Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Хрычёв, Моменты решений эволюционных уравнений и субоптимальные программные управления, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 7, 123–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm2910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:44:47

УДК 517.927.7+517.957+519.218.3

Д. А. Хрычѐв

Моменты решений эволюционных уравнений и субоптимальные программные управления

Моменты решений нелинейных дифференциальных уравнений, испытывающих случайные возмущения, удовлетворяют бесконечным системам уравнений, не содержащим конечных замкнутых подсистем. Один из способов приближенного решения таких бесконечных систем состоит в замене их конечными системами, получаемыми из исходной в результате приравнивания к нулю всех моментов достаточно высоких порядков. Показано, что моменты решений широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений, а также некоторых классов уравнений с частными производными аппроксимируются решениями указанных конечных систем. Полученные результаты используются для построения субоптимальных программных управлений динамическими системами со случайными параметрами.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Предварительные сведения

В предлагаемой статье излагаются результаты, полученные автором в ходе работы над задачей об оптимальном программном управлении системой, испытывающей случайные возмущения (под *программным* мы понимаем управление, не учитывающее текущего состояния системы и зависящее, следовательно, только от времени). Рассматриваемый в статье подход достаточно традиционен и состоит в переходе от случайной задачи к детерминированной путем усреднения уравнений динамической системы и функционала качества. При этом в случае нелинейной динамической системы получаемая в результате усреднения система уравнений для моментов, как известно, бесконечна и не содержит конечных замкнутых подсистем. Значительная часть работы поэтому посвящена задаче приближенного нахождения моментов (проблеме замыкания), представляющей также и самостоятельный интерес.

Обыкновенно проблему замыкания решают, переходя к конечной системе уравнений для моментов, получаемой из исходной бесконечной в результате принятия каких-либо допущений относительно моментов старших порядков. В частности, в настоящей работе конечные системы получаются путем обнуления всех моментов достаточно высоких порядков. Эффективность подобной аппроксимации для отдельных видов уравнений обосновывалась в ряде работ (см. [1] и имеющиеся там библиографические указания), правда, только в случае не зависящих от времени возмущений. Автором [2] были получены достаточно общие результаты для многовременных моментов; эти результаты будут

существенно использоваться ниже. Однако с точки зрения приложений более удобным объектом являются, как правило, одновременные моменты. Последнее, конечно, можно рассматривать как сужения многовременных, но такой подход делает процедуру их отыскания весьма трудоемкой; хотелось бы находить одновременные моменты непосредственно из систем уравнений, которым они удовлетворяют. При рассмотрении же этих систем сразу выявляется различие между ситуациями, когда случайные возмущения стационарны и когда они эволюционируют во времени. В первом случае одновременные моменты удовлетворяют замкнутой (хотя и бесконечной) системе уравнений, во втором же случае выделение замкнутой системы, содержащей только одновременные моменты, невозможно.

Проиллюстрируем сказанное на примере простейшего уравнения

$$\dot{x}(t) = \lambda(t)x^2(t) \quad (1.1)$$

со случайным коэффициентом $\lambda(t)$.

Усреднение (1.1) приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt} Mx(t) = M[\lambda(t)x^2(t)], \quad (1.2)$$

где M – оператор математического ожидания. Поскольку получить уравнение для $M[\lambda(t)x^2(t)]$ не удастся, придется обращаться к моменту $M[\lambda(s)x^2(t)]$:

$$\frac{d}{dt} M[\lambda(s)x^2(t)] = 2M[\lambda(s)\lambda(t)x^3(t)]. \quad (1.3)$$

Момент $M[\lambda(s)\lambda(t)x^3(t)]$, в свою очередь, является сужением при $u = t$ момента $M[\lambda(s)\lambda(u)x^3(t)]$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{d}{dt} M[\lambda(s)\lambda(u)x^3(t)] = 3M[\lambda(s)\lambda(u)\lambda(t)x^4(t)], \quad (1.4)$$

и т.д. Как видим, моменты, присутствующие в системе (1.2)–(1.4), являются одновременными по отношению к решению $x(t)$ и многовременными по отношению к параметру $\lambda(t)$. Это и есть естественный (в случае зависящих от времени возмущений) класс моментов, для которого удастся получить замкнутую систему уравнений.

Коротко о содержании параграфов статьи.

Системы моментных уравнений, аналогичные (1.2)–(1.4), которые возникают при рассмотрении систем обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \lambda(t))$, изучаются в § 2. Условием, позволяющим решить проблему замыкания путем обнуления моментов старших порядков, является здесь аналитичность функции $f(t, x, \lambda)$ по переменным x и λ и интегрируемость по t (см. условия А) и В) в § 2).

В § 3 полученные в § 2 результаты используются для отыскания субоптимальных программных управлений для систем, испытывающих случайные возмущения. Усредняя уравнения динамической системы и функционал качества

и обнуляя получаемые при этом моменты порядка выше N , $N = 1, 2, \dots$, приходим к последовательности детерминированных задач оптимального управления. Доказывается, что оптимальные (или достаточно близкие к ним субоптимальные) управления для этих задач образуют минимизирующую последовательность управлений для функционала качества исходной задачи. (Будут отмечены сходные результаты, полученные автором в [3], где применен другой способ построения приближенных детерминированных задач, основанный на дискретизации распределения случайных параметров.)

Наконец, в § 4 результаты § 2 распространяются на некоторые классы эволюционных уравнений с частными производными. К сожалению, здесь не удалось достичь той же степени общности, как в отношении многовременных моментов [2]. Поэтому приведенные результаты следует рассматривать скорее как демонстрацию метода, который может оказаться эффективным для гораздо более широкого круга задач.

Перечислим некоторые обозначения и термины, используемые ниже.

Пусть X , Y , Z и U – банаховы пространства. Тогда:

I_X – единичный оператор в пространстве X , $I_X x = x \quad \forall x \in X$;

$K_r(X) = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ – замкнутый шар радиуса r в X ;

$L_p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, – лебеговы пространства функций, заданных на интервале $(0, T)$ и принимающих значения в X ; если $X = \mathbb{R}$, пишем просто $L_p(0, T)$;

$C(0, T; X)$ – пространство непрерывных функций $[0, T] \rightarrow X$;

$\mathcal{L}(X; Y)$ – множество непрерывных линейных операторов $X \rightarrow Y$;

$X \times Y$ – прямое произведение X и Y ;

$X \otimes_{\text{alg}} Y$ – алгебраическое тензорное произведение X и Y ;

$X \otimes Y$ – проективное тензорное произведение X и Y [4];

$F \otimes G$, где $F \in \mathcal{L}(X; Z)$, $G \in \mathcal{L}(Y; U)$, – тензорное произведение операторов, $F \otimes G \in \mathcal{L}(X \otimes Y; Z \otimes U)$; на элементах вида $x \otimes y$, где $x \in X$, $y \in Y$, отображение $F \otimes G$ определяется формулой $(F \otimes G)(x \otimes y) = Fx \otimes Gy$, а далее по линейности и непрерывности продолжается на все пространство $X \otimes Y$; $\|F \otimes G\| = \|F\| \|G\|$ [4];

$F_k x^k : X \rightarrow Y$ – степенной оператор порядка k , т.е. сужение при $x_1 = \dots = x_k = x$ k -линейного оператора (см. [5])

$$\tilde{F}_k(x_1, \dots, x_k) : \underbrace{X \times \dots \times X}_k \rightarrow Y;$$

$\|F_k\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F_k x^k\|$ – норма (ограниченного) степенного оператора;

$\|\tilde{F}_k\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_k\| \leq 1} \|\tilde{F}_k(x_1, \dots, x_k)\|$ – норма (ограниченного) k -линейного оператора;

$\hat{F}_k$ – оператор, порождаемый k -линейным оператором $\tilde{F}_k$, $\hat{F}_k \in \mathcal{L}(\otimes^k X; Y)$; на элементах вида

$$\bigotimes_{i=1}^k x_i, \quad x_i \in X, \quad \hat{F}_k \left(\bigotimes_{i=1}^k x_i \right) = \tilde{F}_k(x_1, \dots, x_k),$$

далее по линейности и непрерывности оператор $\widehat{F}_k$ продолжается на все пространство $\otimes^k X$; очевидно, $\|\widehat{F}_k\| = \|\widetilde{F}_k\|$;

$F_{kl}x^ky^l: X \times Y \rightarrow Z$ – степенной оператор порядка (k, l) , т.е. сужение (k, l) -линейного оператора

$$\widetilde{F}_{kl}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l): \underbrace{X \times \dots \times X}_k \times \underbrace{Y \times \dots \times Y}_l \rightarrow Z$$

при $x_1 = \dots = x_k = x$ и $y_1 = \dots = y_l = y$ [5]; нормы $\|F_{kl}\|$ и $\|\widetilde{F}_{kl}\|$ и оператор $\widehat{F}_{kl} \in \mathcal{L}((\otimes^k X) \otimes (\otimes^l Y); Z)$, порождаемый $\widetilde{F}_{kl}$, определяются по аналогии с $\|F_k\|$, $\|\widetilde{F}_k\|$ и $\widehat{F}_k$.

Отметим, что для каждого степенного оператора F_k (или F_{kl}) существует единственный симметричный k -линейный оператор $\widehat{F}_k$ (или $\widehat{F}_{kl}$), сужением которого является F_k (или F_{kl}) (говоря о симметричности оператора $\widehat{F}_{kl}$, мы имеем в виду его симметричность отдельно по группе переменных $x_1, \dots, x_k$ и по группе $y_1, \dots, y_l$). Пусть $\widehat{F}_k$ (или $\widehat{F}_{kl}$) – оператор, порождаемый симметричным оператором $\widetilde{F}_k$ (или $\widetilde{F}_{kl}$), как указано выше. Тогда будем говорить, что оператор $\widehat{F}_k$ (или $\widehat{F}_{kl}$) *порожден степенным оператором* F_k (или F_{kl}).

Пусть $x_i \in X$, $i = 1, 2, \dots$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *сходится абсолютно*, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty.$$

Если $\mathcal{O}$ – некоторое множество и $f_i(z): \mathcal{O} \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots$, – последовательность отображений, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ называется *регулярно сходящимся на $\mathcal{O}$* , если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{z \in \mathcal{O}} \|f_i(z)\| < \infty.$$

Будем говорить, что отображение $F: X \rightarrow Y$ *аналитично в точке $x_0 \in X$* , если существует окрестность x_0 , в которой F представляется регулярно сходящимся степенным рядом

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x - x_0)^k.$$

Аналогично, отображение $F: X \times Y \rightarrow Z$ *аналитично в точке $(x_0, y_0) \in X \times Y$* , если в некоторой окрестности этой точки

$$F(x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} F_{kl}(x - x_0)^k (y - y_0)^l,$$

причем ряд сходится регулярно в рассматриваемой окрестности.

§ 2. Моменты решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматривается задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \lambda(t)), \quad t \in (0, T), \quad (2.1)$$

$$x(0) = y, \quad (2.2)$$

где $0 < T < \infty$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(t)$ – случайная функция, принимающая значения в банаховом пространстве Λ , $y \in \mathbb{R}^n$ – случайное начальное условие. Предполагается, что функция $f(t, x, \lambda)$ определена на множестве $(0, T) \times \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – окрестность нуля в пространстве $\mathbb{R}^n \times \Lambda$, измерима по t при всех фиксированных $(x, \lambda) \in \mathcal{O}$ и при п.в. $t \in (0, T)$ аналитична в нуле по x и λ , причем $f(t, 0, 0) \equiv 0$:

$$f(t, x, \lambda) = \sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l \geq 1}}^{\infty} f_{kl}(t) x^k \lambda^l, \quad (2.3)$$

где $f_{kl}(t): \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ – степенной оператор порядка (k, l) .

Будем считать выполненным одно из следующих двух условий:

А) $\exists \rho > 0, \sigma > 0$:

$$\sum_{k, l} \|f_{kl}(t)\| \rho^k \sigma^l \equiv \varphi(t) \in L_1(0, T); \quad (2.4)$$

В) $\exists q \geq 1, \rho > 0: \forall l > q \ f_{kl}(t) = 0$ почти всюду, а для $l = 1, 2, \dots, [q]$ (здесь $[\cdot]$ – целая часть числа)

$$\sum_k \|f_{kl}(t)\| \rho^k \equiv \varphi_l(t) \in L_{q/(q-l)}(0, T), \quad \varphi_l(t) \in L_{\infty}(0, T) \quad \text{при } l = q. \quad (2.5)$$

Описанная задача естественным образом возникает из рассмотрения задачи о случайном возмущении решения $x_0(t) = x(t, z_0, \lambda_0(\cdot))$, $t \in [0, T]$, динамической системы $\dot{x}(t) = g(t, x(t), \lambda(t))$, $x(0) = z$, отвечающего исходным данным $z = z_0$ и $\lambda(\cdot) = \lambda_0(\cdot)$, если положить $f(t, x, \lambda) = g(t, x_0(t) + x, \lambda_0(t) + \lambda) - g(t, x_0(t), \lambda_0(t))$ и $y = z - z_0$.

Приведем некоторые достаточные условия на функцию g , обеспечивающие выполнение ограничений А) и В). Наиболее прост случай, когда $g(t, x, \lambda)$ – многочлен по x и λ ,

$$g(t, x, \lambda) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L g_{kl}(t) x^k \lambda^l.$$

Если в этой ситуации $\lambda_0(t) \in L_{\infty}(0, T; \Lambda)$ и $\|g_{kl}(t)\| \in L_1(0, T)$ при всех $k \leq K$ и $l \leq L$, то выполнено (при любых ρ и σ) условие А). Если же $\lambda_0(t) \in L_q(0, T; \Lambda)$, $L \leq q < \infty$, и $\|g_{kl}(t)\| \in L_{q/(q-l)}(0, T)$ при всех $k \leq K$ и $l \leq L$, то выполнено В).

Менее очевиден следующий результат.

ЛЕММА 2.1. а) Пусть $\Lambda = \mathbb{R}^s$, $\lambda_0 \in L_{\infty}(0, T; \mathbb{R}^s)$,

$$\Gamma = \{(t, x_0(t), \lambda_0(t)), t \in [0, T]\}$$

– график вектор-функции $(x_0(t), \lambda_0(t))$, $\bar{\Gamma}$ – замыкание Γ в $\mathbb{R}^{n+s+1}$. Тогда если $g(t, x, \lambda)$ аналитична по всем переменным в каждой точке множества $\bar{\Gamma}$, то выполнено условие А).

б) Пусть

$$\Lambda = \mathbb{R}^s, \quad \lambda_0 \in L_q(0, T; \mathbb{R}^s), \quad 1 \leq q < \infty, \quad g(t, x, \lambda) = \sum_{l \leq q} g_l(t, x) \lambda^l.$$

Тогда если функции $g_l(t, x)$ аналитичны по обоим переменным в каждой точке множества $\{(t, x_0(t)), t \in [0, T]\}$, то выполнено условие В).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение а), утверждение б) доказывается аналогично. Функция $g(t, x, \lambda)$ аналитически продолжается в некоторое открытое подмножество Ω пространства $\mathbb{C}^{n+s+1}$, содержащее множество $\bar{\Gamma}$. Пусть d – расстояние от компакта $\bar{\Gamma}$ до границы Ω , $d > 0$. Тогда какую бы точку $t \in [0, T]$ мы ни взяли, функция $f(t, x, \lambda) = g(t, x_0(t) + x, \lambda_0(t) + \lambda) - g(t, x_0(t), \lambda_0(t))$ раскладывается в ряд Тейлора по степеням x и λ в замкнутой полициклоидальной области

$$D_h = \{(x, \lambda) : |x_i| \leq h, i = 1, \dots, n, |\lambda_j| \leq h, j = 1, \dots, s\}, \quad 0 < h < \frac{d}{\sqrt{n+s}}.$$

Согласно формуле Коши для произвольных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} f(t, 0, 0)}{\partial x^\alpha \partial \lambda^\beta} = \frac{\alpha! \beta!}{(2\pi i)^{n+s}} \int_{G_h} \frac{f(t, x, \lambda) dx d\lambda}{x_1^{\alpha_1+1} \dots x_n^{\alpha_n+1} \lambda_1^{\beta_1+1} \dots \lambda_s^{\beta_s+1}},$$

где $G_h = \{(x, \lambda) : |x_i| = h, i = 1, \dots, n, |\lambda_j| = h, j = 1, \dots, s\}$. Отсюда получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} f(t, 0, 0)}{\partial x^\alpha \partial \lambda^\beta} \right| \leq \frac{M \alpha! \beta!}{h^{|\alpha|+|\beta|}},$$

где $M = \sup_{[0, T] \times G_h} |f(t, x, \lambda)| < \infty$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} |f_{kl}(t) x^k \lambda^l| &= \left| \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=l} \frac{1}{\alpha! \beta!} \frac{\partial^{k+l} f(t, 0, 0)}{\partial x^\alpha \partial \lambda^\beta} x^\alpha \lambda^\beta \right| \\ &\leq C_{k+n-1}^k C_{l+s-1}^l M h^{-k-l} |x|^k |\lambda|^l. \end{aligned}$$

Последнее неравенство влечет существование общей для всех $t \in [0, T]$ мажоранты для рядов (2.4) при $\rho < h$ и $\sigma < h$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. В случае выполнения условия А) отображение

$$F(x, \lambda) \equiv f(t, x(t), \lambda(t))$$

со значениями в пространстве $\mathcal{Z} = L_1(0, T; \mathbb{R}^n)$ аналитично в нуле пространства $L_\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \times L_\infty(0, T; \Lambda)$ (случай ограниченного возмущения $\lambda(t)$), а при выполнении условия В) – в нуле пространства $L_\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \times L_q(0, T; \Lambda)$ (неограниченное возмущение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно очевидно, приведем его для случая выполнения условия В).

Поскольку $f_{kl}(t) = 0$ при $l > q$, суммирование по l в ряде $\sum_{kl} f_{kl}(t)x^k(t)\lambda^l(t)$ осуществляется в конечных пределах. Поэтому достаточно проверить регулярную сходимость в некоторой окрестности нуля пространства $L_\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \times L_q(0, T; \Lambda)$ ряда $\sum_k f_{kl}(t)x^k(t)\lambda^l(t)$ при каждом фиксированном $l \leq q$. Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\| \leq r, \|\lambda\| \leq R} \|f_{kl}(t)x^k(t)\lambda^l(t)\|_{\mathcal{X}} &\leq \sup_{\|x\| \leq r, \|\lambda\| \leq R} \int_0^T \|f_{kl}(t)\| |x(t)|^k \|\lambda(t)\|_{\Lambda}^l dt \\ &\leq r^k \sup_{\|\lambda\| \leq R} \|\lambda\|_{L_q(0, T; \Lambda)}^l \left(\int_0^T \|f_{kl}(t)\|^{q/(q-l)} dt \right)^{(q-l)/q} \\ &\leq \frac{r^k}{\rho^k} R^l \|\varphi_l\|_{L_{q/(q-l)}(0, T)} \end{aligned}$$

в силу (2.5), откуда следует регулярная сходимость рассматриваемого ряда на множестве $K_r(L_\infty(0, T; \mathbb{R}^n)) \times K_R(L_q(0, T; \Lambda))$ при $r < \rho$ и любом R .

В дальнейшем пространство $L_q(0, T; \Lambda)$ ($q = \infty$ в случае выполнения условия А)) будем обозначать через $\mathcal{L}$. Введем также обозначение $\mathcal{X}$ для пространства абсолютно непрерывных функций

$$x(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_{\mathcal{X}} = \|x\|_{C(0, T; \mathbb{R}^n)} + \|\dot{x}\|_{L_1(0, T; \mathbb{R}^n)}.$$

Из леммы 2.2 следует, что оператор $\mathfrak{A}: (x, y, \lambda) \rightarrow (\dot{x} - F(x, \lambda), x(0) - y)$ действует аналитически из окрестности нуля пространства $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}$ в пространство $\mathcal{Z} \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим производную $\mathfrak{A}'_x(0, 0, 0): x \rightarrow (\dot{x} - F_{10}x, x(0))$. Поскольку $F_{10}x = f_{10}(t)x(t)$ и $f_{10}(t) \in L_1(0, T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$, то согласно известным результатам о линейных системах оператор $\mathfrak{A}'_x(0, 0, 0)$ осуществляет изоморфизм пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z} \times \mathbb{R}^n$. Отсюда по теореме о неявной функции [5; теорема 22.2] заключаем, что существуют $\delta > 0$ ($\delta < \sigma$ в случае выполнения условия А)) и оператор $S: K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}) \rightarrow K_\rho(\mathcal{X})$, представимый регулярно сходящимся на $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$ степенным рядом, сопоставляющий каждой паре значений (y, λ) решение $x = x(\cdot, y, \lambda)$ задачи (2.1), (2.2).

В дальнейшем будем предполагать, что распределение μ случайного вектора (y, λ) сосредоточено в шаре $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$ (условие малости возмущений).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Моментом порядка j меры μ будем называть элемент j -кратного проективного тензорного произведения $\otimes^j(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, задаваемый формулой¹

$$\mathfrak{M}_j = \int \otimes^j(y, \lambda) d\mu. \quad (2.6)$$

Легко видеть, что интеграл (2.6), равно как и другие рассматриваемые ниже интегралы по мере μ , существует в смысле Бохнера [6].

¹Здесь и ниже, если не указана область интегрирования, интеграл берется по всему пространству, на котором задана мера.

Поскольку пространство $\otimes^j(B_1 \times B_2)$ (B_1 и B_2 – банаховы пространства) изоморфно прямому произведению (см. [2])

$$\prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_j=1,2} \bigotimes_{i=1}^j B_{\alpha_i},$$

$\mathfrak{M}_j$ можно считать вектором длины 2^j с компонентами

$$\mathfrak{M}_j^{(\alpha_1, \dots, \alpha_j)} = \int \bigotimes_{i=1}^j \xi_{\alpha_i} d\mu, \quad (2.7)$$

где $\xi_1 = y$, $\xi_2 = \lambda$, $\alpha_1, \dots, \alpha_j = 1, 2$. То же замечание относится к вводимым ниже смешанным моментам решения $x(t)$ и параметра λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Элемент

$$M_j = \int \otimes^j(x, \lambda) d\mu \quad (2.8)$$

пространства $\otimes^j(\mathcal{X} \times \mathcal{L})$, где $x = x(\cdot, y, \lambda)$ – решение задачи (2.1), (2.2), назовем *многовременным смешанным моментом* порядка j решения x и параметра λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Смешанным одновременным моментом* порядка j решения x и параметра λ назовем функцию $m_j(t)$, $t \in [0, T]$, со значениями в пространстве $\otimes^j(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, задаваемую формулой

$$m_j(t) = \int \otimes^j(x(t), \lambda) d\mu.$$

В пояснение введенной терминологии заметим, что, так как $\mathcal{X} \subset C(0, T; \mathbb{R}^n)$, момент M_j может рассматриваться как непрерывная функция от j переменных $t_1, \dots, t_j \in [0, T]$ (j моментов времени) со значениями в $\otimes^j(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, причем сужение ее при $t_1 = \dots = t_j = t$ совпадает, очевидно, с $m_j(t)$.

Опишем функциональные пространства, которым принадлежат компоненты m_j^α , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, вектора m_j :

$$m_j^\alpha(t) = \int \bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} d\mu, \quad \text{где } \zeta_1 = x(t), \quad \zeta_2 = \lambda. \quad (2.9)$$

Рассмотрим сначала случай, когда мультииндекс α упорядочен по возрастанию, т.е. $\alpha = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{2, \dots, 2}_{j-r})$, $0 \leq r \leq j$. Обозначим

$$\mathcal{X}_r = \left\{ u \in C(0, T; \otimes^r \mathbb{R}^n) : \frac{du}{dt} \in L_1(0, T; \otimes^r \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Тогда, очевидно,

$$m_j^\alpha(t) = \int (\otimes^r x(t)) \otimes (\otimes^{j-r} \lambda) d\mu \in \mathcal{X}_r \otimes (\otimes^{j-r} \mathcal{L}) \equiv \mathcal{X}_{j,r}.$$

Пространство $\mathcal{X}_{jr}$ банахово с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{X}_{jr}} = \|u\|_{C(0,T;\otimes^r \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^{j-r} \mathcal{L})} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_1(0,T;\otimes^r \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^{j-r} \mathcal{L})}.$$

Пусть теперь α – произвольный мультииндекс и $\pi = \pi_\alpha$ – любая из перестановок, упорядочивающих α по возрастанию: $\alpha_{\pi(i)} \leq \alpha_{\pi(l)}$ при $i < l$. Обозначим $\Xi_1 = \mathbb{R}^n$, $\Xi_2 = \mathcal{L}$. Рассмотрим оператор π_α^* , действующий на произведение $\bigotimes_{i=1}^j \xi_i \in \bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}$ по формуле

$$\pi_\alpha^* : \bigotimes_{i=1}^j \xi_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^j \xi_{\pi(i)}.$$

Очевидно, π_α^* однозначно продолжается до взаимно непрерывного изоморфизма пространств $\bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}$ и $(\otimes^{r(\alpha)} \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^{j-r(\alpha)} \mathcal{L})$, где $r(\alpha)$ – число единиц в мультииндексе α . Следовательно,

$$\pi_\alpha^* m_j^\alpha(t) = m_j^{(\alpha_{\pi(1)}, \dots, \alpha_{\pi(j)})}(t) \in \mathcal{X}_{j, r(\alpha)}.$$

Обозначим через $\mathcal{X}(\alpha)$ банахово пространство функций $u(t)$ со значениями в $\bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}$ таких, что $\pi_\alpha^* u(t) \in \mathcal{X}_{j, r(\alpha)}$, с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{X}(\alpha)} = \|\pi_\alpha^* u\|_{\mathcal{X}_{j, r(\alpha)}}$$

(в случае упорядоченного по возрастанию мультииндекса α $\mathcal{X}(\alpha) = \mathcal{X}_{j, r(\alpha)}$). Обобщая вышесказанное, заключаем, что для произвольного мультииндекса α $m_j^\alpha \in \mathcal{X}(\alpha)$.

Для вывода системы уравнений, которым удовлетворяют моменты m_j^α , нам понадобится

ЛЕММА 2.3. Пусть числа $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ удовлетворяют условиям $1 \leq \mathbf{p}, \mathbf{q} \leq \infty$ и $1/\mathbf{p} + 1/\mathbf{q} \leq 1$, B_1 и B_2 – банаховы пространства. Рассмотрим оператор сужения

$$\gamma : u(t) \otimes v(\tau) \rightarrow u(t) \otimes v(t), \quad u \in L_{\mathbf{p}}(0, T; B_1), \quad v \in L_{\mathbf{q}}(0, T; B_2).$$

Тогда γ продолжается (единственным образом) до линейного непрерывного оператора из $L_{\mathbf{p}}(0, T; B_1) \otimes L_{\mathbf{q}}(0, T; B_2)$ в $L_{\mathbf{r}}(0, T; B_1 \otimes B_2)$, где $\mathbf{r} = (1/\mathbf{p} + 1/\mathbf{q})^{-1}$ (в частности, если $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \infty$, то и $\mathbf{r} = \infty$). При этом норма γ не превосходит единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $1 < \mathbf{p}, \mathbf{q} < \infty$ (изменения в случае, когда $\mathbf{p} = \infty$ или $\mathbf{q} = \infty$, очевидны). Пусть $w \in L_{\mathbf{p}}(0, T; B_1) \otimes_{\text{alg}} L_{\mathbf{q}}(0, T; B_2)$ и $w = \sum_{\nu} u_{\nu} \otimes v_{\nu}$ – такое представление w , для которого

$$\|w\|_{L_{\mathbf{p}}(0,T;B_1) \otimes L_{\mathbf{q}}(0,T;B_2)} > \sum_{\nu} \|u_{\nu}\|_{L_{\mathbf{p}}(0,T;B_1)} \|v_{\nu}\|_{L_{\mathbf{q}}(0,T;B_2)} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\|\gamma w\|_{L_{\tau}(0,T;B_1 \otimes B_2)} &= \left(\int_0^T \|\gamma w(t)\|_{B_1 \otimes B_2}^{\tau} dt \right)^{1/\tau} \\
&\leq \left(\int_0^T \left(\sum_{\nu} \|u_{\nu}(t)\|_{B_1} \|v_{\nu}(t)\|_{B_2} \right)^{\tau} dt \right)^{1/\tau} \\
&\leq \sum_{\nu} \left(\int_0^T \|u_{\nu}(t)\|_{B_1}^{\tau} \|v_{\nu}(t)\|_{B_2}^{\tau} dt \right)^{1/\tau} \\
&\stackrel{\text{неравенство Гёльдера}}{\leq} \sum_{\nu} \left(\int_0^T \|u_{\nu}(t)\|_{B_1}^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^T \|v_{\nu}(t)\|_{B_2}^q dt \right)^{1/q} \\
&< \|w\|_{L_p(0,T;B_1) \otimes L_q(0,T;B_2)} + \varepsilon,
\end{aligned}$$

откуда в силу произвольности ε следует утверждение леммы.

Пусть теперь $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{X}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-r} \in \mathcal{L}$, $j > r$, и $1 \leq l \leq j - r$. Определим сужение γ_l функции

$$\left(\bigotimes_{i=1}^r x_i(t) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{j-r} \lambda_i(\tau_i) \right) \in \mathcal{X}_{jr}$$

при $\tau_1 = \dots = \tau_l = t$ формулой

$$\gamma_l: \left(\bigotimes_{i=1}^r x_i(t) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{j-r} \lambda_i(\tau_i) \right) \rightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^r x_i(t) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^l \lambda_i(t) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=l+1}^{j-r} \lambda_i(\tau_i) \right).$$

Из леммы 2.3 следует, что при $l \leq q$ оператор γ_l продолжается (единственным образом) до непрерывного линейного оператора из $\mathcal{X}_{jr}$ в пространство

$$\mathcal{N}_{jrl} \equiv L_{q/l}(0, T; (\otimes^r \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^l \Lambda)) \otimes (\otimes^{j-r-l} \mathcal{L}),$$

причем $\|\gamma_l\| \leq 1$ (при этом считаем, что $q/l = \infty$, если $q = \infty$).

Определим аналогичные операторы сужения для функций из $\mathcal{X}(\alpha)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$. Обозначим $\alpha^{(1)} = \{i : \alpha_i = 1\}$ и $\alpha^{(2)} = \{i : \alpha_i = 2\}$. Пусть, далее, $\beta = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \alpha^{(2)}$. Символом $\pi_{\alpha\beta}$ обозначим произвольную перестановку, упорядочивающую α по возрастанию и перемещающую индексы $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l}$ на l первых мест после индексов, равных единице, т.е. $\pi_{\alpha\beta}(r(\alpha) + 1) = i_1, \dots, \pi_{\alpha\beta}(r(\alpha) + l) = i_l$ (напомним, что $r(\alpha) = |\alpha^{(1)}|$ — число единиц в мультииндексе α). Оператор

$$\pi_{\alpha\beta}^*: \bigotimes_{i=1}^j \eta_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^j \eta_{\pi_{\alpha\beta}(i)}$$

однозначно продолжается до взаимно непрерывного изоморфизма пространства $\bigotimes_{i=1}^j H_i$, где $H_i = \mathbb{R}^n$, если $\alpha_i = 1$, $H_i = \Lambda$ при $i \in \beta$ и $H_i = \mathcal{L}$ при $i \in \alpha^{(2)} \setminus \beta$, и пространства $(\otimes^{r(\alpha)} \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^l \Lambda) \otimes (\otimes^{j-r(\alpha)-l} \mathcal{L})$.

Введем пространство $\mathcal{N}(\alpha, \beta) = (\pi_{\alpha\beta}^*)^{-1} \mathcal{N}_{j, r(\alpha), l}$ с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{N}(\alpha, \beta)} = \|\pi_{\alpha\beta}^* u\|_{\mathcal{N}_{j, r(\alpha), l}}.$$

Тогда, очевидно, оператор сужения $\gamma_{\alpha\beta} = (\pi_{\alpha\beta}^*)^{-1} \circ \gamma_l \circ \pi_{\alpha\beta}^*$ будет действовать линейно и непрерывно из пространства $\mathcal{X}(\alpha)$ в $\mathcal{N}(\alpha, \beta)$, причем $\|\gamma_{\alpha\beta}\| \leq 1$.

Введем еще несколько обозначений. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, $s, k, l \in \mathbb{N}$, $s \leq j$. Мультииндекс

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{2, \dots, 2}_l, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_j)$$

будем обозначать $\alpha(s, k, l)$. Отрезок натурального ряда $\{k, k+1, \dots, k+l-1\}$ обозначим через $\beta(k, l)$. Наконец, введем обозначения $\mathcal{Z}_{jr}$ для пространства $L_1(0, T; \otimes^r \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^{j-r} \mathcal{L})$ и $\mathcal{Z}(\alpha)$ для пространства $(\pi_{\alpha}^*)^{-1}(\mathcal{Z}_{j, r(\alpha)})$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $r, j \in \mathbb{N}$, $r \leq j$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $l \leq q$. Пусть $\hat{f}_{kl}(t): (\otimes^k \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^l \Lambda) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, порождаемый степенным оператором $f_{kl}(t)$ (см. § 1). Тогда оператор

$$F_{jrk l}: w(t) \rightarrow ((\otimes^{r-1} I_{\mathbb{R}^n}) \otimes \hat{f}_{kl}(t) \otimes (\otimes^{j-r} I_{\mathcal{L}})) w(t)$$

действует непрерывно из пространства $\mathcal{N}_{j+k+l-1, r+k-1, l}$ в пространство $\mathcal{Z}_{jr}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$w(t) = \sum_{\nu} u_{\nu}(t) \otimes v_{\nu} \in L_{q/l}(0, T; (\otimes^{r+k-1} \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^l \Lambda)) \otimes_{\text{alg}} (\otimes^{j-r} \mathcal{L}). \quad (2.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|F_{jrk l} w\|_{\mathcal{Z}_{jr}} &\leq \sum_{\nu} \|((\otimes^{r-1} I_{\mathbb{R}^n}) \otimes \hat{f}_{kl}(t)) u_{\nu}(t)\|_{L_1(0, T; \otimes^r \mathbb{R}^n)} \|v_{\nu}\|_{\otimes^{j-r} \mathcal{L}} \\ &\leq \sum_{\nu} \int_0^T \|\hat{f}_{kl}(t)\| \|u_{\nu}(t)\|_{(\otimes^{r+k-1} \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^l \Lambda)} dt \|v_{\nu}\|_{\otimes^{j-r} \mathcal{L}} \\ &\leq \sum_{\nu} \left(\int_0^T \|\hat{f}_{kl}(t)\|^{q/(q-l)} dt \right)^{(q-l)/q} \|u_{\nu}\|_{L_{q/l}(0, T; (\otimes^{r+k-1} \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^l \Lambda))} \|v_{\nu}\|_{\otimes^{j-r} \mathcal{L}} \\ &\leq C \sum_{\nu} \|u_{\nu}\|_{L_{q/l}(0, T; (\otimes^{r+k-1} \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^l \Lambda))} \|v_{\nu}\|_{\otimes^{j-r} \mathcal{L}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

в силу условия В) при $q < \infty$ (при $q = \infty$ – очевидная модификация оценки и ссылка на условие А)) и неравенства (см. [7])

$$\|\hat{f}_{kl}(t)\| = \|\tilde{f}_{kl}(t)\| \leq \frac{k^k l^l}{k! l!} \|f_{kl}(t)\|.$$

Поскольку оценка (2.11) справедлива для любого представления $w(t)$ в виде конечной суммы (2.10), из нее вытекает утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, $s \in \alpha^{(1)}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда оператор

$$F_{skl}^\alpha: w(t) \rightarrow \left(\left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} I_{\Xi_{\alpha_i}} \right) \otimes \widehat{f}_{kl}(t) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j I_{\Xi_{\alpha_i}} \right) \right) w(t)$$

(напомним, что $\Xi_1 = \mathbb{R}^n$, $\Xi_2 = \mathcal{L}$) действует непрерывно из пространства $\mathcal{N}(\alpha(s, k, l), \beta(s + k, l))$ в $\mathcal{Z}(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Моменты m_j^α удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\frac{d}{dt} m_j^\alpha = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} \mathcal{F}_{skl}^\alpha m_{j+k+l-1}^{\alpha(s, k, l)}, \quad (2.12)$$

где

$$j = 1, 2, \dots, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_j = 1, 2, \quad \alpha^{(1)} \neq \emptyset,$$

$$\mathcal{F}_{skl}^\alpha = F_{skl}^\alpha \circ \gamma_{\alpha(s, k, l), \beta(s + k, l)} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}(\alpha(s, k, l)); \mathcal{Z}(\alpha)).$$

Ряд в правой части (2.12) сходится абсолютно в пространстве $\mathcal{Z}(\alpha)$. Выполняются также начальные условия

$$m_j^\alpha|_{t=0} = \mathfrak{M}_j^\alpha. \quad (2.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Оператор d/dt на пространстве $\mathcal{X}(\alpha)$ (для уточнения будем писать $d/dt|_{\mathcal{X}(\alpha)}$) действует по правилу

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{X}(\alpha)} = (\pi_\alpha^*)^{-1} \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{X}_{jr}} \circ \pi_\alpha^* = (\pi_\alpha^*)^{-1} \circ \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{X}_r} \otimes I_{\otimes^{j-r} \mathcal{L}} \right) \circ \pi_\alpha^*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Мультииндекс $\alpha(s, k, l)$ может не содержать индексов, равных 1 (если $r(\alpha) = 1$ и $k = 0$). В этом случае

$$m_{j+k+l-1}^{\alpha(s, k, l)} = \int (\otimes^{j+k+l-1} \lambda) d\mu = \mathfrak{M}_{j+k+l-1}^{(2, \dots, 2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $x(t) = x(t, y, \lambda)$ – решение задачи (2.1), (2.2), $(y, \lambda) \in K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$. Продифференцируем по t произведение $\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i}$ ($\zeta_1 = x(t)$, $\zeta_2 = \lambda$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} \zeta_{\alpha_i} \right) \otimes \dot{x}(t) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) \\ &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} \zeta_{\alpha_i} \right) \otimes f(t, x(t), \lambda(t)) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j \zeta_{\alpha_i} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $|x(t)| < \rho$ и (в случае выполнения условия А)) $\|\lambda(t)\|_\Lambda < \sigma$ при $(y, \lambda) \in K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, в силу (2.1), (2.3) и (2.4) (или (2.5)) получим

$$\frac{d}{dt} \left(\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} \left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} \zeta_{\alpha_i} \right) \otimes f_{kl}(t) x^k(t) \lambda^l(t) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) \quad (2.14)$$

В силу леммы 2.2 ряд (2.14) сходится в метрике пространства $\mathcal{Z}(\alpha)$ регулярно на множестве $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, поскольку его мажоранта отличается от мажоранты ряда

$$\sum_{k,l} f_{kl}(t) x^k(t) \lambda^l(t)$$

лишь числовым множителем. Заменяя степенные операторы $f_{kl}(t)$ линейными операторами $\hat{f}_{kl}(t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} \left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} \zeta_{\alpha_i} \right) \otimes \hat{f}_{kl}(t) \left((\otimes^k x(t)) \otimes (\otimes^l \lambda(t)) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) \\ &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} \left(\left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} I_{\Xi_{\alpha_i}} \right) \otimes \hat{f}_{kl}(t) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j I_{\Xi_{\alpha_i}} \right) \right) \\ &\quad \times \left(\left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} \zeta_{\alpha_i} \right) \otimes (\otimes^k x(t)) \otimes (\otimes^l \lambda(t)) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) \right) \\ &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} F_{skl}^{\alpha} \left(\gamma_{\alpha(s,k,l), \beta(s+k,l)} \left(\left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} \zeta_{\alpha_i} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \otimes (\otimes^k x(t)) \otimes (\otimes^l \lambda) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

согласно введенным выше обозначениям.

Проинтегрируем левую и правую части (2.15) по мере μ . Благодаря непрерывности оператора дифференцирования $d/dt: \mathcal{X}(\alpha) \rightarrow \mathcal{Z}(\alpha)$ в левой части получим

$$\int \frac{d}{dt} \left(\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) d\mu = \frac{d}{dt} \int \bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} d\mu = \frac{d}{dt} m_j^{\alpha}(t)$$

в силу (2.9). Далее, регулярная сходимость ряда в правой части (2.15) позволяет перейти к почленному интегрированию. Вынося затем из-под знака интеграла непрерывные линейные операторы $\mathcal{F}_{skl}^{\alpha} = F_{skl}^{\alpha} \circ \gamma_{\alpha(s,k,l), \beta(s+k,l)}$, получим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} \mathcal{F}_{skl}^{\alpha} \left(\int \left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} \zeta_{\alpha_i} \right) \otimes (\otimes^k x(t)) \otimes (\otimes^l \lambda) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) d\mu \right) \\ = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} \mathcal{F}_{skl}^{\alpha} m_{j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)}, \end{aligned}$$

что доказывает (2.12). Заметим, что ряд (2.12) мажорируется в норме $\mathcal{Z}(\alpha)$ тем же числовым рядом, что и ряд в правой части (2.14), откуда следует его абсолютная сходимость.

На пространстве $\mathcal{X}(\alpha)$ рассмотрим оператор взятия следа $G^\alpha: u \rightarrow u|_{t=0}$, действующий непрерывно в пространстве $\bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}$. Применив G^α к произведению $\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i}$, в силу (2.2) получим

$$G^\alpha \left(\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} \right) = \bigotimes_{i=1}^j \xi_{\alpha_i}, \quad (2.16)$$

где $\xi_1 = y$, $\xi_2 = \lambda$.

Проинтегрируем (2.16) по мере μ и вынесем G^α из-под знака интеграла:

$$G^\alpha \left(\int \bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} d\mu \right) = \int \bigotimes_{i=1}^j \xi_{\alpha_i} d\mu.$$

Последнее равенство с учетом (2.7) и (2.9) совпадает с (2.13).

Докажем теорему о разложении моментов m_j^α в ряды.

ТЕОРЕМА 2.2. *Моменты m_j^α , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, $\alpha^{(1)} \neq \emptyset$, допускают разложения*

$$m_j^\alpha = \sum_{p=j}^{\infty} \hat{\mathcal{S}}_{pj}^\alpha \mathfrak{M}_p, \quad (2.17)$$

где $\hat{\mathcal{S}}_{pj}^\alpha \in \mathcal{L}(\bigotimes^p(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}); \mathcal{X}(\alpha))$, $\mathfrak{M}_p$ – моменты, определенные в (2.6), причем ряд (2.17) сходится абсолютно в $\mathcal{X}(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [2; лемма 2.1] многовременные моменты (2.8) разлагаются в ряды

$$M_j = \sum_{p=j}^{\infty} \hat{S}_{pj} \mathfrak{M}_p, \quad \hat{S}_{pj} \in \mathcal{L}(\bigotimes^p(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}); \bigotimes^j(\mathcal{X} \times \mathcal{L})),$$

сходящиеся абсолютно в $\bigotimes^j(\mathcal{X} \times \mathcal{L})$. Отсюда следуют разложения для компонент

$$M_j^\alpha = \sum_{p=j}^{\infty} \hat{S}_{pj}^\alpha \mathfrak{M}_p, \quad (2.18)$$

где

$$\hat{S}_{pj}^\alpha \in \mathcal{L} \left(\bigotimes^p(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}); \bigotimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i} \right), \quad \Theta_1 = \mathcal{X}, \quad \Theta_2 = \mathcal{L},$$

причем ряд (2.18) сходится абсолютно в пространстве $\bigotimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i}$.

Рассмотрим оператор сужения

$$\Gamma_{jr}: \left(\bigotimes_{i=1}^r x_i(\tau_i) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{j-r} \lambda_i \right) \rightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^r x_i(t) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{j-r} \lambda_i \right),$$

продолжающийся, очевидно, до непрерывного оператора из $(\bigotimes^r \mathcal{X}) \otimes (\bigotimes^{j-r} \mathcal{L})$ в $\mathcal{X}_{jr}$. Тогда оператор $\Gamma^\alpha = (\pi_\alpha^*)^{-1} \circ \Gamma_{j,r(\alpha)} \circ \pi_\alpha^*$ действует непрерывно из пространства $\bigotimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i}$ в $\mathcal{X}(\alpha)$ и, следовательно, $\Gamma^\alpha M_j^\alpha = m_j^\alpha$ в силу (2.8) и (2.9).

Применив оператор Γ^α к обеим частям (2.18), получим с учетом абсолютной сходимости ряда и непрерывности Γ^α разложение (2.17), в котором $\widehat{\mathcal{S}}_{pj}^\alpha = \Gamma^\alpha \circ \widehat{S}_{pj}^\alpha$.

Пусть N – натуральное число. Рассмотрим конечную систему, получаемую из (2.12), если положить $m_j^\alpha = 0$ при всех $j > N$:

$$\frac{d}{dt} m_j^\alpha = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{N-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha m_{j+k+l-1}^\alpha, \quad (2.19)$$

где $j = 1, 2, \dots, N$. Дополним ее начальными условиями (2.13) для тех же номеров j . Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.3. *Задача (2.19), (2.13) обладает единственным решением $(m_{1N}, m_{2N}, \dots, m_{NN})$, где m_{jN} , $j = 1, 2, \dots, N$, – векторы с компонентами $m_{jN}^\alpha \in \mathcal{X}(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, $\alpha^{(1)} \neq \emptyset$, при любых начальных условиях $\mathfrak{M}_j = (\mathfrak{M}_j^\alpha) \in \otimes^j(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$. Если, кроме того, $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$ – моменты (2.6) вероятностной борелевской меры с носителем в $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, то имеет место сходимость $m_{jN}^\alpha \rightarrow m_j^\alpha$ при $N \rightarrow \infty$ в норме пространства $\mathcal{X}(\alpha)$ для всех $j = 1, 2, \dots$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, $\alpha^{(1)} \neq \emptyset$.*

Теорема 2.3 очевидным образом следует из теоремы 2.2 и приводимых ниже двух лемм.

ЛЕММА 2.5. *Пусть $\mathfrak{M}_j \in \otimes^j(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, $j = 1, 2, \dots, N$,*

$$m_{jN}^\alpha = \sum_{p=j}^N \widehat{\mathcal{S}}_{pj}^\alpha \mathfrak{M}_p$$

– конечный отрезок ряда (2.17), m_{jN} – вектор с компонентами m_{jN}^α . Тогда $(m_{1N}, m_{2N}, \dots, m_{NN})$ – решение задачи (2.19), (2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi = (y, \lambda) \in K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, $\theta_1 = x(\cdot, \xi)$ – решение задачи (2.1), (2.2), $\theta_2 = \lambda$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, $\alpha^{(1)} \neq \emptyset$. Как показано в [2; лемма 2.1], справедливо разложение

$$\bigotimes_{i=1}^j \theta_{\alpha_i} = \sum_{p=j}^{\infty} S_{pj}^\alpha \xi^p, \quad (2.20)$$

где S_{pj}^α – степенной оператор порядка p , действующий из $\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}$ в $\bigotimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i}$, а ряд в (2.20) сходится регулярно на $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$ (операторы S_{pj}^α порождают рассматривавшиеся в теореме 2.2 операторы $\widehat{S}_{pj}^\alpha$, как указано в § 1). Применив к обеим частям (2.20) оператор Γ^α , получим

$$\bigotimes_{i=1}^j \zeta_{\alpha_i} = \sum_{p=j}^{\infty} \mathcal{S}_{pj}^\alpha \xi^p, \quad (2.21)$$

где $\zeta_1 = x(t)$, $\zeta_2 = \lambda$, $\mathcal{S}_{pj}^\alpha = \Gamma^\alpha \circ S_{pj}^\alpha$, а ряд (2.21) сходится в норме $\mathcal{X}(\alpha)$ регулярно на $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$. Подставляя в обе части (2.15) полученные разложения для $\bigotimes_i \zeta_{\alpha_i}$, приходим к тождеству

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{p=j}^{\infty} \mathcal{S}_{pj}^\alpha \xi^p \right) = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{\infty} \mathcal{F}_{skl}^\alpha \left(\sum_{p=j+k+l-1}^{\infty} \mathcal{S}_{p,j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)} \xi^p \right). \quad (2.22)$$

Учитывая регулярную сходимости на $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, почленно продифференцируем ряд в левой части (2.22) и поменяем порядок суммирования в правой:

$$\sum_{p=j}^{\infty} \frac{d}{dt} (\mathcal{S}_{pj}^\alpha \xi^p) = \sum_{p=j}^{\infty} \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{p-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha (\mathcal{S}_{p,j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)} \xi^p).$$

Приравняем слагаемые одинаковых порядков однородности по ξ в левой и правой частях полученного равенства:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{S}_{pj}^\alpha \xi^p) = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{p-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha (\mathcal{S}_{p,j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)} \xi^p),$$

или, переходя к равенству операторов,

$$\frac{d}{dt} \circ \mathcal{S}_{pj}^\alpha = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{p-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha \circ \mathcal{S}_{p,j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)} \quad p = j, j+1, \dots$$

Учитывая однозначность соответствия между операторами $\mathcal{S}_{pj}^\alpha$ и $\hat{\mathcal{S}}_{pj}^\alpha$, откуда получим

$$\frac{d}{dt} \circ \hat{\mathcal{S}}_{pj}^\alpha = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{p-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha \circ \hat{\mathcal{S}}_{p,j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)}. \quad (2.23)$$

Применим операторы из обеих частей (2.23) к $\mathfrak{M}_p$ и просуммируем полученные равенства для $p = j, j+1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{p=j}^N \hat{\mathcal{S}}_{pj}^\alpha \mathfrak{M}_p \right) &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{p=j}^N \sum_{k+l=1}^{p-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha (\hat{\mathcal{S}}_{p,j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)} \mathfrak{M}_p) \\ &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{N-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha \left(\sum_{p=j+k+l-1}^N \hat{\mathcal{S}}_{p,j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)} \mathfrak{M}_p \right). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что m_{jN}^α удовлетворяют системе (2.19).

Проверим выполнение начальных условий (2.13), которые, используя введенные в теореме 2.1 операторы G^α , перепишем в виде

$$G^\alpha m_{jN}^\alpha = \mathfrak{M}_j^\alpha, \quad j = 1, \dots, N.$$

Положим

$$M_{jN}^\alpha = \sum_{p=j}^N \hat{S}_{pj}^\alpha \mathfrak{M}_p, \quad j = 1, \dots, N.$$

Очевидно, $\Gamma^\alpha M_{jN}^\alpha = m_{jN}^\alpha$. Пусть, далее, $\mathcal{T}_1: x(\cdot) \rightarrow x(0)$ – оператор взятия следа $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_2 = I_{\mathcal{L}}$. Как показано в [2], $(\bigotimes_{i=1}^j \mathcal{T}_{\alpha_i}) M_{jN}^\alpha = \mathfrak{M}_j^\alpha$ при всех $j = 1, \dots, N$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$. Проверим, что $\bigotimes_{i=1}^j \mathcal{T}_{\alpha_i} = G^\alpha \circ \Gamma^\alpha$. Действительно, указанные операторы совпадают на элементах вида $\bigotimes_{i=1}^j \theta_i \in \bigotimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i}$, а потому в силу линейности и непрерывности совпадают тождественно. Отсюда

$$\mathfrak{M}_j^\alpha = (G^\alpha \circ \Gamma^\alpha) M_{jN}^\alpha = G^\alpha \left(\Gamma^\alpha \left(\sum_{p=j}^N \hat{S}_{pj}^\alpha \mathfrak{M}_p \right) \right) = G^\alpha \left(\sum_{p=j}^N \hat{\mathcal{T}}_{pj}^\alpha \mathfrak{M}_p \right) = G^\alpha m_{jN}^\alpha.$$

ЛЕММА 2.6. *Решение $(m_{1N}, \dots, m_{NN})$ задачи (2.19), (2.13) единственно в классе*

$$\prod_{j=1}^N \prod_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_j): \alpha^{(1)} \neq \emptyset} \mathcal{X}(\alpha)$$

при любых начальных условиях $\mathfrak{M}_j \in \bigotimes^j(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$, $j = 1, \dots, N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем систему (2.19), (2.13) на N подсистем по порядку моментов в левых частях уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_1^{(1)} &= \mathcal{F}_{110}^{(1)} m_1^{(1)} + \mathcal{F}_{101}^{(1)} \mathfrak{M}_1^{(2)} + \sum_{k+l=2}^N \mathcal{F}_{1kl}^{(1)} m_{k+l}^{\alpha(1,k,l)}, \\ m_1^{(1)}|_{t=0} &= \mathfrak{M}_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.24_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_j^\alpha &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \left(\mathcal{F}_{s10}^\alpha m_j^\alpha + \mathcal{F}_{s01}^\alpha m_j^{\alpha(s,0,1)} + \sum_{k+l=2}^{N-j+1} \mathcal{F}_{skl}^\alpha m_{j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)} \right), \\ m_j^\alpha|_{t=0} &= \mathfrak{M}_j^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j), \quad \alpha^{(1)} \neq \emptyset, \end{aligned} \quad (2.24_j)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_N^\alpha &= \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \left(\mathcal{F}_{s10}^\alpha m_N^\alpha + \mathcal{F}_{s01}^\alpha m_N^{\alpha(s,0,1)} \right), \\ m_N^\alpha|_{t=0} &= \mathfrak{M}_N^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad \alpha^{(1)} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.24_N)$$

Уравнения из последней подсистемы сгруппируем по числу единиц в мультииндексе α :

$$r(\alpha) = 1: \frac{d}{dt} m_N^\alpha - \mathcal{F}_{s10}^\alpha m_N^\alpha = \mathcal{F}_{s01}^\alpha \mathfrak{M}_N^{(2, \dots, 2)}, \quad \text{где } \alpha^{(1)} = \{s\}, \quad s = 1, \dots, N;$$

$$\begin{aligned} r(\alpha) = 2: \frac{d}{dt} m_N^\alpha - (\mathcal{F}_{i10}^\alpha + \mathcal{F}_{s10}^\alpha) m_N^\alpha &= \mathcal{F}_{i01}^\alpha m_N^{\alpha(i,0,1)} + \mathcal{F}_{s01}^\alpha m_N^{\alpha(s,0,1)}, \\ \text{где } \alpha^{(1)} &= \{i, s\}, \quad 1 \leq i < s \leq N; \end{aligned}$$

$$r(\alpha) = N: \frac{d}{dt} m_N^\alpha - \sum_{s=1}^N \mathcal{F}_{s10}^\alpha m_N^\alpha = \sum_{s=1}^N \mathcal{F}_{s01}^\alpha m_N^{\alpha(s,0,1)}, \quad \text{где } \alpha = (1, \dots, 1).$$

Поскольку для $s \in \alpha^{(1)}$ $r(\alpha(s, 0, 1)) = r(\alpha) - 1$, правые части уравнений каждой группы начиная со второй определяются решениями уравнений предыдущей группы. Таким же образом структурируются подсистемы (2.24₂)–(2.24 _{$N-1$}), различие состоит лишь в том, что правые части уравнений подсистемы (2.24 _{j}), $j = 1, \dots, N-1$, зависят еще и от моментов порядка $j+1, j+2, \dots, N$, т.е. от решений подсистем (2.24 _{$j+1$})–(2.24 _{N}). Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием единственности решения задачи (2.19), (2.13) является единственность в классе $\mathcal{X}(\alpha)$ тривиального решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} - \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \mathcal{F}_{s10}^\alpha w &= 0, \\ w|_{t=0} &= 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j), \quad \alpha^{(1)} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Учитывая, что

$$\mathcal{F}_{s10}^\alpha w \in \mathcal{X}(\alpha) \subset L_1\left(0, T; \bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}\right),$$

получим из (2.25) интегральное уравнение

$$w(t) = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \int_0^t \mathcal{F}_{s10}^\alpha w(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Оценивая обе части последнего в норме $\bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}} &\leq \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \int_0^t \left\| \left(\bigotimes_{i=1}^{s-1} I_{\Xi_{\alpha_i}} \right) \otimes f_{10}(\tau) \otimes \left(\bigotimes_{i=s+1}^j I_{\Xi_{\alpha_i}} \right) \right\| \|w(\tau)\|_{\bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}} d\tau \\ &= r(\alpha) \int_0^t \|f_{10}(\tau)\| \|w(\tau)\|_{\bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}} d\tau, \end{aligned}$$

откуда в силу леммы Гронуолла заключаем, что $w(t) = 0$ при всех $t \in [0, T]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Используя метод сжатых отображений, нетрудно доказать разрешимость в классе $\mathcal{X}(\alpha)$ задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} - \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \mathcal{F}_{s10}^\alpha w &= g(t), \\ w|_{t=0} &= w_0 \end{aligned}$$

при любых $g \in \mathcal{X}(\alpha)$ и $w_0 \in \bigotimes_{i=1}^j \Xi_{\alpha_i}$. Это показывает, что разрешимость системы (2.19) не обусловлена какой-либо специальной структурой правых частей уравнений, в отличие от системы уравнений для многовременных моментов (см. [2]).

§ 3. Субоптимальные программные управления

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(t) = g(t, u(t), x(t), \lambda(t)), \quad t \in (0, T), \quad (3.1)$$

$$x(0) = y, \quad (3.2)$$

где: $u(t)$ – управляющая функция, принимающая значения в топологическом пространстве U ; $\lambda(t)$ – случайная функция со значениями в банаховом пространстве Λ ; $y \in \mathbb{R}^n$ – случайное начальное условие; $x(t) = x(t, u(\cdot), y, \lambda(\cdot))$. Функция $g(t, u, x, \lambda)$ предполагается каратеодориевской, т.е. измеримой по $t \in [0, T]$ при всех $u \in U$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \Lambda$ и непрерывной по совокупности переменных u , x и λ в $U \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$ при п.в. $t \in [0, T]$.

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество измеримых управляющих функций со значениями в U . Предположим, что при некоторых фиксированных $\lambda(\cdot) = \lambda_0(\cdot)$ и $y = y_0$ задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение $x_0(t, u(\cdot))$, $t \in [0, T]$, при любой управляющей функции $u \in \mathcal{U}$, причем множество функций $\{x_0(t, u), u \in \mathcal{U}\}$ равномерно ограничено. Достаточные условия такой ситуации можно получить из общих теорем существования, единственности и продолжаемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим, что равномерная ограниченность множества функций $\{x_0(t, u), u \in \mathcal{U}\}$ обеспечивается, например, существованием функции Ляпунова $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ такой, что $V(x) \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $\nabla V(x) \cdot g(t, u, x, \lambda_0(t)) \leq c(t)V(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$ и п.в. $t \in (0, T)$, где $0 \leq c(t) \in L_1(0, T)$.

Система для приращения решения

$$\Delta x(t) = x(t, u(\cdot), y_0 + \Delta y, \lambda_0(\cdot) + \Delta \lambda(\cdot)) - x_0(t, u(\cdot))$$

имеет вид (символ Δ в дальнейшем всюду опускается)

$$\dot{x}(t) = f(t, u(t), x_0(t), x(t), \lambda(t)), \quad \dot{x}_0(t) = g(t, u(t), x_0(t), \lambda_0(t)), \quad t \in (0, T), \quad (3.3)$$

$$x(0) = y, \quad x_0(0) = y_0, \quad (3.4)$$

где

$$f(t, u, x_0, x, \lambda) = g(t, u, x_0 + x, \lambda_0(t) + \lambda) - g(t, u, x_0, \lambda_0(t)), \\ x_0, x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Будем предполагать, что для каждого управления $u \in \mathcal{U}$ и при п.в. $t \in [0, T]$ функция $f(t, u(t), x_0(t, u), x, \lambda)$ разлагается в ряд по степеням x и λ :

$$f(t, u(t), x_0(t, u), x, \lambda) = \sum_{k+l \geq 1} f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u)) x^k \lambda^l,$$

причем выполнено одно из следующих двух условий:

А) $\exists \rho, \sigma > 0$ и $\varphi(t) \in L_1(0, T)$: $\forall u \in \mathcal{U}$

$$\sum_{k,l} \|f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u))\| \rho^k \sigma^l \leq \varphi(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0, T];$$

В) $\exists q \geq 1, \rho > 0$ и функции $\varphi_l(t) \in L_{q/(q-l)}(0, T)$, $l = 0, 1, \dots, [q]$: $\forall u \in \mathcal{U}$
 $f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u)) = 0$ при $l > q$ и

$$\sum_k \|f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u))\| \rho^k \leq \varphi_l(t) \quad \text{для } l \leq q \quad \text{при п.в. } t.$$

Справедливы следующие аналоги лемм 2.1 и 2.2.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\Lambda = \mathbb{R}^s$ и U – ограниченное подмножество $\mathbb{R}^d$. Для $u \in \mathcal{U}$ обозначим

$$\Gamma_u = \{(t, u(t), x_0(t, u), \lambda_0(t)), t \in [0, T]\}, \quad \Gamma = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \Gamma_u$$

и $\bar{\Gamma}$ – замыкание Γ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$. Аналогично, обозначим

$$\gamma_u = \{(t, u(t), x_0(t, u)), t \in [0, T]\}, \quad \gamma = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \gamma_u$$

и $\bar{\gamma}$ – замыкание γ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$.

Тогда:

а) если $\lambda_0 \in L_\infty(0, T; \mathbb{R}^s)$ и функция $g(t, u, x, \lambda)$ аналитична по всем переменным в каждой точке множества $\bar{\Gamma}$, то выполнено условие А);

б) если

$$\lambda_0 \in L_q(0, T; \mathbb{R}^s), \quad 1 \leq q < \infty, \quad g(t, u, x, \lambda) = \sum_{l \leq q} g_l(t, u, x) \lambda^l$$

и функции $g_l(t, u, x)$ аналитичны по всем переменным в каждой точке множества $\bar{\gamma}$, то выполнено В).

ЛЕММА 3.2. Для каждого фиксированного управления $u \in \mathcal{U}$ отображение $F^u(x, \lambda) \equiv f(t, u(t), x_0(t, u), x(t), \lambda(t))$, $F^u: L_\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{Z}$, аналитично в нуле. При этом

$$\sum_{k,l} \sup_{u \in \mathcal{U}} \|F_{kl}^u\| r^k s^l < \infty \quad (3.5)$$

для $r < \rho$ и $s < \sigma$ в случае выполнения условия А) и

$$\sum_{k,l} \sup_{u \in \mathcal{U}} \|F_{kl}^u\| r^k R^l < \infty \quad (3.6)$$

при $r < \rho$ и любом $R > 0$ в случае выполнения В).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поясним получение оценок (3.5) и (3.6). Имеем

$$\begin{aligned} \|F_{kl}^u\| &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|\lambda\| \leq 1} \|F_{kl}^u x^k \lambda^l\|_{\mathcal{Z}} = \sup_{x, \lambda} \int_0^T |f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u)) x^k(t) \lambda^l(t)| dt \\ &\leq \sup_{x, \lambda} \int_0^T \|f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u))\| |x(t)|^k \|\lambda(t)\|_{\Lambda}^l dt \\ &\leq \sup_{\|\lambda\| \leq 1} \int_0^T \|f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u))\| \|\lambda(t)\|_{\Lambda}^l dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|F_{kl}^u\|$ не превосходит нормы функции $\|f_{kl}(t, u(t), x_0(t, u))\|$ в $L_1(0, T)$, если $\mathcal{L} = L_{\infty}(0, T; \Lambda)$, и нормы той же функции в $L_{q/(q-l)}(0, T)$ для $\mathcal{L} = L_q(0, T; \Lambda)$ при $q < \infty$. Поэтому оценки (3.5) и (3.6) являются следствием соответствующих оценок для f_{kl} из условий А) и В).

Для дальнейшего нам понадобится

ТЕОРЕМА 3.1 (о семействе неявных операторов). *Пусть имеется семейство операторов $F^{\nu}(x, y)$, действующих аналитически из окрестности нуля прямого произведения банаховых пространств X и Y в некоторое третье банахово пространство Z , причем $F^{\nu}(0, 0) = 0 \ \forall \nu$. Предположим, что существуют ρ и $\sigma > 0$ такие, что*

$$\sum_{k, l} \sup_{\nu} \|F_{kl}^{\nu}\| \rho^k \sigma^l < \infty. \quad (3.7)$$

Пусть, наконец, операторы $\partial F^{\nu}(0, 0)/\partial x$ обратимы при всех ν и операторы $[\partial F^{\nu}(0, 0)/\partial x]^{-1}$ ограничены в совокупности по норме.

Тогда существует такое $\delta \leq \sigma$, что для каждого ν и любого $y \in K_{\delta}(Y)$ имеется единственное решение $x = S^{\nu}(y) \in K_{\rho}(X)$ уравнения $F^{\nu}(x, y) = 0$. При этом операторы S^{ν} аналитичны на $K_{\delta}(Y)$ при всех ν и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\nu} \|S_j^{\nu}\| \delta^j \leq \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы базируется на существовании общего для всего семейства операторов мажорантного уравнения Гурса и практически не отличается от доказательства в случае одного оператора [5; теорема 22.2].

Покажем, что семейство операторов

$$\mathfrak{A}^u: (x, y, \lambda) \rightarrow (\dot{x} - F^u(x, \lambda), x(0) - y), \quad \mathfrak{A}^u: \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{Z} \times \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.1 при $X = \mathcal{X}$, $Y = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}$, $Z = \mathcal{Z} \times \mathbb{R}^n$.

Аналитичность операторов $\mathfrak{A}^u$ и выполнение для них оценки (3.7) следуют из леммы 3.2. Далее, $\partial \mathfrak{A}^u(0, 0, 0)/\partial x = \mathfrak{A}_{10}^u: x \rightarrow (\dot{x} - F_{10}^u, x(0))$ — изоморфизм пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z} \times \mathbb{R}^n$. Докажем ограниченность в совокупности операторов $[\mathfrak{A}_{10}^u]^{-1}$. Последняя равносильна равномерной ограниченности в норме пространства $\mathcal{X}$ решений линейных задач

$$\dot{x}(t) - f_{10}(t, u(t), x_0(t, u))x(t) = h(t), \quad x(0) = y \quad (3.8)$$

при всех $u \in \mathcal{U}$ и $(y, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{Z}$ таких, что $|y| + \|h\|_{\mathcal{Z}} \leq 1$.

Применение неравенства Гронуолла дает оценку

$$|x(t)| \leq (|y| + \|h\|_{\mathcal{X}}) \exp \left\{ \int_0^t \|f_{10}(\tau, u(\tau), x_0(\tau, u))\| d\tau \right\}.$$

Из условия А) (или условия В)) следует, что норма в $L_1(0, T)$ функции $\|f_{10}(t, u(t), x_0(t, u))\|$ при любом $u \in \mathcal{U}$ ограничена величиной $\|\varphi\|_{L_1(0, T)}/\rho$ (или $\|\varphi_0\|_{L_1(0, T)}/\rho$). Получаем равномерную оценку для $\|x\|_{C(0, T; \mathbb{R}^n)}$. Наконец, в силу (3.8) норма $\dot{x}(t)$ в $L_1(0, T; \mathbb{R}^n)$ оценивается нормой $x(t)$ в $C(0, T; \mathbb{R}^n)$.

Итак, в сделанных нами предположениях для каждого управления $u \in \mathcal{U}$ задача (3.3), (3.4) обладает разрешающим оператором $S^u: \mathbb{R}^n \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{X}$, причем существует $\delta > 0$ такое, что все операторы S^u определены и аналитичны в $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_u \|S_j^u\| \delta^j \leq \rho. \quad (3.9)$$

В дальнейшем предполагается, что распределение случайного вектора (y, λ) сосредоточено в шаре $K_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathcal{L})$.

Поставим задачу оптимального управления системой (3.1), для чего введем функционал качества в форме Майера

$$J(u) = M\chi(x(T)) \rightarrow \inf, \quad (3.10)$$

где M – оператор математического ожидания, χ – неотрицательная функция $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Будем предполагать, что функция χ аналитична в каждой точке множества $\overline{G}$, являющегося замыканием в $\mathbb{R}^n$ множества $G = \{x_0(T, u), u \in \mathcal{U}\}$. Задача (3.1), (3.2), (3.10) может дополняться фазовыми ограничениями вида

$$M[\otimes^\kappa x(t)] \in X_\kappa \subset C(0, T; \otimes^\kappa \mathbb{R}^n), \quad \kappa = 1, \dots, K. \quad (3.11)$$

Пусть $m_j^\alpha = m_j^\alpha(t, u)$ – смешанные моменты решения $x(t) = x(t, u)$ задачи (3.3), (3.4) и параметра λ , определенные в (2.9). Согласно теореме 2.1 моменты m_j^α удовлетворяют бесконечной системе (2.12), (2.13), в которой операторы $\mathcal{F}_{skl}^\alpha = \mathcal{F}_{skl}^\alpha(u)$ определяются, как описано в теореме 2.1 и следствии 2.1, но с заменой $\hat{f}_{kl}(t)$ на $\hat{f}_{kl}(t, u(t), x_0(t, u))$.

Выразим $J(u)$ и $M[\otimes^\kappa x(t)]$ через моменты m_j^α . Рассуждая, как в лемме 2.1, заключаем, что существует такое $\varrho > 0$, что для каждого $x^* \in \overline{G}$ функция $\chi(x)$ разлагается по степеням $x - x^*$ в шаре радиуса ϱ . Будем предполагать, что $\varrho/\rho \geq e$ (уменьшив, если это не так, δ и соответственно ρ). Тогда, поскольку для каждого управления $u \in \mathcal{U}$ норма разности $\Delta x(T, u) = x(T, u) - x_0(T, u)$ оценивается в силу (3.9) величиной $\rho < \varrho$, справедливо разложение

$$\chi(x(T, u)) = \chi(x_0(T, u)) + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(x_0(T, u)) (\Delta x(T, u))^j, \quad (3.12)$$

причем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_u \|\chi_j(x_0(T, u))\| \varrho^j < \infty. \quad (3.13)$$

Заменяя в (3.12) операторы χ_j на $\hat{\chi}_j$ и интегрируя по мере μ , получаем

$$J(u) = \chi(x_0(T)) + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\chi}_j(x_0(T)) m_j^{(1,\dots,1)}(T). \quad (3.14)$$

Теперь рассмотрим тензорную степень

$$\otimes^{\kappa} x(t) = \otimes^{\kappa} (x_0(t) + \Delta x(t)) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa}=1,2} \bigotimes_{i=1}^{\kappa} \varsigma_{\alpha_i}, \quad (3.15)$$

где $\varsigma_1 = x_0(t)$, $\varsigma_2 = \Delta x(t)$. Пусть, как в § 2, π_{α} – перестановка, упорядочивающая по возрастанию мультииндекс α :

$$\pi_{\alpha}^* \left(\bigotimes_{i=1}^{\kappa} \varsigma_{\alpha_i} \right) = (\otimes^{r(\alpha)} x_0(t)) \otimes (\otimes^{\kappa-r(\alpha)} \Delta x(t)). \quad (3.16)$$

Интегрируя обе части (3.15) по мере μ , с учетом (3.16) получим

$$\begin{aligned} M[\otimes^{\kappa} x(t)] &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa}=1,2} (\pi_{\alpha}^*)^{-1} ((\otimes^{r(\alpha)} x_0(t)) \otimes m_{\kappa-r(\alpha)}^{(1,\dots,1)}(t)) \\ &= \otimes^{\kappa} x_0(t) + \sum_{j=1}^{\kappa} \Pi_{\kappa j} ((\otimes^{\kappa-j} x_0(t)) \otimes m_j^{(1,\dots,1)}(t)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\Pi_{\kappa j} = \sum_{\alpha: r(\alpha)=\kappa-j} (\pi_{\alpha}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\otimes^{\kappa} \mathbb{R}^n; \otimes^{\kappa} \mathbb{R}^n).$$

Рассмотрим детерминированную задачу оптимального управления, аппроксимирующую задачу (3.1), (3.2), (3.10), (3.11). Для этого возьмем натуральное $N \geq K$ и положим $m_j^{\alpha} = 0$ при всех $j > N$ в (3.14) и (2.12):

$$J_N(u) \equiv \chi(x_0(T)) + \sum_{j=1}^N \hat{\chi}_j(x_0(T)) m_j^{(1,\dots,1)}(T) \rightarrow \inf; \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} m_j^{\alpha} = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \sum_{k+l=1}^{N-j+1} \mathcal{F}_{skl}^{\alpha} m_{j+k+l-1}^{\alpha(s,k,l)}, \quad j = 1, \dots, N; \quad (3.19)$$

$$\dot{x}_0(t) = g(t, u(t), x_0(t), \lambda_0(t)); \quad (3.20)$$

$$m_j^{\alpha}(0) = \mathfrak{M}_j^{\alpha}, \quad j = 1, \dots, N; \quad (3.21)$$

$$x_0(0) = y_0; \quad (3.22)$$

$$\otimes^{\kappa} x_0(t) + \sum_{j=1}^{\kappa} \Pi_{\kappa j} ((\otimes^{\kappa-j} x_0(t)) \otimes m_j^{(1,\dots,1)}(t)) \in X_{\kappa N}, \quad \kappa = 1, \dots, K; \quad (3.23)$$

$$u(t) \in U. \quad (3.24)$$

Множества $X_{\kappa N}$ в (3.23), вообще говоря, не совпадают с множествами X_{κ} . Они будут определены ниже.

Согласно теореме 2.3 для каждого управления $u \in \mathcal{U}$ решения $m_{jN}^\alpha = m_{jN}^\alpha(u)$ системы (3.19), (3.21) сходятся при $N \rightarrow \infty$ в норме $\mathcal{X}(\alpha)$ к моментам $m_j^\alpha(u)$ решения задачи (3.3), (3.4).

ЛЕММА 3.3. *Сходимость $m_{jN}^\alpha(u) \rightarrow m_j^\alpha(u)$ равномерна по всевозможным управлениям $u \in \mathcal{U}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.2 и леммы 2.5 достаточно доказать равномерность по u сходимости ряда

$$m_j^\alpha(u) = \sum_{p=j}^{\infty} \widehat{\mathcal{S}}_{pj}^{u,\alpha} \mathfrak{M}_p,$$

где $\widehat{\mathcal{S}}_{pj}^{u,\alpha}$ – операторы (2.18), отвечающие управлению u . Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \|\widehat{\mathcal{S}}_{pj}^{u,\alpha} \mathfrak{M}_p\|_{\mathcal{X}(\alpha)} &= \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\| \widehat{\mathcal{S}}_{pj}^{u,\alpha} \left(\int \otimes^p \xi \, d\mu \right) \right\|_{\mathcal{X}(\alpha)} \\ &\leq \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \int \|\widehat{\mathcal{S}}_{pj}^{u,\alpha} (\otimes^p \xi)\|_{\mathcal{X}(\alpha)} \, d\mu \leq \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \sup_{\|\xi\| \leq \delta} \|\widehat{\mathcal{S}}_{pj}^{u,\alpha} (\otimes^p \xi)\|_{\mathcal{X}(\alpha)} \\ &\leq \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \sup_{\|\xi\| \leq \delta} \|S_{pj}^{u,\alpha} \xi^p\|_{\otimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\Theta_1 = \mathcal{X}$, $\Theta_2 = \mathcal{L}$, $S_{pj}^{u,\alpha}$ – степенные операторы (2.20). Согласно [2; лемма 2.1]

$$S_{pj}^{u,\alpha} \xi^p = \sum_{\nu \in N_\alpha, |\nu|=p} \bigotimes_{i=1}^j \omega_{\nu_i}^{\alpha_i},$$

где N_α – множество всевозможных векторов $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_j)$ с натуральными компонентами, у которых $\nu_i = 1$, если

$$\alpha_i = 2, \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_j, \quad \omega_{\nu_i}^1 = S_{\nu_i}^u \xi^{\nu_i}, \quad \omega_{\nu_i}^2 = \lambda.$$

Отсюда, продолжая цепочку неравенств (3.25), получим

$$\begin{aligned} \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \sup_{\|\xi\| \leq \delta} \|S_{pj}^{u,\alpha} \xi^p\|_{\otimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i}} &\leq \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \sum_{\nu \in N_\alpha, |\nu|=p} \sup_{\|\xi\| \leq \delta} \prod_{i=1}^j \|\omega_{\nu_i}^{\alpha_i}\|_{\otimes_{i=1}^j \Theta_{\alpha_i}} \\ &= \sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \sum_{l_1 + \dots + l_{r(\alpha)} = p - (j - r(\alpha))} \sup_{\|\xi\| \leq \delta} \left(\|\lambda\|_{\mathcal{L}}^{j-r(\alpha)} \prod_{i=1}^{r(\alpha)} \|S_{l_i}^u \xi^{l_i}\|_{\mathcal{X}} \right) \\ &\leq \sum_{p=j}^{\infty} \delta^{j-r(\alpha)} \sup_{u \in \mathcal{U}} \sum_{l_1 + \dots + l_{r(\alpha)} = p - (j - r(\alpha))} \prod_{i=1}^{r(\alpha)} \|S_{l_i}^u\| \delta^{l_i} \\ &\leq \delta^{j-r(\alpha)} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \|S_l^u\| \delta^l \right)^{r(\alpha)} < \infty \end{aligned} \quad (3.26)$$

в силу (3.9). Лемма доказана.

Из полученного результата следует

ЛЕММА 3.4. *Имеет место сходимость $J_N(u) \rightarrow J(u)$, $N \rightarrow \infty$, равномерная по $u \in \mathcal{U}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.14) и (3.18) нужно доказать сходимость к нулю при $N \rightarrow \infty$ разности

$$\Delta J_N = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\chi}_j(x_0(T)) m_j^{(1, \dots, 1)}(T) - \sum_{j=1}^N \hat{\chi}_j(x_0(T)) m_{j_N}^{(1, \dots, 1)}(T).$$

Пусть $\tilde{\chi}_j$ – симметрический j -линейный оператор, порождающий степенной оператор χ_j . Из (3.13), неравенства $\|\tilde{\chi}_j\| = \|\chi_j\| \leq (j^j/j!) \|\chi_j\|$ [7] и неравенства $\rho \leq \varrho/e$ следует

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \|\hat{\chi}_j(x_0(T))\| \rho^j < \infty.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем j_ε такое, что при всех $u \in \mathcal{U}$

$$\sum_{j=j_\varepsilon}^{\infty} \|\hat{\chi}_j(x_0(T))\| \rho^j < \varepsilon.$$

Тогда для $N \geq j_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Delta J_N &= \sum_{j=1}^{j_\varepsilon-1} \hat{\chi}_j(x_0(T)) (m_j^{(1, \dots, 1)}(T) - m_{j_N}^{(1, \dots, 1)}(T)) \\ &\quad + \sum_{j=j_\varepsilon}^{\infty} \hat{\chi}_j(x_0(T)) m_j^{(1, \dots, 1)}(T) - \sum_{j=j_\varepsilon}^N \hat{\chi}_j(x_0(T)) m_{j_N}^{(1, \dots, 1)}(T). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Первая сумма в правой части (3.27) равномерно по u стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ в силу предыдущей леммы. Для оценки второй суммы заметим, что

$$\|m_j^{(1, \dots, 1)}(T)\|_{\otimes^j \mathbb{R}^n} = \left\| \int \otimes^j x(T) d\mu \right\|_{\otimes^j \mathbb{R}^n} \leq \int \|\otimes^j x(T)\|_{\otimes^j \mathbb{R}^n} d\mu \leq \rho^j,$$

а потому $|\hat{\chi}_j(x_0(T)) m_j^{(1, \dots, 1)}(T)| \leq \|\hat{\chi}_j(x_0(T))\| \rho^j$. Согласно выбору j_ε получаем, что рассматриваемая сумма по модулю меньше ε .

Перейдем к рассмотрению последней суммы в (3.27). Из неравенств (3.25), (3.26) в случае $\alpha = (1, \dots, 1)$ (и, следовательно, $r(\alpha) = j$) получим

$$\sum_{p=j}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \|\hat{\mathcal{S}}_{pj}^{u, \alpha} \mathfrak{M}_p\|_{\mathcal{X}(\alpha)} \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \|S_l^u\| \delta^l \right)^j \leq \rho^j$$

в силу (3.9). Учитывая, что

$$m_{j_N}^\alpha = \sum_{p=j}^N \hat{\mathcal{S}}_{pj}^{u, \alpha} \mathfrak{M}_p$$

(лемма 2.5), отсюда выводим (для $\alpha = (1, \dots, 1)$)

$$\|m_{jN}^\alpha(T)\|_{\otimes^j \mathbb{R}^n} \leq \|m_{jN}^\alpha\|_{\mathcal{X}(\alpha)} \leq \sum_{p=j}^N \|\widehat{\mathcal{S}}_{pj}^{u,\alpha} \mathfrak{M}_p\|_{\mathcal{X}(\alpha)} \leq \rho^j$$

при всех $u \in \mathcal{U}$. Поэтому третья сумма в (3.27) так же, как и вторая, по модулю меньше ε . В силу произвольности ε отсюда следует утверждение леммы.

Докажем теорему об аппроксимации для задачи без фазовых ограничений.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\bar{J}_N = \inf_u J_N(u)$ и u_N – субоптимальные (оптимальные) управления для задач (3.18)–(3.22), (3.24) ($N = 1, 2, \dots$) такие, что $\delta_N \equiv J_N(u_N) - \bar{J}_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда u_N – минимизирующая последовательность управлений для функционала качества задачи (3.1), (3.2), (3.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{J} = \inf_u J(u)$, и пусть u_ε – субоптимальное (оптимальное) управление для задачи (3.1), (3.2), (3.10) такое, что $J(u_\varepsilon) - \bar{J} < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Тогда

$$0 \leq J(u_N) - \bar{J} = J(u_N) - J_N(u_N) + J_N(u_N) - J_N(u_\varepsilon) + J_N(u_\varepsilon) - J(u_\varepsilon) + J(u_\varepsilon) - \bar{J}.$$

Разности $J(u_N) - J_N(u_N)$ и $J_N(u_\varepsilon) - J(u_\varepsilon)$ малы при больших N в силу леммы 3.4; $J_N(u_N) - J_N(u_\varepsilon) \leq J_N(u_N) - \bar{J}_N = \delta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$; наконец, $J(u_\varepsilon) - \bar{J} < \varepsilon$. Отсюда, учитывая произвольность ε , заключаем, что $\lim_{N \rightarrow \infty} J(u_N) = \bar{J}$.

Перейдем к рассмотрению задачи с фазовыми ограничениями (3.11). Опишем построение множеств $X_{\kappa N}$ в фазовых ограничениях (3.23) приближенных задач. Обозначим (при $\kappa \leq N$)

$$\begin{aligned} \eta_{\kappa N}(t, u) &= \otimes^\kappa x_0(t, u) + \sum_{j=1}^{\kappa} \Pi_{\kappa j}((\otimes^{\kappa-j} x_0(t, u)) \otimes m_{jN}^{(1, \dots, 1)}(t, u)), \\ \eta_\kappa(t, u) &= M[\otimes^\kappa x(t, u)], \quad d_{\kappa N} = \sup_{u \in \mathcal{U}} \|\eta_\kappa(u) - \eta_{\kappa N}(u)\|_{C(0, T; \otimes^\kappa \mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В силу (3.17)

$$d_{\kappa N} \leq \sum_{j=1}^{\kappa} C_\kappa^j \sup_u \|x_0(u)\|_{\mathcal{X}}^{\kappa-j} \|m_{jN}^{(1, \dots, 1)}(u) - m_j^{(1, \dots, 1)}(u)\|_{\mathcal{X}_j} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$ согласно лемме 3.3 и благодаря равномерной ограниченности множества функций $x_0(t, u)$. Положим

$$X_{\kappa N} = C[CX_\kappa]_{2d_{\kappa N}}, \quad \kappa = 1, \dots, K, \quad N \geq K, \quad (3.29)$$

где через CX и $[X]_\delta$ обозначаются соответственно дополнение и δ -окрестность подмножества X метрического пространства (в данном случае $C(0, T; \otimes^\kappa \mathbb{R}^n)$).

Управление $u \in \mathcal{U}$ назовем *допустимым для задачи* (3.1), (3.2), (3.10), (3.11), если $x(t, u)$ удовлетворяет фазовым ограничениям (3.11), и *допустимым для*

приближенной задачи (3.18)–(3.24), если выполняются ограничения (3.23). Обозначим множества допустимых управлений через $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}_N$ соответственно. Из (3.28) и (3.29) следует, что $\mathfrak{D}_N \subseteq \mathfrak{D}$ при $N \geq K$ (разумеется, указанные множества могут оказаться и пустыми).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть множество $\mathfrak{D}$ непусто и множества X_κ открыты в $C(0, T; \otimes^\kappa \mathbb{R}^n)$, $\kappa = 1, \dots, K$.

Тогда:

- 1) существует $N_0 \geq K$ такое, что при $N \geq N_0$ множества $X_{\kappa N}$ непусты;
- 2) существует $N_1 \geq N_0$ такое, что при $N \geq N_1$ множества $\mathfrak{D}_N$ непусты;
- 3) если u_N , $N = N_1, N_1 + 1, \dots$, – субоптимальные (оптимальные) управления для задач (3.18)–(3.24) такие, что $\delta_N \equiv J_N(u_N) - \bar{J}_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то u_N образуют минимизирующую последовательность управлений для $J(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) теоремы очевидно, если учесть открытость множеств X_κ и сходимость $d_{\kappa N}$ к нулю. Для доказательства утверждения 2) возьмем произвольное управление $u \in \mathfrak{D}$ и покажем, что $u \in \mathfrak{D}_N$ для всех достаточно больших N .

Пусть ρ_κ – расстояние от функции $M[\otimes^\kappa x(t, u)]$ до множества CX_κ , $\kappa = 1, \dots, K$, в пространстве $C(0, T; \otimes^\kappa \mathbb{R}^n)$. В силу замкнутости множеств CX_κ $\rho_\kappa > 0$. Выберем номер N_1 с таким расчетом, чтобы при всех $N \geq N_1$ выполнялись неравенства $d_{\kappa N} \leq \rho_\kappa/3$, $\kappa = 1, \dots, K$ (что возможно благодаря сходимости $d_{\kappa N}$ к нулю при $N \rightarrow \infty$). Тогда

$$\begin{aligned} \text{dist}(\eta_{\kappa N}(u), CX_\kappa) &\geq \text{dist}(\eta_\kappa(u), CX_\kappa) - \|\eta_\kappa(u) - \eta_{\kappa N}(u)\|_{C(0, T; \otimes^\kappa \mathbb{R}^n)} \\ &\geq \rho_\kappa - \frac{\rho_\kappa}{3} = 2 \frac{\rho_\kappa}{3} \geq 2d_{\kappa N}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.29) заключаем, что $\eta_{\kappa N}(u) \in X_{\kappa N}$ и, следовательно, $u \in \mathfrak{D}_N$.

Наконец, утверждение 3) может быть получено дословным повторением доказательства теоремы 3.2, поскольку $u_N \in \mathfrak{D}$ при всех N и $u_\varepsilon \in \mathfrak{D}_N$ при достаточно больших N .

§ 4. Моменты решений уравнений с частными производными

1. Квазилинейные параболические уравнения. Пусть $\mathcal{O}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\mathcal{O}$ класса C^∞ , $T > 0$, $Q_T = (0, T) \times \mathcal{O}$. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n f^{ij}(\mathcal{D}_1 u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + g(\mathcal{D}_1 u) = \lambda(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad (4.1)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = y(x), \quad u(t, x)|_{x \in \partial\mathcal{O}} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь $\mathcal{D}_1 u$ – вектор $(u, \partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$, f^{ij} и g – функции $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Как показано в [8], при выполнении следующих условий:

- а) f^{ij} и g – аналитические функции $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0) = 0$;

- б) $\exists \delta > 0: \sum_{i,j=1}^n f^{ij}(z) \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n+1}, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, |\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2};$
 в) $q > n + 2;$

оператор задачи (4.1), (4.2)

$$u \rightarrow \left(u|_{t=0}, u'_t - \sum_{i,j=1}^n f^{ij}(\mathcal{D}_1 u) u''_{x_i x_j} + g(\mathcal{D}_1 u) \right)$$

осуществляет аналитический диффеоморфизм соболевского пространства

$$\mathcal{X} = \{u(t, x) \in W_q^{1,2}(Q_T) : u|_{x \in \partial \mathcal{O}} = 0\}$$

и некоторой области Ω пространства $Y \times \mathcal{L}$, где $\mathcal{L} = L_q(Q_T)$, а Y – пространство Бесова,

$$Y = \{y(x) \in B_q^{2-2/q}(\mathcal{O}) : y|_{x \in \partial \mathcal{O}} = 0\}.$$

Пусть $(y_0, \lambda_0) \in \Omega$, u_0 – соответствующее решение задачи (4.1), (4.2). Пусть, далее, исходные данные y_0, λ_0 испытывают случайные возмущения Δy и $\Delta \lambda$ соответственно, причем $(y_0 + \Delta y, \lambda_0 + \Delta \lambda) \in \Omega$. Тогда приращение решения Δu удовлетворяет задаче (символ Δ далее опускается)

$$u'_t(t, x) - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t, x, \mathcal{D}_1 u) u''_{x_i x_j} + b(t, x, \mathcal{D}_1 u) = \lambda(t, x), \quad (4.3)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = y(x), \quad u(t, x)|_{x \in \partial \mathcal{O}} = 0, \quad (4.4)$$

где

$$a^{ij}(t, x, \mathcal{D}_1 u) = f^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0 + \mathcal{D}_1 u), \quad (4.5)$$

$$b(t, x, \mathcal{D}_1 u) = g(\mathcal{D}_1 u_0 + \mathcal{D}_1 u) - \sum_{i,j=1}^n f^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0 + \mathcal{D}_1 u) u''_{0_{x_i x_j}} + u'_{0_t} - \lambda_0, \quad (4.6)$$

$b(t, x, 0) \equiv 0$. Из упомянутых результатов [8] следует, что оператор задачи (4.3), (4.4)

$$u \rightarrow \left(u|_{t=0}, u'_t - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t, x, \mathcal{D}_1 u) u''_{x_i x_j} + b(t, x, \mathcal{D}_1 u) \right)$$

аналитичен в нуле пространства $\mathcal{X}$, а обратный к нему оператор $(y, \lambda) \rightarrow u$ – в нуле пространства $Y \times \mathcal{L}$, т.е. представляется регулярно сходящимся степенным рядом в некотором шаре $K_\delta(Y \times \mathcal{L})$.

Сформулируем условие малости возмущений $y \equiv \Delta y$ и $\lambda \equiv \Delta \lambda$. Именно, потребуем, чтобы распределение μ вектора (y, λ) было сосредоточено в шаре $K_\delta(Y \times \mathcal{L})$.

Так же, как в § 2, определим моменты меры μ :

$$\mathfrak{M}_l = \int \otimes^l(y, \lambda) d\mu \in \otimes^l(Y \times \mathcal{L}),$$

многовременные смешанные моменты решения $u = u(y, \lambda)$ задачи (4.3), (4.4) и параметра λ :

$$M_l = \int \otimes^l(u, \lambda) d\mu \in \otimes^l(\mathcal{X} \times \mathcal{L}),$$

и одновременные смешанные моменты решения и параметра:

$$m_l(t) = \int \otimes^l(u(t), \lambda) d\mu, \quad t \in [0, T].$$

Опишем функциональные пространства, которым принадлежат компоненты вектора $m_l(t)$:

$$m_l^\alpha(t) = \int \bigotimes_{\sigma=1}^l \zeta_{\alpha_\sigma} d\mu,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_l = 1, 2, \quad \zeta_1 = u(t), \quad \zeta_2 = \lambda.$$

Пусть сначала

$$\alpha = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{2, \dots, 2}_{l-r}), \quad 0 \leq r \leq l,$$

и соответственно

$$m_l^\alpha(t) = \int (\otimes^r u(t)) \otimes (\otimes^{l-r} \lambda) d\mu.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{X} \subset W_q^{1,2}(Q_T) = \{u \in L_q(0, T; W_q^2(\mathcal{O})) : u_t' \in L_q(Q_T)\}$$

и что при $q > n + 2$ $W_q^{1,2}(Q_T) \subset C(\overline{Q}_T)$ (теорема вложения) и $W_q^{1,2}(Q_T) \in L_\infty(0, T; B_q^{2-2/q}(\mathcal{O}))$ (теорема о следах), в силу леммы 2.3 заключаем, что $m_l^\alpha \in \mathcal{X}_r \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L}) \equiv \mathcal{X}_{lr}$, где обозначено

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_r = \{ \mathfrak{w}(t) \in C([0, T] \times \mathcal{O}^r) : \mathfrak{w}'(t) \in L_q(0, T; \otimes^r L_q(\mathcal{O})) \} \\ \cap \left\{ \bigcap_{s=0}^{\min\{r, [q]\}} L_{q/s} \left(0, T; \bigcap_{\beta_1, \dots, \beta_r=1, 2; |\beta^{(1)}|=s} \bigotimes_{\sigma=1}^r B_{\beta_\sigma} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь

$$\mathcal{O}^r = \underbrace{\mathcal{O} \times \dots \times \mathcal{O}}_r, \quad B_1 = W_q^2(\mathcal{O}), \quad B_2 = Y,$$

$|\beta^{(1)}|$ – число равных единице индексов в мультииндексе $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ и $q/s = \infty$ при $s = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пространство $\mathcal{X}_r$ банахово как пересечение банаховых пространств относительно нормы пересечения $\|\cdot\|_{X \cap Y} = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Производная $\partial m_l^\alpha / \partial t$ лежит в более узком пространстве, нежели указано в определении пространства $\mathcal{X}_{lr}$. Мы опускаем весьма громоздкое описание этого пространства, поскольку для наших целей достаточно принадлежности пространству, указанному в (4.7).

Для произвольного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ так же, как это делалось в § 2, определим пространство $\mathcal{X}(\alpha) = (\pi_\alpha^*)^{-1} \mathcal{X}_{l,r(\alpha)}$. Очевидно, $m_l^\alpha \in \mathcal{X}(\alpha)$.

Роль следующей леммы в настоящем параграфе совпадает с ролью условий А) и В) в § 2.

ЛЕММА 4.1. *При каждом $t \in [0, T]$ и $i, j = 1, \dots, n$ оператор $v(x) \rightarrow a^{ij}(t, x, \mathcal{D}_1 v(x))$ действует из пространства Y в $C(\overline{\mathcal{O}})$ и аналитичен в нуле:*

$$a^{ij}(t, x, \mathcal{D}_1 v(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{ij}(t) v^k.$$

При п.в. $t \in [0, T]$ оператор $v(x) \rightarrow b(t, x, \mathcal{D}_1 v(x))$ действует из Y в $L_q(\mathcal{O})$ и аналитичен в нуле:

$$b(t, x, \mathcal{D}_1 v(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) v^k.$$

При этом для некоторого $\varrho > 0$

$$\sup_t \sum_k \|a_k^{ij}(t)\| \varrho^k < \infty, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.8)$$

$$\sum_k \|b_k(t)\| \varrho^k \equiv \varphi(t) \in L_q(0, T). \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$u_0 \in W_q^{1,2}(Q_T), \quad u'_{0_{x_i}} \in C(\overline{Q}_T), \quad v \in Y \subset B_q^{2-2/q}(\mathcal{O}), \quad v'_{x_i} \in C(\overline{\mathcal{O}}), \\ i = 1, \dots, n$$

(напомним, что $q > n + 2$), в силу (4.5) и (4.6) заключаем, что для каждого $t \in [0, T]$ и $v \in Y$ $a^{ij}(t, x, \mathcal{D}_1 v(x)) \in C(\overline{\mathcal{O}})$ и при п.в. $t \in [0, T]$ $b(t, x, \mathcal{D}_1 v(x)) \in L_q(\mathcal{O})$. Далее, в силу непрерывности компонент вектор-функции $\mathcal{D}_1 u_0(t, x)$ множество ее значений $\{\mathcal{D}_1 u_0(t, x), (t, x) \in \overline{Q}_T\}$ компактно в $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассуждения, аналогичные приведенным в лемме 2.1, показывают, что существуют $\rho > 0$ и $M > 0$ такие, что для всех $(t, x) \in \overline{Q}_T$

$$\sum_k \|f_k^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0(t, x))\| \rho^k \leq M, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \sum_k \|g_k(\mathcal{D}_1 u_0(t, x))\| \rho^k \leq M, \quad (4.10)$$

где $f_k^{ij}(z)$ и $g_k(z)$ – степенные операторы из разложений функций f^{ij} и g в окрестности точки $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$f_k^{ij}(z) \vartheta^k = \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f^{ij}(z)}{\partial z^\beta} \vartheta_0^{\beta_0} \vartheta_1^{\beta_1} \dots \vartheta_n^{\beta_n}, \quad (4.11)$$

аналогично для $g_k(z)$ (здесь $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{Z}_+$, $|\beta| = \beta_0 + \dots + \beta_n$, $\vartheta = (\vartheta_0, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$).

Пусть теперь $v \in Y$. Формально можем записать

$$a^{ij}(t, x, \mathcal{D}_1 v(x)) = f^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0(t) + \mathcal{D}_1 v) = \sum_k f_k^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0(t)) (\mathcal{D}_1 v)^k \equiv \sum_k a_k^{ij}(t) v^k. \quad (4.12)$$

Покажем, что ряд (4.12) сходится в $C(\overline{\mathcal{O}})$ регулярно на некотором шаре $K_\varrho(Y)$.
Имеем

$$\|a_k^{ij}(t)\| = \sup_{\|v\|_Y \leq 1} \|a_k^{ij}(t)v^k\|_{C(\overline{\mathcal{O}})} \leq \sup_v \sup_{x \in \overline{\mathcal{O}}} \|f_k^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0(t, x))\| |\mathcal{D}_1 v(x)|^k.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{D}_1 v \in \underbrace{C(\overline{\mathcal{O}}) \times \cdots \times C(\overline{\mathcal{O}})}_{n+1} \equiv (C(\overline{\mathcal{O}}))^{n+1}, \quad \|\mathcal{D}_1 v\|_{(C(\overline{\mathcal{O}}))^{n+1}} \leq C\|v\|_Y,$$

в силу (4.10) получим $\|a_k^{ij}(t)\| \leq (M/\rho^k) C^k$, откуда вытекает регулярная сходимость ряда (4.12) на шаре $K_\varrho(Y)$ при $\varrho < \rho/C$ и (ввиду произвольности t) оценка (4.8).

Аналогично рассматривается оператор $b(t, x, \mathcal{D}_1 v)$. Здесь будет

$$b_k(t)v^k = g_k(\mathcal{D}_1 u_0(t))(\mathcal{D}_1 v)^k - \sum_{i,j=1}^n f_k^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0(t))(\mathcal{D}_1 v)^k u''_{0x_i x_j}(t), \quad k \geq 1, \quad (4.13)$$

откуда

$$\|b_k(t)\| = \sup_{\|v\|_Y \leq 1} \|b_k(t)v^k\|_{L_q(\mathcal{O})} \leq \frac{M}{\rho^k} C^k (\text{mes } \mathcal{O})^{1/q} + \frac{M}{\rho^k} C^k \sum_{i,j=1}^n \|u''_{0x_i x_j}(t)\|_{L_q(\mathcal{O})}.$$

Дальнейшие рассуждения очевидны.

Рассмотрим оператор

$$\mathbf{a}_k^{ij}(t): (v, w) \rightarrow a_{k-1}^{ij}(t)v^{k-1}w''_{x_i x_j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.14)$$

являющийся, очевидно, степенным порядка $(k-1, 1)$ из $Y \times W_q^2(\mathcal{O})$ в $L_q(\mathcal{O})$. Пусть $\widehat{\mathbf{a}}_k^{ij}(t)$ – порождаемый $\mathbf{a}_k^{ij}(t)$ линейный оператор $(\otimes^{k-1} Y) \otimes W_q^2(\mathcal{O}) \rightarrow L_q(\mathcal{O})$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $r, l, k \in \mathbb{N}$, $r \leq l$. Оператор

$$\mathcal{A}_{lrk}: \mathfrak{w}(t) \rightarrow \sum_{i,j=1}^n ((\otimes^{r-1} I_Y) \otimes \widehat{\mathbf{a}}_k^{ij}(t) \otimes (\otimes^{l-r} I_{\mathcal{L}})) \mathfrak{w}(t)$$

действует непрерывно из пространства $\mathcal{X}_{l+k-1, r+k-1}$ в пространство $\mathcal{Z}_{lr} \equiv \mathcal{X}_r \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$, где $\mathcal{X}_r = L_q(0, T; \otimes^r L_q(\mathcal{O}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{\nu} \mathbf{u}_{\nu}(t) \otimes \mathbf{v}_{\nu} \in L_q(0, T; (\otimes^{r+k-2} Y) \otimes W_q^2(\mathcal{O})) \otimes_{\text{alg}} (\otimes^{l-r} \mathcal{L}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{lrk} \mathfrak{w}\|_{\mathcal{Z}_{lr}} &\leq \sum_{\nu} \sum_{i,j} \|((\otimes^{r-1} I_Y) \otimes \widehat{\mathbf{a}}_k^{ij}(t)) \mathbf{u}_{\nu}(t)\|_{\mathcal{X}_r} \|\mathbf{v}_{\nu}\|_{\otimes^{l-r} \mathcal{L}} \\ &\leq \sum_{\nu} \sum_{i,j} \left(\int_0^T (\|\widehat{\mathbf{a}}_k^{ij}(t)\| \|\mathbf{u}_{\nu}(t)\|_{(\otimes^{r+k-2} Y) \otimes W_q^2(\mathcal{O})})^q dt \right)^{1/q} \|\mathbf{v}_{\nu}\|_{\otimes^{l-r} \mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что $\|\tilde{\mathbf{a}}_k^{ij}(t)\|$ не превосходит нормы симметричного $(k-1)$ -линейного оператора $\tilde{a}_{k-1}^{ij}(t)$, порождающего степенной оператор $a_{k-1}^{ij}(t)$. Учитывая неравенство

$$\|\tilde{a}_{k-1}^{ij}(t)\| \leq \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!} \|a_{k-1}^{ij}(t)\|,$$

в силу (4.8) заключаем

$$\|\mathcal{A}_{lrk} \mathbf{w}\|_{\mathcal{Z}_{lr}} \leq C \sum_{\nu} \|\mathbf{u}_{\nu}\|_{L_q(0,T;(\otimes^{r+k-2} Y) \otimes W_q^2(\mathcal{O}))} \|\mathbf{v}_{\nu}\|_{\otimes^{l-r} \mathcal{L}},$$

откуда вытекает непрерывность оператора

$$\mathcal{A}_{lrk} : L_q(0, T; (\otimes^{r+k-2} Y) \otimes W_q^2(\mathcal{O})) \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{Z}_{lr}.$$

Остается заметить, что пространство $\mathcal{X}_{l+k-1, r+k-1}$ непрерывно вложено в

$$L_q(0, T; (\otimes^{r+k-2} Y) \otimes W_q^2(\mathcal{O})) \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L}).$$

Для произвольного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l = 1, 2$, введем пространство $\mathcal{Z}(\alpha) = (\pi_{\alpha}^*)^{-1} \mathcal{Z}_{l,r(\alpha)}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $s \in \alpha^{(1)}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда оператор

$$\mathcal{A}_{sk}^{\alpha} : \mathbf{w}(t) \rightarrow \sum_{i,j=1}^n \left(\left(\bigotimes_{\sigma=1}^{s-1} I_{\Xi_{\alpha\sigma}} \right) \otimes \hat{\mathbf{a}}_k^{ij}(t) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma=s+1}^l I_{\Xi_{\alpha\sigma}} \right) \right) \mathbf{w}(t), \quad (4.15)$$

где $\Xi_1 = Y$, $\Xi_2 = \mathcal{L}$, действует непрерывно из пространства $\mathcal{X}(\alpha(s, k, 0))$ в $\mathcal{Z}(\alpha)$.

Рассмотрим теперь операторы

$$\mathcal{B}_{lrk} : \mathbf{w}(t) \rightarrow ((\otimes^{r-1} I_Y) \otimes \hat{b}_k(t) \otimes (\otimes^{l-r} I_{\mathcal{L}})) \mathbf{w}(t),$$

где $\hat{b}_k(t)$ – порожденный степенным оператором $b_k(t)$ линейный оператор $\otimes^k Y \rightarrow L_q(\mathcal{O})$. С помощью выкладок, аналогичных использовавшимся в лемме 4.2, проверяется, что оператор $\mathcal{B}_{lrk}$ действует непрерывно из $L_{\infty}(0, T; \otimes^{r+k-1} Y) \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$ в $\mathcal{Z}_{lr}$. Поскольку пространство $\mathcal{X}_{l+k-1, r+k-1}$ непрерывно вложено в $L_{\infty}(0, T; \otimes^{r+k-1} Y) \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$, справедлива

ЛЕММА 4.3. Пусть $r, l, k \in \mathbb{N}$, $r \leq l$. Тогда оператор $\mathcal{B}_{lrk}$ действует непрерывно из пространства $\mathcal{X}_{l+k-1, r+k-1}$ в $\mathcal{Z}_{lr}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $s \in \alpha^{(1)}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда оператор

$$\mathcal{B}_{sk}^{\alpha} : \mathbf{w}(t) \rightarrow \left(\left(\bigotimes_{\sigma=1}^{s-1} I_{\Xi_{\alpha\sigma}} \right) \otimes \hat{b}_k(t) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma=s+1}^l I_{\Xi_{\alpha\sigma}} \right) \right) \mathbf{w}(t) \quad (4.16)$$

действует непрерывно из пространства $\mathcal{X}(\alpha(s, k, 0))$ в $\mathcal{Z}(\alpha)$.

Пусть $u_1, \dots, u_r \in \mathcal{X}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-r} \in \mathcal{L}$, $l - r \geq 1$. Рассмотрим сужение

$$\gamma: \left(\bigotimes_{\sigma=1}^r u_{\sigma}(t) \right) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma=1}^{l-r} \lambda_{\sigma}(\tau_{\sigma}) \right) \rightarrow \left(\bigotimes_{\sigma=1}^r u_{\sigma}(t) \right) \otimes \lambda_1(t) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma=2}^{l-r} \lambda_{\sigma}(\tau_{\sigma}) \right).$$

Из леммы 2.3 и вложения $\mathcal{X}_{lr} \subset L_{\infty}(0, T; \otimes^r Y) \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$ следует, что γ (однозначно) продолжается до линейного непрерывного оператора, действующего из $\mathcal{X}_{lr}$ в $\mathcal{Z}_{l,r+1}$. Если теперь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ – произвольный мультииндекс, в котором $\alpha_s = 2$, то, вводя перестановку $\pi_{\alpha,s}$, упорядочивающую α по возрастанию и перемещающую индекс α_s на первое место после индексов, равных единице, т.е. $\pi_{\alpha,s}(r(\alpha) + 1) = s$ (аналог перестановки $\pi_{\alpha\beta}$ из § 2), определяем оператор сужения $\gamma_s^{\alpha} = (\pi_{\alpha,s}^*)^{-1} \circ \gamma \circ \pi_{\alpha,s}^*: \mathcal{X}(\alpha) \rightarrow \mathcal{Z}(\alpha(s, 1, 0))$, очевидно, линейный и непрерывный.

Пусть теперь в мультииндексе α $\alpha_s = 1$. Тогда мультииндекс $\alpha(s, 0, 1)$ отличается от α s -й компонентой, которая в $\alpha(s, 0, 1)$ равна 2, и поэтому (в силу вышесказанного) γ_s^{α} действует непрерывно из $\mathcal{X}(\alpha(s, 0, 1))$ в $\mathcal{Z}(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Моменты m_l^{α} удовлетворяют бесконечной системе уравнений*

$$\frac{d}{dt} m_l^{\alpha} = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{sk}^{\alpha} m_{l+k-1}^{\alpha(s,k,0)} + \gamma_s^{\alpha} m_l^{\alpha(s,0,1)} \right), \quad (4.17)$$

где $l = 1, 2, \dots$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l = 1, 2$, $\alpha^{(1)} \neq \emptyset$,

$$\mathcal{F}_{sk}^{\alpha} = \mathcal{A}_{sk}^{\alpha} - \mathcal{B}_{sk}^{\alpha}. \quad (4.18)$$

Ряд в правой части (4.17) сходится абсолютно в пространстве $\mathcal{Z}(\alpha)$. Выполняются также начальные условия

$$m_l^{\alpha}|_{t=0} = \mathfrak{M}_l^{\alpha}. \quad (4.19)$$

Доказательство с учетом следствий 4.1 и 4.2 фактически повторяет (с очевидными изменениями) доказательство теоремы 2.1 и поэтому опускается. То же относится к формулируемой ниже теореме 4.2 (аналог теоремы 2.2), а теорема 4.3 принципиально отличается от теоремы 2.3 только доказательством единственности решения приближенной системы моментных уравнений, которое и будет приведено.

ТЕОРЕМА 4.2. *Моменты m_l^{α} разлагаются в ряды*

$$m_l^{\alpha} = \sum_{p=l}^{\infty} \hat{\mathcal{F}}_{pl}^{\alpha} \mathfrak{M}_p,$$

где $\hat{\mathcal{F}}_{pl}^{\alpha} \in \mathcal{L}(\otimes^p(Y \times \mathcal{L}); \mathcal{X}(\alpha))$, сходящиеся абсолютно в пространствах $\mathcal{X}(\alpha)$.

Составим приближенную систему моментных уравнений, обнулив в (4.17) все моменты порядка выше N :

$$\frac{d}{dt} m_l^{\alpha} = \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \left(\sum_{k=1}^{N-l+1} \mathcal{F}_{sk}^{\alpha} m_{l+k-1}^{\alpha(s,k,0)} + \gamma_s^{\alpha} m_l^{\alpha(s,0,1)} \right), \quad l = 1, \dots, N. \quad (4.20)$$

ТЕОРЕМА 4.3. Задача (4.20), (4.19) обладает единственным решением $(m_{1N}, m_{2N}, \dots, m_{NN})$ в пространстве

$$\prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l): \alpha^{(1)} \neq \emptyset} \mathcal{X}(\alpha)$$

при любых начальных условиях $\mathfrak{M}_l = (\mathfrak{M}_l^\alpha) \in \otimes^l(Y \times \mathcal{L})$. Если, кроме того, $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$ – моменты некоторой вероятностной борелевской меры на ша-ре $K_\delta(Y \times \mathcal{L})$, то имеет место сходимость $m_{lN}^\alpha \rightarrow m_l^\alpha$ при $N \rightarrow \infty$ в норме пространства $\mathcal{X}(\alpha)$ для всех $l = 1, 2, \dots$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $\alpha^{(1)} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ. Выкладки, аналогичные приведен-ным в лемме 2.6, показывают, что достаточно проверить единственность в клас-се $\mathcal{X}(\alpha)$, $\alpha^{(1)} \neq \emptyset$, тривиального решения задачи Коши

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} - \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \mathcal{F}_{s1}^\alpha \mathfrak{w} = 0, \quad (4.21)$$

$$\mathfrak{w}|_{t=0} = 0. \quad (4.22)$$

Применив к обеим частям (4.21) оператор π_α^* , получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(\pi_\alpha^* \mathfrak{w}) - \sum_{s \in \alpha^{(1)}} (\pi_\alpha^* \circ \mathcal{F}_{s1}^\alpha) \mathfrak{w} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(\pi_\alpha^* \mathfrak{w}) - \sum_{s \in \alpha^{(1)}} (\pi_\alpha^* \circ \mathcal{F}_{s1}^\alpha \circ (\pi_\alpha^*)^{-1}) \pi_\alpha^* \mathfrak{w} = 0 \quad (4.23)$$

(по поводу коммутирования операторов d/dt и π_α^* см. замечание 2.1). Отметим, что $\pi_\alpha^* \mathfrak{w} \in \mathcal{X}_{lr} = \mathcal{X}_r \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$, $r = r(\alpha)$, а (4.23) представляет собой равенство функций из пространства $\mathcal{X}_{lr} = \mathcal{X}_r \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$. Нетрудно видеть также, что выполнено операторное равенство

$$\sum_{s \in \alpha^{(1)}} \pi_\alpha^* \circ \mathcal{F}_{s1}^\alpha \circ (\pi_\alpha^*)^{-1} = \left(\sum_{s=1}^r \mathcal{F}_{s1}^{\alpha'} \right) \otimes (\otimes^{l-r} I_{\mathcal{L}}), \quad (4.24)$$

где

$$\alpha' = (\underbrace{1, \dots, 1}_r).$$

Пусть ψ – элемент сопряженного пространства $(\otimes^{l-r} \mathcal{L})'$. Применим к обеим частям (4.23) оператор $I_{\mathcal{X}_r} \otimes \psi: \mathcal{X}_{lr} \rightarrow \mathcal{X}_r$. Обозначив $\mathfrak{w}_\psi = (I_{\mathcal{X}_r} \otimes \psi) \pi_\alpha^* \mathfrak{w} \in \mathcal{X}_r$, с учетом (4.24) придем к равенству

$$\frac{d\mathfrak{w}_\psi}{dt} - \sum_{s=1}^r \mathcal{F}_{s1}^{\alpha'} \mathfrak{w}_\psi = 0. \quad (4.25)$$

Те же действия, примененные к (4.22), дают начальное условие

$$\mathfrak{w}_\psi|_{t=0} = 0. \quad (4.26)$$

Докажем единственность тривиального решения задачи (4.25), (4.26) в пространстве $\mathcal{X}_r$. Заметим прежде всего, что $\mathcal{X}_r$ непрерывно вложено в пространство

$$\mathcal{W}_r = \{w \in W_q^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O}^r) : w|_{[0, T] \times \partial \mathcal{O}^r} = 0\}$$

в силу (4.7) и очевидных вложений

$$\bigcap_{s=1}^r \{(\otimes^{s-1} Y) \otimes W_q^2(\mathcal{O}) \otimes (\otimes^{r-s} Y)\} \subset W_q^2(\mathcal{O}^r), \quad \otimes^r L_q(\mathcal{O}) \subset L_q(\mathcal{O}^r);$$

нулевое краевое условие обеспечивается равенством нулю на $\partial \mathcal{O}$ функций из Y .

Рассмотрим подробнее оператор $\sum_{s=1}^r \mathcal{F}_{s1}^{\alpha'}$. Согласно (4.18), (4.15) и (4.16)

$$\sum_{s=1}^r \mathcal{F}_{s1}^{\alpha'} \mathfrak{w}_\psi = \sum_{s=1}^r \left((\otimes^{s-1} I_Y) \otimes \left(\sum_{i,j=1}^n \mathfrak{a}_1^{ij}(t) - b_1(t) \right) \otimes (\otimes^{r-s} I_Y) \right) \mathfrak{w}_\psi(t). \quad (4.27)$$

Пусть $x^1, \dots, x^r \in \mathcal{O}$. Тогда (4.27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^r \mathcal{F}_{s1}^{\alpha'} \mathfrak{w}_\psi &= \sum_{s=1}^r \left(\sum_{i,j=1}^n A^{ij}(t, x^s) \frac{\partial^2}{\partial x_i^s \partial x_j^s} + \sum_{i=1}^n B^i(t, x^s) \frac{\partial}{\partial x_i^s} + B^0(t, x^s) \right) \\ &\quad \times \mathfrak{w}_\psi(t, x^1, \dots, x^s), \end{aligned}$$

где согласно (4.14), (4.12), (4.13) и (4.11)

$$\begin{aligned} A^{ij}(t, x) &= f^{ij}(\mathcal{D}_1 u_0(t, x)), \\ B^k(t, x) &= -\frac{\partial g}{\partial z_k}(\mathcal{D}_1 u_0(t, x)) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f^{ij}}{\partial z_k}(\mathcal{D}_1 u_0(t, x)) \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial x_i \partial x_j}, \\ k &= 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Выкладки, аналогичные проделанным в [8; лемма 2.2 и теорема 2.1], позволяют заключить, что к задаче (4.25), (4.26) применимы результаты [9], гарантирующие единственность ее решения в пространстве $\mathcal{W}_r$, а следовательно, и в $\mathcal{X}_r$. Остается заметить, что из равенства $\mathfrak{w}_\psi = 0$ в силу произвольности ψ вытекает $\pi_\alpha^* \mathfrak{w} = 0$, откуда $\mathfrak{w} = 0$.

2. Нелинейные волновые уравнения. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt}''(t, x) - \Delta u + \varphi(u) = \lambda(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.28)$$

$$u|_{t=0} = \mathfrak{u}(x), \quad u_t'|_{t=0} = \mathfrak{v}(x), \quad (4.29)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$ – оператор Лапласа, $\varphi(u)$ – функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Запишем задачу (4.28), (4.29) в более удобной для дальнейшего гамильтоновой форме:

$$u_t' = v, \quad v_t' = \Delta u - \varphi(u) + \lambda, \quad (4.30)$$

$$u|_{t=0} = \mathfrak{u}, \quad v|_{t=0} = \mathfrak{v}. \quad (4.31)$$

Будем обозначать вектор-функцию $(u(t), v(t))$ через $w(t)$, а вектор начальных значений (u, v) через y .

Введем функциональные пространства, связанные с задачей (4.30), (4.31). Начальные значения u и v будут браться из соболевских пространств $H^p(\mathbb{R}^n)$ и $H^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ соответственно, $p \geq 2$, и, значит, $y \in H^p(\mathbb{R}^n) \times H^{p-1}(\mathbb{R}^n) \equiv Y$. Функция $\lambda(t, x)$ предполагается лежащей в пространстве $\mathcal{L} = C(0, T; H^{p-1}(\mathbb{R}^n))$. Наконец, пространство решений $\mathcal{X}$ определим как прообраз прямого произведения $Y \times \{0\} \times \mathcal{L}$ под действием инъективного линейного оператора

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}: w = (u, v) &\rightarrow (w|_{t=0}, u'_t - v, v'_t - \Delta u), \\ \mathfrak{L}: C(0, T; Y) &\rightarrow Y \times H^{-1}((0, T) \times \mathbb{R}^n) \times H^{-1}((0, T) \times \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Очевидно, $\mathcal{X}$ – банахово пространство относительно нормы $\|w\|_{\mathcal{X}} = \|w(0)\|_Y + \|v'_t - \Delta u\|_{\mathcal{L}}$.

Как показано в [10], при выполнении условий:

- а) φ – аналитическая функция на $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$;
- б) $p > n/2 + 1$;

оператор задачи (4.30), (4.31) $w \rightarrow (w|_{t=0}, v'_t - \Delta u + \varphi(u))$ осуществляет аналитический диффеоморфизм пространства $\mathcal{X}$ и некоторой области Ω пространства $Y \times \mathcal{L}$.

Пусть $(y_0, \lambda_0) \in \Omega$. Как и в п. 1, будем рассматривать задачу о малом случайном возмущении решения $w_0 = (u_0, v_0)$ задачи (4.30), (4.31), отвечающего исходным данным (y_0, λ_0) . Приращение решения w_0 удовлетворяет системе

$$u'_t = v, \quad v'_t = \Delta u - a(t, x, u) + \lambda, \quad (4.32)$$

$$w|_{t=0} = y, \quad (4.33)$$

где y и λ – приращения исходных данных, $w = (u, v)$ – соответствующее приращение решения, $a(t, x, u) = \varphi(u_0(t, x) + u) - \varphi(u_0(t, x))$, $a(t, x, 0) \equiv 0$.

Разрешающий оператор задачи (4.32), (4.33) аналитичен в нуле пространства $Y \times \mathcal{L}$, т.е. представляется регулярно сходящимся в некотором шаре $K_\delta(Y \times \mathcal{L})$ степенным рядом. Будем предполагать, что распределение μ исходных данных (y, λ) задачи (4.32), (4.33) сосредоточено в шаре $K_\delta(Y \times \mathcal{L})$. Определим моменты $\mathfrak{M}_l$, M_l и $m_l(t)$ теми же формулами, что и в п. 1, с заменой в них функции u на w . Для описания пространств, которым принадлежат компоненты векторов $m_l(t)$, нам понадобится

ЛЕММА 4.4. Пусть B_1 и B_2 – банаховы пространства, $f \in C(0, T; B_1)$, $g \in C(0, T; B_2)$. Тогда сужение $f(t) \otimes g(\tau) \rightarrow f(t) \otimes g(t)$ продолжается до линейного непрерывного оператора $C(0, T; B_1) \otimes C(0, T; B_2) \rightarrow C(0, T; B_1 \otimes B_2)$, норма которого не превосходит единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом результата леммы 2.3 для $p = q = \infty$ достаточно проверить непрерывность функции $f(t) \otimes g(t)$, которая, впрочем, очевидна.

Заметим, что в силу определения пространства $\mathcal{X}$ имеет место вложение

$$\mathcal{X} \subset \{w \in C(0, T; Y) : w'_t \in C(0, T; Z)\}, \quad Z = H^{p-1}(\mathbb{R}^n) \times H^{p-2}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда

$$m_l^\alpha \in \mathcal{X}_{lr} \equiv \{\mathfrak{w} \in C(0, T; \otimes^r Y) : \mathfrak{w}'_t \in C(0, T; \otimes^r Z)\} \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$$

для

$$\alpha = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{2, \dots, 2}_{l-r})$$

и $m_l^\alpha \in \mathcal{X}(\alpha) \equiv (\pi_\alpha^*)^{-1} \mathcal{X}_{l, r(\alpha)}$ для произвольного α .

Приводимые ниже леммы 4.5 и 4.6 доказываются аналогично леммам 4.1 и 4.2.

ЛЕММА 4.5. При каждом $t \in [0, T]$ оператор $u(x) \rightarrow a(t, x, u(x))$ действует из $H^p(\mathbb{R}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^n)$ и аналитичен в нуле:

$$a(t, x, u(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) u^k,$$

причем существует $\rho > 0$ такое, что $\sup_t \sum_k \|a_k(t)\| \rho^k < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. При каждом $t \in [0, T]$ оператор

$$\mathfrak{a}(t): w(x) = (u(x), v(x)) \rightarrow (v(x), \Delta u(x) - a(t, x, u(x)))$$

действует из Y в Z и аналитичен в нуле: $\mathfrak{a}(t, w) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}_k(t) w^k$, причем $\sup_t \sum_k \|\mathfrak{a}_k(t)\| \rho^k < \infty$.

Пусть $\hat{\mathfrak{a}}_k(t)$ – линейный оператор $\otimes^k Y \rightarrow Z$, порожденный степенным оператором $\mathfrak{a}_k(t)$.

ЛЕММА 4.6. Пусть $r, l, k \in \mathbb{N}$, $r \leq l$. Оператор

$$\mathfrak{J}_{lrk}: \mathfrak{w}(t) \rightarrow ((\otimes^{r-1} I_Y) \otimes \hat{\mathfrak{a}}_k(t) \otimes (\otimes^{l-r} I_{\mathcal{L}})) \mathfrak{w}(t)$$

действует непрерывно из пространства $\mathcal{X}_{l+k-1, r+k-1}$ в пространство $\mathcal{Z}_{lr} \equiv \mathcal{Z}_r \otimes (\otimes^{l-r} \mathcal{L})$, где $\mathcal{Z}_r = C(0, T; \otimes^r Z)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $s \in \alpha^{(1)}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда оператор

$$\mathfrak{J}_{sk}^\alpha: \mathfrak{w}(t) \rightarrow \left(\left(\bigotimes_{\sigma=1}^{s-1} I_{\Xi_{\alpha_\sigma}} \right) \otimes \hat{\mathfrak{a}}_k(t) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma=s+1}^l I_{\Xi_{\alpha_\sigma}} \right) \right) \mathfrak{w}(t), \quad \Xi_1 = Y, \quad \Xi_2 = \mathcal{L},$$

действует непрерывно из пространства $\mathcal{X}(\alpha(s, k, 0))$ в $\mathcal{Z}(\alpha) \equiv (\pi_\alpha^*)^{-1} \mathcal{Z}_{l, r(\alpha)}$.

Пусть $r, l \in \mathbb{N}$, $r \leq l-1$, $w_1, \dots, w_r \in \mathcal{X}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-r} \in \mathcal{L}$. Введем оператор сужения

$$\gamma: \left(\bigotimes_{\sigma=1}^r w_\sigma(t) \right) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma=1}^{l-r} \lambda_\sigma(\tau_\sigma) \right) \rightarrow \left(\bigotimes_{\sigma=1}^r w_\sigma(t) \right) \otimes \lambda_1(t) \otimes \left(\bigotimes_{\sigma=2}^{l-r} \lambda_\sigma(\tau_\sigma) \right),$$

продолжающийся в силу леммы 4.4 до непрерывного оператора из $\mathcal{X}_{lr}$ в пространство $C(0, T; (\otimes^r Y) \otimes H^{p-1}(\mathbb{R}^n)) \otimes (\otimes^{l-r-1} \mathcal{L})$. Отсюда, учитывая изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{l,r+1} &\cong (C(0, T; (\otimes^r Z) \otimes H^{p-1}(\mathbb{R}^n)) \otimes (\otimes^{l-r-1} \mathcal{L})) \\ &\quad \times (C(0, T; (\otimes^r Z) \otimes H^{p-2}(\mathbb{R}^n)) \otimes (\otimes^{l-r-1} \mathcal{L})) \end{aligned}$$

и вложение $Z \subset Y$, заключаем, что оператор $\Gamma: \mathfrak{w} \rightarrow (0, \gamma \mathfrak{w})$ действует непрерывно из пространства $\mathcal{X}_{lr}$ в $\mathcal{X}_{l,r+1}$, а оператор $\Gamma_s^\alpha \equiv (\pi_{\alpha,s}^*)^{-1} \circ \Gamma \circ \pi_{\alpha,s}^*$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $\alpha_s = 1, -$ из $\mathcal{X}(\alpha(s, 0, 1))$ в $\mathcal{L}(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Справедливы утверждения теорем 4.1, 4.2 и 4.3 с заменой операторов $\mathcal{F}_{sk}^\alpha$ на $\mathfrak{F}_{sk}^\alpha$ и γ_s^α на Γ_s^α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в п. 1, приведем только доказательство единственности решения приближенной задачи, для чего проверим единственность в классе $\mathcal{X}(\alpha)$ тривиального решения задачи

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} - \sum_{s \in \alpha^{(1)}} \mathfrak{F}_{s1}^\alpha \mathfrak{w} = 0, \quad \mathfrak{w}|_{t=0} = 0. \quad (4.34)$$

Выкладки, аналогичные (4.23)–(4.26), показывают, что вопрос сводится к единственности в классе $\mathcal{X}_r$, $r = r(\alpha)$, тривиального решения задачи

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} - \sum_{s=1}^r \mathfrak{F}_{s1}^{\alpha'} \mathfrak{w} = 0, \quad \mathfrak{w}|_{t=0} = 0, \quad \alpha' = (\underbrace{1, \dots, 1}_r). \quad (4.35)$$

Согласно определению операторов $\mathfrak{F}_{sk}^\alpha$

$$\mathfrak{F}_{s1}^{\alpha'} \mathfrak{w}(t) = ((\otimes^{s-1} I_Y) \otimes \mathbf{a}_1(t) \otimes (\otimes^{r-s} I_Y)) \mathfrak{w}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(t)w &= (v, \Delta u - A(t)u), \quad w = (u, v) \in Y, \\ A(t) &= A(t, x) = \varphi'(u_0(t, x)) \in C_b([0, T \times \mathbb{R}^n]). \end{aligned}$$

В силу следствия 4.4 при $\mathfrak{w} \in \mathcal{X}_r$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{s1}^{\alpha'} \mathfrak{w}(t) &\in \mathcal{X}_r = C(0, T; \otimes^r (H^{p-1}(\mathbb{R}^n) \times H^{p-2}(\mathbb{R}^n))) \subset C(0, T; L_2(\mathbb{R}^{nr}; \mathbb{R}^{2r})), \\ &p \geq 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор $\Lambda w \equiv (-\Delta u, v)$, действующий, очевидно, непрерывно из Y в $L_2(\mathbb{R}^n) \times L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор $\otimes^r \Lambda$ будет действовать непрерывно из $\otimes^r Y$ в $L_2(\mathbb{R}^{nr}; \mathbb{R}^{2r})$. Умножим обе части уравнения (4.35) скалярно в $L_2(\mathbb{R}^{nr}; \mathbb{R}^{2r})$ на функцию $(\otimes^r \Lambda) \mathfrak{w}(t)$. Интегрируя по частям, придем к равенству

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle (\otimes^r D) \mathfrak{w}(t), (\otimes^r D) \mathfrak{w}(t) \rangle \\ &= \sum_{s=1}^r \langle ((\otimes^{s-1} D) \otimes \mathbf{a}_1(t) \otimes (\otimes^{r-s} D)) \mathfrak{w}(t), ((\otimes^{s-1} D) \otimes \Lambda \otimes (\otimes^{r-s} D)) \mathfrak{w}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где $Dw = (\nabla u, v)$. Заметим, что

$$\langle \mathbf{a}_1(t)w, \Lambda w \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (-v\Delta u + \Delta uv - A(t)uv) dx = -\langle A(t)u, v \rangle$$

(скалярное произведение в разных гильбертовых пространствах мы обозначаем одним и тем же символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$, что, надеемся, не приведет к путанице). Отсюда $|\langle \mathbf{a}_1(t)w, \Lambda w \rangle| \leq C \langle Dw, Dw \rangle$, и, следовательно, из (4.36) с учетом нулевого начального условия получаем

$$\frac{1}{2} \langle (\otimes^r D)\mathbf{w}(t), (\otimes^r D)\mathbf{w}(t) \rangle \leq Cr \int_0^t \langle (\otimes^r D)\mathbf{w}(\tau), (\otimes^r D)\mathbf{w}(\tau) \rangle d\tau.$$

В силу леммы Гронуолла заключаем, что $\langle (\otimes^r D)\mathbf{w}(t), (\otimes^r D)\mathbf{w}(t) \rangle = 0 \quad \forall t$, а значит, и $\mathbf{w}(t) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В случае $A(t, x) \equiv 0$ правая часть (4.36) оказывается равной нулю, а потому система (4.35) обладает интегралом

$$\mathcal{H}(\mathbf{w}(t)) = \langle (\otimes^r D)\mathbf{w}(t), (\otimes^r D)\mathbf{w}(t) \rangle.$$

Список литературы

- [1] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, *Математические задачи статистической гидромеханики*, Наука, М., 1980; нем. пер.: М. J. Višik, A. V. Fursikov, *Mathematische Probleme der statistischen Hydromechanik*, Math. Anwendungen Phys. Tech., **41**, Akademische, Leipzig, 1986.
- [2] Д. А. Хрычёв, “О приближенном решении систем моментных уравнений”, *Матем. сб.*, **126(168)**:1 (1985), 83–100; англ. пер.: D. A. Khrychev, “On approximate solution of systems of moment equations”, *Math. USSR-Sb.*, **54**:1 (1985), 81–98.
- [3] Д. А. Хрычёв, “Оптимальное программное управление: существование и аппроксимация”, *Матем. сб.*, **192**:5 (2001), 125–144; англ. пер.: D. A. Khrychev, “Optimal programmed controls: existence and approximation”, *Sb. Math.*, **192**:5 (2001), 763–783.
- [4] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М., 2004; англ. пер.: А. Ya. Helemskii, *Lectures and exercises on functional analysis*, Transl. Math. Monogr., **233**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [5] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969; англ. пер.: М. М. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of branching of solutions of non-linear equations*, Noordhoff International Publ., Leyden, 1974.
- [6] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.
- [7] A. Douady, “Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d’un espace analytique donné”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **16**:1 (1966), 1–95.
- [8] С. Б. Куксин, “Диффеоморфизмы функциональных пространств, отвечающие квазилинейным параболическим уравнениям”, *Матем. сб.*, **117(159)**:3 (1982), 359–378; англ. пер.: S. B. Kuksin, “Diffeomorphisms of function spaces corresponding to quasilinear parabolic equations”, *Math. USSR-Sb.*, **45**:3 (1983), 359–378.

- [9] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [10] С. Б. Куксин, *Зависимость от начальных условий решений нелинейных эволюционных уравнений*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1980.

Д. А. Хрычёв (D. A. Khrychev)

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)
E-mail: dakford@yandex.ru

Поступила в редакцию

14.08.2006