Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Галахов, А. Л. Скубачевский, О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 1, 45–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:21:33

УДК 519.21+517.95

Е. И. Галахов, А. Л. Скубачевский

О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями

Рассматривается эллиптический оператор второго порядка с нелокальными условиями в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$. Исследуется так называемый нетрансверсальный случай, т.е. когда значение функции в каждой точке $x \in \partial Q$ связано с интегралом от этой функции по множеству $\bar{Q}$ относительно борелевской меры $\mu(x, dy)$. Получены достаточные условия существования полугруппы Феллера, инфинитезимальным производящим оператором которой является замыкание в $C(\bar{Q})$ рассматриваемого эллиптического оператора.

Библиография: 20 названий.

Вопрос о существовании неотрицательных сжимающих полугрупп для одномерных диффузионных процессов с нелокальными условиями рассматривался в работах В. Феллера [1], [2]. Позднее такие полугруппы были названы полугруппами Феллера. А. Д. Вентцелем [3] было доказано, что если эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, действующий в области $Q \subset \mathbb{R}^n$, является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера, то его область определения состоит из функций, удовлетворяющих, вообще говоря, нелокальным условиям. Эти нелокальные условия помимо значений функции и ее производных в каждой точке x границы ∂Q содержат интеграл от этой функции по множеству $\bar{Q}$ относительно борелевской меры $\mu(x, dy)$. Достаточные условия того, чтобы эллиптический оператор с такой областью определения был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера, изучались в работах [4]–[9] и др. При этом авторами предполагалось, что порядок нелокальных членов меньше порядка граничного оператора (этот случай принято называть трансверсальным). Задача о существовании полугруппы Феллера в нетрансверсальном случае является нерешенной (см. [8]). Впервые она рассматривалась в [10]–[12] при условии убывания нелокальных членов вблизи границы. Если носитель меры $\mu(x, \cdot)$ имеет непустое пересечение только с частью границы, на которой задается условие Дирихле и отсутствуют нелокальные члены, то использование методов этих работ также позволяет доказать существование полугруппы Феллера (см. [13]).

В настоящей работе исследуется нетрансверсальный случай при весьма общих условиях на нелокальные члены. Получены достаточные условия существования полугруппы Феллера, которые с точностью до оператора с нормой меньше, чем $1/2$, определяются геометрическими свойствами носителя нелокальных членов.

Статья состоит из четырех параграфов. В первом из них приводятся вспомогательные утверждения, необходимые в дальнейшем. В §2 рассматривается вопрос

о существовании классических решений нелокальных задач для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка и доказывается плотность области определения соответствующего оператора A_0B в банаховом пространстве $C_B(\overline{Q})$. Здесь $C_B(\overline{Q})$ – подпространство функций из $C(\overline{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям. Там же показано, что замыкание оператора A_0B в $C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера. Доказательство основано на использовании некоторого следствия из теоремы Хилле–Йосиды и упомянутых выше результатах о разрешимости нелокальной эллиптической задачи и о плотности области определения оператора A_0B в $C_B(\overline{Q})$. Третий параграф посвящен разрешимости нелокальных задач для эллиптических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в пространствах Гёльдера при дополнительных ограничениях типа гладкости на нелокальные члены. В этом же параграфе доказана плотность области определения эллиптического интегро-дифференциального оператора A_B в $C_B(\overline{Q})$, а также теорема о существовании полугруппы Феллера. В § 4 приводятся примеры нелокальных задач, удовлетворяющих условиям §§ 2, 3.

Как уже отмечалось выше, доказательство существования полугруппы Феллера опирается, в частности, на результаты о разрешимости соответствующей нелокальной эллиптической задачи. В настоящей работе мы в неявном виде используем методы исследования нелокальных эллиптических задач, развитые в работах [14], [15]. Однако, в отличие от этих статей в данной работе используются не весовые пространства Соболева, а пространства непрерывных функций. Выбор этих пространств связан с вероятностным смыслом полугрупп Феллера (см. [1]–[4]).

Рассматриваемые в данной работе задачи возникают в биофизике [2]. Нелокальные члены в краевых условиях соответствуют диффузионному процессу в клетке, когда частица, попадающая на мембрану, через некоторое случайное время может “перепрыгнуть” во внутреннюю точку клетки или в другую точку мембраны. Возмущения эллиптических операторов интегральными операторами описывают “прыжки” частиц внутри области. Отметим, что эллиптические интегро-дифференциальные операторы имеют также важные приложения в стохастической теории управления [16]. Однако, в литературе такие операторы рассматривались либо в трансверсальном случае [8], либо без нелокальных членов в краевых условиях [16].

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

I. Пусть X – замкнутое линейное подпространство в $C(\overline{Q})$, где $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geq 2$.

Следуя терминологии, принятой в аналитической теории многомерных диффузионных процессов, мы дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Линейный ограниченный оператор $T: X \rightarrow X$ называется *неотрицательным*, если $Tf \geq 0$ для любой $f \in X$ такой, что $f \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Семейство $\{T_t\}_{t \geq 0}$ ограниченных линейных операторов, действующих из X в X , называется *полугруппой Феллера* (или *сжимающей не-*

отрицательной полугруппой) на X , если оно удовлетворяет следующим условиям.

- 1.1. $T_{t+s} = T_t T_s$ ($t, s \geq 0$); $T_0 = I$.
- 1.2. $\{T_t\}$ сильно непрерывна в 0:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \|T_t f - f\|_{C(\overline{Q})} = 0 \quad (f \in X).$$

- 1.3. $\|T_t\| \leq 1$ и операторы $T_t: X \rightarrow X$ — неотрицательны ($t \geq 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Линейный оператор $\mathcal{A}: X \rightarrow X$ называется *инфинитезимальным производящим оператором полугруппы* $\{T_t\}_{t \geq 0}$, если

$$\mathcal{A}u = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{T_t u - u}{t} \quad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})), \quad (1.1)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in X : \text{предел (1.1) существует в } X\}.$$

Сформулируем теперь один из вариантов теоремы Хилле–Иосиды, который наиболее удобен нам для дальнейшего использования (см. [7, гл. 9, § 9.3]).

ТЕОРЕМА 1.1 (Хилле–Иосида). 1. Пусть $\{T_t\}_{t \geq 0}$ — полугруппа Феллера на X и пусть $\mathcal{A}: X \rightarrow X$ — ее инфинитезимальный производящий оператор. Тогда:

- (а) область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ всюду плотна в X ;
- (б) для любого $\lambda > 0$ оператор $\lambda I - \mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}: X \rightarrow X$ с нормой $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq 1/\lambda$;
- (с) для любого $\lambda > 0$ оператор $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}: X \rightarrow X$ неотрицателен.

2. Обратно, если $\mathcal{A}$ — линейный оператор, отображающий X в себя и удовлетворяющий условию (а), причем существует константа $\lambda_0 \geq 0$ такая, что для всех $\lambda > \lambda_0$ выполнены условия (б), (с), то $\mathcal{A}$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы Феллера $\{T_t\}_{t \geq 0}$ на X , которая однозначно определяется оператором $\mathcal{A}$.

II. Рассмотрим неограниченный интегро-дифференциальный оператор $A: C(\overline{Q}) \rightarrow C(\overline{Q})$ вида

$$\begin{aligned} Au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}(x) + a(x) u(x) \\ - \int_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)] m(x, dy) \quad (x \in Q) \end{aligned} \quad (1.2)$$

с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q}) : Au \in C(\overline{Q})\}$. Здесь a_{ij}, a_i, a — вещественнозначные функции, $a_{ij} = a_{ji}$; $m(x, \cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{Q}$.

Обозначим

$$A_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}(x) + a(x) u(x),$$

$$A_1 u = - \int_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)] m(x, dy), \quad A_2 u = \int_{\overline{Q}} u(y) m(x, dy).$$

Пусть $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ – пространство Гёльдера с нормой

$$\|u\|_{C^{k+\sigma}(\overline{Q})} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \overline{Q}} |\mathcal{D}^\alpha u(x)| + \max_{|\beta|=k} \sup_{x, y \in \overline{Q}: x \neq y} \frac{|\mathcal{D}^\beta u(x) - \mathcal{D}^\beta u(y)|}{|x - y|^\sigma},$$

где $k \geq 0$ – целое, $0 < \sigma < 1$.

Обозначим через $C^{k+\sigma}(Q)$ множество функций, принадлежащих $C^{k+\sigma}(\overline{G})$ для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{G} \subset Q$.

Пространство Гёльдера $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ определяется с помощью разбиения единицы и локального распрямления границы.

Хорошо известно, что $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ и $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ – банаховы пространства. Операторы вложения $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ в $C^k(\overline{Q})$ и $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ в $C^k(\partial Q)$ – вполне непрерывны.

Мы будем предполагать, что $a_{ij} \in C^{1+\sigma}(\overline{Q})$ и $a_i, a \in C^\sigma(\overline{Q})$.

Предположим также, что выполнены следующие условия.

1.4. $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0$, $a(x) \leq 0$ для всех $x \in \overline{Q}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

1.5. Линейный оператор $A_2: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ – ограниченный, где $s = \max\{0, k - 2\}$, $k \geq 0$ – некоторое фиксированное целое число.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из условия 1.5 следует, что $c_m = \sup_{x \in \overline{Q}} m(x, \overline{Q}) < \infty$. Более того, $m(x, \overline{Q}) \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В силу замечания 1.1

$$\|A_2 u\|_{C(\overline{Q})} \leq c_m \|u\|_{C(\overline{Q})} \quad (u \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})).$$

Таким образом, оператор A_2 может быть расширен до ограниченного оператора, действующего из $C(\overline{Q})$ в себя. Это расширение оператора A_2 будем также обозначать A_2 . Через $\|A_2\|$ мы будем обозначать норму оператора $A_2: C(\overline{Q}) \rightarrow C(\overline{Q})$. Очевидно, $\|A_2\| = c_m$.

ЛЕММА 1.1. Пусть выполнены условия 1.4, 1.5.

Тогда оператор $A: C(\overline{Q}) \rightarrow C(\overline{Q})$ имеет замыкание $\overline{A}$. Если $u \in \mathcal{D}(\overline{A})$ и функция $u(x)$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in Q$, то $\overline{A}u(x^0) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 1.4 и леммы 1 из [3] следует, что оператор A_0 имеет замыкание $\overline{A_0}$ и если $u \in \mathcal{D}(\overline{A_0})$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in Q$, то $\overline{A_0}u(x^0) \leq 0$. В силу замечаний 1.1 и 1.2 оператор $A = A_0 + A_1$ имеет замыкание $\overline{A} = \overline{A_0} + A_1$ и $\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathcal{D}(\overline{A_0})$.

С другой стороны, если $u \in \mathcal{D}(\overline{A})$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in Q$, то

$$\overline{A}u(x^0) = \overline{A_0}u(x^0) - \int_Q (u(x^0) - u(y))m(x^0, dy) \leq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Очевидно, что любое сужение $\overline{A}$ также имеет замыкание в $C(\overline{Q})$.

III. Предположим, что в некоторой окрестности U каждой точки $x^0 \in \partial Q$ определено бесконечно дифференцируемое, невырожденное преобразование координат $x \rightarrow t = t(x)$ такое, что:

- (a) $U \cap Q = \{x \in U : t_n(x) > 0\}$;
- (b) $U \cap \partial Q = \{x \in U : t_n(x) = 0\}$;
- (c) $t_i(x^0) = 0$ ($i = 1, \dots, n$);
- (d) функции $t_1, \dots, t_n$ могут быть продолжены как функции из C^∞ на $\mathbb{R}^n$ так, что $t_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2(x) > 0$ для $x \in \overline{Q} \setminus \{x^0\}$.

Следующая теорема описывает нелокальные условия, которым должны удовлетворять функции класса $C^2(\overline{Q})$, принадлежащие области определения инфинитезимального производящего оператора полугруппы Феллера. Для эллиптического дифференциального оператора эта теорема была впервые доказана в [3]. Обобщение на случай эллиптического интегро-дифференциального оператора, которое приводится ниже, можно найти, например, в [7, гл. 9, § 9.5].

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что выполнены условия 1.4, 1.5. Пусть $\{T_t\}_{t \geq 0}$ – полугруппа Феллера на X , а $\mathcal{A}$ – ее инфинитезимальный производящий оператор, являющийся сужением $\overline{A}$.*

Тогда любая функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap C^2(\overline{Q})$ в каждой точке $x^0 \in \partial Q$ удовлетворяет нелокальному условию вида

$$\begin{aligned} Bu(x^0) = & \gamma(x^0)u(x^0) + \int_Q \left[u(x^0) - u(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u(x^0)}{\partial t_i} t_i(y) \right] \mu(x^0, dy) \\ & - \eta(x^0) \frac{\partial u(x^0)}{\partial t_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(x^0) \frac{\partial u(x^0)}{\partial t_i} + \varkappa(x^0) Au(x^0) \\ & - \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij}(x^0) \frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial t_i \partial t_j} = 0 \quad (x^0 \in \partial Q), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где:

- 1. $\gamma(x^0) \geq 0$;
- 2. $\eta(x^0) \geq 0$;
- 3. $\varkappa(x^0) \geq 0$;

4. матрица $\|\alpha_{ij}(x^0)\|$ симметрична и неотрицательна;
 5. $\mu(x^0, \cdot)$ – неотрицательная борелевская мера на $\overline{Q}$ такая, что

$$\mu(x^0, \overline{Q} \setminus U) < \infty,$$

$$\int_{\overline{Q} \cap U} [t_n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} t_j^2(y)] \mu(x^0, dy) < \infty;$$

6. если $\gamma(x^0) = \eta(x^0) = \varkappa(x^0) = \beta_i(x^0) = \alpha_{ij}(x^0) = 0$, то $\mu(x^0, \overline{Q} \setminus \{x^0\}) > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Нелокальное условие (1.3) называют *трансверсальным* на ∂Q , если

$$\eta(x) + \varkappa(x) > 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (1.4)$$

Интегральный член в нелокальном краевом условии (1.3) соответствует диффузии в клетке, когда частица, попадающая на мембрану, может затем перепрыгнуть в точку $y \in \overline{Q}$. Локальные члены

$$-\sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij}(x^0) \frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(x^0) \frac{\partial u(x^0)}{\partial t_i},$$

$$\gamma(x^0)u(x^0), \quad -\eta(x^0) \frac{\partial u(x^0)}{\partial t_n} \quad \text{и} \quad \varkappa(x^0)Au(x^0)$$

соответствуют диффузии вдоль границы, поглощению, отражению и явлению вязкости.

IV. Приведем еще несколько вспомогательных результатов.

ЛЕММА 1.2. Пусть линейный оператор $\mathcal{G}: X \rightarrow C(\overline{Q})$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{G}) \subset X$, где X – замкнутое подпространство в $C(\overline{Q})$, имеет замыкание. Пусть $G: X \rightarrow X$ – линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(G) \subset X$ такой, что $G \subset \mathcal{G}$. Предположим, что $G, \mathcal{G}$ удовлетворяют следующим условиям:

- (а) область определения $\mathcal{D}(G)$ плотна в X ;
- (б) если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in \overline{Q}$, то существует такая точка $x^1 \in \overline{Q}$, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{G}u(x^1) \leq 0$;
- (в) существует такая константа $\lambda_0 \geq 0$, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - \mathcal{G})$ плотен в $C(\overline{Q})$, а образ $\mathcal{R}(\lambda I - G)$ плотен в X при $\lambda > \lambda_0$.

Тогда $\overline{G}$ – инфинитезимальный производящий оператор полугруппы Феллера на X , которая однозначно определяется оператором G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем вначале, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $\lambda I - \mathcal{G}$ имеет ограниченный обратный $(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}$ и

$$\|(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}\| \leq 1/\lambda. \quad (1.5)$$

Рассмотрим решение u уравнения

$$(\lambda I - \mathcal{G})u = f. \quad (1.6)$$

Можно предположить без потери общности, что $\max_{x \in \overline{Q}} |u(x)| = u(x^0) > 0$. Тогда в силу условия (b) существует точка $x^1 \in \overline{Q}$ такая, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{G}u(x^1) \leq 0$. Поэтому из (1.6) следует, что

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} = u(x^0) = u(x^1) = (\mathcal{G}u(x^1) + f(x^1))/\lambda \leq \|f\|_{C(\overline{Q})}/\lambda.$$

Таким образом, оператор $\lambda I - \mathcal{G}$ имеет ограниченный обратный и, более того, $\|(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}\| \leq 1/\lambda$.

2. Докажем теперь, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}$ неотрицателен. Предположим обратное: пусть для некоторого $f \geq 0$ решение u уравнения (1.6) принимает отрицательные значения, т.е. $\min_{x \in \overline{Q}} u(x) = u(x^0) < 0$. Обозначим $v(x) = -u(x)$. В силу условия (b) существует точка $x^1 \in \overline{Q}$ такая, что $v(x^1) = v(x^0)$ и $\mathcal{G}v(x^1) \leq 0$. Таким образом, из равенства $(\lambda I - \mathcal{G})v = -f$ получаем

$$0 < v(x^0) = v(x^1) = (\mathcal{G}v(x^1) - f(x^1))/\lambda \leq 0.$$

3. Операторы $\lambda I - \overline{G}$ и $\lambda I - \overline{\mathcal{G}}$ имеют ограниченные обратные $(\lambda I - \overline{G})^{-1}: X \rightarrow X$ и $(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1}: C(\overline{Q}) \rightarrow X$ для $\lambda > \lambda_0$, причем

$$\|(\lambda I - \overline{G})^{-1}\| \leq \|(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1}\| \leq 1/\lambda.$$

Это следует из существования обратных операторов $(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}$, $(\lambda I - G)^{-1}$, условия (c) и неравенства (1.5).

4. Докажем теперь, что оператор $(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1}$ неотрицателен. Пусть сначала $f \in C(\overline{Q})$ и $f(x) > 0$ ($x \in \overline{Q}$). Тогда можно найти последовательность $\{f_m\} \subset \mathcal{D}((\lambda I - \mathcal{G})^{-1})$ такую, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_{C(\overline{Q})} = 0$. Поэтому существует $M > 0$ такое, что $f_m(x) > 0$ ($x \in \overline{Q}$) для $m \geq M$. Следовательно,

$$(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1}f = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda I - \mathcal{G})^{-1}f_m \geq 0.$$

Если $f \in C(\overline{Q})$, $f(x) \geq 0$ ($x \in \overline{Q}$), то существует последовательность $\{F_k\} \subset C(\overline{Q})$ такая, что $F_k(x) > 0$ ($x \in \overline{Q}$) и $\lim_{k \rightarrow \infty} \|F_k - f\|_{C(\overline{Q})} = 0$. Отсюда следует, что $(\lambda I - \overline{\mathcal{G}})^{-1}f \geq 0$ для любой функции $f \in C(\overline{Q})$ такой, что $f(x) \geq 0$ ($x \in \overline{Q}$).

5. Итак, мы доказали, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $\lambda I - \overline{G}$ имеет ограниченный неотрицательный обратный $(\lambda I - \overline{G})^{-1}: X \rightarrow X$ с нормой $\|(\lambda I - \overline{G})^{-1}\| \leq 1/\lambda$. Следовательно, в силу теоремы 1.1 $\overline{G}$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на X , которая однозначно определяется оператором G .

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{aligned} A_0 g(x) - \lambda g(x) &= 0 \quad (x \in Q), \\ g(x) &= \psi(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Как известно, для любых $\psi \in C(\partial Q)$ и $\lambda \geq 0$ существует единственное решение $g \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ задачи (1.7).

Следующая лемма представляет собой обобщение леммы 3.4 из [12] об оценке решений эллиптических уравнений с параметром на компакте $\Omega \subset Q$ через граничные значения решений.

ЛЕММА 1.3. Пусть выполнено условие 1.4 и пусть Ω_1, Ω_2 — замкнутые множества такие, что $\Omega_1 \subset \partial Q$, $\Omega_2 \subset \overline{Q}$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Тогда существует такая константа $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega_1, \Omega_2) > 1$, что для всех $q_1 \geq \lambda_1$, $\lambda \geq q_1$ и $\psi \in \{\psi \in C(\partial Q) : \text{supp } \psi \subset \Omega_1\}$

$$\|g\|_{C(\Omega_2)} \leq \frac{c_1}{\lambda} \|\psi\|_{C(\Omega_1)}, \quad (1.8)$$

где $c_1 = c_1(q_1) > 0$ не зависит от λ, ψ , и $c_1(q_1) \rightarrow 1$ при $q_1 \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (1.8), используя метод барьеров.

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $2\varepsilon < \delta = \rho(\Omega_1, \Omega_2)$. Так как Ω_2 — компакт, существует конечное множество точек $\{x^j\}_{j=1}^J \subset \Omega_2$ такое, что

$$\Omega_2 \subset \bigcup_{j=1}^J S_\varepsilon(x^j), \text{ где } S_\varepsilon(x^j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^j| < \varepsilon\}.$$

Обозначим $M = \max_{x \in \Omega_1} |\psi(x)| > 0$. Здесь $\psi \in C(\partial Q)$ и $\text{supp } \psi \subset \Omega_1$. Рассмотрим функцию

$$w_j(x) = M \left(\frac{|x - x^j|}{2\varepsilon} \right)^{\lambda^{1/4}} + \frac{M}{\lambda}.$$

Если $x \in \Omega_1$, то $|x - x^j| \geq \delta > 2\varepsilon$. Отсюда

$$M < w_j(x) \quad (x \in \Omega_1). \quad (1.9)$$

Очевидно, существует $q_j > 1$ такое, что для $\lambda > q_j$

$$\begin{aligned} |A_0 w_j(x)| &\leq k_{1j} M / \lambda \quad (x \in S_\varepsilon(x^j) \cap \overline{Q}), \\ |A_0 w_j(x)| &\leq k_{2j} M \left(\lambda^{1/2} \left(\frac{|x - x^j|}{2\varepsilon} \right)^{\lambda^{1/4}} + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (x \in \overline{Q} \setminus S_\varepsilon(x^j)), \end{aligned}$$

где $k_{1j}, k_{2j} > 0$ не зависят от M, λ . Таким образом, существует $\lambda_1 > \max_j q_j$ такое, что

$$A_0 w_j(x) - \lambda w_j(x) < 0 \quad (x \in Q) \quad (1.10)$$

при $\lambda \geq \lambda_1$.

Из (1.9), (1.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} A_0(g(x) - w_j(x)) - \lambda(g(x) - w_j(x)) &> 0 \quad (x \in Q), \\ g(x) - w_j(x) &< 0 \quad (x \in \partial Q) \end{aligned} \quad (1.11)$$

при $\lambda \geq \lambda_1$.

Из леммы 1.1 и неравенств (1.11) следует, что $g(x) \leq w_j(x)$ при $x \in \overline{Q}$. Аналогично получаем $-g(x) \leq w_j(x)$ при $x \in \overline{Q}$. Таким образом,

$$\max_{x \in S_\varepsilon(x^j) \cap \overline{Q}} |g(x)| \leq \max_{x \in S_\varepsilon(x^j) \cap \overline{Q}} w_j(x) = M(2^{-\lambda^{1/4}} + \lambda^{-1}).$$

Так как $J < \infty$, из последнего неравенства следует (1.8).

§2. Полугруппа Феллера, порожденная эллиптическим дифференциальным оператором

I. Рассмотрим нелокальное условие (1.3) в нетрансверсальном случае

$$Bu(x) = \gamma(x)u(x) + \int_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)]\mu(x, dy) = 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (2.1)$$

где $\gamma(x) \geq 0$, $\mu(x, \cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{Q}$.

Носителем меры $\mu(x, \cdot)$ называется замкнутое множество $\text{spt } \mu(x, \cdot)$, определенное по формуле

$$\text{spt } \mu(x, \cdot) = \overline{Q} \setminus \bigcup_{V \in T} \{V : \mu(x, V \cap \overline{Q}) = 0\},$$

где T — класс всех открытых множеств из $\mathbb{R}^n$.

Обозначим

$$C_B(\overline{Q}) = \{u \in C(\overline{Q}) : Bu = 0\}, \quad N_\mu = \{x \in \partial Q : \mu(x, \overline{Q}) = 0\}, \\ \Gamma_\mu = \partial Q \setminus N_\mu, \quad \Gamma_\mu^\delta = \{x \in \overline{Q} : \rho(x, \Gamma_\mu) < \delta\}.$$

Далее будут рассматриваться такие меры, что функции $\mu(x, \overline{Q})$, вообще говоря, могут иметь разрывы на некотором множестве $K_1 \subset N_\mu$ и $\mu(x, \overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1)$. Чтобы преодолеть это затруднение, мы будем рассматривать функции $u(x)$, обращающиеся в 0 на множестве N_μ .

Введем обозначение: $C_\mu(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : u(x) = 0 \ (x \in N_\mu)\}$, где $\Omega = \overline{Q}$ или $\Omega = \partial Q$.

Рассмотрим неограниченные операторы $\mathcal{A}_{0B}, \mathcal{A}_B : C_B(\overline{Q}) \rightarrow C(\overline{Q})$, заданные формулами

$$\mathcal{A}_{0B}u = A_0u \ (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : A_0u \in C(\overline{Q})\}, \\ \mathcal{A}_B = \mathcal{A}_{0B} + A_1, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}).$$

Введем также операторы $A_{0B}, A_B : C_B(\overline{Q}) \rightarrow C_B(\overline{Q})$ следующим образом:

$$A_{0B}u = A_0u \ (u \in \mathcal{D}(A_{0B})), \quad \mathcal{D}(A_{0B}) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : A_0u \in C_B(\overline{Q})\}, \\ A_Bu = Au \ (u \in \mathcal{D}(A_B)), \quad \mathcal{D}(A_B) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : Au \in C_B(\overline{Q})\}.$$

Заметим, что, вообще говоря, $\mathcal{D}(A_{0B}) \neq \mathcal{D}(A_B)$.

Обозначим $\gamma_0(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q})$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

2.1. $\gamma_0 \in C(\partial Q)$.

2.2. $\gamma(x) + \mu(x, \overline{Q} \setminus \Gamma_\mu) > 0 \ (x \in \partial Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из условия 2.2 следует, что $\gamma_0(x) > 0 \ (x \in \partial Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу замечания 2.1 $C_B(\overline{Q}) \subset C_\mu(\overline{Q})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из условия 2.1 следует, что $c_\mu = \sup_{x \in \partial Q} \mu(x, \overline{Q}) < \infty$.

II. Сформулируем теперь некоторые дополнительные условия на меру μ . Ниже будет доказано, что эти условия вместе с условиями 2.1, 2.2 являются достаточными для разрешимости задачи $(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)u = f$ при достаточно больших значениях параметра λ .

Введем операторы B_i ($i = 1, 2$) и $B_{2\delta}^j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$B_i v(x) = \int_{\overline{Q}} v(y) \mu_i(x, dy) \quad (x \in \partial Q; i = 1, 2), \quad (2.2)$$

$$B_{2\delta}^1 v(x) = \int_{\Gamma_\mu^\delta} v(y) \mu_2(x, dy) \quad (x \in \partial Q), \quad (2.3)$$

$$B_{2\delta}^2 v(x) = \int_{\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta} v(y) \mu_2(x, dy) \quad (x \in \partial Q), \quad (2.4)$$

где $\mu_i(x, \cdot)$ ($i = 1, 2$) — неотрицательные борелевские меры на $\overline{Q}$, $\delta > 0$.

Предположим, что существуют неотрицательные борелевские меры $\mu_i(x, \cdot)$ на $\overline{Q}$ ($x \in \partial Q; i = 1, 2$), составляющие разложение $\mu(x, \cdot) = \mu_1(x, \cdot) + \mu_2(x, \cdot)$ и удовлетворяющие следующим условиям:

2.3. операторы B_1 и B_2 отображают $C_\mu(\overline{Q})$ и соответственно $C(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$;

2.4. существует замкнутое множество $K_1 \subset N_\mu$ такое, что

$$\text{spt } \mu_1(x, \cdot) \subset \overline{Q} \setminus K_1^{\varkappa_0} \quad (x \in \partial Q)$$

для некоторого $\varkappa_0 > 0$, где $K_1^{\varkappa_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, K_1) < \varkappa_0\}$;

2.5. для любого $0 < \varkappa < \varkappa_0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\varkappa) > 0$ такое, что

$$\text{spt } \mu_1(x, \cdot) \subset \overline{Q}_\varepsilon \quad (x \in \partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2}),$$

где $\overline{Q}_\varepsilon = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > \varepsilon\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Мера $\mu(x, \cdot)$ удовлетворяет соотношениям 5, 6 теоремы 1.2, при этом $\mu_1(x, \overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1)$ и $\mu_2(x, \overline{Q}) \in C(\partial Q)$. Действительно, соотношения 5, 6 теоремы 1.2 следуют из замечания 2.3 и условия 2.2. Докажем два последних утверждения. Для этого введем функцию $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ так, что $\xi(x) = 1$ ($x \in \overline{Q}_\varepsilon$) и $0 \leq \xi(x) \leq 1$, где $\varepsilon = \varepsilon(\varkappa)$ выбирается в соответствии с условием 2.5, $0 < \varkappa < \varkappa_0$ — произвольное фиксированное число. По определению $\xi \in C_\mu(\overline{Q})$. Отсюда в силу условия 2.3 следует, что $B_1 \xi \in C_\mu(\overline{Q})$. С другой стороны, из условия 2.5 вытекает, что $B_1 \xi(x) = \mu_1(x, \overline{Q}_\varepsilon) = \mu_1(x, \overline{Q})$ ($x \in \partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2}$). Следовательно, $\mu_1(x, \overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2})$. Так как $\varkappa > 0$ произвольно, имеем $\mu_1(x, \overline{Q}) \in C(\partial Q \setminus K_1)$. Теперь положим $u(x) \equiv 1$ ($x \in \overline{Q}$). Тогда из условия 2.3 получим, что $B_2 u = \mu_2(x, \overline{Q}) \in C(\partial Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Из условия 2.3 и замечания 2.3 следует, что операторы $B_1: C_\mu(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ и $B_2: C(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ — ограниченные.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Вообще говоря, из условия $u \in C(\overline{Q})$ не следует, что $B_{2\delta}^j u \in C(\partial Q)$ (см. пример 4.2). Однако, из замечания 2.3 вытекает, что $B_{2\delta}^1, B_{2\delta}^2: C(\overline{Q}) \rightarrow B(\partial Q)$ – ограниченные операторы, где $B(\partial Q)$ – пространство функций, ограниченных на множестве ∂Q , с нормой

$$\|f\|_{B(\partial Q)} = \sup_{x \in \partial Q} |f(x)|.$$

Мы будем предполагать, что помимо условий 2.1–2.5 выполнено также следующее условие:

2.6. существуют числа $\delta_0 > 0$ и $0 < r < 1/2$ такие, что оператор $L_{2\delta_0}^1: C(\overline{Q}) \rightarrow B(\partial Q)$ удовлетворяет условию $\|L_{2\delta_0}^1\| < r$, где $L_{2\delta_0}^1 u(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B_{2\delta_0}^1 u(x)$.

Примеры операторов, для которых выполняются условия 2.1–2.6, будут приведены в §4. Там же сформулированы нерешенные задачи, связанные с ослаблением этих условий.

Отметим, что разложение $\mu(x, \cdot) = \mu_1(x, \cdot) + \mu_2(x, \cdot)$, удовлетворяющее условиям 2.1–2.6, вообще говоря, не единственно.

ЛЕММА 2.1. *Предположим, что выполнены условия 1.4, 1.5 и 2.1–2.3. Пусть $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$, а $u(x)$ достигает положительного максимума в точке $x^0 \in \overline{Q}$.*

Тогда существует такая точка $x^1 \in \overline{Q}$, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{A}_B u(x^1) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $x^0 \in Q$ утверждение леммы 2.1 следует из леммы 1.1. Предположим теперь, что $x^0 \in \partial Q$, и при этом $u(x^0) > u(y)$ для $y \in Q$. Если $\mu(x^0, Q) > 0$, то из данного предположения следует, что нелокальное условие (2.1) для функции $u(x)$ нарушается в точке $x^0 \in \partial Q$. Поэтому будем считать, что $\text{spt } \mu(x^0, \cdot) \subset \partial Q$. Тогда в силу замечания 2.2 нелокальное условие (2.1) примет вид

$$\gamma(x^0)u(x^0) + \int_{N_\mu} u(x^0) \mu(x^0, dy) = - \int_{\Gamma_\mu} [u(x^0) - u(y)] \mu(x^0, dy).$$

С другой стороны, это равенство невозможно, поскольку его левая часть положительна в силу условия 2.2, а правая – нет. Полученное противоречие показывает, что если $x^0 \in \partial Q$, то существует точка $x^1 \in Q$ такая, что $u(x^0) = u(x^1)$. Для завершения доказательства остается вновь применить лемму 1.1.

В силу замечания 2.1 нелокальное условие (2.1) можно переписать в виде

$$u(x) - Lu(x) = 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (2.5)$$

где

$$Lu(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} \int_{\overline{Q}} u(y) \mu(x, dy). \quad (2.6)$$

Из условия 2.3 и замечания 2.3 следует, что оператор $L: C_\mu(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ – ограниченный, причем $\|L\| \leq 1$.

Для любого $\psi \in C(\partial Q)$ существует единственное решение $g \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ задачи (1.7), где $\lambda > 0$. Обозначим $P_\lambda \psi(x) = g(x)$. В силу принципа максимума оператор $P_\lambda: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\overline{Q})$ – ограниченный, причем $\|P_\lambda\| = 1$.

Рассмотрим теперь ограниченный оператор $I - LP_\lambda: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия 1.4 и 2.1–2.6.

Тогда существует $\lambda_0 > 1$ такое, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ оператор $I - LP_\lambda$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1}: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ и $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leq q$, где $q > 0$ не зависит от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Введем обозначения:

$$L_i v(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B_i v(x) \quad (x \in \partial Q; i = 1, 2), \quad (2.7)$$

$$L_{2\delta}^j u(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B_{2\delta}^j v(x) \quad (x \in \partial Q; j = 1, 2), \quad (2.8)$$

где операторы $B_i, B_{2\delta}^j$ определены по формулам (2.2)–(2.4), $\delta > 0$.

В силу условия 2.5 для любого $0 < \varkappa < \varkappa_0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\text{spt} \mu_1(x, \cdot) \subset \overline{Q}_\varepsilon \quad (x \in \partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2}). \quad (2.9)$$

Введем срезающую функцию $\xi_\varepsilon \in \dot{C}^\infty(Q)$ такую, что $0 \leq \xi_\varepsilon(x) \leq 1$, $\xi_\varepsilon(x) = 1$ ($x \in \overline{Q}_\varepsilon$), $\xi_\varepsilon(x) = 0$ ($x \notin \overline{Q}_{\varepsilon/2}$). Тогда для данного $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ оператор $I - LP_\lambda$ можно записать в виде

$$I - LP_\lambda = I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda - L_1\xi_\varepsilon P_\lambda - L_{2\delta}^1 P_\lambda - L_{2\delta}^2 P_\lambda. \quad (2.10)$$

2. Оценим нормы операторов $L_1\xi_\varepsilon P_\lambda: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ и $L_{2\delta}^1 P_\lambda, L_{2\delta}^2 P_\lambda: C_\mu(\partial Q) \rightarrow B(\partial Q)$ (см. замечание 2.6). Напомним, что в силу условия 2.3 оператор $L_2 P_\lambda = L_{2\delta}^1 P_\lambda + L_{2\delta}^2 P_\lambda$ отображает $C_\mu(\partial Q)$ в себя.

Вследствие условия 2.6 существует число $q > 8$ такое, что при любом достаточно малом $\delta > 0$

$$\|L_{2\delta}^1\| < \frac{1}{2} - \frac{4}{q}.$$

Таким образом,

$$\|L_{2\delta}^1 P_\lambda\| < \frac{1}{2} - \frac{4}{q}. \quad (2.11)$$

Зафиксируем такое $\delta > 0$. Согласно лемме 1.3 для любого $\delta > 0$ существует $\lambda_1 = \lambda_1(\delta) > 1$ такое, что при всех $\lambda > \lambda_1$ и $\psi \in C_\mu(\partial Q)$

$$\|L_{2\delta}^2 P_\lambda \psi\|_{B(\partial Q)} \leq \|P_\lambda \psi\|_{C(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta)} \leq \frac{c_1}{\lambda} \|\psi\|_{C(\partial Q)}, \quad (2.12)$$

а для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon) > 1$ такое, что при всех $\lambda > \lambda_2$ и $\psi \in C_\mu(\partial Q)$

$$\|L_1 \xi_\varepsilon P_\lambda \psi\|_{C(\partial Q)} \leq \|P_\lambda \psi\|_{C(\overline{Q}_{\varepsilon/2})} \leq \frac{c_2}{\lambda} \|\psi\|_{C(\partial Q)}. \quad (2.13)$$

Здесь $c_1 = c_1(\lambda_1) > 0$ и $c_2 = c_2(\lambda_2) > 0$ не зависят от λ, ψ . Выбирая $\lambda > d = \max\{\lambda_1, \lambda_2, c_1 q, c_2 q\}$, из (2.12), (2.13) получим

$$\|L_{2\delta}^2\| \leq \frac{1}{q}, \quad \|L_1 \xi_\varepsilon P_\lambda\| \leq \frac{1}{q}. \quad (2.14)$$

3. Рассмотрим теперь оператор $I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$. Выпишем для него формальный ряд Неймана

$$\sum_{s=0}^{\infty} (L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^s. \quad (2.15)$$

Оценим норму оператора $(L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^s: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$. Из определения L_1 и принципа максимума следует, что

$$\|L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\psi\|_{C(\partial Q)} \leq \|\psi\|_{C(\partial Q)} \quad (\psi \in C_\mu(\partial Q)).$$

Очевидно, $((1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\psi)(x) = 0$ ($x \in \overline{Q}_\varepsilon$). Поэтому в силу (2.9)

$$\text{supp } L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\psi \subset \partial Q \cap \overline{K_1^{\varkappa/2}}.$$

Пусть $s > 1$. Обозначим $\psi_{s\varepsilon} = (L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^{s-1}\psi$. По доказанному выше $\text{supp } \psi_{s\varepsilon} \subset \partial Q \cap \overline{K_1^{\varkappa/2}}$. Тогда из условия 2.4 и леммы 1.3 следует, что существует $\lambda_3 = \lambda_3(\varkappa) > 1$ такое, что при всех $\lambda > \lambda_3$ и $\psi \in C_\mu(\partial Q)$

$$\begin{aligned} \|(L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^s\psi\|_{C(\partial Q)} &= \|L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\partial Q)} \\ &\leq \|P_\lambda\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\overline{Q} \setminus K_1^\varkappa)} \leq \frac{c_3}{\lambda} \|\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\partial Q \cap \overline{K_1^{\varkappa/2}})} \\ &= \frac{c_3}{\lambda} \|\psi_{s\varepsilon}\|_{C(\partial Q)} = \frac{c_3}{\lambda} \|(L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^{s-1}\psi\|_{C(\partial Q)}, \end{aligned}$$

где $c_3 = c_3(\lambda_3) > 0$ не зависит от λ, ψ и s . Таким образом, получим

$$\|(L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^s\| \leq \left(\frac{c_3}{\lambda}\right)^{s-1} \quad (s > 1).$$

При $\lambda > \lambda_0 = \max\left\{\lambda_3, d, c_3 \frac{q+2}{4}\right\}$ эта оценка гарантирует сходимость ряда Неймана (2.15). Поэтому существует ограниченный обратный оператор

$$(I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^s,$$

при этом

$$\begin{aligned} \|(I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1}\| &\leq 1 + 1 + \sum_{s=2}^{\infty} \left(\frac{c_3}{\lambda}\right)^{s-1} \\ &= 2 + \frac{c_3}{\lambda - c_3} \leq 2 + c_3 \left/ \left(c_3 \frac{q+2}{4} - c_3\right) \right. \\ &= 2 + \left(\frac{q+2}{4} - 1\right)^{-1} = \frac{2q}{q-2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

4. Докажем теперь, что для $\lambda > \lambda_0$ оператор $I - LP_\lambda$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1}: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ и $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leq q$.

Очевидно,

$$I - LP_\lambda = [I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda] \times [I - (I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1}(L_1\xi_\varepsilon P_\lambda + L_{2\delta}^1 P_\lambda + L_{2\delta}^2 P_\lambda)]. \quad (2.17)$$

Из (2.11), (2.14) и (2.16) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|(I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^{-1}(L_1\xi_\varepsilon P_\lambda + L_{2\delta}^1 P_\lambda + L_{2\delta}^2 P_\lambda)\| \\ \leq \frac{2q}{q-2} \left(\frac{2}{q} + \frac{1}{2} - \frac{4}{q} \right) = \frac{q-4}{q-2} < 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Следовательно, существует ограниченный обратный оператор $(I - LP_\lambda)^{-1}: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$, причем в силу (2.16)–(2.18)

$$\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{2q}{q-2} \cdot \left(1 - \frac{q-4}{q-2} \right)^{-1} = q,$$

где $q > 8$ не зависит от λ .

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены условия 1.4 и 2.1–2.6.

Тогда существует $\lambda_0 > 1$ такое, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ уравнение

$$(\mathcal{A}_0 B - \lambda I)u = f \quad (2.19)$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0 B)$ для любой функции $f \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$ и

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C(\overline{Q})}. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, операторное уравнение (2.19) эквивалентно не-локальной задаче для эллиптического уравнения, которая имеет вид

$$\begin{aligned} A_0 u(x) - \lambda u(x) &= f(x) \quad (x \in Q), \\ u(x) - Lu(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $\lambda > 0$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{aligned} A_0 v(x) - \lambda v(x) &= f(x) \quad (x \in Q), \\ v(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Вследствие теоремы 21.1 из [17] для любого $f \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$ существует единственное решение $v \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ этой задачи. Обозначим $G_\lambda f(x) = v(x)$. Пусть $w = u - v$. Тогда из (2.21), (2.22) получим

$$\begin{aligned} A_0 w(x) - \lambda w(x) &= 0 \quad (x \in Q), \\ w(x) - Lw(x) &= Lv(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Очевидно, задача (2.23) эквивалентна операторному уравнению

$$\psi - LP_\lambda \psi = Lv \quad (2.24)$$

относительно функции $\psi \in C_\mu(\partial Q)$, где $w = P_\lambda \psi$.

В силу леммы 2.2 уравнение (2.24) имеет единственное решение $\psi = (I - LP_\lambda)^{-1}Lv$ для любого $\lambda > \lambda_0$. Таким образом, уравнение (2.19) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u &= v + P_\lambda \psi = v + P_\lambda(I - LP_\lambda)^{-1}Lv \\ &= G_\lambda f + P_\lambda(I - LP_\lambda)^{-1}LG_\lambda f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

для любого $f \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$.

Для завершения доказательства остается получить оценку (2.20). Не ограничивая общности, предположим, что $\max_{x \in \overline{Q}} |u(x)| = u(x^0) > 0$. Тогда в силу леммы 2.1 существует точка $x^1 \in \overline{Q}$ такая, что $u(x^1) = u(x^0)$ и $\mathcal{A}_{0B}u(x^1) \leq 0$. Поэтому

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} = u(x^0) = u(x^1) = (\mathcal{A}_{0B}u(x^1) - f(x^1))/\lambda \leq \|f\|_{C(\overline{Q})}/\lambda.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Из теоремы 4 из [18] следует справедливость леммы 2.3 для любого $\lambda > 0$.

Отметим, что условие 2.6 наряду с условиями 2.4, 2.5 гарантирует сходимость ряда Неймана (2.15) в доказательстве леммы 2.2. Это условие может быть несколько ослаблено, если мера не содержит слагаемого μ_1 (см. § 2.III). Однако наиболее глубокой причиной использования подобных условий является то, что они обеспечивают равенство нулю индекса соответствующего эллиптического оператора (ср. [15]).

III. Рассмотрим случай, когда геометрические условия 2.4, 2.5, а также условие 2.6, вообще говоря, не выполняются.

Обозначим $\gamma_\delta(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta)$.

Предположим, что наряду с условиями 2.1 и 2.2 выполнены следующие условия:

- 2.7. оператор B отображает пространство $C_\mu(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$;
- 2.8. существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in \partial Q} \varphi_\delta(x) < \infty,$$

где $\varphi_\delta(x) = \mu(x, \Gamma_\mu^\delta)/\gamma_\delta(x)$.

Введем операторы B_δ^1, B_δ^2 по формулам

$$B_\delta^1 u(x) = \int_{\Gamma_\mu^\delta} u(y) \mu(x, dy) \quad (x \in \partial Q), \quad (2.26)$$

$$B_\delta^2 u(x) = \int_{\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta} u(y) \mu(x, dy) \quad (x \in \partial Q), \quad (2.27)$$

где $\delta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Из условия 2.7 и замечания 2.3 следует, что операторы $B: C_\mu(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ и $B_\delta^1, B_\delta^2: C_\mu(\partial Q) \rightarrow B(\partial Q)$ – ограниченные (ср. замечания 2.5, 2.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. В силу замечания 2.3 условие 2.8 выполняется, если

$$\inf_{x \in \partial Q} \gamma_\delta(x) > 0$$

при некотором $\delta > 0$.

ЛЕММА 2.4. Пусть выполнены условия 1.4, 2.1, 2.2, 2.7, 2.8.

Тогда справедливо заключение леммы 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 2.3, уравнение (2.19) сводится к уравнению (2.24) в пространстве $C_\mu(\partial Q)$. Таким образом, остается показать, что для $\lambda > \lambda_0$ оператор $I - LP_\lambda$, где $\lambda_0 > 1$ достаточно велико, имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1}: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$.

Представим оператор L в виде

$$L = L_\delta^1 + L_\delta^2,$$

где

$$L_\delta^j v(x) = \frac{1}{\gamma_0(x)} B_\delta^j v(x) \quad (x \in \partial Q; j = 1, 2).$$

Очевидно, для $\psi \in C_\mu(\partial Q)$ имеем

$$\begin{aligned} \|L_\delta^1 P_\lambda \psi\|_{B(\partial Q)} &\leq \sup_{x \in \partial Q} \frac{\mu(x, \Gamma_\mu^\delta)}{\gamma_0(x)} \|P_\lambda \psi\|_{C(\overline{\Gamma_\mu^\delta})} \\ &\leq \sup_{x \in \partial Q} \frac{\mu(x, \Gamma_\mu^\delta)}{\gamma_\delta(x) + \mu(x, \Gamma_\mu^\delta)} \|\psi\|_{C(\partial Q)} = c \|\psi\|_{C(\partial Q)}, \end{aligned}$$

где $c = \sup_{x \in \partial Q} \frac{\varphi_\delta(x)}{1 + \varphi_\delta(x)}$. Вследствие условия 2.8 $c < 1$. Поэтому существует $q > 2$ такое, что

$$\|L_\delta^1 P_\lambda\| < 1 - \frac{2}{q} \quad (2.28)$$

для всех $\lambda > 0$, где q не зависит от λ .

С другой стороны, в силу леммы 1.3 для любого $\delta > 0$ существует $\lambda_1 = \lambda_1(\delta) > 1$ такое, что для всех $\lambda > \lambda_1$ и $\psi \in C_\mu(\partial Q)$

$$\|L_\delta^2 P_\lambda \psi\|_{B(\partial Q)} \leq \|P_\lambda \psi\|_{C(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta)} \leq \frac{c_1}{\lambda} \|\psi\|_{C(\partial Q)},$$

где $c_1 = c_1(\lambda_1) > 0$. Таким образом, при $\lambda > \lambda_0 = \max\{\lambda_1, c_1 q\}$

$$\|L_\delta^2 P_\lambda\| < \frac{1}{q}. \quad (2.29)$$

Вследствие (2.28), (2.29) и известной теоремы об обратном операторе оператор $I - LP_\lambda$ при $\lambda > \lambda_0$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1}: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$, норма которого не превосходит q .

Справедливость неравенства (2.20) устанавливается точно так же, как и в доказательстве леммы 2.3.

IV. Докажем теперь плотность $\mathcal{D}(A_{0B})$ в $C_B(\overline{Q})$. Вначале получим некоторые вспомогательные результаты.

ЛЕММА 2.5. *Предположим, что выполнены условия 1.4, 2.1, 2.2, 2.7.*

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $u \in C_B(\overline{Q})$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всякого $0 < \delta < \delta_1$ найдется функция $u_\delta \in C^2(Q) \cap C_\mu(\overline{Q})$, обладающая следующими свойствами:

$$\|u_\delta - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} < 2\varepsilon, \quad (2.30)$$

$$\|u_\delta - u\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon, \quad (2.31)$$

$$A_0 u_\delta \in C^\sigma(\overline{Q}), \quad A_0 u_\delta(x) = 0 \quad (x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}). \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in C_B(\overline{Q})$. Тогда в силу замечания 2.1 $u|_{\partial Q} = Lu$. Из замечания 2.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $u_1 \in C^\infty(\overline{Q}) \cap C_\mu(\overline{Q})$, что $\|u - u_1\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon/4$. Введем функцию

$$\varphi(x) = Lu_1(x) \quad (x \in \partial Q). \quad (2.33)$$

Из условия 2.1 и определения оператора L следует, что $\varphi \in C_\mu(\partial Q)$, причем $\|\varphi\|_{C(\partial Q)} \leq \|u_1\|_{C(\overline{Q})}$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$A_0 u_2(x) = 0 \quad (x \in Q), \quad (2.34)$$

$$u_2(x) = \varphi(x) \quad (x \in \partial Q). \quad (2.35)$$

В силу теоремы 21.1 из [17] существует единственное решение задачи (2.34), (2.35) $u_2 \in C^2(Q) \cap C_\mu(\overline{Q})$, и в силу принципа максимума $\|u_2\|_{C(\overline{Q})} = \|\varphi\|_{C(\partial Q)}$.

Так как $u|_{\partial Q} = Lu$, из (2.33), (2.35) получим

$$|u(y) - u_2(y)| = |L(u - u_1)(y)| \leq \|u - u_1\|_{C(\overline{Q})} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (y \in \partial Q). \quad (2.36)$$

Функции $u(x)$ и $u_2(x)$ равномерно непрерывны в $\overline{Q}$. Поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что

$$|u(y) - u(x)| < \varepsilon/4 \quad \text{при } x, y \in \{x, y \in \overline{Q} : |x - y| < \delta_1\}, \quad (2.37)$$

$$|u_2(y) - u_2(x)| < \varepsilon/4 \quad \text{при } x, y \in \{x, y \in \overline{Q} : |x - y| < \delta_1\}. \quad (2.38)$$

Для любого $x \in \overline{\Gamma}_\mu^\delta$ ($0 < \delta < \delta_1$) существует $y \in \Gamma_\mu$ такое, что $|x - y| < \delta_1$. Поэтому в силу (2.36) – (2.38) для любого $x \in \overline{\Gamma}_\mu^\delta$

$$\begin{aligned} |u(x) - u_2(x)| &\leq |u(x) - u(y)| + |u(y) - u_2(y)| + |u_2(y) - u_2(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|u - u_2\|_{C(\overline{\Gamma}_\mu^\delta)} \leq \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Введем функцию

$$u_\delta(x) = \xi_\delta(x)u_1(x) + (1 - \xi_\delta(x))u_2(x),$$

где $\xi_\delta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\xi_\delta(x) = 1$ ($x \in \overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta$), $\xi_\delta(x) = 0$ ($x \in \Gamma_\mu^{\delta/2}$), $0 \leq \xi_\delta(x) \leq 1$. По определению $u_\delta \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $A_0 u_\delta(x) = 0$ ($x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}$). Поскольку $\varphi(x) = 0$ ($x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu$), то в силу теоремы 36.IV из [17] о гладкости решений эллиптических задач вблизи границы $u_2 \in C^{2+\sigma}(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^{\delta/3})$. Следовательно, $A_0 u_\delta \in C^\sigma(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^{\delta/3})$. Выше было доказано, что $A_0 u_\delta(x) = 0$ ($x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}$). Поэтому $A_0 u_\delta \in C^\sigma(\overline{Q})$. Очевидно,

$$\|u_\delta - u\|_{C(\overline{Q})} \leq \|u_1 - u\|_{C(\overline{Q})} + \|u_2 - u\|_{C(\overline{\Gamma}_\mu^\delta)} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Таким образом, неравенство (2.31) доказано.

По построению $u_1(x) = 0$ ($x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu$). Кроме того, $\mu(x, \overline{Q}) = 0$ ($x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu$). Поэтому $Lu_1(x) = 0$ ($x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu$). Из этих равенств, а также из (2.33), (2.35) следует

$$\begin{aligned} u_\delta(x) &= u_1(x) = 0 = Lu_1(x) \quad (x \in \partial Q \setminus \Gamma_\mu^\delta), \\ u_\delta(x) &= u_2(x) = Lu_1(x) \quad (x \in \partial Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}), \\ u_\delta(x) &= \xi_\delta(x)u_1(x) + (1 - \xi_\delta(x))Lu_1(x) = 0 = Lu_1(x) \quad (x \in \partial Q \cap (\Gamma_\mu^\delta \setminus \Gamma_\mu^{\delta/2})). \end{aligned}$$

Таким образом, $u_\delta(x) = Lu_1(x)$ ($x \in \partial Q$). Отсюда и из (2.31) мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \|u_\delta - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} &= \|Lu_1 - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} \leq \|u_1 - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} \\ &\leq \|u_1 - u\|_{C(\overline{Q})} + \|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} < \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. выполняется неравенство (2.30).

ЛЕММА 2.6. *Предположим, что выполнены условия 1.4, 2.1, 2.2. Пусть также выполнены или условия 2.3–2.6, или 2.7, 2.8.*

Тогда область определения $\mathcal{D}(A_0 V)$ плотна в $C_B(\overline{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $u \in C_B(\overline{Q})$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу леммы 2.5 существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого $0 < \delta < \delta_1$ найдется функция $u_\delta \in C^2(Q) \cap C_\mu(\overline{Q})$, удовлетворяющая соотношениям (2.30)–(2.32). Обозначим $f_\delta = A_0 u_\delta - \lambda u_\delta$, $\psi_\delta = u_\delta - Lu_\delta$. Тогда функция u_δ является решением задачи

$$\begin{aligned} A_0 u_\delta(x) - \lambda u_\delta(x) &= f_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ u_\delta(x) - Lu_\delta(x) &= \psi_\delta(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Рассмотрим также нелокальную задачу

$$\begin{aligned} A_0 v_\delta(x) - \lambda v_\delta(x) &= f_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ v_\delta(x) - Lv_\delta(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Из леммы 2.5 следует, что $f_\delta \in C^\sigma(Q) \cap C(\overline{Q})$. Поэтому в силу лемм 2.3, 2.4 задача (2.40) имеет единственное решение $v_\delta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})$ при $\lambda > \lambda_0 > 1$.

Кроме того, из леммы 2.5 вытекает оценка

$$\|A_0 u_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq c(\delta). \quad (2.41)$$

Обозначим $w_\delta = u_\delta - v_\delta$. Тогда из (2.39), (2.40) имеем

$$\begin{aligned} A_0 w_\delta(x) - \lambda w_\delta(x) &= 0 \quad (x \in Q), \\ w_\delta(x) - L w_\delta(x) &= \psi_\delta(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Эта задача эквивалентна следующему операторному уравнению в $C_\mu(\partial Q)$:

$$\varphi_\delta - LP_\lambda \varphi_\delta = \psi_\delta$$

(см. доказательство леммы 2.3), где $w_\delta = P_\lambda \varphi_\delta$. Из леммы 2.2 и доказательства леммы 2.4 следует, что оператор $I - LP_\lambda: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1}$ с нормой $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leq q$ при $\lambda > \lambda_0$. Отсюда $w_\delta = P_\lambda (I - LP_\lambda)^{-1} \psi_\delta$. В силу леммы 2.5 можно выбрать $\delta > 0$ так, что $\|\psi_\delta\|_{C(\partial Q)} < \varepsilon/q$. Поэтому из оценки $\|(I - LP_\lambda)^{-1}\| \leq q$ следует, что

$$\|w_\delta\|_{C(\overline{Q})} < q \frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon. \quad (2.43)$$

2. Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{aligned} A_0 \tilde{v}_\delta(x) - \lambda \tilde{v}_\delta(x) &= -\lambda v_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ \tilde{v}_\delta(x) - L \tilde{v}_\delta(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Так как $v_\delta \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q})$, вследствие лемм 2.3 и 2.4 задача (2.44) имеет единственное решение $\tilde{v}_\delta \in \mathcal{D}(A_{0B})$ при $\lambda > \lambda_0$. Обозначим $\tilde{w}_\delta = v_\delta - \tilde{v}_\delta$. Тогда из (2.40), (2.44) следует, что

$$\begin{aligned} A_0 \tilde{w}_\delta(x) - \lambda \tilde{w}_\delta(x) &= A_0 v_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ \tilde{w}_\delta(x) - L \tilde{w}_\delta(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (2.45)$$

В силу (2.39), (2.40) имеем

$$A_0 v_\delta(x) = A_0 u_\delta(x) - \lambda w_\delta(x).$$

Отсюда, а также из неравенств (2.20), (2.41) и (2.43) следует, что

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} \|A_0 u_\delta - \lambda w_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} (c(\delta) + \lambda \varepsilon). \quad (2.46)$$

Для $\lambda > \max\{\lambda_0, c(\delta)/\varepsilon\}$ имеем

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq 2\varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\|u - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|u_\delta - v_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|v_\delta - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} < 4\varepsilon.$$

V. Из предыдущих результатов мы получаем достаточные условия существования полугруппы Феллера.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что выполнены условия 1.4, 2.1, 2.2. Пусть также выполнены условия 2.3–2.6 или 2.7, 2.8.*

Тогда оператор $\overline{A_{0B}}: C_B(\overline{Q}) \rightarrow C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_{0B} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.6 область определения $\mathcal{D}(A_{0B})$ плотна в $C_B(\overline{Q})$. Из лемм 2.3, 2.4 следует, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - A_{0B})$ плотен в $C(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_0$. Из лемм 2.6, 2.3 и 2.4, в свою очередь, вытекает, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - A_{0B})$ плотен в $C_B(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_0$. Таким образом, в силу лемм 1.2, 2.1 оператор $\overline{A_{0B}}: C_B(\overline{Q}) \rightarrow C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_{0B} .

§3. Полугруппа Феллера, порожденная эллиптическим интегро-дифференциальным оператором

В этом параграфе мы будем рассматривать возмущение эллиптического дифференциального оператора интегральным оператором. Для этого нам потребуются наложить некоторые дополнительные ограничения типа гладкости на нелокальные члены. Вначале мы рассмотрим вопрос о разрешимости нелокальных задач для эллиптических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в пространствах Гёльдера. Затем мы докажем плотность области определения соответствующего эллиптического интегро-дифференциального оператора в $C_B(\overline{Q})$. Как следствие результатов, упомянутых выше, мы получим достаточные условия существования полугруппы Феллера.

I. Рассмотрим вопрос о разрешимости нелокальных задач для эллиптических дифференциальных уравнений в пространствах Гёльдера.

Мы будем предполагать в этом параграфе, что коэффициенты эллиптического дифференциального оператора A_0 удовлетворяют следующим условиям: a_{ij} , a_i , $a \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ ($i, j = 1, \dots, n$), где $s = \max\{0, k - 2\}$, $k \geq 0$ – целое число, $0 < \sigma < 1$.

Обозначим $C_\mu^{k+\sigma}(\Omega) = C_\mu(\Omega) \cap C^{k+\sigma}(\Omega)$, где $\Omega = \overline{Q}$ или $\Omega = \partial Q$.

Предположим, что существуют неотрицательные борелевские меры $\mu_i(x, \cdot)$ на $\overline{Q}$ ($x \in \partial Q$; $i = 1, 2, 3$) такие, что $\mu(x, \cdot) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(x, \cdot)$, а соответствующие операторы B_i ($i = 1, 2, 3$) и $B_{2\delta}^j$ ($j = 1, 2$), определенные по формулам (2.2)–(2.4), удовлетворяют следующим условиям:

- 3.1. $\gamma_0 \in C^{k+\sigma}(\partial Q)$;
- 3.2. оператор $B_1: C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ ограничен, причем носитель меры $\mu_1(x, \cdot)$ удовлетворяет условиям 2.4, 2.5;
- 3.3. существует $\delta_0 > 0$ такое, что для $0 < \delta < \delta_0$ операторы $B_{2\delta}^1: C^{k+\sigma}(\overline{\Gamma}_\mu^\delta) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ и $B_{2\delta}^2: C^{k+\sigma}(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ ограничены и $\|B_{2\delta}^1\|_{k+\sigma} \leq c_1(\delta)$, $\|B_{2\delta}^2\|_{k+\sigma} \leq c_2$, где $c_1(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $c_2 > 0$ не зависит от δ , $\|\cdot\|_{k+\sigma}$ – норма оператора, действующего в соответствующих пространствах Гёльдера;
- 3.4. оператор $B_3: C(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ ограниченный.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из условий 3.2–3.4 следует, что $\mu_1(x, \overline{Q}) \in C^{k+\sigma}(\partial Q \setminus K_1)$, $\mu_i(x, \overline{Q}) \in C^{k+\sigma}(\partial Q)$ ($i = 2, 3$) и $\mu_2(x, \Gamma_\mu) = 0$ ($x \in \partial Q$). Последнее утверждение вытекает из условия 3.3, а два других доказываются аналогично соответствующим утверждениям из замечания 2.4.

В дальнейшем нам понадобятся следующее определение и некоторые известные результаты (см. теоремы 15.4, 16.2, 16.4 из [20]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Линейный замкнутый оператор A , действующий из банахова пространства $\mathcal{B}_1$ в банахово пространство $\mathcal{B}_2$, называется *фредгольмовым*, если $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$ и $\text{codim } \mathcal{R}(A) < \infty$, а $\mathcal{R}(A)$ – замкнуто в $\mathcal{B}_2$, где $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ – соответственно ядро и образ оператора A . Число $\text{ind } A = \dim \mathcal{N}(A) - \text{codim } \mathcal{R}(A)$ называется *индексом* оператора A .

Будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов, отображающих банахово пространство $\mathcal{B}_1$ в банахово пространство $\mathcal{B}_2$ и определенных всюду на $\mathcal{B}_1$, как $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\mathcal{B}$ – банахово пространство и оператор $F \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, причем существует такое натуральное число n , что оператор F^n компактен в $\mathcal{B}$, то оператор $I - F$, где I – тождественный оператор в $\mathcal{B}$, фредгольмов и $\text{ind}(I - F) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.2. Если оператор $F_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ фредгольмов, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого оператора $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ с нормой $\|F_2\| < \varepsilon$ оператор $F = F_1 + F_2$ также фредгольмов и $\text{ind } F = \text{ind } F_1$.

ТЕОРЕМА 3.3. Если оператор $F_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ фредгольмов, а оператор $F_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ компактен, то оператор $F = F_1 + F_2$ также фредгольмов и $\text{ind } F = \text{ind } F_1$.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия 1.4, 2.2, 3.1–3.4.

Тогда существует число $\lambda_0 > 1$ такое, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ уравнение

$$(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)u = f \quad (3.1)$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ для любой функции $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$, и

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C(\overline{Q})}, \quad (3.2)$$

где $0 < \sigma < 1$, $s = \max\{0, k - 2\}$. Кроме того, оператор $(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ – компактный для $\lambda > \lambda_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В силу замечания 2.1 нелокальное условие (2.1) можно переписать в виде

$$u(x) - Lu(x) = 0 \quad (x \in \partial Q) \quad (3.3)$$

(ср. (2.5), (2.6)).

Таким образом, операторное уравнение (3.1) эквивалентно нелокальной задаче для эллиптического уравнения

$$\begin{aligned} A_0 u(x) - \lambda u(x) &= f(x) \quad (x \in Q), \\ u(x) - Lu(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\lambda > 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} A_0 v(x) - \lambda v(x) &= f(x) \quad (x \in Q), \\ v(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В силу теоремы 36.IV из [17] для любого $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ существует единственное решение задачи (3.5) $v \in C^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$. Очевидно, $s+2+\sigma = k+\sigma$, если $k \geq 2$, и $s+2+\sigma = 2+\sigma$, если $k = 0, 1$. Пусть $w = u - v$. Тогда из (3.4), (3.5) получим

$$\begin{aligned} A_0 w(x) - \lambda w(x) &= 0 \quad (x \in Q), \\ w(x) - Lw(x) &= Lv(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Итак, уравнение (3.1) относительно функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ эквивалентно задаче (3.6) относительно функции $w \in C^2(Q) \cap C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q})$. Для сведения задачи (3.6) на границу мы будем использовать оператор P_λ , введенный в §2.II. Оператор $P_\lambda: C^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ — ограниченный. При $k \geq 2$ данное утверждение вытекает из теорем 35.II и 35.VI из [17]. При $k = 0, 1$ ограниченность оператора $P_\lambda: C^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ следует из ограниченности операторов $P_\lambda: C(\partial Q) \rightarrow C(\overline{Q})$ и $P_\lambda: C^{2+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C^{2+\sigma}(\overline{Q})$, а также из интерполяционной теоремы 1 из [19, гл. 4, §4.5]. Поэтому задача (3.6) для функции $w \in C^2(Q) \cap C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q})$ эквивалентна операторному уравнению

$$\psi - LP_\lambda \psi = Lv \quad (3.7)$$

относительно функции $\psi \in C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$, где $P_\lambda \psi = w$.

2. Докажем, что оператор $I - LP_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ фредгольмов и $\text{ind}(I - LP_\lambda) = 0$.

В силу условия 2.5 для любого $0 < \varkappa < \varkappa_0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\text{spt } \mu_1(x, \cdot) \subset \overline{Q}_\varepsilon \quad (x \in \partial Q \setminus K_1^{\varkappa/2}). \quad (3.8)$$

Введем срезающую функцию $\xi_\varepsilon \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что $0 \leq \xi_\varepsilon(x) \leq 1$, $\xi_\varepsilon(x) = 1$ ($x \in \overline{Q}_\varepsilon$), $\xi_\varepsilon(x) = 0$ ($x \notin \overline{Q}_{\varepsilon/2}$). Тогда для данного $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ уравнение (3.7) можно записать в виде

$$\psi - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda \psi - L_1\xi_\varepsilon P_\lambda \psi - L_{2\delta}^1 P_\lambda \psi - L_{2\delta}^2 P_\lambda \psi - L_3 P_\lambda \psi = Lv. \quad (3.9)$$

Здесь операторы L_i ($i = 1, 2, 3$), $L_{2\delta}^j$ ($j = 1, 2$) определены по формулам (2.7), (2.8).

Из теорем 35.IV, 35.VI и 36.IV из [17] следует, что оператор $P_\lambda: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C^{k+\sigma}(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^{\varepsilon_1})$ ограниченный, где $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon/2, \delta\}$. Очевидно, оператор вложения $C^{k+\sigma}(\partial Q)$ в $C(\partial Q)$ компактный, а поэтому и оператор $P_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C^{k+\sigma}(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^{\varepsilon_1})$ компактен. Отсюда, а также из замечания 2.1 и условий 3.1–3.4 следует, что операторы $L_1\xi_\varepsilon P_\lambda$, $L_{2\delta}^2 P_\lambda$, $L_3 P_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ компактны.

Рассмотрим теперь оператор $L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$. Из определения функции $\xi_\varepsilon(x)$ следует, что $(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi(x) = 0$ ($x \in \overline{Q}_\varepsilon$). Поэтому в силу (3.8)

$$\text{supp } L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi \subset \partial Q \cap \overline{K_1^{\varkappa/2}}. \quad (3.10)$$

Из (2.7) и принципа максимума следует, что

$$\|L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi\|_{C(\partial Q)} \leq \|\varphi\|_{C(\partial Q)} \quad (\varphi \in C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)). \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) и теорем 35.IV, 35.VI и 36.IV из [17] вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|P_\lambda L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi\|_{C^{k+\sigma}(\overline{Q} \setminus K_1^\varkappa)} &\leq c_0 \|L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda\varphi\|_{C(\partial Q)} \\ &\leq c_0 \|\varphi\|_{C(\partial Q)} \quad (\varphi \in C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $c_0 > 0$ не зависит от φ . В силу условия 2.4 $\text{spt } \mu_1(x, \cdot) \subset \overline{Q} \setminus K_1^\varkappa$. Отсюда и из (3.12) следует, что оператор $(L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda)^2: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ компактен.

Оператор $I - LP_\lambda$ можно записать в виде

$$I - LP_\lambda = I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda - L_1\xi_\varepsilon P_\lambda - L_{2\delta}^1 P_\lambda - L_{2\delta}^2 P_\lambda - L_3 P_\lambda.$$

В силу теорем 3.1, 3.2 и условий 3.3, 3.1 для достаточно малых $\delta > 0$ оператор

$$I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda - L_{2\delta}^1 P_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$$

фредгольмов и

$$\text{ind}(I - L_1(1 - \xi_\varepsilon)P_\lambda - L_{2\delta}^1 P_\lambda) = 0.$$

Так как операторы $L_1\xi_\varepsilon P_\lambda$, $L_{2\delta}^2 P_\lambda$, $L_3 P_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ компактны, из теоремы 3.3 следует, что оператор $I - LP_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ фредгольмов, и $\text{ind}(I - LP_\lambda) = 0$.

3. Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B})$ – решение уравнения (3.1) для $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Тогда, пользуясь леммой 2.1, аналогично доказательству леммы 2.3 мы получаем неравенство (3.2). Отсюда следует, что уравнение (3.7) имеет единственное тривиальное решение при $v = 0$. А поскольку оператор $I - LP_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ фредгольмов и $\text{ind}(I - LP_\lambda) = 0$, то уравнение (3.7) имеет единственное решение $\psi \in C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ для любого $Lv \in C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$. Таким образом, уравнение (3.1) имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0B}) \cap C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q})$ для любого $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$.

4. Для того, чтобы завершить доказательство, нам остается показать, что оператор $(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ компактный. Мы доказали, что оператор $I - LP_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ имеет ограниченный обратный $(I - LP_\lambda)^{-1}: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} u &= (\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}f = v + P_\lambda \psi \\ &= v + P_\lambda(I - LP_\lambda)^{-1}Lv = G_\lambda f + P_\lambda(I - LP_\lambda)^{-1}LG_\lambda f, \end{aligned}$$

где G_λ – оператор, введенный в §2.П. Таким образом,

$$(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1} = G_\lambda + P_\lambda(I - LP_\lambda)^{-1}LG_\lambda.$$

В силу замечания 2.1 и условий 3.1–3.4 оператор $L: C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ ограниченный. А поскольку операторы

$$P_\lambda: C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q}) \quad \text{и} \quad G_\lambda: C_\mu^{s+\sigma}(Q) \rightarrow C_\mu^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$$

также ограниченные, из компактности вложения $C^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$ в $C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ и в $C^{s+1+\sigma}(\overline{Q})$ следует, что оператор

$$(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$$

компактный.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Отметим, что для справедливости леммы 3.1 не требуется выполнения условия 2.6 для оператора $B'_2 = B - B_1 = B_2 + B_3$ или условия 2.8 для оператора B (ср. леммы 2.3, 2.4).

II. Докажем теперь теорему о разрешимости нелокальной задачи для эллиптического интегро-дифференциального уравнения в пространстве Гёльдера. Основная идея доказательства заключается в том, что оператор A_1 является вполне непрерывным возмущением относительно оператора $\mathcal{A}_{0B}$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть выполнены условия 1.4, 2.2, 3.1–3.4, а также условие 1.5 с показателем $s = \max\{0, k - 2\}$.

Тогда существует $\lambda_1 > 1$ такое, что при всех $\lambda > \lambda_1$ уравнение

$$(\mathcal{A}_B - \lambda I)u = f \tag{3.13}$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ для любой $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ и

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C(\overline{Q})}, \tag{3.14}$$

где $0 < \sigma < 1$. Более того, оператор $(\mathcal{A}_B - \lambda I)^{-1}: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ компактный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 оператор $\mathcal{A}_B - \lambda I$ можно записать в виде

$$\mathcal{A}_B - \lambda I = (I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I).$$

Из условия 1.5, замечания 1.1 и леммы 3.1 следует, что оператор $A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$ компактный. Используя лемму 2.1 и рассуждая так же, как в доказательстве леммы 2.3, мы получаем оценку (3.14) для всех $f \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_B - \lambda I)$ и $\lambda > 0$. Таким образом, однородное уравнение $(\mathcal{A}_B - \lambda I)v = 0$ имеет единственное решение $v = 0$. Следовательно, $\mathcal{N}(I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}) = \{0\}$. Поэтому существует ограниченный обратный оператор $(I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})^{-1}: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Таким образом, уравнение (3.13) имеет единственное решение

$$u = (\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}(I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})^{-1}f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$$

для любой $f \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Более того, оператор

$$(\mathcal{A}_B - \lambda I)^{-1} = (\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1}(I + A_1(\mathcal{A}_{0B} - \lambda I)^{-1})^{-1}: C^{s+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C^{s+\sigma}(\overline{Q})$$

компактен.

III. В этом пункте мы докажем плотность области определения $\mathcal{D}(A_B)$ в $C_B(\overline{Q})$.

Аналогично доказательству леммы 2.5 мы можем получить следующий результат.

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия 1.4, 2.2, 3.1–3.4.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $u \in C_B(\overline{Q})$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всякого $0 < \delta < \delta_1$ найдется функция $u_\delta \in C^{s+2+\sigma}(Q) \cap C_\mu^{s+\sigma}(\overline{Q})$, обладающая свойствами:

$$\|u_\delta - Lu_\delta\|_{C(\partial Q)} < 2\varepsilon, \quad (3.15)$$

$$\|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} < \varepsilon, \quad (3.16)$$

$$A_0 u_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q}), \quad A_0 u_\delta(x) = 0 \quad (x \in Q \cap \Gamma_\mu^{\delta/2}). \quad (3.17)$$

В дальнейшем мы также будем предполагать, что выполнено условие

$$3.5. \sup_{x \in \partial Q} \mu_3(x, \overline{\Gamma_\mu^\delta}) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пусть выполнены условия 1.4, 2.2, 3.1–3.5. Тогда справедливо утверждение леммы 2.2. Действительно, множества $C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q})$, $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ всюду плотны в пространствах $C_\mu(\overline{Q})$, $C(\overline{Q})$ соответственно. Поэтому в силу условий 3.2, 3.3 и замечания 2.3 операторы $B_1: C_\mu^{k+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ и $B_2: C^{k+\sigma}(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu^{k+\sigma}(\partial Q)$ могут быть расширены до ограниченных операторов, действующих из $C_\mu(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$ и из $C(\overline{Q})$ в $C_\mu(\partial Q)$ соответственно. Обозначим эти расширения также через B_1 и B_2 . Из определения данных расширений и условия 3.4 следует, что операторы B_1 и $B'_2 = B_2 + B_3$ удовлетворяют условию 2.3. Кроме того, из условий 3.3 и 3.5 следует, что оператор

$$L'_{2\delta} = \frac{1}{\gamma_0(x)}(B_{2\delta}^1 + B_{3\delta}^1)$$

удовлетворяет условию 2.6, где

$$B_{i\delta}^1 v(x) = \int_{\Gamma_\mu^\delta} v(y) \mu_i(x, dy) \quad (i = 2, 3).$$

Таким образом, выполняются все условия леммы 2.2.

Для области определения $\mathcal{D}(A_B)$ мы установим ниже лемму 3.3, аналогичную лемме 2.6. Доказательство леммы 3.3 во многом близко к доказательству леммы 2.6. Однако, наличие интегрального оператора A_1 заметно усложняет рассуждения. Поэтому мы приведем полностью формулировку и доказательство леммы 3.3.

ЛЕММА 3.3. *Пусть выполнены условия 1.4, 2.2, 3.1–3.5, а также условие 1.5 с показателем $s = \max\{0, k - 2\}$.*

Тогда множество $\mathcal{D}(A_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ плотно в $C_B(\overline{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $u \in C_B(\overline{Q})$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу леммы 3.2 существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого $0 < \delta < \delta_1$ найдется функция $u_\delta \in C^{s+2+\sigma}(Q) \cap C^{s+\sigma}(\overline{Q})$, обладающая свойствами (3.15)–(3.17). Обозначим $f_\delta = Au_\delta - \lambda u_\delta$, $\psi_\delta = u_\delta - Lu_\delta$. Тогда функция u_δ является решением задачи

$$\begin{aligned} Au_\delta(x) - \lambda u_\delta(x) &= f_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ u_\delta(x) - Lu_\delta(x) &= \psi_\delta(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Рассмотрим также нелокальную задачу

$$\begin{aligned} Av_\delta(x) - \lambda v_\delta(x) &= f_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ v_\delta(x) - Lv_\delta(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \tag{3.19}$$

В силу (3.17), условия 1.5 и замечания 1.1 $f_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. С другой стороны, из леммы 3.2 следует, что

$$\|A_0 u_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq c(\delta). \tag{3.20}$$

Поэтому в силу теоремы 3.4 и замечания 1.2 задача (3.19) имеет единственное решение $v_\delta \in \mathcal{D}(A_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_1 > 1$ и

$$\|v_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} \|f_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq c(\delta) \lambda^{-1} + k_1, \tag{3.21}$$

где $k_1 > 1$ не зависит от δ и λ .

Обозначим $w_\delta = u_\delta - v_\delta$. Тогда из (3.18), (3.19) следует

$$\begin{aligned} Aw_\delta(x) - \lambda w_\delta(x) &= 0 \quad (x \in Q), \\ w_\delta(x) - Lw_\delta(x) &= \psi_\delta(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Так как $w_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$, пользуясь условием 1.5 и замечанием 1.1, мы получим $A_1 w_\delta \in C^{s+\sigma}(\overline{Q})$. Поэтому в силу теоремы 36.IV из [17] и неравенства (3.2) задача Дирихле

$$\begin{aligned} A_0 w_\delta^1(x) - \lambda w_\delta^1(x) &= -A_1 w_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ w_\delta^1(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q) \end{aligned} \quad (3.23)$$

имеет единственное решение $w_\delta^1 \in C^{s+2+\sigma}(\overline{Q})$ и

$$\|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} \|A_1 w_\delta\|_{C(\overline{Q})}$$

при $\lambda > \lambda_1$, где $\lambda_1 > 1$ достаточно велико.

Отсюда, из замечания 1.2 и неравенства (3.21) следует, что

$$\|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{k_2}{\lambda} \quad (3.24)$$

при $\lambda > \max\{\lambda_1, c(\delta)\}$, где $k_2 > 0$ не зависит от λ и δ .

Обозначим $w_\delta^2 = w_\delta - w_\delta^1$. Тогда из (3.22), (3.23) следует

$$\begin{aligned} A_0 w_\delta^2(x) - \lambda w_\delta^2(x) &= 0 \quad (x \in Q), \\ w_\delta^2(x) - L w_\delta^2(x) &= L w_\delta^1(x) + \psi_\delta(x) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned}$$

Очевидно, функция $\varphi_\delta = w_\delta^2|_{\partial Q}$ удовлетворяет следующему операторному уравнению в $C_\mu(\partial Q)$:

$$\varphi_\delta - L P_\lambda \varphi_\delta = L w_\delta^1 + \psi_\delta$$

(ср. доказательства лемм 2.3, 2.6). В силу леммы 2.2 и замечания 3.3 оператор $I - L P_\lambda$ имеет ограниченный обратный $(I - L P_\lambda)^{-1}: C_\mu(\partial Q) \rightarrow C_\mu(\partial Q)$ с нормой $\|(I - L P_\lambda)^{-1}\| \leq q$ при $\lambda > \max\{\lambda_1, c(\delta)\}$. Отсюда

$$w_\delta^2 = P_\lambda (I - L P_\lambda)^{-1} (L w_\delta^1 + \psi_\delta).$$

Вследствие леммы 3.2 можно выбрать $\delta > 0$ так, что

$$\|\psi_\delta\|_{C(\partial Q)} < \min\left\{2\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2q}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\|w_\delta^2\|_{C(\overline{Q})} \leq q \left(\|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} + \frac{\varepsilon}{2q} \right).$$

Таким образом, в силу (3.24) мы имеем

$$\|w_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \|w_\delta^1\|_{C(\overline{Q})} + \|w_\delta^2\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{(q+1)k_2}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (3.25)$$

при $\lambda > \max\{\lambda_1, c(\delta), 2(q+1)k_2/\varepsilon\} = \lambda_2$.

2. Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{aligned} A\tilde{v}_\delta(x) - \lambda\tilde{v}_\delta(x) &= -\lambda v_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ \tilde{v}_\delta(x) - L\tilde{v}_\delta(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Так как $v_\delta \in C^{k+\sigma}(\overline{Q}) \cap C_B(\overline{Q})$, по теореме 3.4 задача (3.26) имеет единственное решение $\tilde{v}_\delta \in \mathcal{D}(A_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_2$. Обозначим $\tilde{w}_\delta = v_\delta - \tilde{v}_\delta$. Тогда из (3.19), (3.26) следует, что

$$\begin{aligned} A\tilde{w}_\delta(x) - \lambda\tilde{w}_\delta(x) &= Av_\delta(x) \quad (x \in Q), \\ \tilde{w}_\delta(x) - L\tilde{w}_\delta(x) &= 0 \quad (x \in \partial Q). \end{aligned} \quad (3.27)$$

В силу (3.18), (3.19) имеем

$$Av_\delta(x) = Au_\delta(x) - \lambda w_\delta(x).$$

Отсюда, а также из неравенств (3.14), (3.25) и леммы 3.2 следует

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} \|Au_\delta - \lambda w_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \frac{1}{\lambda} (c(\delta) + k_3 + \lambda\varepsilon),$$

где $k_3 > 0$ не зависит от λ и δ .

Выбирая λ так, что $\lambda > \max\{\lambda_2, (c(\delta) + k_3)/\varepsilon\}$, мы получаем неравенство

$$\|\tilde{w}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq 2\varepsilon. \quad (3.28)$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $\tilde{v}_\delta \in \mathcal{D}(A_B) \cap C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ такая, что

$$\|u - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq \|u - u_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|u_\delta - v_\delta\|_{C(\overline{Q})} + \|v_\delta - \tilde{v}_\delta\|_{C(\overline{Q})} \leq 4\varepsilon.$$

IV. Теперь мы можем доказать теорему о существовании полугруппы Феллера, порожденной эллиптическим интегро-дифференциальным оператором.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть выполнены условия 1.4, 1.5, 2.2, 3.1–3.5.

Тогда оператор $\overline{A}_B: C_B(\overline{Q}) \rightarrow C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.3 множество $\mathcal{D}(A_B)$ всюду плотно в $C_B(\overline{Q})$. Из теоремы 3.4 следует, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - A_B)$ плотен в $C(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_1$. Из леммы 3.3 и теоремы 3.4, в свою очередь, вытекает, что образ $\mathcal{R}(\lambda I - A_B)$ плотен в $C_B(\overline{Q})$ при $\lambda > \lambda_1$. Таким образом, в силу лемм 1.2, 2.1 оператор $\overline{A}_B: C_B(\overline{Q}) \rightarrow C_B(\overline{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера из $C_B(\overline{Q})$ в $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_B .

§ 4. Некоторые примеры

Приведем теперь несколько примеров, в которых выполняются условия теорем 2.1 и 3.5.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Пусть $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup K_1$, где Γ_i ($i = 1, 2$) — $(n-1)$ -мерные многообразия класса C^∞ , открытые и связные в топологии ∂Q , K_1 — $(n-2)$ -мерное многообразие класса C^∞ при $n \geq 3$, K_1 состоит из двух точек x^1 и x^2 , если $n = 2$. Введем невырожденное преобразование $\omega(x)$ класса C^1 , отображающее некоторую окрестность V_1 многообразия Γ_1 на $\omega(V_1)$ так, что $\omega(\Gamma_1) \subset Q$. Однако, вообще говоря, $\omega(K_1) \cap \partial Q \neq \emptyset$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\Omega \subset Q$. Введем функцию $c(x, y)$ ($x \in \partial Q, y \in \overline{\Omega}$) так, что $c \in C(\partial Q \times \overline{\Omega})$, $c(x, y) \geq 0$ ($x \in \partial Q, y \in \overline{\Omega}$), $c(x, y) = 0$ ($x \in \overline{\Gamma}_2, y \in \overline{\Omega}$). Введем также функцию $b(x)$ ($x \in \partial Q$) следующим образом: $b \in C(\overline{\Gamma}_1)$, $b(x) \geq 0$ ($x \in \overline{\Gamma}_1$), $b(x) = 0$ ($x \in \Gamma_2$). Заметим, что функция $b(x)$ может быть разрывной на множестве K_1 .

Рассмотрим следующие нелокальные условия:

$$\begin{aligned} u(x) - b(x)u(\omega(x)) - \int_{\Omega} c(x, y)u(y) dy &= 0 \quad (x \in \Gamma_1), \\ u(x) &= 0 \quad (x \in \overline{\Gamma}_2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пусть преобразование $\omega(x)$ удовлетворяет условию:

4.1. $\omega(K_1) \cap K_1 = \emptyset$.

Для каждого борелевского множества $G \subset \overline{Q}$ положим

$$\begin{aligned} \mu_1(x, G) &= b(x), \text{ если } x \in \Gamma_1, \omega(x) \in G; \\ \mu_1(x, G) &= 0, \text{ если } x \in \overline{\Gamma}_2 \text{ или } x \in \Gamma_1, \omega(x) \notin G; \\ \mu_2(x, G) &= \int_{G \cap \Omega} c(x, y) dy \quad (x \in \partial Q); \\ \mu(x, G) &= \mu_1(x, G) + \mu_2(x, G) \quad (x \in \partial Q). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\mu(x, \overline{Q}) = b(x) + \int_{\Omega} c(x, y) dy \quad (x \in \partial Q).$$

Пусть выполнено условие

4.2. $\mu(x, \overline{Q}) \leq 1$ ($x \in \partial Q$).

Предположим также, что выполняется одно из следующих трех условий:

4.3. $b(x) = 0$ ($x \in K_1$), $b(x) > 0$ ($x \in \Gamma_1$);

4.4. $\omega(K_1) \subset \Gamma_2$, $b(x) > 0$ ($x \in \overline{\Gamma}_1$);

4.5. $\omega(K_1) \subset \Gamma_1$, $b(x) > 0$ ($x \in \overline{\Gamma}_1 \setminus \omega(K_1)$), $\mu(x, \overline{Q}) = 0$ ($x \in \omega(K_1)$).

Обозначим $\gamma(x) = 1 - \mu(x, \overline{Q})$. Тогда условия (4.1) примут вид

$$\gamma(x)u(x) + \int_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)] \mu(x, dy) = 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (4.2)$$

Заметим, что в силу условия 4.2 $\gamma(x) \geq 0$ ($x \in \partial Q$).

Покажем, что для меры $\mu(x, \cdot)$ выполняются условия 2.1–2.6. Если справедливо одно из условий 4.3, 4.4 или 4.5, то $N_\mu = \bar{\Gamma}_2$ и $\Gamma_\mu = \Gamma_1$, $N_\mu = \bar{\Gamma}_2$ и $\Gamma_\mu = \Gamma_1$ или $N_\mu = \bar{\Gamma}_2 \cup \omega(K_1)$ и $\Gamma_\mu = \Gamma_1 \setminus \omega(K_1)$ соответственно.

Условие 2.1 следует из того, что $\gamma_0(x) = \gamma(x) + \mu(x, \bar{Q}) \equiv 1$ ($x \in \partial Q$). Поскольку по условию $\omega(\Gamma_1) \subset Q$, то $\omega(\Gamma_1) \cap \Gamma_\mu = \emptyset$. Поэтому по определению меры $\mu_1(x, \cdot)$ мы имеем $\mu_1(x, \Gamma_\mu) = 0$. С другой стороны, согласно определению меры $\mu_2(x, \cdot)$ мы получим $\mu_2(x, \Gamma_\mu) = 0$. Таким образом, $\mu(x, \Gamma_\mu) = 0$. Следовательно,

$$\gamma(x) + \mu(x, \bar{Q} \setminus \Gamma_\mu) = 1 - \mu(x, \Gamma_\mu) = 1 > 0 \quad (x \in \partial Q).$$

Таким образом, условие 2.2 выполнено.

Очевидно, если выполнено одно из условий 4.3, 4.4 или 4.5, то справедливо условие 2.3. Кроме того, из условия 4.1 следует, что условие 2.4 выполняется при $\varkappa_0 = \rho(\omega(\bar{\Gamma}_1), K_1)/2$. Так как $\omega(\Gamma_1) \subset Q$, для любого $\varkappa$, $0 < \varkappa < \varkappa_0$, имеем $\omega(\Gamma_1 \setminus K_1^{\varkappa/2}) \subset Q$. Поэтому условие 2.5 выполнено при $\varepsilon = \rho(\omega(\Gamma_1 \setminus K_1^{\varkappa/2}), \partial Q) > 0$. Наконец, из свойств интеграла Римана следует справедливость условия 2.6. Более того, в этом случае

$$\|L_{2\delta}^1\| = \sup_{x \in \partial Q} \int_{\Gamma_1^\delta} c(x, y) dy \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Обозначим через $C_B(\bar{Q})$ подпространство функций в $C(\bar{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (4.1). Тогда при выполнении условий 1.4, 4.1, 4.2 и одного из условий 4.3–4.5 для оператора $\mathcal{A}_{0B}$ справедливо заключение леммы 2.3. Более того, в силу теоремы 2.1 оператор $\mathcal{A}_{0B}$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\bar{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_{0B} .

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим условия (4.1) в случае $n = 2$ и $c(x, y) \equiv 0$ ($x \in \partial Q$, $y \in \Omega$).

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- 4.6. $\omega(K_1) = K_1$;
- 4.7. $0 < b(x) \leq 1$ ($x \in \bar{\Gamma}_1$);
- 4.8. $b(x) < 1$ ($x \in K_1$).

В силу условия 4.7 $N_\mu = \bar{\Gamma}_2$ и $\Gamma_\mu = \Gamma_1$. Аналогично примеру 4.1 легко показать, что условия 2.1, 2.2 выполняются. Однако, если $b(x) \geq 1/2$ ($x \in K_1$), меру $\mu(x, \cdot)$ нельзя представить в виде суммы мер $\mu_1(x, \cdot)$ и $\mu_2(x, \cdot)$, удовлетворяющих условиям 2.4 и 2.6. Из условия 4.6 вытекает условие 2.7. Нам остается проверить условие 2.8. Поскольку $\gamma_0(x) \equiv 1$ ($x \in \partial Q$), то

$$\gamma_\delta(x) = \gamma(x) + \mu(x, \bar{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta) = \gamma_0(x) - \mu(x, \Gamma_\mu^\delta) = 1 - \mu(x, \Gamma_\mu^\delta).$$

Следовательно,

$$\gamma_\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \bar{\Gamma}_2 \text{ или } \omega(x) \notin \Gamma_\mu^\delta, \ x \in \Gamma_1, \\ 1 - b(x), & \text{если } \omega(x) \in \Gamma_\mu^\delta, \ x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

В силу условия 4.8 и непрерывности $b(x)$ на $\bar{\Gamma}_1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $b(x) < k_1 < 1$ ($x \in K_1^\varepsilon$). Поскольку $\omega(\Gamma_1) \subset Q$, для данного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\omega(x) \notin \Gamma_\mu^\delta$ ($x \in \Gamma_1 \setminus K_1^\varepsilon$), т.е. $\gamma_\delta(x) = 1$ ($x \in \Gamma_1 \setminus K_1^\varepsilon$). Таким образом,

$$\inf_{x \in \partial Q} \gamma_\delta(x) \geq 1 - k_1 > 0.$$

Следовательно, в силу замечания 2.8 условие 2.8 выполняется.

Итак, мы доказали, что при выполнении условий 1.4, 4.6–4.8 для оператора $\mathcal{A}_0 B$ справедливо заключение леммы 2.4. Более того, в силу теоремы 2.1 оператор $\overline{A_0 B}$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\bar{Q})$, которая однозначно определяется оператором $A_0 B$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Пусть $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup K_1$, где $\Gamma_1 = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1, x_n = 0\}$, Γ_2 – $(n-1)$ -мерное многообразие класса C^∞ , открытое и связное в топологии ∂Q , $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| = 1, x_n = 0\}$.

Введем невырожденное преобразование $\omega(x)$ класса C^1 , отображающее некоторую окрестность V_1 многообразия Γ_1 на $\omega(V_1)$ так, что $\omega(\Gamma_1) \subset Q$. В общем случае $\omega(K_1) \cap \partial Q \neq \emptyset$. В окрестности V_1 мы определим также преобразования сдвига $\omega_s(x) = (x', x_n + 1/s)$ ($x = (x', x_n) \in V_1, s = 1, 2, \dots$). Будем предполагать, что область Q удовлетворяет условию $\omega_s(\bar{\Gamma}_1) \subset Q$ ($s = 1, 2, \dots$). Введем также функции $b(x), b_s(x), c(x)$ ($x \in \partial Q$) так, что $b \in C^\sigma(\bar{\Gamma}_1)$, $b_s, c \in C^\sigma(\partial Q)$, $b(x), b_s(x), c(x) \geq 0$ ($x \in \bar{\Gamma}_1$), $b(x) = b_s(x) = c(x) = 0$ ($x \in \Gamma_2$). Заметим, что в отличие от функций $b_s(x), c(x)$ функция $b(x)$ может быть разрывной на множестве K_1 .

Пусть выполнено условие

4.9. ряд $\sum_{s=1}^\infty \|b_s\|_{C^\sigma(\bar{\Gamma}_1)}$ сходится.

Рассмотрим нелокальные условия вида

$$\begin{aligned} u(x) - b(x)u(\omega(x)) - \sum_{s=1}^\infty b_s(x)u(\omega_s(x)) - c(x) \int_Q \frac{u(y) dy}{|x-y|^{n-\alpha}} &= 0 \quad (x \in \Gamma_1), \\ u(x) &= 0 \quad (x \in \bar{\Gamma}_2), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\sigma < \alpha$.

Для каждого борелевского множества $G \subset \bar{Q}$ положим

$$\begin{aligned} \mu_1(x, G) &= b(x), \text{ если } x \in \Gamma_1, \omega(x) \in G; \\ \mu_1(x, G) &= 0, \text{ если } x \in \bar{\Gamma}_2 \text{ или } x \in \Gamma_1, \omega(x) \notin G; \\ \mu_2(x, G) &= \sum_{s \in M(x, G)} b_s(x), \text{ если } x \in \Gamma_1, \text{ где } M(x, G) = \{s : \omega_s(x) \in G\}; \\ \mu_2(x, G) &= 0, \text{ если } x \in \bar{\Gamma}_2 \text{ или } x \in \Gamma_1, M(x, G) = \emptyset; \\ \mu_3(x, G) &= c(x) \int_G \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}}; \\ \mu(x, G) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i(x, G). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\mu(x, \overline{Q}) = b(x) + \sum_{s=1}^{\infty} b_s(x) + c(x) \int_Q \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \quad (x \in \partial Q).$$

Пусть выполнены условия 4.1, 4.2, а также одно из условий 4.3, 4.4 или 4.5. Обозначим $\gamma(x) = 1 - \mu(x, \overline{Q})$. Тогда нелокальные условия (4.3) примут вид (4.2), при этом в силу условия 4.2 $\gamma(x) \geq 0$ ($x \in \partial Q$).

Покажем, что для меры $\mu(x, \cdot)$ выполняются условия 3.1–3.4 при $k = 0$ и условие 2.2. Если справедливо одно из условий 4.3, 4.4 или 4.5, то $N_\mu = \overline{\Gamma}_2$ и $\Gamma_\mu = \Gamma_1$, $N_\mu = \overline{\Gamma}_2$ и $\Gamma_\mu = \Gamma_1$ или $N_\mu = \overline{\Gamma}_2 \cup \omega(K_1)$ и $\Gamma_\mu = \Gamma_1 \setminus \omega(K_1)$ соответственно.

Условие 3.1 следует из того, что $\gamma_0(x) = \gamma(x) + \mu(x, \overline{Q}) \equiv 1$ ($x \in \partial Q$). Справедливость условий 2.2, 2.4, 2.5 устанавливается аналогично примеру 4.1. Справедливость одного из условий 4.3, 4.4 или 4.5 влечет за собой ограниченность оператора $B_1: C_\mu^\sigma(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu^\sigma(\partial Q)$, определенного по формуле (2.2). Таким образом, условие 3.2 выполняется при $k = 0$.

Введем операторы $B_{2\delta}^1, B_{2\delta}^2$ по формулам

$$B_{2\delta}^1 u(x) = \begin{cases} \sum_{s>1/\sigma} b_s(x) u(\omega_s(x)) & (x \in \Gamma_1), \\ 0 & (x \in \overline{\Gamma}_2), \end{cases}$$

$$B_{2\delta}^2 u(x) = \begin{cases} \sum_{s \leq 1/\sigma} b_s(x) u(\omega_s(x)) & (x \in \Gamma_1), \\ 0 & (x \in \overline{\Gamma}_2). \end{cases}$$

Очевидно, операторы $B_{2\delta}^1, B_{2\delta}^2$ можно записать в виде (2.3), (2.4). Поскольку $b_s \in C^\sigma(\partial Q)$ и $b_s(x) = 0$ ($x \in \Gamma_2$), из условия 4.9 следует, что операторы $B_{2\delta}^1: C^\sigma(\overline{\Gamma}_\mu^\delta) \rightarrow C_\mu^\sigma(\partial Q)$ и $B_{2\delta}^2: C^\sigma(\overline{Q} \setminus \Gamma_\mu^\delta) \rightarrow C_\mu^\sigma(\partial Q)$ ограничены и $\|B_{2\delta}^1\|_\sigma \leq c_1(\delta), \|B_{2\delta}^2\|_\sigma \leq c_2$, где $c_1(\delta) = \sum_{s>1/\sigma} \|b_s\|_{C^\sigma(\overline{\Gamma}_1)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $c_2 = \sum_{s=1}^\infty \|b_s\|_{C^\sigma(\overline{\Gamma}_1)}$. Таким образом, условие 3.3 выполняется при $k = 0$.

Обозначим

$$B_3 u(x) = c(x) \int_Q \frac{u(y) dy}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

Поскольку $c \in C^\sigma(\partial Q)$ и $c(x) = 0$ ($x \in \Gamma_2$), по теореме 12.11 из [17], если $0 < \sigma < \alpha$, оператор $B_3: C(\overline{Q}) \rightarrow C_\mu^\sigma(\partial Q)$ ограниченный. Следовательно, условие 3.4 выполняется при $k = 0$ и $0 < \sigma < \alpha$.

Таким образом, если оператор A удовлетворяет условиям 1.4 и 1.5 при $k = 0$, а нелокальные условия (4.3) удовлетворяют условиям 4.1, 4.2, 4.9 и одному из условий 4.3–4.5, то для интегро-дифференциального оператора $\mathcal{A}_B$ справедливо заключение теоремы 3.4. Более того, в силу теоремы 3.5 оператор $\overline{A}_B$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\overline{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_B .

Примеры нелокальных условий вида (2.1), для которых нарушаются некоторые из рассмотренных выше предположений о мере $\mu(x, \cdot)$, содержатся в работе [12].

В частности, там построен пример меры $\mu(x, \cdot)$ такой, что $\text{spt } \mu(x, \cdot) \subset \partial Q$ и оператор $\overline{A}_B$ не является генератором полугруппы Феллера.

В заключение отметим некоторые задачи, являющиеся пока нерешенными.

1. Исследовать существование полугрупп Феллера в случае, когда нарушаются как условия 2.4, 2.5, так и условие 2.8. Модельной задачей в этом случае может служить пример 4.2, в котором вместо условия 4.8 предполагается, что $b(x) = 1$ ($x \in K_1$).

2. Исследовать существование полугрупп Феллера для сингулярных мер $m(x, \cdot)$ в интегро-дифференциальном операторе, удовлетворяющих предположениям [16, гл. 3] и с нелокальными условиями вида (2.1).

3. Исследовать случай смешанных краевых условий с нелокальными членами.

Авторы выражают благодарность А.К. Гущину за обсуждение работы и ряд ценных советов.

Список литературы

1. Feller W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. of Math. 1952. V. 55. №3. P. 468–519.
2. Feller W. Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. №1. P. 1–31.
3. Вентцель А. Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1959. Т. 4. №2. С. 172–185.
4. Sato K., Ueno T. Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary // J. Math. Kyoto Univ. 1965. V. 4. №3. P. 529–605.
5. Bony J. M., Courrege P., Priouret P. Semigroupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégrо-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1968. V. 18. №2. P. 369–521.
6. Cancelier C. Problèmes aux limites pseudo-différentiels donnant lieu au principe du maximum // Comm. Partial Differential Equations. 1986. V. 11 (15). P. 1677–1726.
7. Taira K. Diffusion Processes and Partial Differential Equations. London: Academic Press, 1988.
8. Taira K. On the existence of Feller semigroups with boundary conditions // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 99. №475. P. 1–65.
9. Ishikawa Y. A remark on the existence of a diffusion process with non-local boundary conditions // J. Math. Soc. Japan. 1990. V. 42. №1. P. 171–184.
10. Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. №2. С. 287–292.
11. Скубачевский А. Л. О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов // Докл. АН. 1995. Т. 341. №2. С. 173–176.
12. Skubachevskii A. L. Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes // Russian Journal of Mathematical Physics. 1995. V. 3. №3. P. 327–360.
13. Галатов Е. И. О достаточных условиях существования полугрупп Феллера // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №3. С. 442–444.
14. Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). №2. С. 279–302.
15. Skubachevskii A. L. On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 160. №2. P. 323–341.
16. Bensoussan A., Lions J. L. Impulse Control and Quasi-variational Inequalities. Paris: Gauthier-Villars, 1984.
17. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.

18. *Гуцин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
19. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
20. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1971.

Московский государственный
авиационный институт

Поступила в редакцию
11.02.1997