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что отрезок A_i вырождается в точку α_i для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим такие невырожденные промежутки $\Lambda_i = [\lambda_i, \alpha_i]$ и $\Gamma_i = [\alpha_i, \gamma_i]$ из разбиения отрезка $[a, b]$ на подынтервалы $\{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{D}(n)}$, $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$, которые непосредственно примыкают к точке α_i слева и справа. Мы разберем все четыре возможные ситуации:

- (1) $(\Lambda_i; \Gamma_i) = (A_{i-1}; A_{i+1})$;
- (2) $(\Lambda_i; \Gamma_i) = (B_{ij}; C_{i+1,m}), j \in J_i(n), m \in L_{i+1}$;
- (3) $(\Lambda_i; \Gamma_i) = (A_{i-1}; C_{i+1,m}), m \in L_{i+1}$;
- (4) $(\Lambda_i; \Gamma_i) = (B_{ij}; A_{i+1}), j \in J_i(n)$.

Каждый из этих случаев проиллюстрирован на рис. 1.2.3.

Случай 1. Согласно (0.5.9), функция $x_{\omega, \psi}$ как решение задачи (1.5) наделена свойствами

$$\begin{aligned} x_{\omega, \psi}(\gamma_i) - x_{\omega, \psi}(\alpha_i) &= (-1)^i \omega(\gamma_i - \alpha_i), \\ x_{\omega, \psi}(\alpha_i) - x_{\omega, \psi}(\lambda_i) &= (-1)^i \omega(\alpha_i - \lambda_i). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку $\lambda_i < \alpha_i < \gamma_i$, мы заключаем из (2.3), что

$$|x_{\omega, \psi}(\gamma_i) - x_{\omega, \psi}(\lambda_i)| = \omega(\alpha_i - \lambda_i) + \omega(\gamma_i - \alpha_i). \quad (2.14)$$

Рис. 1.2.3. Четыре случая теоремы 1.2.3

Строгая выпуклость модуля непрерывности ω влечет за собой строгое неравенство

$$\omega(\alpha_i - \lambda_i) + \omega(\gamma_i - \alpha_i) > \omega(\gamma_i - \lambda_i). \quad (2.15)$$

Соотношение (2.14) совместно с неравенством (2.15) противоречат принадлежности функции $x_{\omega,\psi}$ классу $H^\omega[a, b]$.

Случай 2. Введем обозначения:

$$[\zeta_i^1, \zeta_i^2] := C_{ji}, \quad j \in J_i(n), \quad [\nu_i^1, \nu_i^2] := B_{m,i+1}, \quad m \in L_{i+1}.$$

В соответствии со свойством (А) экстремальных разбиений теоремы X имеют место включения $\alpha_i \in A_i, i = 1, \dots, n-1$. Следовательно, по определению 1.1.3 или замечанию 1.1.1 о порядке расположения атомов в V_n^0 -разбиении мы имеем

$$\begin{aligned} [\zeta_i^1, \zeta_i^2] &:= C_{ji} \subset [\alpha_{j-1}, \alpha_j], \quad j \in J_i(n) := \{j = i+1+2k, k \in \mathbb{N} : j \leq n\}, \\ [\nu_i^1, \nu_i^2] &:= B_{m,i+1} \subset [a_{m-1}, a_m], \quad m \in L_{i+1} := \{l = i-2k, k \in \mathbb{N} : l \geq 1\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nu_i^1 < \lambda_i < \gamma_i < \zeta_i^1. \quad (2.16)$$

Опять, применяя формулу (0.5.9) к функции $x_{\omega, \psi}$ как к решению задачи (1.3), мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} x_{\omega, \psi}(\zeta_i^1) - x_{\omega, \psi}(\alpha_i) &= (-1)^i \omega(\zeta_i^1 - \alpha_i), \\ x_{\omega, \psi}(\alpha_i) - x_{\omega, \psi}(\nu_i^1) &= (-1)^i \omega(\alpha_i - \nu_i^1). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким образом, из (2.17) и строгой выпуклости ω вытекает, что

$$|x_{\omega, \psi}(\zeta_i^1) - x_{\omega, \psi}(\nu_i^1)| = \omega(\zeta_i^1 - \alpha_i) + \omega(\alpha_i - \nu_i^1) > \omega(\zeta_i^1 - \nu_i^1), \quad (2.18)$$

снова противоречие с включением $x_{\omega, \psi} \in H^\omega[a, b]$.

Случай 3. Положим $[\beta_i^1, \beta_i^2] := B_{m, i+1}$ и $[\tau_i, \alpha_i] := A_{i-1}$. Аналогично случаю 2 проверяется, что

$$\beta_i^1 < \beta_i^2 < \tau_i < \alpha_i. \quad (2.19)$$

Снова, ссылаясь на формулу (0.5.9), мы получаем

$$x_{\omega, \psi}(\alpha_i) - x_{\omega, \psi}(\tau) = (-1)^i \omega(\alpha_i - \tau), \quad (2.20)$$

$$x_{\omega, \psi}(\alpha_i) - x_{\omega, \psi}(\beta_i^2) = (-1)^{i+1} \omega(\alpha_i - \beta_i^2). \quad (2.21)$$

Из (2.20) и (2.21) следует, что

$$|x_{\omega, \psi}(\tau) - x_{\omega, \psi}(\beta_i^2)| = \omega(\alpha_i - \tau) + \omega(\alpha_i - \beta_i^2) > \omega(\tau - \beta_i^2), \quad (2.22)$$

поскольку $\alpha_i - \beta_i^2 = (\alpha_i - \tau) + (\tau - \beta_i^2)$ и ω строго выпукла.

Случай 4 рассматривается аналогично случаю 3.

Таким образом, в каждом из четырех возможных случаев предположение о вырожденности одного из интервалов $\{A_j\}_{j=1}^{n-1}$ привело нас к противоречию.

Из распределения знаков (2.12) и теоремы 1.2.3 вытекает, что в случае строго выпуклого ω производная $\frac{d}{dt}x_{\omega, \psi}$ имеет ровно $n-2$ перемены знака на отрезке $[a, b]$.

ПРИМЕР 1.2.1. Зададим ядро ψ формулой $\psi(t) = -\text{sign} \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right)$. Тогда ядро Ψ , четное на отрезке $[0, 10]$, задается формулой $\Psi(t) = -\min\{t, 10-t\}$. Ядро ψ меняет знак в трех точках $0, \pm 5$, в то время как функция Ψ неположительна на всем промежутке $[-10, 10]$. В соответствии с формулой (0.3.11) производная функции, максимизирующей функционал $h \mapsto \int_{-10}^{10} h(t)K\psi(t) dt$ в соболевском пространстве $W_\infty^1[-10, 10] = H^1[-10, 10]$, тождественно равна -1 .

В то же время экстремаль h^* задачи

$$\int_{-10}^{10} h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^{1/2}[-10, 10]: h(0) = 0, \quad (2.23)$$

нечетна и допускает следующее представление на $[0, 10]$ (см. рис. 1.2.4):

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \begin{cases} \sqrt{t/2}, & t \in [0, 1], \\ \sqrt{(5-t)/2} - \sqrt{2}/2, & t \in [1, 5], \\ -\sqrt{(t-5)/2} - \sqrt{2}/2, & t \in [5, 9], \\ -\sqrt{t/2}, & t \in [9, 10], \end{cases} \\ \omega(h^*; t) &= \begin{cases} \sqrt{t}, & t \in [0, 8] \cup [18, 20], \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{t-8}, & t \in [8, 9], \\ 2\sqrt{2} + 1, & t \in [9, 13 + 2\sqrt{2}], \\ \sqrt{t-10} + \sqrt{2}, & t \in [13 + 2\sqrt{2}, 18]. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Согласно (2.24) $\frac{d}{dt}h^*(t)$ меняет знак в точках -1 , 1 , расположенных между точками перемены знака ядра ψ -5 и 0 , 0 и 5 , соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.1. Экстремальное V_4^0 -разбиение отрезка $[-10, 10]$ состоит из атомов

$$B_{14} = [-10, -9], A_1 = [-9, -1], A_2 = [-1, 1], A_3 = [1, 9], C_{41} = [9, 10]. \quad (2.25)$$

Все остальные атомы экстремального V_4^0 -разбиения вырождаются в точки. Рис. 1.2.4 также иллюстрирует график функции $h^*(t)$ и экстремальной перестановки $\Re_{\omega_{1/2}}(\Psi; t)$.

1.2.5. Модули непрерывности ω -сплайнов. Поскольку $x_{\omega, \psi} \in H^\omega[a, b]$, $\omega(x_{\omega, \psi}; t) \leq \omega(t)$ для $t \in [0, b-a]$. Следующие результаты характеризуют точки t^* , в которых имеет место точное равенство $\omega(x_{\omega, \psi}; t^*) = \omega(t^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.4. Пусть $x_{\omega, \psi}$, $\mathcal{V}$ – экстремальные функция и V_n^0 -разбиение задачи (*), соответственно. Пусть $\{\tau_i = |A_i|\}_{i=1}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &:= \max_{(x,y) \in B_{ij} \times C_{ji}} |x - y|, & (i, j) \in \mathcal{P}(n), \\ \mathcal{T}_{ij} &:= \min_{(x,y) \in B_{ij} \times C_{ji}} |x - y|, & (i, j) \in \mathcal{P}(n). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тогда модуль непрерывности $\omega(x_{\omega, \psi}; \cdot)$ функции $x_{\omega, \psi}$ обладает свойством

$$\omega(x_{\omega, \psi}; t) = \omega(t), \quad t \in \begin{cases} [0, \max_{1 \leq i \leq n-1} \tau_i], \\ [\tau_{ij}, \mathcal{T}_{ij}], & \text{если } \tau_{ij} < \mathcal{T}_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n). \end{cases} \quad (2.27)$$

 Рис. 1.2.4. Ядро Ψ , экстремальная перестановка $\mathfrak{R}_{\omega_{1/2}}(\Psi; \cdot)$ и функция h^*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $\rho_{ij}: B_{ij} \rightarrow C_{ji}$, определенные в (2.4) для $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$, и $\rho_i: [\gamma_{3i-1}, \alpha_i] \rightarrow [\alpha_i, \gamma_{3i}]$ ($[\gamma_{3i-1}, \gamma_{3i}] = A_i$), введенные в (2.6) для $i = 1, \dots, n-1$.

Согласно (0.5.9) для всех интервалов B_{ij} с *непустой внутреннейностью* мы имеем

$$|x_{\omega, \psi}(\rho_{ij}(t)) - x_{\omega, \psi}(t)| = \omega(\rho_{ij}(t) - t), \quad t \in B_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n). \quad (2.28)$$

Аналогично, если A_i невырожден, то выполнены соотношения

$$|x_{\omega, \psi}(\rho_i(t)) - x_{\omega, \psi}(t)| = \omega(\rho_i(t) - t), \quad t \in [\gamma_{3i-1}, \alpha_i]. \quad (2.29)$$

Остается заметить, что функция $\rho_{ij}(t) - t$ отображает интервал B_{ij} на отрезок $[\tau_{ij}, \mathcal{T}_{ij}]$ для пар $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$, а для $i = 1, \dots, n-1$ образ отрезка $[\gamma_{3i-1}, \alpha_i]$ при отображении $\rho_i(t) - t$ совпадает с промежутком $[0, \tau_i]$.

Следующий результат находит свое обоснование в формулах (2.28), (2.29).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.5. Пусть $x_{\omega, \psi}$ — экстремальная функция задачи (*), и $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — точки перемены знака ядра $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$. Для любой точки $v \in [a, b] \setminus \{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ существует такая точка $w = w(v) \neq v$ интервала $[a, b]$, что

$$|x(v) - x(w)| = \omega(|v - w|). \quad (2.30)$$

1.2.6. Ω -сплайны в гёльдеровских классах H^α .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.6. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$, $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$, и $x_{\alpha, \psi}(t) := x_{\omega_\alpha, \psi}(t)$ — решение задачи

$$\int_0^1 h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\alpha[0, 1]: h(0) = 0. \quad (2.31)$$

Тогда для любого $\zeta > 0$ функция $x_\zeta(t) := \zeta^\alpha x_{\alpha, \psi}(t/\zeta)$, определенная на отрезке $[0, \zeta]$, экстремальна в задаче

$$\int_0^\zeta h(t) \psi\left(\frac{t}{\zeta}\right) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\alpha[0, \zeta]. \quad (2.32)$$

Результат предложения 1.2.6 — следствие следующего свойства функций из гёльдеровских классов: $f(t) \in H^\alpha[0, 1] \iff \zeta^\alpha f(t/\zeta) \in H^\alpha[0, \zeta] \quad \forall \zeta > 0$. Если $\mathcal{V}$ — экстремальное разбиение задачи (2.31), то экстремальное разбиение $\mathcal{V}_\zeta$ задачи (2.32) имеет структуру $\mathcal{V}_\zeta := \{\zeta I : \forall I \in \mathcal{V}\}$, где для $J = [a, b]$ и $\zeta > 0$ через ζJ обозначен промежуток $[\zeta a, \zeta b]$.

1.3. Предельные свойства совершенных ω -сплайнов. В данном пункте мы предлагаем читателю систематизированное изложение предельных соотношений для совершенных ω -сплайнов, сходных с соответствующими свойствами полиномиальных совершенных сплайнов.

1.3.1. Предельные соотношения для ω -сплайнов, порожденных семейством ядер с ограниченным числом точек перемены знака.

ЛЕММА 1.3.1. Предположим, что семейство вещественнозначных функций $\{h_s\}_{s \in K}$ на компакте $K \in \mathbb{R}^d$ наделено следующими свойствами:

- (i) для каждого фиксированного $s \in K$ функция $h_s(t)$ определена на некотором отрезке $[a(s), b(s)]$, $a(s) \leq b(s)$, где $a(s)$ и $b(s)$ — непрерывные функции s на K ;
- (ii) отображение $(t, s) \mapsto h_s(t)$ непрерывно на множестве

$$M = \bigcup_{s \in K} M_s, \quad M_s := \{(x, s) : x \in [a(s), b(s)]\};$$

- (iii) функция $h_s(t)$ строго возрастает на $[a(s), b(s)]$ для каждого $s \in K$;
- (iv) $h_s(a(s)) \leq 0 \leq h_s(b(s)) \quad \forall s \in K$.

Тогда единственное решение $\gamma(s)$ уравнения $h_s(t) = 0$, $t \in [a(s), b(s)]$, является непрерывной функцией параметра s на K .

Проверка истинности леммы 1.3.1 элементарна и оставлена читателю. В доказательстве предельных соотношений для совершенных сплайнов мы также воспользуемся следующим следствием леммы 0.5.2 Корнейчука.

ЛЕММА 1.3.2. Пусть для каждого $s \in \mathbb{S} \in \mathbb{R}^d$ определено простое на отрезке $[a_s, b_s]$ ядро Ψ_s . Пусть семейство ядер $\{\Psi_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ наделено следующими свойствами:

- (i) функции a_s и b_s непрерывно зависят от s на $\mathbb{S}$ и для некоторых $a < b$

$$a_s < a < b < b_s \quad \forall s \in \mathbb{S};$$

- (ii) семейство ядер $\{\psi_s(t) = \Psi'_s(t)\}_{s \in \mathbb{S}}$ непрерывно зависит от s на $\mathbb{S}$ в метрике L_1 в следующем смысле:

$$\lim_{s' \rightarrow s} \|\tilde{\psi}_{s'} - \tilde{\psi}_s\|_{L_1[a, b]} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{S},$$

где

$$\tilde{\psi}_s(x) := \psi_s \left(\frac{b_s - a_s}{b - a} (x - a) + a_s \right), \quad a \leq x \leq b, \quad s \in \mathbb{S}.$$

Пусть $\forall s \in \mathbb{S}$ x_s — решение задачи

$$\int_{a_s}^{b_s} f(t) \psi_s(t) dt \rightarrow \sup, \quad f \in H^\omega[a_s, b_s], \quad f(a_s) = 0.$$

Тогда семейство $\{x_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ непрерывно зависит от параметра s на компакте $\mathbb{S}$ в следующем смысле: для каждого $s \in \mathbb{S}$

$$\|x_{s'} - x_s\|_{C[\max\{a_s, a_{s'}\}, \min\{b_s, b_{s'}\}]} \rightarrow 0 \quad \text{при } \mathbb{S} \ni s' \rightarrow s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, через $[a'_s, b'_s]$ обозначим промежуток, на котором ядро $|\Psi_s|$ достигает максимума. Положим $c_s := \frac{1}{2}(a'_s + b'_s)$ и определим функцию $\rho_s: [a_s, c_s] \rightarrow [c_s, b_s]$ как решение задачи

$$\begin{cases} \Psi_s(\rho_s(t)) = \Psi_s(t), & t \in [a_s, a'_s], \\ \rho_s(t) = 2c_s - t, & t \in [a'_s, c_s]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Покажем, что отображения $s \mapsto \rho_s$ и $s \mapsto \rho_s^{-1}$ непрерывно зависят от s на компакте $\mathbb{S}$, а именно, для каждого $s \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} (a) \quad & \|\rho_{s'} - \rho_s\|_{C[\max\{a_s, a_{s'}\}, \min\{c_s, c_{s'}\}]} \rightarrow 0 \quad \text{при } s' \rightarrow s, \\ (b) \quad & \|\rho_{s'}^{-1} - \rho_s^{-1}\|_{C[\max\{c_s, c_{s'}\}, \min\{b_s, b_{s'}\}]} \rightarrow 0 \quad \text{при } s' \rightarrow s. \end{aligned} \quad (3.2)$$

С этой целью мы введем множество

$$\widehat{\mathbb{S}} = \bigcup_{s \in \mathbb{S}} \{(x, s) : a_s \leq x \leq a'_s\}$$

и рассмотрим семейство функций $\Phi_{s,t}$, определенных для пар $(s, t) \in \widehat{\mathbb{S}}$ следующим образом:

$$\Phi_{s,t}(y) = \Psi_s(t) - \Psi_s(y), \quad y \in [b'_s, b_s]. \quad (3.3)$$

Ссылаясь на свойства (i), (ii) ядер ψ_s в формулировке леммы 1.3.2 и применяя лемму 1.3.1 к семейству функций $\{\Phi_{s,t}\}_{(s,t) \in \widehat{\mathbb{S}}}$ на компакте $\widehat{\mathbb{S}} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, мы немедленно заключаем, что $\rho_s(t)$ как нуль функции $\Phi_{s,t}(\cdot)$ на отрезке $[b'_s, b_s]$ (см. (3.1)) является непрерывной функцией (s, t) на компакте $\widehat{\mathbb{S}}$. Свойство (3.2 (a)) доказано. Проверка утверждения (3.2 (b)) аналогична.

Далее, напомним выражение для производной экстремали x_s :

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = \begin{cases} \omega'(\rho_s(t) - t), & a_s \leq t \leq c_s, \\ \omega'(t - \rho_s^{-1}(t)), & c_s \leq t \leq b_s. \end{cases} \quad (3.4)$$

В соответствии со свойствами (3.2), для фиксированных $s \in \mathbb{S}$ и $\varepsilon > 0$ существует такая δ -окрестность U_δ точки s в $\mathbb{S}$, что для всех $s' \in U_\delta$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \|\rho_{s'} - \rho_s\|_{C[\max\{a_s; a_{s'}\}, \min\{c_s; c_{s'}\}]} \leq \varepsilon, \\ \text{(b)} \quad & \|\rho_{s'}^{-1} - \rho_s^{-1}\|_{C[\max\{c_s; c_{s'}\}, \min\{b_s; b_{s'}\}]} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Положим

$$A_\delta = \sup_{s' \in U_\delta} a(s'), \quad \tilde{C}_\delta = \inf_{s' \in U_\delta} c(s'), \quad \widehat{C}_\delta = \sup_{s' \in U_\delta} c(s'), \quad B_\delta = \inf_{s' \in U_\delta} b(s'). \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.1. Всюду в последующих неравенствах будет подразумеваться, что $[\xi, \sigma] := \emptyset$ для всех $\xi > \sigma$.

Тогда, используя тот факт, что и ω' , и ρ_s , и ρ_s^{-1} не возрастают на соответствующих областях определения, мы заключаем из (3.4) и (3.5), что для всех $s' \in U_\delta(s)$ и $t \in [A_\delta + \varepsilon, \tilde{C}_\delta - \varepsilon]$ выполняются неравенства $\rho_s(t) < \rho_{s'}(t) + \varepsilon$ и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_{s'}(t) &= \omega'(\rho_{s'}(t) - t) \leq \omega'(\rho_s(t) - (t + \varepsilon)) \leq \omega'(\rho_s(t + \varepsilon) - (t + \varepsilon)), \\ \frac{d}{dt}x_{s'}(t) &= \omega'(\rho_{s'}(t) - t) \geq \omega'(\rho_s(t) - (t - \varepsilon)) \geq \omega'(\rho_s(t - \varepsilon) - (t - \varepsilon)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}x_s(t - \varepsilon) \leq \frac{d}{dt}x_{s'}(t) \leq \frac{d}{dt}x_s(t + \varepsilon), \quad t \in [A_\delta + \varepsilon, \tilde{C}_\delta - \varepsilon]. \quad (3.8)$$

Аналогичное рассуждение для отрезка $[\widehat{C}_\delta + \varepsilon, B_\delta - \varepsilon]$ приводит к неравенствам

$$\frac{d}{dt}x_s(t + \varepsilon) \leq \frac{d}{dt}x_{s'}(t) \leq \frac{d}{dt}x_s(t - \varepsilon), \quad t \in [\widehat{C}_\delta + \varepsilon, B_\delta - \varepsilon]. \quad (3.9)$$

Следовательно, основываясь на том, что для всех $s \in \mathbb{S}$ функция x_s равна нулю в a_s , на принадлежности функции x_s классу $H^\omega[a_s, b_s]$ и на свойствах (3.8), (3.9), мы приходим к оценке

$$\|x_{s'} - x_s\|_{C[A_\delta, B_\delta]} \leq D_\omega(\delta, \varepsilon), \quad s' \in U_\delta(s), \quad (3.10)$$

где $D_\omega(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $(\delta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$. Лемма 1.3.1 доказана.

Введем в рассмотрение классы интегральных ядер с *ограниченным числом* точек перемены знака.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $\mathbb{M}_n[a, b] := \bigcup_{k=1}^n \mathcal{M}_k^0[a, b]$. Эквивалентно, функция $\psi \in L_1[a, b]$ принадлежит $\mathbb{M}_n[a, b]$, если $\int_a^b \psi(t) dt = 0$ и число ее точек перемены знака не превосходит $n - 1$.

Следующий результат используется в разнообразных геометрических приложениях, связанных с совершенными ω -сплайнами (см. [32]).

ТЕОРЕМА 1.3.3. *Предположим, что $\mathbb{S}$ – компакт в $\mathbb{R}^d$ и для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ семейство ядер $\psi_s(t)$, $t \in [a_s, b_s]$, $s \in \mathbb{S}$, наделено следующими свойствами:*

- (i) *концевые точки a_s и b_s – непрерывные функции s на компакте $\mathbb{S}$ и $a_s < a < b < b_s$ для всех $s \in \mathbb{S}$ при некоторых $a < b$;*
- (ii) *существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\psi_s \in \mathbb{M}_N[a_s, b_s]$ $\forall s \in \mathbb{S}$;*
- (iii) *семейство $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ непрерывно зависит от s в интегральной метрике на $\mathbb{S}$ в следующем смысле: для всех $s \in \mathbb{S}$*

$$\begin{aligned} \|\bar{\psi}_{s'} - \bar{\psi}_s\|_{L_1[a, b]} &\rightarrow 0 \quad \text{при } \mathbb{S} \ni s' \rightarrow s, \\ \bar{\psi}_s(x) &:= \psi_s\left(\frac{b_s - a_s}{b - a}(x - a) + a_s\right), \quad a \leq x \leq b, \quad s \in \mathbb{S}. \end{aligned}$$

Пусть $\forall s \in \mathbb{S}$ z_s – решение задачи

$$\int_{a_s}^{b_s} f(t) \psi_s(t) dt \rightarrow \sup, \quad f \in H^\omega[a_s, b_s], \quad f(a_s) = 0. \quad (3.11)$$

Тогда семейство функций z_s непрерывно зависит от s в равномерной метрике на $\mathbb{S}$, т.е. для каждого фиксированного $s \in \mathbb{S}$

$$\|z_{s'} - z_s\|_{C[\max\{a_s, a_{s'}\}, \min\{b_s, b_{s'}\}]} \rightarrow 0 \quad \text{при } \mathbb{S} \ni s' \rightarrow s.$$

С одной стороны, теорема 1.3.3 – обобщение леммы 1.3.2, в формулировке которой все ядра ψ_s принадлежат классу $\mathcal{M}_2^0[a_s, b_s]$. С другой стороны, лемма 1.3.2 является основной составляющей в доказательстве теоремы 1.3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 1.3.1 множества $\mathbb{M}_N[a_s, b_s]$, для любого фиксированного $s \in \mathbb{S}$ ядро ψ_s принадлежит классу $\mathcal{M}_p^0[a_s, b_s]$ для некоторого $p = p(s) \leq N$. Через $\mathcal{V}_p(s)$ обозначим экстремальное разбиение задачи (3.11).

Зафиксируем $s \in \mathbb{S}$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что *любая последовательность в $\mathbb{S}$, сходящаяся к s , содержит такую подпоследовательность $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что функции z_{s_n} равномерно сходятся к z_s* . Тогда единственность решения z_s задачи (3.11) повлечет за собой независимость предела от выбранной последовательности.

Осуществляя намеченный план, из произвольной фиксированной последовательности точек компакта $\mathbb{S}$, сходящейся к s , мы выберем такую подпоследовательность $\{s_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, что для всех $l \in \mathbb{N}$ $\psi_{s_l} \in \mathcal{M}_k^0[a, b]$ для *единого* $k \leq N$. Кроме того, выбор делается таким образом, что каждая из подпоследовательностей атомов

$\{A_i(s_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq k-1$, и $\{B_{ij}(s_l), C_{ji}(s_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$, $(i, j) \in \mathcal{P}(k)$, является *сходящейся*. Напомним следующие свойства экстремальных разбиений $\{\mathcal{V}_k(s_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \int_{A_i(s_l)} \psi_{s_l}(t) dt &= 0, \quad 1 \leq i \leq k-1, \\ \int_{B_{ij}(s_l) \cup C_{ji}(s_l)} \psi_{s_l}(t) dt &= 0, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(см. (А)–(С) теоремы X). Следовательно, последовательность экстремальных разбиений $\mathcal{V}_k(s_l)$ сходится к некоторому V_k^0 -разбиению $\hat{\mathcal{V}}_k(s)$, также наделенному свойствами (3.12). Применим лемму 1.3.2 к двум группам простых ядер:

- (1) каждому из таких семейств ядер $\{\Psi_i(s_l; \cdot)\}_{l \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \dots, k-1$, что *предел* $\lim_{l \rightarrow \infty} A_i(s_l)$ *является невырожденным отрезком*;
- (2) каждому из таких семейств ядер $\{\Psi_{ij}(s_l; \cdot)\}_{l \in \mathbb{N}}$, $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$, что последовательность $\{B_{ij}(s_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ имеет *невырожденный предел*.

Тогда из леммы 1.3.2 немедленно вытекает сходимость экстремалей x_{s_l} к некоторой функции Y : $Y(a_s) = 0$, чья производная определяется формулами (2.3)–(2.6) для ядра $\psi = \psi_s$, отрезка $[a, b] = [a_s, b_s]$ и разбиения $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_n(s)$. Следовательно, согласно теореме X функция Y – решение задачи (3.11). Теорема 1.2.1 гарантирует единственность и независимость этого решения от выбранной подпоследовательности.

1.3.2. Решение задачи (*) для ядер ψ с нуль-интервалами. Рассмотрим классы ядер с *множествами точек перемены знака и нуль-интервалов* – промежутках, на которых ядра обращаются в нуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.2. Ядро ψ принадлежит классу $\mathcal{O}_n[a, b]$ при условии, что

- (а) существуют такие точки $a =: a_0 < a_1 < \dots < a_n := b$, что $(-1)^i \psi(t) \geq 0$ для почти всех $t \in (a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, \dots, n$;
- (б) существуют такие точки $a := \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_{2l+1} := b$, что
 - (i) $\psi(t) = 0$ для п.в. $t \in [\nu_{2i-1}, \nu_{2i}]$, $i = 1, \dots, l$;
 - (ii) $|\psi(t)| > 0$ для п.в. $t \in [\nu_{2i}, \nu_{2i+1}]$, $i = 0, \dots, l$.

(3.13)

Объединение интервалов $V = \bigcup_{i=1}^l (\nu_{2i-1}, \nu_{2i})$ называется *нулевым множеством* ядра ψ , а дополнение $\bigcup_{i=0}^l [\nu_{2i}, \nu_{2i+1}]$ множества V в промежутке $[a, b]$ естественно назвать *носителем* ψ .

Класс $\mathcal{M}_n^0[a, b]$ всюду плотен в интегральной метрике в $\mathcal{O}_n[a, b]$. Основываясь на этом наблюдении и методе доказательства теоремы 1.3.3, мы предлагаем вариант теоремы X для ядер ψ из класса $\mathcal{O}_n[a, b]$.

ТЕОРЕМА 1.3.4. Пусть $\psi \in \mathcal{O}_n[a, b]$ и $V = V(\psi)$ – нулевое множество ядра ψ . Предположим, что последовательность $\{\psi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ из $\mathcal{M}_n^0[a, b]$ сходится в метрике $L_1[a, b]$ к ядру ψ . Тогда существует подпоследовательность $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ со следующими свойствами:

- (I) подпоследовательность $\{x_{l_k}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к решению $X(t)$ задачи

$$\int_a^b h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad h(a) = 0; \quad (3.14)$$

(II) *существуют пределы*

$$\begin{aligned} A_i &:= \left[\lim_{k \rightarrow \infty} A_i(l_k) \right] \setminus V, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ B_{ij} &:= \left[\lim_{k \rightarrow \infty} B_{ij}(l_k) \right] \setminus V, \quad C_{ji} := \left[\lim_{k \rightarrow \infty} C_{ji}(l_k) \right] \setminus V, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Структура функции X на носителе $[a, b] \setminus V$ ядра ψ однозначно характеризуется следующими свойствами:

(1) *для всех $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$ функция X экстремальна в задаче*

$$\left\{ \int_a^b h(t) \psi_{ij}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b] \right\}, \quad \psi_{ij}(t) := \psi(t) \cdot \mathcal{X}(B_{ij} \cup C_{ji}; t); \quad (3.16)$$

(2) *для всех $i = 1, \dots, n-1$ функция $x_{\omega, \psi}$ — решение задачи*

$$\left\{ \int_a^b h(t) \psi_i(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b] \right\}, \quad \psi_i(t) := \psi(t) \cdot \mathcal{X}(A_i; t). \quad (3.17)$$

Проверка истинности следующего утверждения в точности совпадает с аргументацией доказательства теоремы 1.2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.5. *Производная решений задачи (3.14) определена однозначно на носителе $[a, b] \setminus V$ ядра ψ , а атомы $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$, введенные в теореме 1.3.4, не зависят от выбора аппроксимирующей подпоследовательности $\{\psi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$.*

В частности, однозначно можно определить экстремальную перестановку ядра Ψ :

$$\Re_\omega(\Psi; t) := \sum_{i=1}^{n-1} \Re(\Psi_i; t) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)} \Re(\Psi_{ij}; t), \quad (3.18)$$

где производные ψ_i и ψ_{ij} ядер Ψ_i и Ψ_{ij} определены в (3.17) и (3.16), соответственно, а атомы $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$, $\{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ вводятся в (3.15).

1.3.3. Пределные соотношения для последовательности $\{x_{\omega_l, \psi_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$.

В целях упрощения технических выкладок при решении экстремальных задач в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ оказалось полезным рассматривать не все множество Γ выпуклых модулей непрерывности на $\mathbb{R}_+$, а некоторые его подмножества:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \{\omega \in \Gamma : \omega'(0) < +\infty\}, & \Theta_2 &= \{\omega \in \Gamma : \omega'(x) > \varepsilon > 0 \text{ п. в. } x \in \mathbb{R}_+\}, \\ \Theta_3 &= \{\omega \in \Gamma : \omega \in C^1[0, A] \forall A > 0\}, & \Theta_4 &= \{\omega \in \Gamma : \omega \text{ строго выпукла}\}. \end{aligned}$$

При решении экстремальных задач следующий результат позволяет рассматривать всюду плотные в метрике $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ подмножества в Γ .

ТЕОРЕМА 1.3.5. *Предположим, что последовательность $\{\omega_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ выпуклых модулей непрерывности сходится в $C[0, b-a]$ к выпуклому модулю непрерывности ω , а последовательность ядер $\{\psi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ из $\mathbb{M}_N[a, b]$ сходится к ядру $\psi \in \mathbb{M}_N[a, b]$ в $L_1[a, b]$. Пусть для каждого $l \in \mathbb{N}$ x_l будет решением задачи*

$$\int_a^b h(t) \psi_l(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^{\omega_l}[a, b], \quad h(a) = 0.$$

Тогда последовательность $\{x_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ сходится в $C[a, b]$ к решению задачи

$$\int_a^b h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad h(a) = 0.$$

Аргументация аналогична доказательству теоремы 1.3.3.

1.4. Критерий тривиальности экстремального V_n^0 -разбиения.

1.4.1. Определения тривиальных V_n^0 -разбиений. Вообще говоря, при анализе экстремальных задач в $H^\omega(\mathbb{I})$ очень удобно иметь дело именно с теми V_n^0 -разбиениями, которые включают в себя лишь A -атомы. Действительно, в этом случае экстремальное разбиение распадается на $n-1$ атомов $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$, и экстремальная функция $x_{\omega, \psi}$ определяется лишь формулами (2.5), (2.6). Интересно, что все экстремальные функции в перечисленных нами в п. 0.3 задачах в соболевских классах обладают именно этой особенностью. Наконец, только в этом случае совпадают экстремальная перестановка $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; \cdot)$ и Σ -перестановка $\Phi(\Psi; \cdot)$ Корнейчука

$$\mathfrak{R}_\omega(\Psi; x) = \Phi(\Psi; x) := \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{R}(\Psi_i; x), \quad x \in [0, b-a], \quad (4.1)$$

где простые ядра $\{\Psi_i\}_{i=1}^{n-1}$ определяются формулами (1.6), (2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.1. Если множество невырожденных атомов экстремального V_n^0 -разбиения $\mathcal{V}$ задачи (*) исчерпывается атомами $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$, т.е.

$$B_{ij} = \square, \quad C_{ji} = \square \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P}(n), \quad (4.2)$$

то $\mathcal{V}$ называется *тривиальным разбиением* отрезка $[a, b]$.

Мы предлагаем необходимое и достаточное условие тривиальности экстремального V_n^0 -разбиения.

Пусть ядро $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t) dt$ с производной ψ из $\mathcal{M}_n^0[a, b]$ имеет $n-2$ нуля $\{b_i\}_{i=1}^{n-2}$ внутри (a, b) :

$$\Psi(b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad b_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1}), \quad b_0 := a, \quad b_{n-1} := b, \quad (4.3)$$

где $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ — точки перемены знака ядра ψ . Экстремальное разбиение $\mathcal{V}$ является тривиальным при условии, что

$$A_i = [b_{i-1}, b_i], \quad i = 1, \dots, n-1, \quad B_i = C_i = \{b_{i-1}\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.1 [46]. Пусть $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$ и $\{b_i\}_{i=0}^{n-1}$ — нули ядра Ψ , удовлетворяющие (4.3). Экстремальное разбиение $\mathcal{V} = \{\{A_i, B_i, C_i\}_{i=1}^n\}$ имеет форму (4.4) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{l=i}^{j-1} (-1)^{i+l} \omega(b_{l+1} - b_l) \leq \omega(b_j - b_i) \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P}(n). \quad (4.5)$$

Неравенства типа (4.5) встречаются в оценке приближений классов $H^\omega(\mathbb{I})$ кусочно-постоянными сплайнами с узлами $\{b_i\}_{i=1}^{n-2}$ (см. [12, (27)]).

1.4.2. Достаточные условия тривиальности V_n^0 -разбиений.

- 1) Если ω — линейный модуль непрерывности, т.е. $\omega(t) = Kt$, $K > 0$, то условия (4.5) выполняются для любого набора точек $\{b_i\}_{i=0}^{n-1}$ из (4.3).
- 2) Если точки $\{b_i\}_{i=0}^{n-1}$ со свойством (4.3) таковы, что

$$b_{i+1} - b_i \geq b_i - b_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (4.6)$$

то условия (4.5) имеют место для любого выпуклого модуля непрерывности ω .

Предложение 1.4.1 с учетом достаточных условий (4.6) находит свое приложение при решении задачи

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{L_p(\mathbb{I})} \leq B, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad (4.7)$$

при $0 \leq m \leq r$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}_+$. Оказывается, что для $B > 0$, $1 \leq p < \infty$, $r = 1$, $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и фиксированного модуля непрерывности ω узлы экстремальной в задаче (4.7) функции $R = R_{\omega, B, p}$ удовлетворяют неравенствам (4.6) ($b_0 := 0$). Мы особенно отметим тот факт, что в случае *гёльдеровских классов* $W^1 H^\alpha(\mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha \leq 1$, узлы $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ функции R образуют *геометрическое разбиение*:

$$\frac{b_{i+1} - b_i}{b_i - b_{i-1}} = \lambda^i, \quad i \in \mathbb{N},$$

для некоторого положительного $\lambda = \lambda(\omega, B, p) < 1$. Более того, экстремаль R обладает свойством *самоподобия*: для всех $i \in \mathbb{N}$

$$R|_{[b_i, b_{i+1}]}(t + b_i) = (-1)^i \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{b_1} \right)^{1+\alpha} R|_{[0, b_1]} \left(\frac{b_1}{b_{i+1} - b_i} t \right), \quad 0 \leq t \leq b_{i+1} - b_i. \quad (4.8)$$

Этот феномен встречается в работах Габушина [47] и Магарил-Ильяева [48] при решении задачи (4.7) в случае линейного $\omega(t) = t$. Полное решение задачи (4.7) для нелинейного ω анонсируется в [32].

1.4.3. Свойства и число невырожденных атомов в V_n^0 -разбиениях.

Как показывает следующий результат из [46], число простых функций в экстремальном разложении (1.2 (i)) ядра Ψ с производной из $\mathcal{M}_n^0[a, b]$ не превышает $[3n/2] - 2$.

ЛЕММА 1.4.2. Пусть $\{[a_i^1, a_i^2] := A_i\}_{i=1}^{n-1}$, $[b_{ij}^1, b_{ij}^2] := B_{ij}$, $[c_{ij}^2, c_{ij}^1] := C_{ji}$, $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$, – атомы экстремального разбиения $\mathcal{V}$ задачи (*) при $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$ и

$$\mathcal{H} := \{(a_l^1, a_l^2), (b_{ij}^1, c_{ij}^1) : A_l \neq \square, l \in \{1, \dots, n-1\}, B_{ij} \neq \square, (i, j) \in \mathcal{P}(n)\}. \quad (4.9)$$

Тогда любые два интервала H_1 и H_2 из множества $\mathcal{H}$ либо не пересекаются, либо один содержится в другом.

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset \quad \text{или} \quad H_1 \subset H_2, \quad \text{или} \quad H_2 \subset H_1. \quad (4.10)$$

В частности, в случае строго выпуклого модуля непрерывности ω числа $\mathcal{A}_{\omega, \psi}(n)$, $\mathcal{B}_{\omega, \psi}(n)$ и $\mathcal{C}_{\omega, \psi}(n)$ невырожденных A -, B - и C -атомов (соответственно) в экстремальном V_n^0 -разбиении задачи (*) ограничиваются следующими величинами (см. [46]):

$$\mathcal{A}_{\omega, \psi}(n) = n - 1, \quad \mathcal{D}_{\omega, \psi}(n) = \mathcal{C}_{\omega, \psi}(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

1.5. Свойства экстремальных перестановок $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; \cdot)$.

1.5.1. Неравенство между перестановками $\mathfrak{R}_\mu(\Psi; \cdot)$ и $\mathfrak{R}_\sigma(\Psi; \cdot)$. В следующем следствии теоремы X мы раскроем связь между экстремальными перестановками, соответствующими разным модулям непрерывности.

ТЕОРЕМА 1.5.1. Пусть $\Psi(t) = \int_a^t \psi(y) dy$, $a \leq t \leq b$, где $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$, и $\sigma(t)$, $\mu(t)$ – два таких модуля непрерывности, что $\sigma(t) \leq \mu(t)$, $t \in [0, b-a]$. Тогда

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sup_{h \in H^\sigma[a, b]} \int_a^b h(t) \psi(t) dt = \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\sigma(\Psi; t) \sigma'(t) dt \leq \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\sigma(\Psi; t) \mu'(t) dt; \\ (2) \quad & \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\mu(\Psi; t) \sigma'(t) dt \leq \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\sigma(\Psi; t) \mu'(t) dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого выпуклого модуля непрерывности ω ядра $\{\Psi_{i, \omega} = \Psi_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{\Psi_{ij, \omega} = \Psi_{ij}\}_{(i, j) \in \mathcal{P}(n)}$ определим соотношениями (2.2). Зафиксируем модуль непрерывности $\pi(t)$. Применяя лемму Корнейчука к перечисленным простым ядрам и функции $h \in H^\pi[a, b]$, мы получаем цепь неравенств

$$\begin{aligned} \int_a^b h(t) \Psi'(t) dt &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_a^b h(t) \Psi'_{i, \omega}(t) dt + \sum_{(i, j) \in \mathcal{P}(n)} \int_a^b h(t) \Psi'_{ij, \omega}(t) dt \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{b-a} \mathfrak{R}(\Psi_{i, \omega}; t) \pi'(t) dt + \sum_{(i, j) \in \mathcal{P}(n)} \int_0^{b-a} \mathfrak{R}(\Psi_{ij, \omega}; t) \pi'(t) dt \\ &= \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\omega(\Psi; t) \pi'(t) dt. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Следовательно, согласно (5.2)

$$\sup_{h \in H^\pi[a, b]} \int_a^b h(t) \Psi'(t) dt = \int_0^{b-a} \Re_\pi(\Psi; t) \pi'(t) dt \leq \int_0^{b-a} \Re_\omega(\Psi; t) \pi'(t) dt. \quad (5.3)$$

Для произвольного модуля непрерывности ω имеют место свойства

$$\Re_\omega(\Psi; b-a) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} \Re_\omega(\Psi; t) \leq 0, \quad t \in [0, b-a], \quad (5.4)$$

для всех выпуклых модулей непрерывности ω на $[0, b-a]$. Следовательно, из (5.3), (5.4) и неравенства $\sigma(t) \leq \mu(t)$, $0 \leq t \leq b-a$, вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^{b-a} \Re_\mu(\Psi; t) \sigma'(t) dt &= \int_0^{b-a} \left(-\frac{d}{dt} \Re_\mu(\Psi; t) \right) \sigma(t) dt \\ &\leq \int_0^{b-a} \left(-\frac{d}{dt} \Re_\mu(\Psi; t) \right) \mu(t) dt \\ &= \int_0^{b-a} \Re_\mu(\Psi; t) \mu'(t) dt \leq \int_0^{b-a} \Re_\sigma(\Psi; t) \mu'(t) dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Теорема 1.5.1 применяется при оценке изменения численного решения задачи (*) при возмущениях модуля непрерывности ω (см. [32]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.2 [46]. Пусть ψ_1 и ψ_2 из $\mathcal{M}_n^0[a, b]$ таковы, что

$$\text{sign}(\psi_2 - \psi_1; [\alpha_{i-1}, \alpha_i]) = (-1)^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда существует такое множество $D \subset [a, b]$, что $\int_D \psi_2(x) dx = 0$ и

$$\Re_\omega(\Psi_1; x) dx \leq \Re_\omega(\tilde{\Psi}_2; x) dx, \quad x \in [0, b-a], \quad (5.6)$$

$$\text{где } \tilde{\Psi}_2(x) = \int_a^x \psi_2(t) \mathcal{K}(D; t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.1. Введем обозначения $\mathcal{V} = \{\{A_i\}_{i=1}^{n-1}, \{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}\}$ и $\tilde{\mathcal{V}} = \{\{\tilde{A}_i\}_{i=1}^{n-1}, \{\tilde{B}_{ij}, \tilde{C}_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}\}$ для экстремальных V_n^0 -разбиений задачи (*) для ядер $\psi_1(\cdot)$ и $\tilde{\psi}_2(\cdot) := \psi_2(\cdot) \mathcal{K}(D; \cdot)$, соответственно (в последнем случае см. определения атомов разбиения в (3.15)). Множество $D \in [a, b]$ выбрано в [46] таким образом, что

$$\tilde{A}_i \subseteq A_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \tilde{B}_{ij} \subseteq B_{ij}, \quad \tilde{C}_{ji} \subseteq C_{ji}, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n).$$

1.6. Классы ядер с фиксированными точками перемены знака.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.1. Пусть $\bar{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$: $0 =: \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n := 1$, и $\delta \leq 1 - \alpha_{n-1}$. Тогда определим $M_{\bar{\alpha}, \delta}$ как множество ядер из $\mathcal{M}_n^0[0, c]$ с фиксированным множеством $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ точек перемены знака на $[0, c]$ для некоторого $c \in [\alpha_{n-1} + \delta, 1]$:

$$M_{\bar{\alpha}, \delta} := \{f \in \mathcal{M}_n^0[0, c] : \alpha_{n-1} + \delta \leq c \leq 1, \{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1} - \text{точки перемены знака } f\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.1. Пусть набор точек $\bar{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ и постоянная δ будут выбраны, как в определении 1.6.1. Для любого строго выпуклого модуля непрерывности ω и ядра $\psi \in M_{\bar{\alpha}, \delta}$ пусть $\{A_i(\omega, \psi)\}_{i=1}^{n-1}$ — A -атомы из экстремального разбиения $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\omega, \psi)$ задачи (*). Тогда существует такая постоянная $\mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta} \in [0, E]$, зависящая только от $\omega, \bar{\alpha}, \delta$, что

$$|A_i(\omega, \psi)| > \mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \psi \in M_{\bar{\alpha}, \delta}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\psi \in M_{\bar{\alpha}, \delta}$ мы рассмотрим интервалы $\{B_{ij}(\omega, \psi), C_{ji}(\omega, \psi)\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ и $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ — атомы экстремального разбиения задачи (*). Для $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$ введем обозначения

$$[\sigma_k^1, \sigma_k^2] := A_k, \quad [\beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2] := B_{ij}, \quad [\gamma_{ji}^1, \gamma_{ji}^2] := C_{ji}. \quad (6.2)$$

Для таких k и (i, j) мы используем следующие соотношения из доказательства теоремы 1.2.3:

$$\begin{cases} x_{\omega, \psi}(\sigma_k^2) - x_{\omega, \psi}(\sigma_k^1) = (-1)^{k-1} \omega(\sigma_k^2 - \sigma_k^1), \\ \{\beta_{ij}^2 > \beta_{ij}^1\} \Rightarrow x_{\omega, \psi}(\gamma_{ji}^2) - x_{\omega, \psi}(\beta_{ji}^1) = (-1)^{i-1} \omega(\gamma_{ji}^2 - \beta_{ji}^1), \\ \{\beta_{ij}^2 > \beta_{ij}^1\} \Rightarrow x_{\omega, \psi}(\gamma_{ji}^1) - x_{\omega, \psi}(\beta_{ji}^2) = (-1)^{i-1} \omega(\gamma_{ji}^1 - \beta_{ji}^2). \end{cases} \quad (6.3)$$

Если константа $\mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta} > 0$ не существует, то по теореме Арцела–Асколи можно выбрать такую последовательность $\{\psi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ из $M_{\bar{\alpha}, \delta}$, что

- (а) последовательность $\{x_{\omega, \psi_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится к предельной функции $X \in H^\omega[0, c]$, $\alpha_{n-1} + \delta \leq c \leq 1$;
- (б) экстремальные $\mathcal{V}_n^0$ -разбиения $\mathcal{V}_l = \mathcal{V}(\omega, \psi_l)$ сходятся к некоторому V_n^0 -разбиению $\mathcal{V}$;
- (с) существует такой индекс $i \in \{1, \dots, n-1\}$, что $\lim_{l \rightarrow \infty} A_i(\omega, \psi_l) = \{a_i\}$.

Из свойств (а), (б) вытекает, что предельная функция X унаследует свойства (6.3) для граничных точек атомов разбиения $\mathcal{V}$ (при этом разбиение $\mathcal{V}$ не обязательно быть ассоциированным с каким-либо ядром $M_{\bar{\alpha}, \delta}[0, c]$). Последовательно рассматривая каждый из четырех возможных случаев теоремы 1.2.3 (опираясь при этом на (6.3)), мы опять приходим к выводу, что ни один из A -атомов $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ не вырождается в точку. Это противоречие с нашим допущением (с) о вырожденности одного из A -атомов разбиения $\mathcal{V}$ завершает доказательство.

§ 2. План доказательства

2.1. Редукция задачи (*) с интервала $[a, b]$ на отрезок $[0, 1]$. Следующее наблюдение позволяет свести решение задачи (*) на отрезках $[a, b]$ к их решению на промежутке $[0, 1]$. Действительно, линейная замена переменных в интеграле показывает, что функция $x_{\omega, \psi}$ экстремальна в задаче

$$\left\{ \int_a^b h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b] \right\}$$

тогда и только тогда, когда функция $x_{a,b}(t) := x_{\omega, \psi}((b-a)t+a)$ является решением задачи

$$\left\{ \int_0^1 h(t)\psi_{a,b}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^{\omega_{a,b}}[0, 1] \right\}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \psi_{a,b}(t) := \psi(a + (b-a)t), \\ \omega_{a,b}(t) := \omega((b-a)t). \end{cases}$$

2.2. Модификации ядер ψ и Ψ . Пусть $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$ и $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t) dt$, $a \leq x \leq b$. По определению класса $\mathcal{M}_n^0[a, b]$ ядро ψ имеет $n-1$ точку перемены знака, и функция Ψ возрастает на $\{[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]\}_{i=1}^{[(n-1)/2]}$ и убывает на $\{[\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}]\}_{i=0}^{[(n-1)/2]}$.

Для $i \in \{1, \dots, n-1\}$ введем множества пар точек

$$Z_i(\psi) := \{(\gamma_1, \gamma_2) : \gamma_1 \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i], \gamma_2 \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \text{ и } \Psi(\gamma_1) = \Psi(\gamma_2)\}. \quad (2.1)$$

Тогда для всех $\varepsilon < E := \min_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i - \alpha_{i-1})/2$ и $i \in \{1, \dots, n-1\}$ мы можем выделить такие пары точек $(\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon))$ в $Z_i(\psi)$, что $\gamma_2^i(\varepsilon) - \gamma_1^i(\varepsilon) = \varepsilon$ и отрезки $[\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]$ попарно не пересекаются (см. рис. 2.2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Пусть $\varepsilon \in [0, E]$ и $\bar{\sigma}$ – вектор в $\mathbb{R}^{n-2}$ с положительными компонентами $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n-2}$. Функции

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{\sigma}, \varepsilon}(x) &= \begin{cases} \sigma_i \cdot \psi(x), & \gamma_1^i(\varepsilon) < x < \gamma_2^i(\varepsilon) := \gamma_1^i(\varepsilon) + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \psi(x), & x \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n-2} (\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)), \end{cases} \\ \Psi_{\bar{\sigma}, \varepsilon}(x) &= \int_a^x \psi_{\bar{\sigma}, \varepsilon}(t) dt, \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (2.2)$$

называются $(\bar{\sigma}, \varepsilon)$ -модификациями ядер ψ и Ψ , соответственно.

Поскольку все компоненты вектора $\bar{\sigma}$ положительны, точки $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ остаются точками перемены знака функции $\psi_{\bar{\sigma}, \varepsilon}$. Кроме того, для всех $i \in \{1, \dots, n-2\}$

$$\int_{\gamma_1^i(\varepsilon)}^{\gamma_2^i(\varepsilon)} \psi_{\bar{\sigma}, \varepsilon}(x) dx := \sigma_i \int_{\gamma_1^i(\varepsilon)}^{\gamma_2^i(\varepsilon)} \psi(x) dx = \sigma_i (\Psi(\gamma_2^i(\varepsilon)) - \Psi(\gamma_1^i(\varepsilon))) = 0.$$

Следовательно, $(\overline{\sigma}, \varepsilon)$ -модификации ядра Ψ обладают свойством

$$\Psi_{\overline{\sigma}, \varepsilon}(x) = \Psi(x), \quad \psi_{\overline{\sigma}, \varepsilon}(x) = \psi(x), \quad x \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n-2} [\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]. \quad (2.3)$$

Пусть $P = \|\Psi\|_{C[a, b]}$, и определим компоненты вектора $\sigma(\varepsilon) \in [1, +\infty)^{n-1}$ из уравнений

$$\Psi_{\overline{\sigma}(\varepsilon), \varepsilon}(\alpha_i) = (-3)^{2n-i} P, \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (2.4)$$

Положим

$$\Psi_\varepsilon(x) := \Psi_{\overline{\sigma}(\varepsilon), \varepsilon}(x), \quad \psi_\varepsilon(x) := \frac{d}{dx} \Psi_{\overline{\sigma}(\varepsilon), \varepsilon}(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.2. Функции ψ_ε и Ψ_ε , определенные в (2.8), (2.9) для $\varepsilon \in [0, E]$, называются ε -модификациями ψ и Ψ , соответственно.

На рис. 2.2.1 проиллюстрированы свойство (2.3) и определение 2.2.2 ядер Ψ_ε и ψ_ε . Отметим также свойство $Z_i(\psi) = Z_i(\psi_\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in (0, E], i = 1, \dots, n-1$.

Рис. 2.2.1. Графики ядер Ψ и Ψ_ε в окрестности точки α_i

2.3. План доказательства.

2.3.1. Предпосылки к индуктивному решению задачи. Пусть $\psi \in \mathcal{M}_{n+1}^0[0, 1]$. Для определенности рассмотрим случай $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Проанализируем структуру экстремальной функции $x_{\omega, \psi}$ задачи (*), описанную в теореме X. Введем обозначения $[c, d_k] := A_n$ и

$$[u_{2i}, u_{2i+1}] := B_{2i, n+1}, \quad [d_{i+1}, d_i] := C_{n+1, 2i}, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Из порядка атомов в V_n^0 -разбиении (определение 1.1.3 или замечание 1.1.1) вытекает, что для $i = 1, \dots, k-1$

$$[u_{2i}, u_{2i+1}] \subset [a_{2i-1}, a_{2i}] \quad \text{и} \quad \alpha_{n-1} \leq c \leq \alpha_n \leq d_k \leq d_{k-1} \leq \dots \leq d_1 := 1. \quad (3.1)$$

Из утверждений (А), (В) теоремы X следует, что

$$\int_{u_{2i}}^{u_{2i+1}} \psi(x) dx + \int_{d_{i+1}}^{d_i} \psi(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \int_c^{d_k} \psi(x) dx = 0. \quad (3.2)$$

Обозначим $F_1 := \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}, u_{2i+1}]$, $F_2 := [0, c] \setminus F_1$ и положим

$$\widehat{\psi}(t) := \psi(t) \mathcal{X}(F_2; t), \quad t \in [0, c]. \quad (3.3)$$

Поскольку ядро ψ имеет нулевое среднее на $[0, 1]$, из (3.2) вытекает, что $\int_0^c \widehat{\psi}(t) dt = 0$. Ядро $\widehat{\psi}$ имеет $n-1$ точку перемены знака $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ на $[0, c]$ и $k-1$ нуль-интервалов $\{[u_{2i}, u_{2i+1}]\}_{i=1}^{k-1}$ (вместо n точек перемены знака ψ). Таким образом, $\widehat{\psi} \in \mathcal{O}_n[0, c]$ (см. определение 1.3.2).

С другой стороны, экстремальность функции $x_{\omega, \psi}$ в задачах (1.1.3) и (1.1.5) означает, что $x_{\omega, \psi}|_{[0, c]}$ экстремальна в задаче

$$\int_0^c h(t) \widehat{\psi}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, c]. \quad (3.4)$$

2.3.2. Эскиз доказательства. Доказательство будет проведено *индукцией по числу точек перемены знака ядра ψ* . А именно, предположив, что теорема X верна для всех ядер $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$, мы покажем справедливость теоремы X для всех ядер $\psi \in \mathcal{M}_{n+1}^0[A, B]$. Наблюдения п. 2.3.1 делают естественной следующую последовательность шагов в индуктивном переходе $n \mapsto n+1$ (для определенности, $n = 2k$).

Для данного ядра $\psi \in \mathcal{M}_{n+1}^0[0, 1]$ мы построим точки c , $\{u_i\}_{i=2}^{n-1}$ и $\{d_i\}_{i=1}^k$, удовлетворяющие (2.1), ядро $\widehat{\psi}$, определенное в (2.3), и функцию X , чье ограничение $X|_{[0, c]}$ экстремально в задаче (3.4). При этом в случае невырожденности промежутка $[u_{2i}, u_{2i+1}]$ функция X будет обладать дополнительными свойствами:

$$\begin{aligned} X(u_{2i+1}) - X(u_{2i}) &= - \int_{u_{2i}}^{u_{2i+1}} \omega'(\rho_i(x) - x) dx, \\ X(d_i) - X(d_{i+1}) &= - \int_{d_{i+1}}^{d_i} \omega'(x - \rho_i^{-1}(x)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\rho_i: [u_{2i}, u_{2i+1}] \rightarrow [d_{i+1}, d_i]$ определяется уравнениями

$$\int_{u_{2i}}^x \psi(t) dt = \int_{d_i}^{\rho_i(x)} \psi(t) dt, \quad u_{2i} \leq x \leq u_{2i+1}, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (3.6)$$

Кроме того, будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} X(d_i) - X(u_{2i+1}) &= -\omega(d_i - u_{2i+1}), \quad i = 1, \dots, k-1, \\ X(d_k) - X(c) &= -\omega(d_k - c). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Существование точек c , $\{u_i\}_{i=2}^{n-1}$, $\{d_i\}_{i=1}^k$ и функции X со свойствами (3.1)–(3.7) будет установлено приложением теоремы Брауэра на основе описанного индуктивного предположения.

После построения функции X со свойствами (3.5)–(3.7) мы трансформируем X в экстремальную в задаче (*) функцию $x_{\omega,\psi}$ по непрерывности посредством следующих преобразований:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x_{\omega,\psi}(t) = X(t), \quad t \in [0, c] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}, u_{2i+1}]; \\
 (2) \quad & \frac{d}{dt} x_{\omega,\psi}(t) = \begin{cases} -\omega'(\rho_i(t) - t), & t \in [u_{2i}, u_{2i+1}] \neq \square, \\ -\omega'(t - \rho_i^{-1}(t)), & t \in [d_{i+1}, d_i] \neq \square, \end{cases} \\
 & \text{где } \{\rho_i\}_{i=1}^{k-1} \text{ определены в (3.6);} \\
 (3) \quad & \frac{d}{dt} x_{\omega,\psi}(t) = \begin{cases} -\omega'(\rho(t) - t), & c \leq t \leq \alpha_n, \\ -\omega'(t - \rho^{-1}(t)), & \alpha_n \leq t \leq d_k, \end{cases} \\
 & \text{где } \rho \text{ вводится уравнениями } \int_c^x \psi(t) dt = \int_{d_k}^{\rho(x)} \psi(t) dt, \quad c \leq x \leq \alpha_n.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Условия (3.5)–(3.7) обеспечат непрерывность $x_{\omega,\psi}$. Рассуждения п. 3.4 обоснуют глобальную принадлежность функции $x_{\omega,\psi}$ классу $H^\omega[0, 1]$. Определение функции $x_{\omega,\psi}$ в (3.8) в совокупности с экстремальностью $x_{\omega,\psi}$ в (3.4) обеспечит экстремальность функции $x_{\omega,\psi}$ в задаче (*).

§3. Доказательство теоремы X

3.0. Начальные допущения и индукция.

ИНДУКТИВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Для данных n ($n = 2, 3, \dots$), отрезка $[a, b]$ и ядра $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$ существует единственная функция $x_{\omega,\psi}(t)$ со свойствами, перечисленными в теореме X и равная нулю в точке a .

БАЗИС ИНДУКЦИИ. Индуктивное предположение для $n = 2$ в точности совпадает с утверждением леммы Корнейчука.

Допустив истинность индуктивного предположения для фиксированного $m = n$ ($n = 2, 3, \dots$), мы докажем его для $m = n + 1$. В частности, в наших рассуждениях мы получим возможность использовать все следствия из теоремы X для ядер с $m - 1 = n - 1$ точкой перемены знака на отрезке $[a, b]$.

Индуктивный шаг в доказательстве теоремы X для фиксированного ядра $\psi \in \mathcal{M}_{n+1}^0[0, 1]$ с точками перемены знака $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$: $0 =: \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1} := 1$ будет сначала доказан при следующих условиях.

Условия на ψ и ω .

1) Для удобства мы рассмотрим переход от четного n : $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, к нечетному $n + 1 = 2k + 1$.

2) Доказательство теоремы X будет проведено сначала для *строго выпуклых* модулей непрерывности.

3) Будет предполагаться существование такой константы $L \in (0, 1)$, что $|\psi(x)| > L$ для почти всех $x \in [0, 1]$. Тогда из определения 2.2.2 ε -модификации ψ_ε вытекает, что

$$|\psi_\varepsilon(x)| \geq |\psi(x)| > L \quad \text{для п. в. } x \in [0, 1] \quad (0.1)$$

для любого фиксированного $\varepsilon < E(\psi) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n+1} \{\alpha_i - \alpha_{i-1}\}$.

4) Мы также предположим, что ядро $\Psi(t) = \int_0^t \psi(y) dy$ имеет нуль z на промежутке (α_{n-1}, α_n) .

5) Индуктивный шаг в переходе $n \mapsto n + 1$ будет сначала доказан для ε -модификации $\varphi := \psi_\varepsilon$ любого фиксированного ядра $\psi \in \mathcal{M}_{n+1}^0[0, 1]$ при

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ E(\psi); \delta; \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\omega, \overline{\alpha}, \delta} \right\}, \quad \text{где } \delta := \min \{z - \alpha_{n-1}; \alpha_n - z\} \quad (0.2)$$

и z — нуль Ψ на (α_{n-1}, α_n) , а константа $\mathcal{A}_{\omega, \overline{\alpha}, \delta}$ определена в предложении 1.6.1 для $\overline{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ и δ из (0.2). Напомним характеристическое свойство (2.2.4) функции $\varphi := \psi_\varepsilon$ из $\mathcal{M}_{n+1}^0[0, 1]$ и ее первообразной $\Phi := \Psi_\varepsilon$:

$$\Phi(\alpha_i) = (-3)^{2n+2-i} P, \quad P := \|\Psi\|_{C[0,1]}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (0.3)$$

Поскольку $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — единственные точки перемены знака производной φ ядра Φ , мы получаем следующее свойство *образов* ядер Φ , многократно используемое в наших конструкциях:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Phi|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]} &= [(-3)^{2n+2-i} P, (-3)^{2n+1-i} P], \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \text{Im } \Phi|_{[0, \alpha_1]} &= [(-3)^{2n+1} P, 0], \quad \text{Im } \Phi|_{[\alpha_n, \alpha_{n+1}]} = [0, \Psi(\alpha_n)] \subseteq [0, P]. \end{aligned} \quad (0.4)$$

После доказательства индуктивного шага для ε -модификации $\varphi = \psi_\varepsilon$ мы покажем, что экстремальные функции задач

$$\left\{ \int_0^1 h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, h \in H^\omega[0, 1] \right\}, \quad \left\{ \int_0^1 h(t) \psi_\varepsilon(t) dt \rightarrow \sup, h \in H^\omega[0, 1] \right\}$$

совпадают для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3.1. Отображение $\varkappa$: $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$. Зафиксируем $n = 2k$ и ядро $\psi \in \mathcal{M}_{n+1}^0[0, 1]$, наделенное свойством (0.1) и меняющее знак в точках $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$: $0 =: \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1} := 1$. Зафиксируем также ε , удовлетворяющее (0.2), и через φ и Φ обозначим ε -модификации ядер ψ и Ψ , соответственно. Через $\mathbb{S}$ обозначим $(2k - 2)$ -мерный симплекс

$$\mathbb{S} := \left\{ s = (s_1, \dots, s_{2k-1}) \in \mathbb{R}_+^{2k-1} : \sum_{i=1}^{2k-1} s_i = 1 \right\}.$$

3.1.1. Наборы точек $\{t_i = t_i(s)\}_{i=0}^{2k-1}$, $\{d_i = d_i(s)\}_{i=1}^k$, $\{\bar{t}_i = \bar{t}_i(s)\}_{i=1}^{k-1}$. Для фиксированного $s = (s_1, \dots, s_{2k-1}) \in \mathbb{S}$ мы введем наборы точек

$$t_0(s) := 0, \quad t_i(s) = \sum_{j=1}^i s_j, \quad i = 1, \dots, 2k-1, \quad (1.1)$$

$$d_i(s) = \max\{t_{2k-i}(s); \alpha_n\}, \quad i = 1, \dots, k; \quad (1.2)$$

$$\bar{t}_i(s) = \max\{\alpha_{2i-1}; \min\{\alpha_{2i}; t_i(s)\}\}, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (1.3)$$

Эквивалентно, для $i = 1, \dots, k-1$

$$\bar{t}_i(s) = \begin{cases} \alpha_{2i-1}, & t_i(s) < \alpha_{2i-1}, \\ t_i(s), & \alpha_{2i-1} \leq t_i(s) \leq \alpha_{2i}, \\ \alpha_{2i}, & t_i(s) > \alpha_{2i}. \end{cases} \quad (1.4)$$

3.1.2. Отрезки $\{I_i(s) = [u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)]\}_{i=1}^{k-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. 1) Если

$$\left| \int_{\alpha_{2j-1}}^{\bar{t}_j(s)} \varphi(t) dt \right| < \left| \int_{d_{j+1}(s)}^{d_j(s)} \varphi(t) dt \right|, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

ПОЛОЖИМ

$$u_{2j}(s) := \alpha_{2j-1}, \quad u_{2j+1}(s) \in (\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}): \int_{u_{2j}(s)}^{u_{2j+1}(s)} \varphi(t) dt = - \int_{d_{j+1}(s)}^{d_j(s)} \varphi(t) dt. \quad (1.5)$$

2) Если

$$\left| \int_{\alpha_{2j-1}}^{\bar{t}_j(s)} \varphi(t) dt \right| \geq \left| \int_{d_{j+1}(s)}^{d_j(s)} \varphi(t) dt \right|, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

ПОЛОЖИМ

$$u_{2j+1}(s) := \bar{t}_j(s), \quad u_{2j}(s) \in (\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}): \int_{u_{2j}(s)}^{u_{2j+1}(s)} \varphi(t) dt = - \int_{d_{j+1}(s)}^{d_j(s)} \varphi(t) dt. \quad (1.6)$$

ПОЛОЖИМ $I_i(s) := [u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)]$, $i = 1, \dots, k-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.1. Существование и единственность точки $u_{2j+1}(s)$ на отрезке $[\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$ в случае 1) и $u_{2j}(s)$ на отрезке $[\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$ для $j = 1, \dots, k-1$ в случае 2) определения 3.1.1 немедленно следует из монотонности первообразной Φ ядра φ на каждом из промежутков $[a_{2j-1}, a_{2j}]$, $j = 1, \dots, k-1$, и свойства (0.3) амплитуды ядра Φ . Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{d_{j+1}(s)}^{d_j(s)} \varphi(t) dt \right| &= \int_{d_{j+1}(s)}^{d_j(s)} |\varphi(t)| dt \leq \int_{\alpha_n}^1 |\varphi(t)| dt \\ &= \int_{\alpha_n}^1 |\psi(t)| dt = |\Psi(\alpha_n)| \leq \|\Psi\|_{C[0,1]} =: P, \end{aligned} \quad (1.7)$$

в то время как для $j = 1, \dots, k-1$ из (0.4) мы имеем

$$\operatorname{Im} \Phi|_{[\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]} = [-3^{2n-2j+3}P, 3^{2n-2j+2}P] \supset [0, P] = \operatorname{Im} \Phi|_{[\alpha_n, 1]}. \quad (1.8)$$

По определению 3.1.1

$$-\sum_{i=1}^{k-1} \int_{I_i(s)} \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{d_{i+1}(s)}^{d_i(s)} \varphi(x) dx = \int_{d_k(s)}^1 \varphi(x) dx. \quad (1.9)$$

Рисунок 3.1.1 иллюстрирует различные случаи определения отрезков $I_i(s) := [u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)]$, $i = 1, \dots, k-1$.

Рис. 3.1.1. Определение интервалов $[u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)]$, $i = 1, \dots, k-1$

3.1.3. Семейство ядер $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{S}}$. Зафиксируем σ : $0 < \sigma < L$ (см. (0.1)). Точка $\zeta(s) \in [d_k(s), 1] \subset (\alpha_n, 1)$ определяется из уравнения

$$\int_{d_k(s)}^{\zeta(s)} \varphi(x) dx = -\sigma \sum_{i=1}^{k-1} |I_i(s)|. \quad (1.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.2. Существование и единственность точки $\zeta(s)$ на $[d_k(s), 1]$ следует из (1.9) и неравенства $\sigma < L$:

$$\int_{d_k(s)}^1 \varphi(x) dx = - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{I_i(s)} \varphi(x) dx < -\sigma \sum_{i=1}^{k-1} |I_i(s)|. \quad (1.11)$$

Точка $c_s \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ однозначно определяется любым из двух эквивалентных уравнений

$$\int_{c_s}^{\zeta(s)} \varphi(x) dx = 0 \quad \sim \quad \Phi(c_s) = \Phi(\zeta(s)), \quad c_s \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]. \quad (1.12)$$

Точка $C_s \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ однозначно определяется любым из двух эквивалентных уравнений

$$\int_{C_s}^{d_k(s)} \varphi(x) dx = 0 \quad \sim \quad \Phi(C_s) = \Phi(d_k(s)), \quad C_s \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]. \quad (1.13)$$

Поскольку $d_k(s) < \zeta_s \quad \forall s \in \mathbb{S}$, справедливы неравенства $c_s < C_s \quad \forall s \in \mathbb{S}$ (см. рис. 3.1.2).

РИС. 3.1.2. Определение точек c_s и C_s

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.3. Уравнение $\Phi(x) = \Phi(\zeta(s))$ однозначно разрешимо на отрезке $[\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}]$, поскольку справедливо включение $\zeta(s) \in [\alpha_{2k}, 1]$ и имеется свойство (0.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.2. Семейства ядер $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ и $\{\varphi_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ определяются следующим образом:

$$\psi_s(x) := \begin{cases} \sigma, & x \in \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)], \\ \varphi(x), & x \in [0, c_s] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)], \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\varphi_s(x) := \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)], \\ \varphi(x), & x \in [0, C_s] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}(s), u_{2i+1}(s)]. \end{cases} \quad (1.15)$$

ЛЕММА 3.1.1. *Следующие включения имеют место для ядер ψ_s , определенных в (1.14):*

$$\psi_s \in \mathcal{M}_n^0[0, c_s] \quad \forall s \in \mathbb{S}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (1.14)

$$(-1)^i \operatorname{sign}(\psi_s; [\bar{\alpha}_{i-1}, \bar{\alpha}_i]) > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\{\bar{\alpha}_i := \alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$ и $\bar{\alpha}_n := c_s$.

Кроме того, $\int_0^{c_s} \psi_s(t) dt = 0$. Действительно, используя тот факт, что φ имеет нулевое среднее на $[0, 1]$, определение (1.14) и соотношения (1.9), (1.10), (1.12), мы выводим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_0^{c_s} \psi_s(x) dx &= \int_0^{c_s} \psi_s(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= \int_0^{c_s} (\psi_s(x) - \varphi(x)) dx - \int_{c_s}^1 \varphi(x) dx \\ &\stackrel{(1.14)}{=} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{I_j(s)} (\sigma - \varphi(x)) dx - \int_{c_s}^{\zeta(s)} \varphi(x) dx - \int_{\zeta(s)}^1 \varphi(x) dx \\ &\stackrel{(1.9), (1.12)}{=} \sigma \sum_{j=1}^{k-1} |I_j(s)| + \int_{d_k(s)}^1 \varphi(x) dx - \int_{\zeta(s)}^1 \varphi(x) dx \\ &= \sigma \sum_{j=1}^{k-1} |I_j(s)| + \int_{d_k(s)}^{\zeta(s)} \varphi(x) dx \stackrel{(1.10)}{=} 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Аналогичная аргументация с использованием (1.9), (1.13) приводит нас к следующим эквивалентным соотношениям для всех $s \in \mathbb{S}$:

$$\int_0^{C_s} \varphi(x) dx - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{u_{2i}}^{u_{2i+1}} \varphi(x) dx = 0 \quad \sim \quad \int_0^{C_s} \varphi_s(x) dx = 0. \tag{1.17}$$

Вспомнив определение 1.6.1 класса ядер $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}, \delta}$, мы докажем следующее следствие леммы 3.1.1.

ЛЕММА 3.1.2. *Пусть $\bar{\alpha} := \{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\delta := \min\{z - \alpha_{n-1}; \alpha_n - z\}$, где z — нуль ядра Ψ на (α_{n-1}, α_n) . Тогда $\psi_s \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}, \delta}$ для всех $s \in \mathbb{S}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\psi_s \in \mathcal{M}_n^0[0, c_s]$, нам остается проверить неравенство $c_s \geq \alpha_{n-1} + \delta$ для всех $s \in \mathbb{S}$. Согласно (1.12) точка c_s является решением уравнения

$$\Phi(x) = \Phi(\zeta(s)), \quad x \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n], \tag{1.18}$$

где $\zeta(s)$ — точка на $[\alpha_n, 1]$, определенная уравнением (1.10). Далее, согласно (2.2.3) ядро Ψ и его ε -модификация $\Phi = \Psi_\varepsilon$ совпадают вне каждого из отрезков $[\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]$ длины ε , которому принадлежит точка α_i . Следовательно,

неравенства $\alpha_{n-1} + \varepsilon < z < \alpha_n - \varepsilon$ для $\varepsilon < \delta$ гарантируют, что $\Phi(z) = \Psi(z) = 0$, т. е. z — нуль функции Φ на интервале (α_{n-1}, α_n) .

Теперь мы можем заметить, что решения уравнения (1.18) замечают отрезок $[z, \alpha_n]$, когда точка $\zeta(s)$ пробегает отрезок $[\alpha_n, 1]$. Таким образом, все ядра ψ_s лежат в классе $M_{\alpha, \delta}$ для $\delta := z - \alpha_{n-1}$ (см. рис. 3.1.2).

3.1.4. Строение экстремальных ω -сплайнов x_s . Определим функцию $x_s(t)$ на $[0, c_s]$ как решение задачи

$$\int_0^{c_s} h(t) \psi_s(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, c_s], \quad h(0) = 0. \quad (1.19)$$

Из теоремы 1.3.3 (справедливой для ядер с $n - 1$ точкой перемены знака в соответствии с индуктивным допущением), примененной к семейству ядер $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ из $\mathcal{M}_{\alpha, \delta}$, немедленно вытекает, что семейство экстремальных функций $\{x_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ задач (1.19) непрерывно зависит от параметра s в равномерной метрике на $\mathbb{S}$:

$$\forall s \in \mathbb{S} \quad \|x_{s'} - x_s\|_{C[0, \min\{c_s, c_{s'}\}]} \rightarrow 0, \quad \mathbb{S} \ni s' \rightarrow s. \quad (1.20)$$

Индуктивное предположение — теорема X для ядер из $\mathcal{M}_n^0[a, b]$ — описывает структуру экстремальных функций задач (1.19).

Структура экстремалей x_s . Для каждого $s \in \mathbb{S}$ существует и единственно экстремальное разбиение $\mathcal{V}(s) = \{\{A_i(s)\}_{i=1}^{n-1}, \{B_{ij}(s), C_{ji}(s)\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}\}$ отрезка $[0, c_s]$, наделенное следующими свойствами.

- (A) $\alpha_i \in A_i(s)$, $i = 1, \dots, n - 1$;
- (B) $\int_{B_{ij}(s) \cup C_{ji}(s)} \psi_s(t) dt = 0$, $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$;
- (C) $\int_{A_i(s)} \psi_s(t) dt = 0$, $i = 1, \dots, n - 1$;
- (D) для всех пар $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$ функция x_s экстремальна в задаче

$$\int_0^{c_s} h(t) \psi_{ij,s}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, c_s], \quad (1.21)$$

$$\psi_{ij,s}(t) := \psi(t) \cdot \mathcal{X}(B_{ij}(s) \cup C_{ji}(s); t), \quad t \in [0, c_s]; \quad (1.22)$$

- (E) для всех $i = 1, \dots, n - 1$ функция x_s экстремальна в задаче

$$\int_0^{c_s} h(t) \psi_{i,s}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, c_s], \quad (1.23)$$

$$\psi_{i,s}(t) := \psi_s(t) \cdot \mathcal{X}(A_i(s); t), \quad t \in [0, c_s]. \quad (1.24)$$

Как мы заметили в п. 1.2.1, каждое из ядер

$$\Psi_{ij,s}(t) = \int_0^t \psi_{ij,s}(y) dy, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n),$$

$$\Psi_{i,s}(t) = \int_0^t \psi_{i,s}(y) dy, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

является *простым* в смысле определения 0.5.1. Согласно (1.2.3)–(1.2.6) производная x_s определяется следующими формулами:

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1}\omega'(\rho_{ij,s}(t) - t), & t \in B_{ij}(s), (i, j) \in \mathcal{P}(n), \\ (-1)^{i+1}\omega'(t - \rho_{ij,s}^{-1}(t)), & t \in C_{ji}(s), (i, j) \in \mathcal{P}(n), \end{cases} \quad (1.25)$$

где $\rho_{ij,s}: B_{ij}(s) \rightarrow C_{ji}(s)$ задаются уравнениями

$$\Psi_{ij,s}(t) = \Psi_{ij,s}(\rho_{ij,s}(t)), \quad t \in B_{ij}(s), \quad \rho_{ij,s}(t) \in C_{ji}(s), \quad (1.26)$$

и

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1}\omega'(\rho_{i,s}(t) - t), & t \in [\gamma_{3i-1}(s), \alpha_i], i = 1, \dots, n-1, \\ (-1)^{i+1}\omega'(t - \rho_{i,s}^{-1}(t)), & t \in [\alpha_i, \gamma_{3i}(s)], i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (1.27)$$

где $\rho_{i,s}: [\gamma_{3i-1}(s), \alpha_i] \rightarrow [\alpha_i, \gamma_{3i}(s)]$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \Psi_{i,s}(t) &= \Psi_{i,s}(\rho_{i,s}(t)), \quad t \in [\gamma_{3i-1}(s), \alpha_i], \\ \rho_{i,s}(t) &\in [\alpha_i, \gamma_{3i}(s)], \quad [\gamma_{3i-1}(s), \gamma_{3i}(s)] := A_i(s). \end{aligned} \quad (1.28)$$

3.1.5. Свойства функций x_s и разбиений $\mathcal{V}(s)$. На основании теоремы 1.2.3 мы заключаем, что производная $\frac{d}{dt}x_s$ меняет знак в точности один раз на каждом из отрезков $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-2$, и $[\alpha_{n-1}, c_s]$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.1.1. Для каждого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ через $z_i(s)$ обозначим точку перемены знака $\frac{d}{dt}x_s$ на отрезке $[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$.

На основании утверждения $\{\psi_s \in M_{\overline{\alpha}, \delta} \forall s \in \mathbb{S}\}$ леммы 3.1.2 и предложения 1.6.1 мы заключаем, что длины интервалов $A_i(s)$, $i = 1, \dots, n-1$, ограничены снизу положительной константой $\mathcal{A}_{\omega, \overline{\alpha}, \delta}$, зависящей только от ω и ψ :

$$|A_i(s)| > \mathcal{A}_{\omega, \overline{\alpha}, \delta}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \forall s \in \mathbb{S}. \quad (1.29)$$

Сделаем еще одно наблюдение, которое нам понадобится в последующем анализе. Из формул (1.25)–(1.28), определяющих производную $\frac{d}{dt}x_s$ на атомах $\{A_i(s)\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{C_{ji}(s)\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$, мы немедленно заключаем, что

$$\frac{d}{dt}x_s(t) < -\omega'(c_s - t), \quad t \in (z_i(s), \alpha_{2i}), \quad i = 1, \dots, k-1, \quad s \in \mathbb{S}. \quad (1.30)$$

Действительно, неравенства (1.30) следуют из (1.25), (1.27), поскольку $[z_i(s), \alpha_{2i}] = \bigcup_{j \in J_i(n)} B_{ij}(s) \cup [\gamma_{3i-1}(s), \alpha_{2i}]$, все атомы разбиения $\mathcal{V}(s)$ принадлежат $[0, c_s]$ и $-\omega'(t)$ — строго возрастающая функция.

3.1.6. Функции $\{h_{i,s}\}_{i=1}^{k-1}$ **и** $\{H_{i,s}\}_{i=1}^k$. Зададим функции

$$r_{j,s}: [u_{2j}(s), u_{2j+1}(s)] \rightarrow [d_{j+1}(s), d_j(s)]$$

соотношениями

$$\begin{aligned} \int_{u_{2j}(s)}^x \psi_\varepsilon(t) dt &= \int_{d_j(s)}^{r_{j,s}(x)} \psi_\varepsilon(t) dt, \\ u_{2j}(s) \leq x \leq u_{2j+1}(s), \quad j &= 1, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

На $[u_{2j+1}(s), 1]$, $j = 1, \dots, k-1$, определим функции $h_{j,s}$ следующим образом:

$$h_{j,s}(x) := \begin{cases} -\omega'(r_{j,s}(x) - x), & u_{2j}(s) \leq x \leq u_{2j+1}(s), \\ -\omega'(x - u_{2j+1}(s)), & u_{2j+1}(s) \leq x \leq d_{j+1}(s), \\ -\omega'(x - r_{j,s}^{-1}(x)), & d_{j+1}(s) \leq x \leq d_j(s), \\ -\omega'(x - u_{2j}(s)), & d_j(s) \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.32)$$

На промежутке $[u_{2j+1}(s), 1]$ мы определим функции $H_{j,s} \in H^\omega[u_{2j+1}(s), 1]$ посредством формул

$$\begin{aligned} H_{j,s}(t) &= x_s(u_{2j+1}(s)) + \int_{u_{2j+1}(s)}^t h_{j,s}(\xi) d\xi, \\ u_{2j+1}(s) \leq t \leq 1, \quad j &= 1, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

На отрезке $[C_s, 1]$ мы введем в рассмотрение функцию $H_{k,s}$:

$$H_{k,s}(t) = x_s(c_s) - \omega(t - C_s), \quad C_s \leq t \leq 1. \quad (1.34)$$

ЛЕММА 3.1.3. Для функций $\{h_{j,s}\}_{j=1}^{k-1}$, определенных в (1.33), и $H_{k,s}$ из (1.34) справедливы следующие неравенства.

1) Для каждой пары индексов (i, j) , $1 \leq i < j \leq k-1$,

$$h_{i,s}(x) > h_{j,s}(x), \quad x \in [C_s, 1]. \quad (1.35)$$

2) Для всех $i = 1, \dots, k-1$

$$h_{i,s}(x) > \frac{d}{dx} H_{k,s}(x), \quad x \in [C_s, 1]. \quad (1.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированной пары (i, j) , $1 \leq i < j \leq k-1$, проверка справедливости неравенств (1.35) проводится отдельно для x из каждого отрезка

$$(1) [C_s, d_{j+1}(s)], \quad (2) [d_{j+1}(s), d_j(s)], \quad (3) [d_j(s), d_{i+1}(s)], \\ (4) [d_{i+1}(s), d_i(s)], \quad (5) [d_i(s), 1].$$

Повсюду в последующих неравенствах мы используем свойство убывания производной ω' строго выпуклого модуля непрерывности, неравенства $\alpha_{2i-1} \leq u_{2i}(s) \leq u_{2i+1}(s) \leq \alpha_{2i}$ и

$$-\omega'(x - u_{2i+1}(s)) \leq h_{i,s}(x) \leq -\omega'(x - u_{2i}(s)), \quad x \in [C_s, 1], \quad i = 1, \dots, k-1;$$

$$(1) \quad h_{i,s}(x) := -\omega'(x - u_{2i+1}(s)) > -\omega'(x - u_{2j+1}(s)) =: h_{j,s}(x); \\ (2) \quad h_{i,s}(x) := -\omega'(x - u_{2i+1}(s)) > -\omega'(x - u_{2j}(s)) \\ \geq -\omega'(x - r_{j,s}^{-1}(x)) =: h_{j,s}(x); \\ (3) \quad h_{i,s}(x) := -\omega'(x - u_{2i+1}(s)) > -\omega'(x - u_{2j}(s)) =: h_{j,s}(x); \\ (4) \quad h_{i,s}(x) := -\omega'(x - r_{i,s}^{-1}(x)) > -\omega'(x - u_{2i+1}(s)) \\ > -\omega'(x - u_{2j}(s)) =: h_{j,s}(x); \\ (5) \quad h_{i,s}(x) := -\omega'(x - u_{2i}(s)) > -\omega'(x - u_{2j}(s)) =: h_{j,s}(x).$$

Наконец, из включений $u_{2i+1}(s) \in [\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$, $i = 1, \dots, k-1$, и неравенства $\alpha_{2k-2} < C_s$ (так как $C_s \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$) мы выводим следующие неравенства для $i = 1, \dots, k-1$:

$$h_{i,s}(x) \geq -\omega'(x - u_{2i+1}(s)) > -\omega'(x - C_s) =: \frac{d}{dx} H_{k,s}(x), \quad C_s \leq x \leq 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.4. Пусть для некоторой пары индексов (i, j) , $1 \leq i < j \leq k$, существует такая точка θ на интервале $(C_s, 1)$, что $H_{i,s}(\theta) = H_{j,s}(\theta)$. Тогда

$$H_{i,s}(t) > H_{j,s}(t), \quad \theta < t < 1; \quad H_{i,s}(t) < H_{j,s}(t), \quad C_s < t < \theta. \quad (1.37)$$

3.1.7. Продолжение функции x_s на $[c_s, 1]$ и наборы точек $\{\tau_i(s)\}_{i=0}^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.3. Для каждой пары индексов (i, j) , $1 \leq i < j \leq k$, и $s \in \mathbb{S}$ определим точку γ_s^{ij} на интервале $[C_s, 1]$ следующим образом:

$$\gamma_s^{ij} := \begin{cases} \theta, & \text{если } H_{i,s}(\theta) = H_{j,s}(\theta) \text{ для некоторого } \theta \in [C_s, 1], \\ C_s, & \text{если } H_{i,s}(x) > H_{j,s}(x) \quad \forall x \in [C_s, 1], \\ 1, & \text{если } H_{i,s}(x) < H_{j,s}(x) \quad \forall x \in [C_s, 1]. \end{cases} \quad (1.38)$$

Следующая лемма – следствие непрерывной зависимости набора функций $\{H_{i,s}\}_{i=1}^{k-1}$ от $s \in \mathbb{S}$, леммы 3.1.3 и ее следствия 3.1.4.

ЛЕММА 3.1.5. *Отображения $\gamma^{ij} : \mathbb{S} \rightarrow [0, 1]$ ($\gamma^{ij} : s \mapsto \gamma_s^{ij}$) непрерывны.*

Пока функция x_s определена на интервале $[0, c_s]$. Продолжим x_s на отрезок $(c_s, 1]$ формулой

$$x_s(t) = \begin{cases} x_s(c_s), & t \in (c_s, C_s), \\ \max_{1 \leq i \leq k} H_{i,s}(t), & t \in [C_s, 1]. \end{cases} \quad (1.39)$$

Из следствия 3.1.4 вытекает, что интервал $[C_s, 1]$ распадается на такие подынтервалы $\{[v_i(s), v_{i+1}(s)]\}_{i=1}^{j(s)-1}$: $C_s =: v_1(s) < v_2(s) < \dots < v_{j(s)}(s) := 1$ при $j(s) \leq k+1$, что

$$[v_i(s), v_{i+1}(s)] = \{t \in [C_s, 1] : x_s(t) = H_{l_i(s),s}(t)\} \quad (1.40)$$

для некоторых

$$1 \leq l_i(s) \leq k, \quad i = 1, \dots, j(s) - 1.$$

Рисунок 3.1.3 иллюстрирует ситуацию в случае $k = 6$.

Следствие 3.1.4 гарантирует, что индексы $\{l_i(s)\}_{i=1}^{j(s)-1}$ в (1.30) *убывают*:

$$l_1(s) > l_2(s) > \dots > l_{j(s)-1}(s). \quad (1.41)$$

Рис. 3.1.3. Определение точек τ_i , $i = 1, \dots, k+1$, в случае $k = 6$

ЛЕММА 3.1.6. Индексы $\{l_i(s)\}_{i=1}^{j(s)-1}$, определенные в (1.40), обладают свойством

$$l_1(s) = k \quad \forall s \in \mathbb{S}, \quad (1.42)$$

или, эквивалентно,

$$x_s(t) = H_{k,s}(t), \quad t \in [C_s, v_2(s)], \quad C_s < v_2(s),$$

где набор точек $\{v_i(s)\}_{i=1}^{j(s)-1}$ определен в (1.40).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (1.39) функции x_s на $[0, C_s]$ становится ясно, что лемма 3.1.6 будет доказана, если мы установим неравенства

$$H_{i,s}(C_s) < H_{k,s}(C_s), \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \forall s \in \mathbb{S}. \quad (1.43)$$

По определению $x_s|_{[0, c_s]} \in H^\omega[0, c_s]$ как экстремальная функция в задаче (1.19). В частности,

$$x_s(c_s) - x_s(u_{2i+1}(s)) \geq -\omega(c_s - u_{2i+1}(s)), \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (1.44)$$

Из определений (1.31)–(1.33) и согласно формуле (0.5.9) из доказательства предложения 0.5.3 для $i \in \{1, \dots, k-1\}$ мы имеем

$$\begin{aligned} H_{i,s}(c_s) - x_s(u_{2i+1}(s)) &= H_{i,s}(c_s) - H_{i,s}(u_{2i+1}(s)) \\ &= - \int_{u_{2i+1}(s)}^{c_s} \omega'(t - u_{2i+1}(s)) dt \\ &= -\omega(c_s - u_{2i+1}(s)). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Из (1.44), (1.45) мы заключаем, что

$$H_{i,s}(c_s) \leq x_s(c_s), \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (1.46)$$

Наконец, в соответствии с (1.46), определением (1.34) и нашим наблюдением $c_s < C_s$ в п. 3.1.3

$$H_{i,s}(C_s) < H_{i,s}(c_s) \leq x_s(c_s) =: H_{k,s}(C_s), \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (1.47)$$

Одним из следствий леммы 3.1.6 является непрерывность функции x_s в точке C_s , а значит, и на $[0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.4. Набор $\{\tau_i(s)\}_{i=1}^{k+1}$: $C_s =: \tau_{k+1}(s) \leq \dots \leq \tau_1(s) := 1$, вводится формулами

$$\begin{aligned} \tau_{i(s)+1}(s) &:= v_i(s), \quad i = 1, \dots, j(s) - 1, \\ \tau_{i+1}(s) &= v_{m+1}(s), \quad l_{m+1}(s) < i < l_m(s), \quad m \in \{2, \dots, j(s) - 1\}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Мы обращаем внимание читателя на то, что если $i = l_m(s)$ для некоторого индекса m , $1 \leq m \leq j(s) - 1$, то $\tau_{l_m(s)+1}(s) < \tau_{l_m(s)}(s)$ и

$$[\tau_{l_m(s)+1}(s), \tau_{l_m(s)}(s)] := [v_m(s), v_{m+1}(s)] = \{t \in [C_s, 1] : x_s(t) = H_{l_m(s), s}(t)\}. \quad (1.49)$$

Если же $i \neq l_m(s)$, $m = 1, \dots, j(s) - 1$, то отрезок $[\tau_{i+1}(s), \tau_i(s)]$ вырождается в точку, т.е. $\tau_{i+1}(s) = \tau_i(s)$ (см. рис. 3.1.3). Отметим, что с учетом представления (1.49) результат леммы 3.1.6 может быть переформулирован следующим образом:

$$[\tau_{k+1}(s), \tau_k(s)] = [C_s, v_2(s)], \quad v_2(s) > C_s. \quad (1.50)$$

Набор $\{\tau_i(s)\}_{i=1}^{k+1}$ непрерывно зависит от s , поскольку он допускает следующее индуктивное представление в терминах точек γ_s^{ij} , $1 \leq i < j \leq k$, определенных в (1.35):

$$\begin{aligned} \tau_{k+1}(s) &:= C_s, \quad \tau_k(s) := \min_{1 \leq i \leq k-1} \{\gamma_s^{ik}\}, \\ \tau_l(s) &:= \max \left\{ \min_{1 \leq i \leq l-1} \gamma_s^{il}; \tau_{l+1}(s) \right\}, \quad l = k-1, \dots, 2, \quad \tau_1(s) := 1. \end{aligned} \quad (1.51)$$

3.1.8. Набор точек $\{T_j(s)\}_{j=0}^{k-1}$. Для каждого $j = 1, \dots, k-1$ положим

$$W_j(s) := - \int_{u_{2j}(s)}^{u_{2j+1}(s)} \omega'(r_{j,s}(x) - x) dx =: H_{j,s}(u_{2j+1}(s)) - H_{j,s}(u_{2j}(s)), \quad (1.52)$$

где функции $\{r_{j,s}\}_{j=1}^{k-1}$ определены в (1.31).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.5. Пусть $U_j(s) := \min\{u_{2j}(s); z_j(s)\}$, $j = 1, \dots, k-1$, где $z_j(s)$ — точка перемены знака производной $\frac{d}{dt}x_s(t)$ на отрезке $[\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$.

1) Если $x_s(\alpha_{2j}) - x_s(U_j(s)) < W_j(s)$, введем точку $T_j(s) \in [z_j(s), \alpha_{2j}]$ соотношением

$$x_s(T_j(s)) - x_s(U_j(s)) = W_j(s), \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (1.53)$$

2) Если $x_s(\alpha_{2j}) - x_s(U_j(s)) \geq W_j(s)$, положим $T_j(s) := \alpha_{2j}$.

Положим $T_0(s) := 0 \quad \forall s \in \mathbb{S}$.

Корректность определения вытекает из монотонного убывания функции $x_s(\cdot) - x_s(U_j(s))$ на отрезке $[z_j(s), \alpha_{2j}]$ (см. обозначение 3.1.1). Отметив, что неравенство $u_{2i}(s) < u_{2i+1}(s)$ влечет за собой строгое неравенство $u_{2i}(s) < T_i(s)$, мы докажем следующее свойство точек $\{T_i(s)\}_{i=1}^{k-1}$.

ЛЕММА 3.1.7. Если для некоторого индекса $j \in \{1, \dots, k-1\}$ справедливо включение $u_{2j}(s) \in (z_j(s), \alpha_{2j}]$ и $u_{2j}(s) < u_{2j+1}(s)$, то

$$T_j(s) < u_{2j+1}(s). \quad (1.54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае $U_j(s) := \min\{u_{2j}(s); z_j(s)\} = z_j(s) < u_{2j}(s)$ и $x_s(u_{2j}(s)) < x_s(U_j(s))$, поскольку x_s убывает на $[z_j(s), \alpha_{2j}]$. Следовательно, согласно нашему наблюдению в (1.30) мы имеем

$$\begin{aligned} x_s(T_j(s)) - x_s(U_j(s)) &< x_s(T_j(s)) - x_s(u_{2j}(s)) \\ &= \int_{u_{2j}(s)}^{T_j(s)} \frac{d}{dt} x_s(t) dt < - \int_{u_{2j}(s)}^{T_j(s)} \omega'(c_s - t) dt \\ &= \omega(c_s - T_j(s)) - \omega(c_s - u_{2j}(s)). \end{aligned} \quad (1.55)$$

С другой стороны, по определению (1.31) для $\forall x \in [u_{2j}(s), u_{2j+1}(s)]$ справедливы включения $r_{j,s}(x) \in [d_{j+1}(s), d_j(s)] \subseteq [C_s, 1] \subset (c_s, 1]$ для всех $j = 1, \dots, k-1$, из которых мы получаем неравенства

$$\begin{aligned} W_j(s) &:= - \int_{u_{2j}(s)}^{u_{2j+1}(s)} \omega'(r_{j,s}(t) - t) dt \\ &\geq - \int_{u_{2j}(s)}^{u_{2j+1}(s)} \omega'(c_s - t) dt \\ &= \omega(c_s - u_{2j+1}(s)) - \omega(c_s - u_{2j}(s)). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Из неравенства $W_j(s) \leq x_s(T_j(s)) - x_s(U_j(s))$, верного в обоих случаях определения 3.1.5, и комбинации оценок (1.55) и (1.56) следует, что

$$\omega(c_s - u_{2j+1}(s)) < \omega(c_s - T_j(s)). \quad (1.57)$$

Поскольку ω строго возрастает, из неравенства (1.57) мы выводим требуемое утверждение (1.54).

3.1.9. Отображение Брауэра $\varkappa: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.6. Отображение $\varkappa: s \mapsto (\varkappa_1(s), \dots, \varkappa_{2k-1}(s))$ из $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}^{2k-1}$ определяется следующим образом:

$$\varkappa_i(s) = \begin{cases} T_i(s) - T_{i-1}(s), & i = 1, \dots, k-1, \\ \tau_k(s) - T_{k-1}(s), & i = k, \\ \tau_{2k-i}(s) - \tau_{2k-i+1}(s), & i = k+1, \dots, 2k-1, \end{cases} \quad (1.58)$$

где набор $\{\tau_i(s)\}_{i=1}^k$ определен в (1.48) (или (1.51)), а набор $\{T_i(s)\}_{i=0}^{k-1}$ введен в рассмотрение определением 3.1.5.

ЛЕММА 3.1.8. Функция $\varkappa$ отображает симплекс $\mathbb{S}$ в себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению точек $\{\tau_i(s)\}_{i=1}^k$ и $\{T_i(s)\}_{i=0}^{k-1}$ имеем $T_0(s) = 0$ и $\tau_1(s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{S}$. Следовательно, из (1.58) вытекает, что $\sum_{i=1}^{2k-1} \kappa_i(s) = \tau_1(s) - T_0(s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{S}$. Остается показать, что компоненты $\{\kappa_i(s)\}_{i=1}^{k-1}$ вектора $\kappa(s)$ неотрицательны. По определению 3.1.5 $T_i(s) \in [\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$, $i = 1, \dots, k-1$. А по определению (1.48), точки $\{\tau_i(s)\}_{i=1}^k$ принадлежат отрезку $[C_s, 1] \subset [\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}]$ и не возрастают. Суммируя наши наблюдения, мы приведем цепочку неравенств, доказывающую неотрицательность $\{\kappa_i(s)\}_{i=1}^{2k-1}$:

$$0 =: T_0(s) \leq T_1(s) \leq \dots \leq T_{k-1}(s) \leq \tau_k(s) \leq \tau_{k-1}(s) \leq \dots \leq \tau_1(s) := 1. \quad (1.59)$$

3.2. Свойства решений уравнения $\kappa(s^*) = s^*$. Непрерывная зависимость наборов точек $\{T_i(s)\}_{i=1}^{k-1}$ и $\{\tau_i(s)\}_{i=1}^k$ от параметра s влечет за собой непрерывность отображения $s \mapsto \kappa(s)$ на $\mathbb{S}$. Теорема Брауэра (теорема 0.6.1) гарантирует существование неподвижной точки $s^* \in \mathbb{S}$: $\kappa(s^*) = s^* = (s_1^*, \dots, s_{2k-1}^*)$.

3.2.1. Свойства наборов $\{t_i^*, T_i^*\}_{i=1}^{k-1}$. Для удобства мы введем следующие обозначения.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.2.1. Положим

$$\begin{aligned} \{t_i^* := t_i(s^*), u_i^* := u_i(s^*)\}_{i=1}^{2k-1}; \quad \{d_i^* := d_i(s^*), \tau_i^* := \tau_i(s^*)\}_{i=1}^k; \\ \{\bar{t}_i^* := \bar{t}_i(s^*), T_i^* := T_i(s^*), W_i^* = W_i(s^*), z_i^* := z_i(s^*), U_i^* := U_i(s^*)\}_{i=1}^{k-1}; \\ S^*(x) := S_{s^*}(x); \quad C^* := C_{s^*}; \quad c^* := c_{s^*}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

По определению (1.1) $t_0(s^*) = 0$ и $s_i^* = t_i(s^*) - t_{i-1}(s^*)$, $i = 1, \dots, 2k-1$. Следовательно, уравнение $\kappa(s^*) = s^*$ эквивалентно соотношениям

$$t_i(s^*) = \begin{cases} \tau_{2k-i}(s^*), & i = k, \dots, 2k-1, \\ T_i(s^*), & i = 1, \dots, k-1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Первый шаг в анализе свойств вектора s^* – проверка следующих соотношений для точек $\{T_i^*\}_{i=1}^{k-1}$.

ЛЕММА 3.2.1. Если $u_{2i}^* < u_{2i+1}^*$ для некоторого $i = 1, \dots, k-1$, то

$$t_i^* = T_i^* < \alpha_{2i}. \quad (2.3)$$

Если $u_{2i}^* = u_{2i+1}^*$, то $u_{2i}^* = T_i^* = t_i^* = u_{2i+1}^* = z_i^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 3.1.5 $T_i^* \in [z_i^*, \alpha_{2i}]$. Согласно (2.2) $T_i^* = t_i^*$, $i = 1, \dots, k-1$. Следовательно, неравенство в (2.3) не выполняется для некоторого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ тогда и только тогда, когда $t_i^* = \alpha_{2i}$.

Предположим, что $t_i^* = \alpha_{2i}$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Тогда по определению 3.1.1 (случай 2)) имеют место равенства $u_{2i+1}^* = \alpha_{2i}$ и

$$\int_{u_{2i}^*}^{\alpha_{2i}} \varphi(t) dt = - \int_{d_{i+1}^*}^{d_i^*} \varphi(t) dt. \quad (2.4)$$

Следовательно, из включений $d_i^* \in [\alpha_n, 1]$, $i = 1, \dots, k$, и свойства (2.2.4) мы получаем

$$\left| \int_{u_{2i}^*}^{\alpha_{2i}} \varphi(t) dt \right| = \left| \int_{d_{i+1}^*}^{d_i^*} \varphi(t) dt \right| \leq \int_{\alpha_n}^1 |\varphi(t)| dt = |\Phi(\alpha_n)| = \Psi(\alpha_n) \leq P, \quad (2.5)$$

где $P := \|\Psi\|_{C[0,1]}$.

Напомним читателю свойства (2.2.3) ε -модификаций $\varphi = \psi_\varepsilon$ и $\Phi = \Psi_\varepsilon$: функции ψ и φ , Ψ и Φ попарно совпадают вне интервалов $(\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon))$ длины ε , содержащих точки α_i при $i = 1, \dots, n-1$. Следовательно,

$$\Phi(\gamma_1^i(\varepsilon)) = \Psi(\gamma_1^i(\varepsilon)) = \Psi(\gamma_2^i(\varepsilon)) = \Phi(\gamma_2^i(\varepsilon))$$

и в соответствии с (2.2.4)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1^i(\varepsilon)}^{\alpha_{2i}} \varphi(x) dx \right| &= |\Phi(\alpha_{2i})| - |\Phi(\gamma_1^i(\varepsilon))| = |\Phi(\alpha_{2i})| - |\Psi(\gamma_1^i(\varepsilon))| \\ &\geq |\Phi(\alpha_{2i})| - \|\Psi\|_{C[0,1]} := (3^{2n-2i} - 1)P > 3^n P. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из неравенств (2.5), (2.6) вытекает, что

$$\left| \int_{u_{2i}^*}^{\alpha_{2i}} \varphi(t) dt \right| < \left| \int_{\gamma_1^i(\varepsilon)}^{\alpha_{2i}} \varphi(t) dt \right|. \quad (2.7)$$

Поскольку функция $x \mapsto \left| \int_x^{\alpha_{2i}} \varphi(t) dt \right|$ строго убывает на $[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$, неравенство (2.7) означает, что точка u_{2i}^* принадлежит отрезку $[\gamma_1^i(\varepsilon), \alpha_{2i}]$. В частности, точка u_{2i}^* лежит в ε -окрестности точки α_{2i} :

$$\alpha_{2i} - \varepsilon < u_{2i}^* < \alpha_{2i}. \quad (2.8)$$

МИКРОЛЕММА 3.2.2. Пусть $A_{2i}(s^*) =: [a_{2i}^1, a_{2i}^2]$ и $\varepsilon < \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\omega, \overline{\alpha}, \delta}$. Тогда $u_{2i}^* > a_{2i}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно оценке (1.29), нашему выбору (0.2) и свойствам атомов экстремального разбиения $\mathcal{V}(s^*)$

$$\begin{aligned} |A_{2i}(s^*)| &= a_{2i}^2 - a_{2i}^1 > \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\omega, \overline{\alpha}, \delta} > \varepsilon, \quad \alpha_{2i} \in A_{2i}(s^*), \\ \int_{A_{2i}(s^*)} \psi_{s^*}(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Предположим, что $u_{2i}^* < a_{2i}^1$. Поскольку $u_{2i+1}^* = \alpha_{2i}$, по определению (1.14) ядра ψ_s мы имеем

$$\psi_s(x) = \sigma, \quad x \in [a_{2i}^1, \alpha_{2i}] \subseteq [u_{2i}^*, u_{2i+1}^*]. \quad (2.10)$$

Поскольку $\sigma := \operatorname{ess\,inf} \psi_s$ (так как $\sigma < L < \operatorname{ess\,inf} \psi$), из свойств (2.9) и (2.10) вытекает, что

$$\{\alpha_{2i} - a_{2i}^1 \geq a_{2i}^2 - \alpha_{2i}\} \text{ и } \alpha_{2i} - a_{2i}^1 > \frac{1}{2}|A_{2i}| \geq \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta} > \varepsilon. \quad (2.11)$$

Таким образом, с учетом (2.11) и (2.8) $a_{2i}^1 < \alpha_{2i} - \varepsilon < u_{2i}^*$, что противоречит нашему предположению $u_{2i}^* < a_{2i}^1$.

Следовательно, точка z_i^* перемены знака производной $\frac{d}{dx}x_{s^*}$ на $[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$, лежащая вне $A_{2i}(s^*)$, также лежит вне отрезка $[u_{2i}^*, u_{2i+1}^*]$. Таким образом, $u_{2i}^* \in (z_i^*, \alpha_{2i}^*)$ и согласно лемме 3.1.7

$$T_i^* < u_{2i+1}^* = \alpha_{2i} = t_i^*. \quad (2.12)$$

Полученное противоречие между (2.12) и (2.2) доказывает первое утверждение леммы.

Пусть $u_{2i}^* = u_{2i+1}^*$. Тогда согласно определению 3.1.1 $d_{i+1}^* = d_i^*$. Поскольку $T_i^* = t_i^*$ и $T_i^* \in [z_i^*, \alpha_{2i}]$, то по определению (1.4) $\bar{t}_i^* = t_i^* \geq z_i^* > \alpha_{2i-1}$. Соотношения $d_{i+1}^* = d_i^*$ и $\bar{t}_i^* > \alpha_{2i-1}$ означают, что имеет место случай 2) определения 3.1.1: $u_{2i}^* = u_{2i+1}^* = \bar{t}_i^* = t_i^* = T_i^*$. В частности, $u_{2i}^* \in [z_i^*, \alpha_{2i}]$ и $U_i^* := \min\{z_i^*, u_{2i}^*\} = z_i^*$.

С другой стороны, $W_i^* = \int_{u_{2i}^*}^{u_{2i+1}^*} \omega'(r_{i,s^*}(x) - x) dx = 0$. Следовательно, имеет место случай 1) определения 3.1.5: $x_{s^*}(T_i^*) = x_{s^*}(U_i^*) = x_{s^*}(z_i^*)$. Следовательно, $T_i^* = z_i^*$.

Лемма 3.2.1 позволяет нам заключить, что

$$u_{2i}^* \leq z_i^* \leq T_i^* = t_i^* = \bar{t}_i^* = u_{2i+1}^* < \alpha_{2i}. \quad (2.13)$$

Следовательно, имеют место случай 1) определения 3.1.5 точек $\{T_i^*\}_{i=1}^{k-1}$ и случай 2) определения 3.1.1 отрезков $\{[u_{2i}^*, u_{2i+1}^*]\}_{i=1}^{k-1}$. Согласно формулам случая 2) определения 3.1.1

$$\int_{u_{2i}^*}^{u_{2i+1}^*} \varphi(x) dx = - \int_{d_{i+1}^*}^{d_i^*} \varphi(x) dx, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad (2.14)$$

а в соответствии со случаем 1) определения 3.1.5

$$x_s(u_{2i+1}^*) - x_s(u_{2i}^*) = W_i^*, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (2.15)$$

3.2.2. Покомпонентное совпадение наборов $\{d_i^*\}_{i=1}^{k-1}$ и $\{\tau_i^*\}_{i=1}^{k-1}$.

ЛЕММА 3.2.3. Для наборов точек $\{d_i^*\}_{i=1}^{k-1}$ и $\{\tau_i^*\}_{i=1}^{k-1}$, определенных в (2.1), справедливы равенства

$$d_i^* = \tau_i^*, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (1.2)

$$d_i^* := \max\{t_{2k-i}^*; \alpha_n\}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.17)$$

а в соответствии с (2.2)

$$\tau_i^* = t_{2k-i}^*, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.18)$$

Следовательно, свойство (2.16) будет доказано, если мы покажем, что $t_k^* = \min_{k \leq i \leq 2k-1} t_i^* \geq \alpha_n$. Предположим, что $t_k^* < \alpha_n$. Тогда по определению (1.2) $d_k^* := \max\{\alpha_n, t_k^*\} = \alpha_n$ и по определению (1.13) точки C_s (см. рис. 3.1.2) $C^* = d_k^* = \alpha_n$. Следовательно, согласно (2.2) $\tau_k^* = t_k^* < \alpha_n = C^*$. Это противоречие с (1.50) доказывает (2.16).

3.2.3. Свойства функции x_{s^*} . Результат леммы 3.2.3 дает нам возможность получить уточненный вариант соотношений (2.14):

$$\int_{u_{2i}^*}^{u_{2i+1}^*} \varphi(x) dx = - \int_{\tau_{i+1}^*}^{\tau_i^*} \varphi(x) dx, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (2.19)$$

Из определений (1.32) функций $H'_{i,s}$, (1.39) функции x_s , представления (1.49) и свойства (2.15) мы заключаем, что на промежутках $[\tau_{i+1}^*, \tau_i^*]$, $i = 1, \dots, k-1$, производная $\frac{d}{dt} x_{s^*}$ задается формулами

$$\frac{d}{dt} x_{s^*}(t) = -\omega'(t - \rho_{i,s^*}^{-1}(t)), \quad t \in [\tau_{i+1}^*, \tau_i^*] \neq \square, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad (2.20)$$

где $\rho_{i,s^*}: [u_{2i}^*, u_{2i+1}^*] \rightarrow [\tau_{i+1}^*, \tau_i^*] = [d_{i+1}^*, d_i^*]$ определены уравнениями

$$\int_{u_{2i}^*}^x \varphi(t) dt = \int_{\tau_i^*}^{\rho_i(x)} \varphi(t) dt, \quad u_{2i}^* \leq x \leq u_{2i+1}^*. \quad (2.21)$$

Согласно нашим построениям (см. (1.33), (1.34), (1.52)) и результатам леммы 3.2.1 и леммы 3.2.3 функция x_{s^*} наделена следующими свойствами для $i = 1, \dots, k-1$:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & x_{s^*}(\tau_{i+1}^*) - x_{s^*}(u_{2i+1}^*) = -\omega(\tau_{i+1}^* - u_{2i+1}^*), \quad \tau_i^* > \tau_{i+1}^*; \\ (\beta) \quad & x_{s^*}(\tau_k^*) - x_{s^*}(C^*) = -\omega(\tau_k^* - C^*); \\ (\gamma) \quad & x_{s^*}(u_{2i+1}^*) - x_{s^*}(u_{2i}^*) = - \int_{u_{2i}^*}^{u_{2i+1}^*} \omega'(\rho_{i,s^*}(x) - x) dx, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где функции $\{\rho_{i,s^*}\}_{i=1}^{k-1}$ определены в (2.21).

3.3. Предельная процедура.

3.3.1. Определение предельной функции Y . По определению $x_{s^*}|_{[0, c^*]} \in H^\omega[0, c^*]$ как экстремаль задачи (1.19) для $s = s^*$. Кроме того, функциональный класс $H^\omega[a, b]$ допускает операцию взятия максимума:

$$\{f_i \in H^\omega[a, b], i = 1, \dots, n\} \implies \max_{1 \leq i \leq n} \{f_i\} \in H^\omega[a, b]. \quad (3.1)$$

По определению (1.39) функции $x_{s^*}|_{[c^*, 1]}$ и (3.1) $x_{s^*}|_{[c^*, 1]} \in H^\omega[c^*, 1]$.

Напомним читателю, что отображение $\varkappa(s) = \varkappa_\sigma(s)$ зависит от σ . Следовательно, и решение $s^* = s^*(\sigma)$ уравнения $\varkappa_\sigma(s) = s$ зависит от σ .

Опираясь на теорему Арцела–Асколи на каждом из отрезков $[0, c^*(\sigma)]$ и $[c^*(\sigma), 1]$, где функции x_{s^*} имеют общий мажорирующий модуль непрерывности ω , мы можем извлечь такую подпоследовательность $\{\sigma_l\}_{l=1}^\infty$, $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l = 0$, что

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} x_{s^*(\sigma_l)}(\cdot) &= Y(\cdot), \quad \lim_{l \rightarrow \infty} u_i^*(\sigma_l) = u_i, \quad i = 1, \dots, 2k-1, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} d_i^*(\sigma_l) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \tau_i^*(\sigma_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} t_{2k-i}^*(\sigma_l) = \tau_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} c^*(\sigma_l) &\rightarrow c, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{V}(l) = \widehat{\mathcal{V}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mathcal{V}(l)$ – экстремальное V_n^0 -разбиение для задачи (1.19) при $s = s^*(\sigma_l)$, а сходимость V_n^0 -разбиений понимается в смысле поинтервальной сходимости атомов. Из сопоставления (1.14), (1.15) и (1.16), (1.17) вытекает, что

$$\int_{c_s}^{C_s} \varphi(x) dx = \sigma \sum_{j=1}^{k-1} |I_j(s)|.$$

Из предельного соотношения $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l = 0$ мы заключаем, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} c^*(\sigma_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} C^*(\sigma_l) = c. \quad (3.3)$$

Поскольку $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l = 0$, из определения (1.14) мы можем заключить, что последовательность ядер $\{\psi_{s^*(\sigma_l)}(t)\}_{l \in \mathbb{N}}$ сходится в интегральной метрике к ядру $\psi_0(t)$, где

$$\psi_0(t) := \begin{cases} \psi(t), & t \in [0, c] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}, u_{2i+1}], \\ 0, & t \in \bigcup_{i=1}^{k-1} [u_{2i}, u_{2i+1}], \end{cases} \quad (3.4)$$

а точки $\{u_i\}_{i=2}^{2k-1}$ определены в (3.2).

Теорема 1.3.1 является следствием нашего индуктивного допущения – теоремы X для ядер $\psi \in \mathcal{M}_n^0[a, b]$. Применив теорему 1.3.1 к семейству ядер $\psi_{s^*(\sigma_l)} \in \mathcal{M}_n^0[0, c_{s^*(\sigma_l)}]$, мы получаем экстремальность ограничения $Y|_{[0, c]}$ в задаче

$$\int_0^c h(t) \psi_0(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, c], \quad h(0) = 0. \quad (3.5)$$

3.3.2. Структура предельного V_n^0 -разбиения $\mathcal{V}$. Через $\{A_i(l)\}_{i=1}^{n-1}$, $\{B_{ij}(l), C_{ji}(l)\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ обозначим атомы экстремального разбиения $\mathcal{V}(l)$ интервала $[0, c^*(\sigma_l)]$ для задачи (1.19) при $s = s^*(\sigma_l)$. Для всех индексов $l \in \mathbb{N}$ положим $u_i^*(l) = u_i^*(\sigma_l)$, $i = 2, \dots, 2k-1$.

Поскольку $[u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)] \subset [a_{2i-1}, a_{2i}]$, отрезок $[u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)]$ может иметь непустое пересечение среди A -атомов лишь с промежутками $A_{2i-1}(l)$ и $A_{2i}(l)$. Для $i = 1, \dots, k-1$ положим

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{2i-1}(l) &= A_{2i-1}(l) \setminus (u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)), & \widehat{A}_{2i}(l) &= A_{2i}(l) \setminus (u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)), \\ \widehat{B}_{2i,j}(l) &:= B_{2i,j}(l) \setminus (u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)), & j \in J_{2i}(n), \quad l \in \mathbb{N}, \\ \widehat{C}_{2i,j}(l) &:= C_{2i,j}(l) \setminus (u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)), & j \in L_{2i}, \quad l \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Все остальные атомы V_n^0 -разбиения $\mathcal{V}(l)$ не пересекаются с отрезками $I_i(l) = [u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)]$, $i = 1, \dots, k-1$. Определим промежутки

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{2i+1,j}(l) &:= B_{2i+1,j}(l), & 0 \leq i \leq k-1, \quad j \in J_{2i+1}(n), \quad l \in \mathbb{N}, \\ \widehat{C}_{2i+1,j}(l) &:= C_{2i+1,j}(l), & 2 \leq i \leq k-1, \quad j \in L_{2i+1}, \quad l \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Как показано в (2.13), невырожденный отрезок $[u_{2i}^*(l), u_{2i+1}^*(l)]$, $i = 1, \dots, k-1$, содержит точку $z_i^*(l)$ перемены знака производной $\frac{d}{dt} x_{s^*(\sigma_l)}$ на $[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$. Согласно нашему наблюдению (1.2.12) точка $z_i^*(l)$ разделяет интервалы $C_{2i}(l) := \bigcup_{j \in L_{2i}} C_{2i,j}(l)$ и $B_{2i}(l) := \bigcup_{j \in J_{2i}(n)} B_{2i,j}(l)$. Следовательно, каждый из атомов $\{\widehat{A}_i(l)\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{\widehat{B}_{ij}, \widehat{C}_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ является связным интервалом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Атомы $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ определяются предельными соотношениями

$$\begin{aligned} A_i &:= \lim_{l \rightarrow \infty} \widehat{A}_i(l), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ B_{ij} &:= \lim_{l \rightarrow \infty} \widehat{B}_{ij}(l), \quad C_{ji} := \lim_{l \rightarrow \infty} \widehat{C}_{ji}(l), \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В соответствии с определением (3.4) функции ψ_0 нулевое множество V и носитель ядра ψ_0 допускают следующее представление в терминах обозначений (3.6)–(3.8):

$$V = \bigcup_{i=1}^{k-1} (u_{2i}, u_{2i+1}), \quad \text{supp } \psi_0 = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)} (B_{ij} \cup C_{ji}). \quad (3.9)$$

Согласно теореме 1.3.1 следующие соотношения верны для атомов из (3.8):

$$\begin{aligned} \alpha_i \in A_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \int_{A_i} \psi(t) dt &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \int_{B_{ij} \cup C_{ji}} \psi(t) dt &= 0, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Согласно теореме 1.3.1 предельная функция Y из (3.2) обладает следующими экстремальными свойствами.

Для пар $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$ функция $Y(t)$ экстремальна в задачах

$$\begin{aligned} \int_0^c h(t) \varphi_{ij}(t) dt &\rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, c], \\ \varphi_{ij}(t) &:= \varphi(t) \mathcal{X}(\Gamma_{ij}; t), \quad \Gamma_{ij} := B_{ij} \cup C_{ji}, \quad t \in [0, c]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для $i = 1, \dots, n-1$ функция $Y(t)$ экстремальна в задаче

$$\begin{aligned} \int_0^c h(t) \varphi_i(t) dt &\rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, c], \\ \varphi_i(t) &:= \varphi(t) \mathcal{X}(A_i; t), \quad t \in [0, c]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В (3.10) мы определили интервалы $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{B_{ij}, C_{ji}\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}$ экстремального V_{n+1}^0 -разбиения (всего промежутка $[0, 1]$) задачи

$$\int_0^1 h(t) \varphi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, 1]. \quad (**)$$

Остальные атомы введем следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.2. Для $i = 1, \dots, k-1$ положим

$$B_{2i, n+1} := [u_{2i}, u_{2i+1}], \quad C_{n+1, 2i} := [\tau_{i+1}, \tau_i], \quad A_n := [c, \tau_k]. \quad (3.13)$$

Заметим, что если $u_{2i} = u_{2i+1}$, то $B_{2i, n+1} = z_i$ (см. лемму 3.2.1).

В соответствии с (2.20), (2.21) на атомах $\{C_{n+1, 2i}\}_{i=1}^{k-1}$ функция $\frac{d}{dt}Y(t)$ задается формулами

$$\frac{d}{dt}Y(t) = -\omega'(t - \rho_{2i, n+1}^{-1}(t)), \quad \tau_{i+1} \leq x \leq \tau_i, \quad \tau_{i+1} < \tau_i, \quad (3.14)$$

где функции $\rho_{2i, n+1}: B_{2i, n+1} \rightarrow C_{n+1, 2i}$ определяются уравнениями

$$\int_{u_{2i}}^x \psi(t) dt = \int_{\tau}^{\rho_{2i, n+1}(x)} \psi(t) dt, \quad x \in B_{2i, n+1}. \quad (3.15)$$

Кроме того, согласно (2.22) функция $Y(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & Y(\tau_{i+1}) - Y(u_{2i+1}) = -\omega(\tau_{i+1} - u_{2i+1}), \quad i = 1, \dots, k-1; \\ (\beta) \quad & Y(\tau_k) - Y(c) = -\omega(\tau_k - c); \\ (\gamma) \quad & Y(u_{2i+1}) - Y(u_{2i}) = - \int_{u_{2i}}^{u_{2i+1}} \omega'(\rho_i(x) - x) dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3.3. Определение и свойства экстремальной функции X задачи (**).

В данном подпункте мы определим функцию X , экстремальную в задаче (**) для ядра $\varphi := \psi_\varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.4. Функция $X(t)$ совпадает с $Y(t)$ на носителе ядра ψ_0 и объединении интервалов $\bigcup_{i=1}^{k-1} C_{n+1,2i}$:

$$X(t) := Y(t), \quad t \in \left([0, c] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_{2i,n+1} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_{n+1,2i} \right). \quad (3.17)$$

На интервалах $B_{2i,n+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, и A_n положим

$$X(t) := \begin{cases} Y(u_{2i}) - \int_{u_{2i}}^t \omega'(\rho_{2i,n+1}(x) - x) dx, & t \in B_{2i,n+1}, \\ Y(c) + \int_c^x \omega'(\rho_n(x) - x) dx, & x \in A_n, \end{cases} \quad (3.18)$$

где $\rho_{2i,n+1}$ введены в (3.15), а $\rho_n: [c, \alpha_n] \rightarrow [\alpha_n, \tau_k]$ определяется уравнением

$$\int_c^x \varphi(t) dt = \int_{\tau_k}^{\rho(x)} \varphi(t) dt, \quad x \in [c, \alpha_n]. \quad (3.19)$$

Областью определения $X(t)$ является весь отрезок $[0, 1]$. Функция $X|_{[0,c]}$ отличается от функции $Y|_{[0,c]}$ на промежутках $B_{2i,n+1} := [u_{2i}, u_{2i+1}]$, $i = 1, \dots, k-1$, — нулевых интервалах ядра ψ_0 . Следовательно, функция $X|_{[0,c]}$ тоже является экстремальной в задаче (3.5) (включение $X|_{[0,c]} \in H^\omega[0, c]$ будет установлено ниже в п. 3.4.1).

Свойства (3.16 (β)), (3.16 (γ)) обеспечивают непрерывность функции $X(t)$, а (3.16 (β)) и (3.18) гарантируют, что функция $X(t)$ является решением каждой из задач

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) \psi_{2i,n+1}(x) dx &\rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, 1], \quad 1 \leq i \leq k-1, \\ \psi_{2i,n+1}(t) &:= \varphi(t) \mathcal{X}(\Gamma_{2i,n+1}; t) \quad \Gamma_{2i,n+1} := B_{2i,n+1} \cup C_{n+1,2i}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Наконец, из свойства (3.16 (α)) и определения (3.18) следует экстремальность $Y(t)$ в задаче

$$\int_{A_n} h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega(A_n). \quad (3.21)$$

3.4. Принадлежность функции X классу $H^\omega[0, 1]$.

3.4.1. Включения $X|_{[0, c]} \in H^\omega[0, c]$ и $X|_{[c, 1]} \in H^\omega[c, 1]$. Функция $x_s|_{[c, 1]}$ определена в (1.39) как максимум функций из $H^\omega[c, 1]$. Следовательно, согласно (3.1) $x_s \in H^\omega[c, 1]$ и $X|_{[c, 1]} \in H^\omega[c, 1]$ как предел последовательности $\{x_{s^*(\sigma_l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$.

Предельная функция Y из (3.2) принадлежит $H^\omega[0, c]$ как экстремаль задачи (3.5). Согласно определениям (3.17), (3.18)

$$X(t) = Y(t), \quad t \in [0, c] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_{2i, n+1}, \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= \min\{Y(t); Z_i(t)\}, \\ Z_i(t) &:= Y(u_{2i}) - \int_{u_{2i}}^t \omega'(\rho_{2i, n+1}(x) - x) dx, \quad t \in B_{2i, n+1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

если $B_{2i, n+1} \neq \square$ при $i \in \{1, \dots, k-1\}$, где $\rho_{2i, n+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, определены в (3.15). Поскольку каждая из функций $Z_i(t)$ и $Z'_i(t)$ не возрастает на непустом $B_{2i, n+1}$, применение леммы 0.6.2 позволяет нам заключить, что $X|_{[0, c]} \in H^\omega[0, c]$.

Остается установить неравенства

$$|X(t_2) - X(t_1)| \leq \omega(t_2 - t_1) \quad \forall (t_1, t_2): t_1 \in [0, c], t_2 \in (c, 1]. \quad (4.3)$$

Зафиксируем $t_1 \in [0, c]$, $t_2 \in (c, 1]$. По определению,

$$\begin{aligned} [0, c] &= \bigcup_{(i, j) \in \mathcal{P}(n)} (B_{ij} \cup C_{ji}) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} B_{2i, n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \\ [c, 1] &= \bigcup_{i=1}^{k-1} C_{n+1, 2i} \cup A_n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Проверку неравенства (4.4) разобьем на несколько шагов.

3.4.2. Оценка сверху разности $X(t_2) - X(t_1)$ для $t_1 \in [0, c]$ и $t_2 \in [c, 1]$. Заметим, что X строго убывает на $[c, 1]$ (см. (3.14) и (3.17)). Следовательно, $X(t_2) < X(c)$ и мы получаем оценку

$$X(t_2) - X(t_1) < X(c) - X(t_1) \leq \omega(c - t_1) < \omega(t_2 - t_1),$$

вытекающую из включения $X|_{[0, c]} \in H^\omega[0, c]$.

3.4.3. Неравенство $X(t_2) - X(t_1) \geq -\omega(t_2 - t_1)$. Согласно представлению (4.4) отрезка $[0, c]$ для всех пар $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$ функция ρ_{ij} отображает $B_{ij} \subset [0, c]$ в $C_{ji} \subset [0, c]$, а для $i = 1, \dots, n-1$ функция ρ_i отображает $[a_i^1, \alpha_i] \subset [0, c]$ в себя, где $A_i =: [a_i^1, a_i^2]$. Следовательно, из формул (1.2.3), (1.2.5) Корнейчука для производной функции X и свойства убывания ω' на $[0, 1]$ вытекает, что

$$X'(t) < -\omega'(c - t), \quad t \in \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup \bigcup_{(2i, j) \in \mathcal{P}(n)} B_{2i, j}. \quad (4.5)$$

ЛЕММА 3.4.1. Пусть $t_1 \in [0, c]$ и $t_2 \in [c, 1]$. Тогда

$$X(t_2) - X(t_1) \geq -\omega(t_2 - t_1). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны следующие пять случаев принадлежности точки t_1 атомам разбиения $\mathcal{V}$.

Случай 1: $t_1 \in B_{2i, n+1} \neq \square$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Для $j = 1, \dots, k$ определим функции H_j как предел последовательности $\{H_{j, s^*(\sigma_l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$ в равномерной метрике

$$H_j := \lim_{l \rightarrow \infty} H_{j, s^*(\sigma_l)}, \quad (4.7)$$

где функции $\{H_{i, s}\}_{i=1}^k$ определены в (1.32)–(1.34). Пусть

$$\{[b_i^1, b_i^2] := B_{2i, n+1}\}_{i=1}^{k-1}, \quad \{[c_i^1, c_i^2] := C_{n+1, 2i+1}\}_{i=1}^{k-1}, \quad [c_k^1, c_k^2] := A_n. \quad (4.8)$$

По определению (см. (1.32)) функция H_i для $i = 1, \dots, k-1$ задается следующей формулой:

$$H_i(x) := \begin{cases} X(b_i^2) - \omega(t - b_i^2), & t \in [b_i^2, c_i^1], \\ X(b_i^1) - \omega(t - b_i^1), & t \in [c_i^2, 1]. \end{cases} \quad (4.9)$$

Если для $i \in \{1, \dots, k-1\}$ интервалы $B_{2i, n+1}$ и $C_{n+1, 2i}$ имеют непустую внутренность (в наших обозначениях $B_{2i, n+1} \neq \square$ и $C_{n+1, 2i} \neq \square$), то

$$X(t) = H_i(t) := \begin{cases} X(c_i^1) - \int_{c_i^1}^t \omega'(\xi - \rho_{2i, n+1}^{-1}(\xi)) d\xi, & t \in C_{n+1, 2i}, \\ X(b_i^2) - \int_{b_i^2}^t \omega'(\rho_{2i, n+1}(\xi) - \xi) d\xi, & t \in B_{2i, n+1}, \end{cases} \quad (4.10)$$

где функции $\rho_{2i, n+1}: B_{2i, n+1} \rightarrow C_{n+1, 2i}$ определены уравнением (3.15). Поскольку по определению (1.39)

$$X(t) = \max_{1 \leq j \leq k} H_j(t), \quad t \in [c, 1] = A_n \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} C_{n+1, 2i},$$

из (4.9) и (4.10) мы заключаем, что

$$X(y) - X(t_1) \geq -\omega(y - t_1) \quad \forall y \in [c_j^1, c_j^2], \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.11)$$

Таким образом, мы проверили справедливость неравенства в случае 1.

Через $\{\nu_i\}_{i=1}^{n-1}$ обозначим точки перемены знака производной функции X : $\nu_0 := 0$, $\nu_n := 1$, $\nu_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$. Функция X возрастает на промежутках $[\nu_{2i}, \nu_{2i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$, и убывает на $[\nu_{2i-1}, \nu_{2i}]$, $i = 1, \dots, k-1$.

Случай 2: $t_1 \in [\nu_{2i}, \nu_{2i+1}]$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Предположим, что $X(t_2) - X(t_1) < -\omega(t_2 - t_1)$. Поскольку X возрастает на $[\nu_{2i}, \nu_{2i+1}]$, мы выводим неравенства $X(t_2) < X(\nu_{2i+1})$ и

$$X(t_2) - X(\nu_{2i+1}) < X(t_2) - X(t_1) < -\omega(t_2 - t_1) < -\omega(t_2 - \nu_{2i+1}). \quad (4.12)$$

Так как $\nu_{2i+1} = b_i^1$, $[b_i^1, b_i^2] := B_{2i, n+1}$, неравенство в (4.12) противоречит доказанному в предыдущем случае неравенству (4.6) для точек $t_2 \in B_{2i, n+1}$.

Случай 3: $t_1 \in B_{2i, j} \neq \square$, $(i, j) \in \mathcal{P}(n)$. Из неравенств (4.5) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}X(t) < -\omega'(c - t) < -\omega'(t_2 - t), \quad t \in B_{2i, j}, \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n). \quad (4.13)$$

Следовательно, если $X(t_2) - X(t_1) < -\omega(t_2 - t_1)$ и $[b_i^1, b_i^2] := B_{2i, n+1}$, то

$$\begin{aligned} X(t_2) - X(b_i^2) &= (X(t_2) - X(t_1)) + (X(t_1) - X(b_i^2)) \\ &< -\omega(t_2 - t_1) - \int_{b_i^2}^{t_1} \omega'(t_2 - t) dt = -\omega(t_2 - b_i^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Поскольку $b_i^2 \in B_{2i, n+1}$, неравенство (4.14) противоречит неравенству (4.6), доказанному в случае 1.

Случай 4: $t_1 \in C_{2i+1, j} \neq \square$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $j \in L_{2i+1}$. Положим $t_3 = \rho_{j, 2i+1}^{-1}(t_1)$. Из формулы (0.5.9) следует, что

$$\begin{aligned} X(t_1) - X(t_3) &= X(t_1) - X(\rho_{j, 2i+1}^{-1}(t_1)) \\ &= -\omega(t_1 - \rho_{j, 2i+1}^{-1}(t_1)) = -\omega(t_1 - t_3). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом, если $X(t_2) - X(t_1) < -\omega(t_2 - t_1)$, из (4.15) и выпуклости ω мы заключаем, что

$$\begin{aligned} X(t_2) - X(t_3) &= (X(t_2) - X(t_1)) + (X(t_1) - X(t_3)) \\ &< -\omega(t_2 - t_1) - \omega(t_1 - t_3) < -\omega(t_2 - t_3). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Поскольку $t_3 \in B_{j, 2i+1}$ и $j \in L_{2i+1}$ четно (см. определение 1.1.2 множеств $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$), (4.16) противоречит неравенству (4.6) в случае 3.

Случай 5: $t_1 \in A_{2i}$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Пусть $[a_i^1, a_i^2] := A_{2i}$. Случай $t_1 \in [a_i^1, \alpha_{2i}]$ рассматривается аналогично случаю 3 с использованием неравенства (4.5), а случай $t_1 \in (\alpha_{2i}, a_i^2]$ рассматривается подобно случаю 4.

Таким образом, неравенство (4.6) доказано для точек каждого из атомов разбиения отрезка $[0, c]$. С учетом неравенства (4.3) и результатов п. 4.3.1 включение $X \in H^\omega[0, 1]$ полностью доказано.

3.5. Завершение доказательства теоремы X.

3.5.1. Совпадение решений задачи () для ядер ψ и ψ_ε .** В данном подпункте мы проверим совпадение экстремалей задач

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi(t)h(t) dt &\rightarrow \sup, & h &\in H^\omega[0, 1], \\ \int_0^1 \varphi(t)h(t) dt &\rightarrow \sup, & h &\in H^\omega[0, 1], \end{aligned} \quad (5.1)$$

при достаточно малых ε , где φ — ε -модификация ψ_ε ядра ψ .

Вспомним определение точек $\{\gamma_i^1(\varepsilon), \gamma_i^2(\varepsilon)\}_{i=1}^n$ из п. 2.2.

ЛЕММА 3.5.1. Пусть $\varepsilon < \mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta}$ для константы $\mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta}$, определенной в (1.6.1) для $\bar{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\delta := \min\{z - \alpha_{n-1}; \alpha_n - z\}$, где z — нуль Ψ на $[\alpha_{n-1}, \alpha_n]$. Если Φ и φ — ε -модификации ядер Ψ и ψ , соответственно, и

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} (\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)) = \{t \in [0, 1] : \Phi(t) \neq \Psi(t)\} = \{t \in [0, 1] : \varphi(t) \neq \psi(t)\},$$

то

$$[\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)] \subset A_i(\varphi), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.2)$$

где $\{A_i(\varphi)\}_{i=1}^n$ — A -атомы экстремального разбиения задачи (**) для ядра φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n-1\}$. По определению (2.2.1) набора пар $Z_i(\psi)$, множества $Z_i(\psi)$ и $Z_i(\varphi)$ совпадают. Кроме того, для любых пар $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2), (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) \in Z_i(\psi)$ имеет место одно из включений

$$(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) \subseteq (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) \quad \text{или} \quad (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) \supset (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2). \quad (5.3)$$

Пусть $A_i(\varphi) =: [a_i^1(\varepsilon), a_i^2(\varepsilon)]$. Поскольку $\int_{A_i(\varphi)} \varphi(x) dx = 0$, каждая из пар $(a_i^1(\varepsilon), a_i^2(\varepsilon))$ и $(\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon))$ принадлежит $Z_i(\varphi) = Z_i(\psi)$. Следовательно, возможно в точности одно из следующих включений:

$$[\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)] \subset A_i(\varphi) \quad \text{или} \quad A_i(\varphi) \subseteq [\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]. \quad (5.4)$$

Поскольку $\gamma_2^i(\varepsilon) - \gamma_1^i(\varepsilon) = \varepsilon$ и согласно нашему допущению $\varepsilon < \mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta}$, из предложения 1.6.1 мы выводим неравенство

$$\alpha_i^2(\varepsilon) - \alpha_i^1(\varepsilon) := |A_i(\varphi)| > \mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta} > \varepsilon.$$

Таким образом, имеет место первое из включений в (5.4).

ЛЕММА 3.5.2. Экстремальные функции и разбиения задач в (5.1) совпадают для всех $\varepsilon < \mathcal{A}_{\omega, \bar{\alpha}, \delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем ε , $\varepsilon < \mathcal{A}_{\omega, \overline{\alpha}, \delta}$. Положим $x_{\omega, \psi} := x_{\omega, \varphi}$, $\varphi = \psi_\varepsilon$ и

$$\{A_i(\psi) := A_i(\varphi)\}_{i=1}^n, \quad \{B_{ij}(\psi) := B_{ij}(\varphi), C_{ji}(\psi) := C_{ji}(\varphi)\}_{(i,j) \in \mathcal{P}(n)}, \quad (5.5)$$

где $x_{\omega, \varphi}$ и $\mathcal{V}(\varphi)$ – экстремальные функция и V_n^0 -разбиение задачи (**) для ядра φ . Пусть

$$\psi_{ij}(t) := \varphi(t) \mathcal{X}(\Gamma_{ij}; t), \quad \Gamma_{ij} := B_{ij}(\psi) \cup C_{ji}(\psi), \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n+1). \quad (5.6)$$

Согласно лемме 3.5.1

$$\{t \in [0, 1] : \psi(t) \neq \psi_\varepsilon(t)\} := \bigcup_{i=1}^{n-1} (\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)) \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i(\psi).$$

Таким образом, функции ψ и ψ_ε совпадают на каждом из интервалов $B_{ij}(\psi)$, $C_{ji}(\psi)$, $(i, j) \in \mathcal{P}(n+1)$, и A_n . Следовательно, функция $x_{\omega, \psi}$, как и $x_{\omega, \psi_\varepsilon}$, экстремальна в задачах

$$\int_0^1 h(t) \psi_{ij}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, 1], \quad (i, j) \in \mathcal{P}(n+1), \quad (5.7)$$

$$\int_{A_l(\psi)} h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, 1], \quad (5.8)$$

для $l = n$.

Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Согласно (2.2.3) и (2.2.2) $\psi_\varepsilon(t) = \psi(t)$ для всех $t \in A_i(\psi) \setminus [\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]$ и $\psi_\varepsilon(t) = \xi_i \cdot \psi(t)$ для $t \in [\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]$ при некотором $\xi_i \in (1, +\infty)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_{h \in H^\omega[0, 1]} \int_{A_i(\psi)} h(x) \varphi(x) dx \\ &= \sup_{h \in H^\omega[0, 1]} \int_{A_i(\psi) \setminus [\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]} h(x) \varphi(x) dx + \sup_{h \in H^\omega[0, 1]} \int_{\gamma_1^i(\varepsilon)}^{\gamma_2^i(\varepsilon)} h(t) \varphi(t) dt \\ &= \sup_{h \in H^\omega[0, 1]} \int_{A_i(\psi) \setminus [\gamma_1^i(\varepsilon), \gamma_2^i(\varepsilon)]} h(x) \psi(x) dx + \xi_i \sup_{h \in H^\omega[0, 1]} \int_{\gamma_1^i(\varepsilon)}^{\gamma_2^i(\varepsilon)} h(t) \psi(t) dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Поэтому $x_{\omega, \psi} := x_{\omega, \varphi}$ – решение задачи (5.8) при $l = 1, \dots, n-1$.

3.5.2. Избавление от ограничений п. 3.0.1. Теорема X доказана для строго выпуклых ω и всех ядер ψ , удовлетворяющих условиям 3), 4) из п. 3.0.1.

Для доказательства теоремы X в случае *произвольного* выпуклого модуля непрерывности ω (не обязательно строго выпуклого) мы сначала построим экстремальную функцию x_ε в задаче (**) для *строго выпуклого* $\omega_\varepsilon(t) := \omega(t) + \varepsilon t^{1/2}$. Применяя вариант теоремы 1.3.3 для последовательностей простых ядер Ψ_i на $A_i(\omega_\varepsilon, \psi)$ при $i = 1, \dots, n$, и Ψ_{ij} на $B_{ij}(\omega_\varepsilon, \psi)$ и $C_{ji}(\omega_\varepsilon, \psi)$ для $(i, j) \in \mathcal{P}(n+1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем нужное описание экстремальной функции в задаче (**).

Аналогичным образом, аппроксимируя ψ ядрами со свойствами (5.1) и используя лемму 1.3.2 в нахождении предельной функции, мы избавляемся от ограничения $\text{ess inf } |\psi| > L$.

Пусть ядро Ψ не имеет нуля на (α_{n-1}, α_n) . Согласно (2.2.4) любая ε -модификация Ψ_ε ядра Ψ принимает значения разных знаков в точках α_{n-1} и α_n . Следовательно, Ψ_ε имеет нуль на (α_{n-1}, α_n) . Следовательно, мы можем построить экстремальную функцию x_ε и V_{n+1}^0 -разбиение $\mathcal{V}(\varepsilon)$ задачи (**) для ядра ψ_ε со структурой, описанной в теореме X. Повторя аргументацию из доказательства предположения 1.6.1, мы убеждаемся в существовании такой константы $\mathcal{A}$, что

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow \infty} |A_i(\omega, \psi_\varepsilon)| > \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда, согласно нашему наблюдению в п. 3.5.1 решения задач (**) для ядер ψ и ψ_ε совпадают при $\varepsilon < \mathcal{A}$. Теорема X полностью доказана.

§ 4. Одно приложение совершенных Ω -сплайнов

В завершающем параграфе мы обсудим приложения совершенных ω -сплайнов в различных вариантах задачи Колмогорова–Ландау

$$f^{(m)}(0) \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(I), \quad \|f\|_{L_\infty(I)} \leq B, \quad (\text{K–Л})$$

где r, m : $0 < m \leq r$, и $B > 0$.

4.1. Неравенства Колмогорова–Ландау в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$.

4.1.1. Формулы численного дифференцирования $f^{(m)}(0)$, $0 < m < r$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$: $n \geq r$, и наборы $\overline{\nu} = \{\nu_i\}_{i=0}^n$, $\overline{\theta} = \{\theta_i\}_{i=0}^{n-r+1}$ на $[0, d]$ со свойствами

$$\begin{aligned} 0 =: \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_n \leq d, \quad 0 =: \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-r+2} := \nu_n, \\ \nu_{i-1} < \theta_i < \nu_{i+r-1}, \quad i = 1, \dots, n-r+1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Определим коэффициенты $\{\alpha_i = \alpha_i(\overline{\nu}, \overline{\theta})\}_{i=0}^n$ как решения уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \alpha_i (\nu_i)^j = m! \delta_{m,j}, & j = 0, \dots, r-1, \\ \sum_{i=0}^n \alpha_i (\nu_i - \theta_l)_+^{r-1} = 0, & l = 1, \dots, n-r+1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Неравенства (1.1) для наборов $\{\nu_i\}_{i=0}^n$ и $\{\theta_i\}_{i=1}^{n-r+1}$ гарантируют однозначную разрешимость системы уравнений (1.2) (см. [20]). Положим

$$K(t) = -\frac{1}{(r-1)!} \sum_{i=1}^n \alpha_i (\nu_i - t)_+^{r-1}, \quad F(t) = \frac{1}{r!} \sum_{i=1}^n \alpha_i (\nu_i - t)_+^r. \quad (1.3)$$

В соответствии с формулой Тейлора

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\nu_i) = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \nu_i^j \right) \frac{f^{(j)}(0)}{j!} + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{\nu_n} f^{(r)}(x) \sum_{i=1}^n \alpha_i (\nu_i - x)_+^{r-1} dx \quad (1.4)$$

для любой функции $f \in C^r[0, d]$. Из (1.2) и (1.4) мы выводим формулу

$$f^{(m)}(0) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(\nu_i) + \int_0^{\nu_n} f^{(r)}(x) K(x) dx, \quad (1.5)$$

где ядро K определено в (1.2), (1.3). Следовательно, для всех $f \in W^r H^\omega[0, d]$

$$|f^{(m)}(0)| \leq \sum_{i=0}^n |\alpha_i| \cdot \|f\|_{C[0,1]} + \sup_{h \in H^\omega[0, \nu_n]} \int_0^{\nu_n} h(x) K(x) dx. \quad (1.6)$$

Предположим, что точки $\{\nu_i\}_{i=0}^n$ и $\{\theta_i\}_{i=0}^{n-r+2}$ в (1.1) выбраны таким образом, что ядро K имеет нулевое среднее на $[0, \nu_n]$:

$$F(0) = \int_0^{\nu_n} K(t) dt = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^n \alpha_i (\nu_i)^r = 0. \quad (1.7)$$

В [32] доказаны следующие свойства ядер $K(t)$:

- (i) $\text{supp } K = [0, \nu_j]$ для некоторого j : $r \leq j \leq n$;
- (ii) K имеет ровно $j - r + 1$ простых нулей $\{\theta_i\}_{i=1}^{j-r+1}$ на $(0, \nu_j)$;
- (iii) $\text{sign } \alpha_i = (-1)^{i+m}$, $i = 0, \dots, j$;
- (iv) $(-1)^{i+r+m} \text{sign } K(t) \geq 0$, $\theta_i \leq t \leq \theta_{i+1}$, $i = 0, \dots, n - r + 1$.

Согласно свойствам (1.7), (1.8) $(-1)^{r+m+1} K \in \mathcal{M}_{j-r+2}^0[0, \nu_j]$, где классы $\{\mathcal{M}_n^0[a, b]\}_{n \in \mathbb{N}}$ интегрируемых ядер введены в определении 1.1.1. Следовательно, для описания экстремалей задачи

$$\int_0^{\nu_j} h(t) K(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, \nu_j],$$

мы применяем теорему X. Неравенство (1.6) и теорема 1.2.2 дают нам окончательную оценку значения m -й производной функции $f \in W^r H^\omega[0, d]$ в нуле:

$$|f^{(m)}(0)| \leq \sum_{i=0}^j |\alpha_i| \cdot \|f\|_{C[0,d]} + \int_0^{\nu_j} \mathfrak{R}_\omega(F, t) \omega'(t) dt, \quad (1.9)$$

где $\mathfrak{R}_\omega(F, t)$ – перестановка ядра $F(t)$ из (1.3), введенная формулой (1.2.9) определения 1.2.1.

4.1.2. Достаточные условия экстремальности в задаче (К–Л). Анализ формул (1.5) и неравенства (1.9) приводит нас к *достаточным условиям экстремальности* функции $\mathcal{Z} \in W^r H^\omega[0, d]$ и ядра K в (1.9), т.е. условиям обратимости неравенства (1.9) в равенство:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathcal{Z}(\nu_i) = (-1)^{i+m} \chi \|\mathcal{Z}\|_{C[0, d]}, \quad \chi \in \{\pm 1\}, \quad i = 0, \dots, n; \\ (2) \quad & \sup_{h \in H^\omega[0, d]} \int_0^d h(x) K(x) dx = \chi \int_0^d \mathcal{Z}^{(r)}(x) K(x) dx. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Заметим, что *генерирующее ядро* $K(t)$, а следовательно, и функция $\mathcal{Z}^{(r)}$ могут быть определены соотношениями (1.2), (1.3) и формулами теоремы X для *любых наборов точек* $\{\nu_i\}_{i=0}^n$ и $\{\theta_i\}_{i=0}^{n-r+1}$, удовлетворяющих неравенствам (1.1). Следовательно, проблема заключается в доказательстве *необходимости* условий (1.10) при некоторых $\bar{\nu}, \bar{\theta}$ из (1.1) для экстремальности функции $\mathcal{Z}$ в задаче Колмогорова–Ландау. Другими словами, выбор точек $\bar{\nu} = \{\nu_i\}_{i=0}^n$ и $\bar{\theta} = \{\theta_i\}_{i=1}^{n-r+1}$ должен быть сделан таким образом, чтобы набор $\{\nu_i\}_{i=0}^{n+1}$ стал множеством *точек альтернанса* функции $\mathcal{Z}$, чья r -я производная однозначно определяется свойством (1.10 (2)).

4.1.3. Чебышёвские и золотарёвские ω -сплайны задачи (К–Л). Следующая теорема из [32] характеризует *чебышёвские ω -сплайны* задачи Колмогорова–Ландау на $[0, d]$.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть ω – выпуклый модуль непрерывности и $n \geq r$, $m, r \in \mathbb{N}$: $0 < m < r$. Тогда существуют наборы $\{\nu_i = \nu_i(n, d, r, m, \omega)\}_{i=0}^{n+1}$, $\{\theta_i = \theta_i(n, d, r, m, \omega)\}_{i=0}^{n-r+2}$, удовлетворяющие (1.1), и $\mathcal{Z}_{n,d} = \mathcal{Z}_{n,d,r,m,\omega}$, наделенные свойствами

$$\begin{aligned} (A) \quad & \sup_{h \in H^\omega[0, d]} \int_0^d h(x) K(x) dx = \int_0^d \mathcal{Z}_{n,d}^{(r)}(x) K(x) dx, \quad \text{где ядро } K \text{ определено в (1.2), (1.3), (1.7) для } \{\nu_i = \nu_i(n, d, r, m, \omega)\}_{i=0}^n \text{ и } \{\theta_i = \theta_i(n, d, r, m, \omega)\}_{i=0}^{n-r+2}; \\ (B) \quad & \mathcal{Z}_{n,d}(\nu_i) = (-1)^{i+m} \|\mathcal{Z}_{n,d}\|_{C[0, d]}, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad \text{где } \nu_{n+1} := d. \end{aligned}$$

Сделаем некоторые замечания по поводу результатов теоремы 4.1.1. Из определяющих соотношений (1.2), (1.3) следует, что производящие ядра $K = K_{n,d,r,m,\omega}$ существенно *зависят от параметра m* . Следовательно, из формул теоремы X мы заключаем, что в случае нелинейного ω существуют $r-1$ *различных* чебышёвских ω -сплайнов для каждого из $m \in \{1, \dots, r-1\}$. Утверждения теоремы 4.1.1 дают возможность построить экстремальные функции в колмогоровских неравенствах на полупрямой в гёльдеровских классах $H^\alpha(\mathbb{R}_+)$, определяемых модулями непрерывности $\omega(t) = t^\alpha$. Действительно, пусть $\rho_n = \rho_n(\omega, r, m) = \|\mathcal{Z}_{n,1}\|_{C[0,1]}$, $n \geq r$. Тогда экстремальная функция задачи (К–Л) для $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и $\omega(t) = t^\alpha$ представляет собой предел (некоторой подпоследовательности $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$) функций

$$Y_n(t) := B \rho_n^{-1} \mathcal{Z}_{n,1} \left(\left(\frac{\rho_n}{B} \right)^{1/(r+\alpha)} t \right), \quad 0 \leq t \leq \left(\frac{B}{\rho_n} \right)^{1/(r+\alpha)}.$$

Технические детали предельной процедуры приведены в [32]. Конструкция экстремалей колмогоровской задачи

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \leq B, \quad (1.11)$$

для полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и произвольного $B > 0$ основана на следующем результате (см. ссылку в [32]).

ТЕОРЕМА 4.1.2. Пусть $B > 0$ и m, r, n будут выбраны, как в теореме 4.1.1. Существуют такие $d_n(B) = d_n(B, m, r, \omega)$ и функция $\mathcal{Z}_{n, d_n(B)}(t)$ на отрезке $[0, d_n(B)]$ со свойствами (A), (B) из теоремы 4.1.1 при $d = d_n(B)$, что $\|\mathcal{Z}_{n, d_n(B)}\|_{C[0, d_n(B)]} = B$.

Как и в гёльдеровском случае, экстремальная функция нормы B в задаче (1.11) для $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ является предельной для некоторой подпоследовательности $\{\mathcal{Z}_{n_k, d_{n_k}(B)}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Золотарёвские ω -сплайны $\mathcal{Z}_B$, экстремальные в задаче (К–Л) на $\mathbb{I} = [0, 1]$, обладают следующими свойствами.

ТЕОРЕМА 4.1.3. Пусть ω – выпуклый модуль непрерывности и $r, m \in \mathbb{N}$: $0 < m < r$. Тогда для любого $B > 0$ существуют индекс $n = n(B, \omega, r, m)$, наборы $\{\nu_i = \nu_i(B, \omega, r, m)\}_{i=0}^n$, $\{\theta_i = \theta_i(B, \omega, r, m)\}_{i=0}^{n-r+2}$ точек, удовлетворяющие (1.1), и функция $\mathcal{Z}_B = \mathcal{Z}_{B, \omega, r, m}$, наделенные свойствами:

- (A) $\sup_{h \in H^\omega[0, 1]} \int_0^1 h(x) K(x) dx = \int_0^1 \mathcal{Z}_B^{(r)}(x) K(x) dx$, где ядро K определено в (1.2), (1.3), (1.7) для $\{\nu_i = \nu_i(B, \omega, r, m)\}_{i=0}^n$ и $\{\theta_i = \theta_i(B, \omega, r, m)\}_{i=0}^{n-r+2}$;
- (B) $\mathcal{Z}_B(\nu_i) = (-1)^{i+m} \|\mathcal{Z}_B\|_{C[0, 1]}$, $i = 0, \dots, n$.

Читатель может найти ссылки на решение колмогоровского случая задачи (1.11) на всей прямой $\mathbb{R}$ в [32].

Наконец, совершенные ω -сплайны порядка r являются экстремальными в задачах

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{L_p(\mathbb{I})} \leq B, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.12)$$

для $\mathbb{I} = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}_+$, $0 \leq m \leq r$ и $B > 0$ (см. [32]).

Список литературы

1. *Jackson D.* Über die Genauigkeit des Annäherung stetigen Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung // Diss. Göttingen, 1911.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
3. *Никольский С. М.* Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. № 3. С. 191–194.
4. *Kolmogorov A. N.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Funktione-nklasse // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 107–110.
5. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$ // Матем. сб. 1969. Т. 80. № 2. С. 290–304.
6. *Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Полиномиальные сплайны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
7. *Рубан В. И.* Поперечники множеств в пространствах периодических функций // Докл. АН СССР. 1980. Т. 255. № 1. С. 34–35.
8. *Лизун А. А.* О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 1. С. 61–75.
9. *Маковоз Ю. И.* Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 5. С. 805–812.
10. *Pinkus A.* On n -widths of periodic functions // J. Anal. Math. 1979. V. 35. P. 209–235.
11. *Micchelli C. A., Pinkus A.* Some problems on approximation of functions of two variables and n -widths of integral operators // J. Approx. Theory. 1978. V. 24. P. 51–77.
12. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.
13. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале // Ученые записки МГУ. Матем. 1939. Т. 3. С. 3–16.
14. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 2. № 13. P. 43–49.
15. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // C. R. Soc. Math. France. 1914. V. 41. P. 68–72.
16. *Боссе Ю. Г. (Шилов Г. Е.)* Неравенства между производными // Сборник работ научных студенческих кружков Московского ун-та, 1937. С. 17–27.
17. *Favard J.* Sur les meilleures procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonometriques // Bull. Sci. Math. 1937. V. 61. P. 209–224, 243–256.
18. *Ахизер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 107–112.
19. *Cavaretta A. S., Schoenberg I. J.* Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the half-line // MRC Report № 1104. Madison: Univ. of Wisconsin 1970.
20. *Karlin S.* Some one-sided numerical differentiation formulae and applications // Studies in Spline Functions and Approximation Theory / ed. Karlin S., Micchelli C. A., Pinkus A., Schoenberg I. J. New York: Academic Press, 1976. P. 485–500.
21. *Karlin S.* Oscillatory perfect splines and related extremal problems // Studies in Spline Functions and Approximation Theory / ed. Karlin S., Micchelli C. A., Pinkus A., Schoenberg I. J. New York: Academic Press, 1976. P. 371–460.
22. *Маторин А. П.* О неравенствах между верхними гранями функций и их производных на полупрямой // Укр. матем. журн. 1955. Т. 7. № 3. С. 262–266.
23. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучшего приближения // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.
24. *Pinkus A.* Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on the finite interval // J. Approx. Theory. 1978. V. 23. № 2. P. 37–64.
25. *Марков А. А.* Об одной проблеме Д. И. Менделеева // Записки АН Спб. 1889. Т. 62. С. 1–24.
26. *Ахизер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
27. *Voronovskaja E. V.* The Functional Method and Its Application. Providence: AMS, 1970.

28. Гусев В. А. Функционалы производных алгебраических многочленов и теорема В. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. С. 367–384.
29. Магарил-Ильяев Г. Г. Неравенства для производных и двойственность // Труды МИАН. 1983. Т. 161. С. 183–194.
30. Micchelli C. A., Winograd T. J., Rivlin S. Optimal recovery of smooth functions // Numer. Math. 1976. V. 25. № 2. P. 191–200.
31. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
32. Bagdasarov S. K. Chebyshev Splines and Kolmogorov Inequalities. Basel: Birkhäuser (to appear).
33. Корнейчук Н. П. Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. С. 1218–1220.
34. Корнейчук Н. П. Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса другим // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 2. С. 423–434.
35. Рубан В. И. Четные поперечники классов $W^{(r)}H_\omega$ в пространствах $C_{2\pi}$ // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 3. С. 387–392.
36. Lorentz G. G. Approximation of Functions. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966.
37. Моторный В. П., Рубан В. И. Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 4. С. 531–543.
38. Корнейчук Н. П. Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках C и L // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 2. С. 269–271.
39. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. № 3. С. 583–614.
40. Корнейчук Н. П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 93–124.
41. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 1, 2. М.: Наука, 1984.
42. Hardy G. H., Littlewood J., Pölya G. Inequalities. New York: Cambridge Univ. Press, 1934.
43. Zygmund A. Trigonometric Series. Cambridge, NJ: Cambridge Univ. Press, 1959.
44. Korneichuk N. P. Exact Constants in Approximation Theory. Cambridge, NJ: Cambridge Univ. Press, 1990.
45. Корнейчук Н. П. С. М. Никольский и развитие исследований по теории приближений в СССР // УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 83–156.
46. Багдасаров С. К. Свойства совершенных ω -сплайнов // Функци. анал. и его прилож. (в печати).
47. Габушин В. Н. Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 291–298.
48. Магарил-Ильяев Г. Г. О колмогоровских неравенствах на полупрямой // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. 1976. Т. 31. № 5. С. 33–41.