Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, Пример конечно определенной аменабельной группы, не принадлежащей классу EG , *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 1, 79–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:36:43

УДК 512

Р. И. Григорчук

Пример конечно определенной аменабельной группы, не принадлежащей классу EG

В работе построен пример конечно определенной аменабельной группы, не принадлежащей классу EG элементарных аменабельных групп. Тем самым, дано решение проблемы М. Дэя в классе конечно определенных групп.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

В 1923 году С. Банах доказал существование на окружности конечно-аддитивной инвариантной меры, определенной на сигма алгебре всех подмножеств, а также определил обобщенный предел $\lim_{n \rightarrow \infty}$ ограниченной последовательности чисел, который обладает основными свойствами обычного предела [1].

Ставя целью обобщить эти результаты, а также вскрыть природу утверждения, известного под названием парадокса Хаусдорфа–Банаха–Тарского, фон Нейман в 1929 году в [2] ввел понятие инвариантного среднего на полугруппе и связанное с ним понятие аменабельной полугруппы.

После работы фон Неймана теория инвариантных средних на группах и полугруппах получила значительное развитие [3]–[7], а понятие аменабельности проникло во многие разделы математики, такие, например, как теория операторных алгебр, эргодическая теория или геометрия, и играет в них заметную роль (см., например, [8], [9] и цитированную там литературу).

Одна из основных задач теории инвариантных средних состоит в том, чтобы понять устройство класса аменабельных групп.

Были найдены разнообразные критерии аменабельности группы, среди которых отметим критерии Тарского, Фелнера, Дэя и Кестена. Вместе с тем существуют примеры групп, для которых не удается применить ни один из них. Такой, например, является группа Р. Томпсона

$$\begin{aligned} F &= \langle x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \mid x_n^{x_i} = x_{n+1}, i < n, n = 1, 2, \dots \rangle \\ &\simeq \langle x_0, x_1 \mid [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-1} x_1 x_0] = [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-2} x_1 x_0^2] = 1 \rangle. \end{aligned}$$

У исследователей была (а у кого-то может быть и есть) надежда на то, что класс AG аменабельных групп можно описать способом, аналогичным одному

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00713) и INTAS (грант № 94-3420).

из применяемых в теории групп, например, подобно определению классов Куроша–Черникова [10]. Одна из таких попыток принадлежит М. Дэю и заключается в следующем.

Как отметил в [2] фон Нейман, конечные и коммутативные группы аменабельны и класс AG замкнут относительно операций перехода к подгруппе, факторгруппе, группового расширения и направленного по включению объединения.

Следуя Дэю [11], обозначим через EG наименьший класс групп, содержащий конечные и коммутативные группы и замкнутый относительно перечисленных выше операций. Группы из EG называются *элементарными* (аменабельными) группами.

Долгое время группы из EG составляли единственно известный класс примеров аменабельных групп, что послужило основанием Дэю в [11] поставить вопрос о совпадении классов AG и EG .

Класс EG может быть определен также с помощью трансфинитной индукции как объединение $\bigcup_{\alpha} EG_{\alpha}$, где α пробегает множество ординалов, EG_0 есть множество конечных и коммутативных групп, $EG_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} EG_{\beta}$, если α есть предельный ординал и $EG_{\alpha+1}$ определяется как множество, состоящее из групп, полученных из элементов класса EG_{α} перечисленными выше операциями (обе группы, участвующие в расширении, должны быть из класса EG_{α}) [12]. Как нетрудно видеть, в данном выше описании достаточно пользоваться только операциями расширения и объединения. Это связано с тем обстоятельством, что класс конечных и коммутативных групп замкнут относительно операций перехода к подгруппе и факторгруппе.

Отрицательное решение проблемы Дэя было получено автором в [13], [14] как следствие решения проблемы Милнора [15] о существовании групп промежуточного роста.

После этого возник естественный вопрос о существовании неэлементарных аменабельных групп в классе конечно определенных групп. В последнее время интерес к этому вопросу заметно возрос [16]. Цель данной работы – доказать следующее утверждение, положительно решающее указанную проблему.

ТЕОРЕМА 1. *Группа*

$$\begin{aligned} \overline{G} = \langle a, c, d, t \mid a^2 = c^2 = d^2 = (ad)^4 = (adacac)^4 = 1, \\ t^{-1}at = aca, t^{-1}ct = dc, t^{-1}dt = c \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

обладает следующими свойствами.

- i) *Она аменабельна, но не принадлежит классу EG .*
- ii) *Она является HNN-расширением 3-порожденной 2-группы G промежуточного роста, построенной в [17] и, следовательно, содержит ее в качестве подгруппы.*
- iii) *$\overline{G}$ есть расширение 2-группы с помощью циклической группы.*

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированных утверждений. Основным из них является первое утверждение, решающее проблему Дэя в классе конечно определенных групп.

Свойство конечно определенной группы содержать подгруппу промежуточного роста, безусловно, представляет интерес. Возможность вложения рекурсивно представимых групп промежуточного роста (а группа G из [17] именно такова) в конечно определенную группу следует из известной теоремы Хигмана о вложении. В пункте ii) теоремы сказано, что в качестве объемлющей группы для G может быть взята группа $\overline{G}$, являющаяся к тому же ее HNN-расширением.

Наконец, утверждение iii) также представляет интерес, ибо, как сообщил мне Р. Биери (R. Bieri), ранее не было известно примеров бесконечных конечно определенных групп, являющихся расширением периодической группы с помощью циклической, но не почти циклических.

Задание (1) допускает дальнейшее упрощение. Легко видеть, что G порождается элементами a, t . Как заметил Л. Бартольд, относительно этой системы порождающих G имеет всего четыре соотношения.

Группа $\overline{G}$ обладает рядом других интересных свойств. Например, любая истинная факторгруппа $\overline{G}$ является циклической и в $\overline{G}$ не выполнено ни одно нетривиальное тождество. Кроме того, $\overline{G}$ не содержит подгрупп, изоморфных группам Баумслэга–Солитера $\langle x, y \mid x^{-1}y^kx = y^l \rangle$, $k, l \neq 0$.

Вопрос о существовании конечно определенных не гиперболических групп с указанным свойством до недавнего времени был актуальным вопросом геометрической теории групп. Пример группы $\overline{G}$ дает положительный ответ на этот вопрос. Другим примером группы с указанным свойством является недавний пример Н. Брэди конечно определенной не гиперболической подгруппы гиперболической группы. Заметим, что в отличие от группы Н. Брэди, группа $\overline{G}$ не вложима ни в какую гиперболическую группу.

Как ясно из формулировки теоремы, при ее доказательстве важную роль играет 2-группа промежуточного роста G , построенная в [17] как пример периодической группы и более подробно исследованная в [14] и ряде других работ различных авторов. Помимо свойства иметь промежуточный рост (сформулированная в §2 теорема 2), для наших целей важным будет факт существования для группы G задания с помощью образующих элементов и определяющих соотношений, найденного И. Г. Лысёнком в [18] и приведенного в §2 в формулировке теоремы 3.

С целью сделать доказательство основного утверждения независимым от других источников мы включили в текст доказательства теорем 2 и 3. Следует отметить, что приведенное в [14] доказательство того факта, что G имеет промежуточный рост, усложнено тем, что оно дано одновременно для континуальной серии групп, включающей в себя G . Приведенное ниже доказательство теоремы 2 элементарно и занимает всего несколько страниц.

Предложенное нами доказательство теоремы 3 является более коротким и прозрачным, нежели приведенное в [18].

Сформулируем два открытых вопроса. С этой целью обозначим через SG класс субэкспоненциально аменабельных групп, т.е. наименьший класс групп, содержащий группы субэкспоненциального роста (определение см. в §2) и замкнутый относительно операций расширения и объединения, использованных при определении класса EG .

Вопрос 1. Верно ли, что имеет место равенство $SG = AG$?

Как заметил в середине 80-х годов А. М. Стёпин (опубликовано только в 1996 году в [19]), существование неэлементарных аменабельных групп вытекает из конструкции работы [14] и без привлечения аргументов роста, если воспользоваться категорными соображениями, применив их к множеству групп с фиксированным числом образующих, снабженному специальной топологией.

Компактная вполне несвязная топология в пространстве групп с фиксированным числом образующих (будем называть ее *локальной*) была определена и использована в [14] для доказательства ряда утверждений алгебраического характера.

Идея рассмотрения такой топологии была подсказана автору исследованиями А. М. Стёпина по аппроксимации групповых действий, которые он проводил в 70-х годах, а также работой Громова [20]. Метод аппроксимации групповых действий играет также существенную роль в работе [19], результаты которой логически подводят к следующему вопросу.

Обозначим через $AG^{(k)}$ подмножество в пространстве $X^{(k)}$ k -порожденных групп, снабженном указанной выше топологией, состоящее из аменабельных групп. Пусть $\overline{EG}$ – наименьший класс групп, содержащий элементарные группы и замкнутый относительно локальной топологии и операций перехода к подгруппе и факторгруппе, расширений и индуктивного перехода и $\overline{EG}^{(k)} = \overline{EG} \cap X^{(k)}$.

ГИПОТЕЗА (А. М. Стёпин). Для каждого $k \geq 2$ имеет место включение $AG^{(k)} \subset \overline{EG}^{(k)}$.

Автор выражает искреннюю благодарность А. М. Стёпину, который в 1974 г. привлек его внимание к проблематике аменабельных групп, а также внимательно прочитал рукопись статьи и сделал ряд конструктивных предложений, которые были учтены.

Выражаю также благодарность И. Г. Лысёнку и П. де ля Харпу за несколько полезных замечаний.

§ 2. Определение и некоторые свойства группы G

Группа G может быть определена многими способами, в частности, как подгруппа группы автоморфизмов бинарного дерева.

Здесь мы определяем ее, следуя первоначальной работе [17], а именно, как группу относительно операции суперпозиции, порожденную четырьмя преобразованиями a, b, c, d множества $\Delta = (0, 1) \setminus \{m \cdot 2^{-n} \mid 0 \leq m \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}$, причем порождающие a, b, c, d определены как указано на рис. 1, где символ P , написанный над интервалом, означает, что соответствующее преобразование действует на этом интервале как перестановка его половинок, а буква I обозначает тождественное преобразование (здесь и ниже предполагается, что из всех рассматриваемых интервалов удалены двоично рациональные точки).

При определении преобразований b, c, d интервал Δ разбит в объединение подынтервалов

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cup \dots \cup \left(\frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right) \cup \dots,$$

Рис. 1

и последовательности символов, написанные над этими интервалами, составляют периодические последовательности

$$\begin{array}{cccccccc} P & P & I & P & P & I & \dots \\ P & I & P & P & I & P & \dots \\ I & P & P & I & P & P & \dots \end{array}$$

Из этого определения сразу видно, что порождающие a, b, c, d имеют порядок 2, элементы b, c, d коммутируют между собой и составляют в совокупности с единичным элементом группу, изоморфную группе Клейна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. В частности, выполнено соотношение $bcd = 1$ и произведение любых двух элементов множества $\{b, c, d\}$ равно третьему элементу.

Приведенными выше соотношениями не исчерпываются все соотношения группы G (например, в G также имеют место соотношения $1 = (ad)^4 = (ac)^8 = (ab)^{16} = \dots$; см. §4) и на самом деле G не является конечно определенной [14].

Заметим также, что минимальное число порождающих G равно 3 (например, $G = \text{gr}\{a, c, d\}$), однако нам будет удобно использовать все четыре порождающие a, b, c, d .

Обозначим через $\xi_n = \{\Delta_{i_1 \dots i_n}\}$, $i_1, \dots, i_n = 0, 1$ разбиение интервала Δ на 2^n равных подынтервала, закодированных естественным образом кортежами двоичных символов. Элементы разбиения ξ_n будем называть двоичными интервалами ранга n .

Напомним, что группа называется *хопфовой*, если она не изоморфна своей истинной факторгруппе. Группа называется *кохопфовой*, если всякий ее мономорфизм в себя является эпиморфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Группа G является хопфовой, но не кохопфовой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый элемент $g \in G$ индуцирует перестановку g_n атомов разбиения ξ_n (т.е. элемент симметрической группы Σ_{2^n}). Это определяет эпиморфизм $G \rightarrow G^{(n)}$, $g \mapsto g_n$ на конечную 2-группу $G^{(n)} < \Sigma_{2^n}$, порожденную подстановками a_n, b_n, c_n, d_n .

Если $g \in G$, $g \neq 1$, то найдется n такое, что g_n действует на атомах ξ_n не тождественным образом. Это означает, что последовательность $\{G^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ аппроксимирует группу G .

Хопфовость G теперь вытекает из хорошо известной теоремы А.И. Мальцева [21, теорема III.8], утверждающей, что конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа хопфова.

Остальная часть утверждения предложения 1 есть сформулированное и доказанное ниже следствие 5.

Обозначим через H подгруппу G индекса 2, состоящую из элементов, переводящих атомы разбиения $\xi_1 = \{\Delta_0, \Delta_1\}$ в себя. Другими словами, H состоит из элементов, представимых словами над алфавитом a, b, c, d с четным числом вхождений буквы a . Так как $G/H \simeq \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$, то H порождается элементами b, c, d, aba, aca, ada (в действительности достаточно четырех порождающих c, d, aca, ada).

Если сузить действие элемента b на Δ_0 и гомотетично растянуть Δ_0 до размеров Δ , то сужение $b|_{\Delta_0}$ действия b на интервал Δ_0 выглядит как преобразование a . Аналогично, $b|_{\Delta_1}$ выглядит как преобразование c . Это замечание, распространенное на остальные образующие группы H , показывает, что сужения $H|_{\Delta_0}, H|_{\Delta_1}$ действия H на подынтервалы Δ_0, Δ_1 индуцируют гомоморфизмы $\varphi_i: H \rightarrow G$, $i = 0, 1$, определяемые следующими подстановками

$$\varphi_0 := \begin{cases} b \rightarrow a, & aba \rightarrow c, \\ c \rightarrow a, & aca \rightarrow d, \\ d \rightarrow 1, & ada \rightarrow b. \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi_1 := \begin{cases} b \rightarrow c, & aba \rightarrow a, \\ c \rightarrow d, & aca \rightarrow a, \\ d \rightarrow b, & ada \rightarrow 1. \end{cases} \quad (3)$$

Гомоморфизм $\psi = \varphi_0 \times \varphi_1: H \rightarrow G \times G$ является мономорфизмом, ибо для $g \in H$

$$g = 1 \iff (g|_{\Delta_0} = 1) \& (g|_{\Delta_1} = 1).$$

Составим таблицу действия ψ на порождающие группы H :

$$\psi := \begin{cases} b \rightarrow (a, c), & aba \rightarrow (c, a), \\ c \rightarrow (a, d), & aca \rightarrow (d, a), \\ d \rightarrow (1, b), & ada \rightarrow (b, 1). \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $\pi_i: G \times G \rightarrow G$, $i = 0, 1$, есть проекция на первый, соответственно, второй сомножитель. Очевидно, $\varphi_i = \pi_i \psi$, $i = 0, 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Образ $\psi(H)$ является подпрямым произведением в $G \times G$, т.е. $\pi_i \psi(H) = G$, $i = 0, 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из (4), ибо в ψ -образах, порождающих H , присутствуют все порождающие группы G как в первом сомножителе, так и во втором.

СЛЕДСТВИЕ 1. *G является бесконечной группой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [17] доказано, что G является 2-группой. Этот факт будет использован ниже при доказательстве п. iii) теоремы 1. Мы не воспроизводим здесь его доказательство, отсылая читателя к заметке [17], в которой приведено короткое доказательство этого утверждения.

Прежде чем сформулировать теорему 2, напомним ряд определений.

Пусть L есть произвольная конечно порожденная группа с конечной системой порождающих A . Тогда определены функция длины $\partial(g)$, $g \in L$, относительно системы порождающих A и функция роста группы L :

$$\gamma(n) = \#\{g \in L : \partial(g) \leq n\},$$

где знак $\#$ обозначает мощность соответствующего множества.

Группа L называется группой *субэкспоненциального роста*, если

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma(n)} = 1$$

(предел существует ввиду полумультимпликативности функции $\gamma(n)$), и L называется группой *экспоненциального роста*, если $\lambda > 1$.

Группа L называется группой *полиномиального роста*, если существуют положительные константы C и d такие, что $\gamma(n) \leq Cn^d$, $n \in \mathbb{N}$.

Наконец, если L имеет субэкспоненциальный рост, но он выше полиномиального, то группа L обладает промежуточным ростом. Заметим, что приведенные определения не зависят от выбора системы порождающих.

ТЕОРЕМА 2. *Группа G имеет промежуточный рост.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [14] доказано, что функция роста группы G допускает оценки

$$e^{\sqrt{n}} \preceq \gamma(n) \preceq e^{n^\alpha},$$

где $\alpha = \log_{32} 31$, а неравенство $\gamma_1(n) \preceq \gamma_2(n)$ означает существование константы $C \in \mathbb{N}$ такой, что $\gamma_1(n) \leq \gamma_2(Cn)$, $n \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Группа G является аменабельной.*

В [22] впервые было доказано, что группа субэкспоненциального роста является аменабельной.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Группа G не принадлежит классу EG .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из результатов работы [12], где доказано, что каждая конечно порожденная группа из EG либо является почти нильпотентной и, следовательно, в силу теоремы Громова [20] обладает полиномиальным ростом, либо имеет экспоненциальный рост.

Наконец, сформулируем результат И. Г. Лысёнка. Определим подстановку σ на множестве слов над алфавитом $\{a, b, c, d\}$:

$$\sigma : \begin{cases} a \rightarrow asa, \\ b \rightarrow d, \\ c \rightarrow b, \\ d \rightarrow c. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3 [18]. *Группа G обладает следующим заданием с помощью порождающих и соотношений:*

$$G \simeq \langle a, b, c, d \mid 1 = a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = \sigma^n((ad)^4) = \sigma^n((adacac)^4), n \geq 0 \rangle. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Подстановка σ определяет эндоморфизм группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо проверить, что образы определяющих слов при отображении σ суть слова, представляющие элемент в G .

В силу специфики соотношений из представления (5) достаточно осуществить проверку для первых пяти определяющих слов. Имеем следующие соотношения в G :

$$\begin{aligned} \sigma(a^2) &= ac^2a = 1, \\ \sigma(b^2) &= d^2 = 1, \\ \sigma(c^2) &= b^2 = 1, \\ \sigma(d^2) &= c^2 = 1, \\ \sigma(bcd) &= dbc = 1. \end{aligned}$$

Эндоморфизм, определенный подстановкой σ , также будем обозначать σ .

ЛЕММА 1. *σ является мономорфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подгруппа $\sigma(G) < G$ порождена элементами aca, b, c, d , поэтому имеет место включение $\sigma(G) < H$.

В силу соотношений

$$\begin{aligned} \psi(aca) &= (d, a), \\ \psi(b) &= (a, c), \\ \psi(c) &= (a, d), \\ \psi(d) &= (1, b) \end{aligned} \quad (6)$$

выполнено равенство $\pi_1\psi\sigma(G) = G$, причем гомоморфизм $\pi_1\psi\sigma: G \rightarrow G$ является тождественным. Следовательно, $\text{Ker } \sigma = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Группа G не является кохопфовой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ $\sigma(G)$ эндоморфизма σ является собственной подгруппой в G , так как $\sigma(G) < H$.

§ 3. Доказательство основного утверждения

Пусть G_* есть группа, определенная как HNN-расширение

$$\begin{aligned} G_* &= \langle G, t \mid t^{-1}Gt = \sigma(G) \rangle \\ &= \langle a, b, c, d, t \mid \text{соотношения группы } G, \\ &\quad t^{-1}at = aca, t^{-1}bt = d, t^{-1}ct = b, t^{-1}dt = c \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

ЛЕММА 2. *Группа G_* изоморфна группе $\overline{G}$ относительно отображения $a \mapsto a, c \mapsto c, d \mapsto d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения группы G вида $\sigma^n((ad)^4) = 1$, $\sigma^n((adacac)^4) = 1$, $n \geq 1$, являются следствиями соотношений $(ad)^4 = 1$, $(adacac)^4 = 1$ и последних четырех соотношений из задания (7). Действительно, $\sigma^n((ad)^4) = t^{-n}(ad)^4t^n = 1$, если $(ad)^4 = 1$ и $n \geq 0$, и аналогично для второй серии соотношений. Следовательно, они могут быть удалены, после чего задание (7) превращается в задание

$$\langle a, b, c, d, t \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = (ad)^4 = (adacac)^4, \\ t^{-1}at = aca, t^{-1}bt = d, t^{-1}ct = b, t^{-1}dt = c \rangle.$$

Используя преобразования Титце, преобразуем это задание к виду (1). Для этого удалим b (равный элементу dc) из системы порождающих. При этом соотношение $bcd = 1$ также удаляется, а соотношения $b^2 = 1$, $t^{-1}bt = d$, $t^{-1}ct = b$ заменяются соотношениями $(dc)^2 = 1$, $t^{-1}dct = d$, $t^{-1}ct = dc$.

Из соотношения $t^{-1}ct = dc$ и соотношений $c^2 = d^2 = 1$ следует, что $cd = t^{-1}c^{-1}t = t^{-1}ct = dc$ и, следовательно, соотношение $(dc)^2 = 1$ можно удалить. Кроме того, соотношение $t^{-1}dct = d$ является очевидным следствием соотношений $t^{-1}ct = dc$, $t^{-1}dt = c$, $c^2 = 1$, $d^2 = 1$. Удалив и это соотношение, приходим к заданию (1).

СЛЕДСТВИЕ 6. *Группа $\overline{G}$ не принадлежит классу EG .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, G_* содержит в качестве подгруппы базовую группу G HNN-расширения, которая в силу следствия 3 не принадлежит EG . Следовательно, и $G_* \notin EG$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Группа G_* является аменабельной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $N \triangleleft G_*$ нормальную подгруппу, состоящую из элементов $g \in G_*$, представимых словами

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n, \quad g_i \in G, \quad (8)$$

с нулевой суммой

$$\sigma_t(g) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

показателей у символа t . Тогда $G_*/N = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Для группы N выполнено соотношение $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} t^n G t^{-n}$, причем $\{t^n G t^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью групп. Действительно, то, что это возрастающая последовательность, следует из включения $t^{-1}Gt < G$. Кроме того, для любого элемента $g \in N$ найдется натуральное k такое, что $t^k g t^{-k} \in G$ (если g задано словом (8), то в качестве k можно взять $\sup_V \sigma_t(V)$, где V пробегает множество начал слова (8)).

Итак, N является объединением возрастающей цепочки групп, изоморфных группе G , откуда вытекает аменабельность N , а следовательно, и G_* , ибо объединение возрастающей последовательности аменабельных групп есть аменабельная группа, и расширение аменабельной группы с помощью аменабельной группы есть аменабельная группа.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как группа $\overline{G}$ изоморфна HNN-расширению, в котором одна из объединяющих групп является собственной подгруппой базовой группы, а другая нет, то $\overline{G}$ содержит свободную подполугруппу с двумя образующими и, следовательно, обладает экспоненциальным ростом.

Заметим, что остается открытым вопрос о существовании конечно определенных групп промежуточного роста.

§ 4. О проблеме равенства слов группы G

Проблема равенства слов группы G имеет положительное решение, что впервые было отмечено в [17]. Соответствующий алгоритм решает проблему равенства слов за время $\log_2 |w| + C$, где C — некоторая константа.

Мы переходим к описанию этого алгоритма, нужного как для задачи оценки функции роста, так и при нахождении системы определяющих соотношений G . Попутно мы докажем несколько утверждений, которые будут использованы в дальнейшем.

Так как в группе G выполнены соотношения $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1$, она является естественным гомоморфным образом группы

$$\Gamma = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

Очевидно, что проблема равенства в Γ разрешима алгоритмом, приводящим произвольное слово $w = w(a, b, c, d)$ (можно рассматривать слова только в положительном алфавите) к редуцированной форме $r(w)$, т.е. к слову, в котором нет подслов, являющихся квадратами символов a, b, c или d , и нет двух рядом стоящих букв из множества $\{b, c, d\}$. Тогда $w \stackrel{\Gamma}{=} 1$ в том и только том случае, когда $r(w)$ является пустым словом.

Редукция слова w осуществляется применением переписывающих правил вида

- (i) $x^2 \rightarrow 1$,
- (ii) $xy \rightarrow z$,

где $x, y, z \in \{b, c, d\}$ и в правилах второго вида x, y, z должны быть различными элементами.

Применения этих правил к словам (т.е. замены подслов вида x^2 и xy на 1 и z , соответственно) будем называть *элементарными сокращениями*.

Для произвольного слова $w = w(a, b, c, d)$ с четным числом вхождений буквы a определим переписывающие процессы φ_0 и φ_1 следующим образом.

Результат $\varphi_i(w)$ i -го переписывания, $i = 0, 1$, есть слово над алфавитом a, b, c, d , которое получается из w сопоставлением каждой букве b, c или d из w символа из алфавита $\{a, b, c, d\}$ согласно следующему правилу

$$\varphi_i: \begin{cases} b \rightarrow a \\ c \rightarrow a \\ d \rightarrow 1, \end{cases}$$

если данному вхождению символа в w предшествует четное при $i = 0$, соответственно нечетное при $i = 1$, число букв a . Аналогично,

$$\varphi_i: \begin{cases} b \rightarrow c \\ c \rightarrow d \\ d \rightarrow b, \end{cases}$$

если данному вхождению символа в w предшествует нечетное при $i = 0$, соответственно четное при $i = 1$ число букв a .

Сопоставляя это определение с определением гомоморфизмов $\varphi_i: H \rightarrow G$, $i = 0, 1$, мы видим, что если $g \stackrel{G}{=} w$ и $g \in H$, то $\varphi_i(g) \stackrel{G}{=} \varphi_i(w)$, $i = 0, 1$.

Условимся через $|w|_u$ обозначать число вхождений буквы u в слово w , а через $|w|_{u,v}$ — суммарное число вхождений символов u, v в w .

ЛЕММА 3. *Предположим, что $w = w(a, b, c, d)$ — редуцированное слово, и $|w|_a$ четно. Пусть $w_i = \varphi_i(w)$, $i = 0, 1$. Тогда*

$$|w_i| \leq \frac{|w| + 1}{2}, \quad i = 0, 1.$$

Если w начинается символом a и заканчивается символом из множества $\{b, c, d\}$ или наоборот, то

$$|w_i| \leq \frac{|w|}{2}, \quad i = 0, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $|w_i|$ не превосходит числа букв из множества $\{b, c, d\}$, входящих в w , а оно в силу редуцированности w не превосходит $(|w| + 1)/2$. Второе неравенство также очевидно.

Обозначим через $\partial(g)$ длину элемента $g \in G$ относительно системы порождающих a, b, c, d .

ЛЕММА 4. *Пусть $g \in G$ и $\varphi_i(g) = g_i$, $i = 0, 1$. Тогда*

$$\partial(g_i) \leq \frac{\partial(g) + 1}{2}, \quad i = 0, 1.$$

Если при этом элемент g не сопряжен элементу меньшей длины, то

$$\partial(g_i) \leq \frac{\partial(g)}{2}.$$

Это утверждение является следствием предыдущего, если в качестве слова w рассмотреть кратчайшее слово, представляющее элемент g .

Так как гомоморфизм $\psi = \varphi_0 \times \varphi_1: H \rightarrow G \times G$ взаимно однозначен, то имеет место эквивалентность

$$w \stackrel{G}{=} 1 \iff |w|_a \text{ четно и } \varphi_i(w) \stackrel{G}{=} 1, \quad i = 0, 1.$$

В силу леммы 3 переписывающие процессы φ_0, φ_1 уменьшают длину редуцированных слов. Отсюда вытекает следующий алгоритм, решающий проблему слов в G .

АЛГОРИТМ. Для проверки равенства $w(a, b, c, d) \stackrel{G}{=} 1$ поступаем следующим образом:

1. Вычисляем $|w|_a$. Если $|w|_a$ нечетно, то $w \neq 1$. Если же $|w|_a$ четно, редуцируем w (т.е. вычисляем $r(w)$). Если $r(w) = \emptyset$, то $w \stackrel{G}{=} 1$. Если $r(w) \neq \emptyset$, но $|r(w)| = 1$, то $w \neq 1$. Если же $|r(w)| > 1$, то переходим к п. 2.
2. Вычисляем $w_i = \varphi_i(r(w))$, $i = 0, 1$, и возвращаемся к п. 1, но проверяем теперь справедливость двух соотношений $w_i = 1$, $i = 0, 1$.

Описанный алгоритм можно наглядно представить себе в виде ветвящегося переписывающего процесса, схематически изображенного бинарным деревом (рис. 2).

Рис. 2

При этом равенство $w \stackrel{G}{=} 1$ имеет место в том и только том случае, если существует n , при котором все слова $w_{i_1 \dots i_n}$, $i_1, \dots, i_n = 0, 1$, пустые. Наименьшее такое n будем называть глубиной слова w , определяющего единичный элемент.

ПРИМЕР. Проиллюстрируем графически (рис. 3) работу алгоритма на примере проверки соотношений $(ad)^4 = 1$, $(ac)^8 = 1$, $(ab)^{16} = 1$, которыми мы воспользуемся в §6. Заметим, однако, что $(ad)^2 \neq 1$ в G .

Пусть $G = \Gamma/\Omega$, где $\Omega < \Gamma$ — нормальная подгруппа (очевидно, такая подгруппа существует). Обозначим через $\Omega_n < \Gamma$, $n = 0, 1, \dots$, подгруппу, состоящую из элементов, представимых словами $w \stackrel{\Gamma}{=} 1$ глубины $\leq n$. Подгруппы Ω_n могут быть определены индуктивно: $\Omega_0 = 1$ и

$$\Omega_n = \{g \in \Gamma : \varphi_i(g) \in \Omega_{n-1}, i = 0, 1\},$$

где $\varphi_i: \Xi \rightarrow \Gamma \times \Gamma$ — гомоморфизмы, определенные подстановками (2), (3), а Ξ — подгруппа индекса 2 в Γ , порожденная элементами b, c, d, aba, aca, ada .

ЛЕММА 5. Для любого $n \geq 0$ подгруппа Ω_n нормальна в Γ .

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n , причем проверка базы индукции тривиальна.

Если Ω_n нормальна в Γ и $g \in \Omega_{n+1}$, $g_i = \varphi_i(g)$, $i = 0, 1$, то

$$\varphi_0(bgb) = ag_0a \in \Omega_n,$$

$$\varphi_1(bgb) = cg_1c \in \Omega_n,$$

так как $g_i \in \Omega_n$, $i = 0, 1$, и Ω_n нормальна. Аналогично для сопряжений символами c и d .

Кроме того,

$$\varphi_0(aga) = g_1 \in \Omega_n,$$

$$\varphi_1(aga) = g_0 \in \Omega_n,$$

что и доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ 7. $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$, где $\{\Omega_n\}$ – возрастающая последовательность нормальных в Γ подгрупп.

В [14] доказано, что $\{\Omega_n\}$ есть строго возрастающая последовательность, откуда следует, что группа G не является конечно определенной. В то же время, G рекурсивно представима, так как Ω есть рекурсивное подмножество в Γ , что вытекает из разрешимости проблемы равенства слов. Более того, система определяющих слов для G , найденная И. Г. Лысёнком, составляет язык над алфавитом $\{a, b, c, d\}$, являющийся DOL-системой [23].

§ 5. Оценка роста группы G

Обозначим через $\sim$ отношение эквивалентности на множестве функций натурального аргумента: $\gamma_1(n) \sim \gamma_2(n) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}$ такое, что $\gamma_1(n) \leq \gamma_2(cn)$, $\gamma_2(n) \leq \gamma_1(cn)$, $n \in \mathbb{N}$.

Легко видеть, что функции роста фиксированной конечно порожденной группы, построенные по разным системам образующих, эквивалентны.

Напомним, что ранее нами также было введено отношение предпорядка:

$$\gamma_1(n) \preceq \gamma_2(n) \iff \exists c \in \mathbb{N}, \gamma_1(n) \leq \gamma_2(cn), n \in \mathbb{N}.$$

Введем в рассмотрение группы $B = \langle b \rangle_G^\#$ (нормальное замыкание элемента b в G), $D = \langle a, d \rangle_G$ (подгруппа, порожденная элементами a, d в G), $D_0 = \langle \langle a, d \rangle, \langle d, a \rangle \rangle_{G \times G}$, $D_* = \langle (1, a), (1, d) \rangle_{G \times G}$. Все они изоморфны группе диэдра порядка 8.

ЛЕММА 6. *Подгруппа $\psi(H) < G \times G$ совпадает с полупрямым произведением $(B \times B) \cdot D_0$, причем подгруппа D_* является дополнительной к ней и, следовательно, $[(G \times G) : \psi(H)] = 8$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факторизуя G по B , получаем группу, порожденную образами элементов a и d , а значит, $[G : B] \leq 8$. Несложная проверка показывает, что $[G^{(3)} : B^{(3)}] = 8$, где $B^{(3)}$ есть образ B при каноническом гомоморфизме $G \rightarrow G^{(3)}$ на конечную группу перестановок атомов разбиения ξ_3 . Это приводит к равенству $[G : B] = 8$, а также равенству $G = B \cdot D$, причем последнее произведение является полупрямым. Следовательно, пересечения $B \cap D$ и $(B \times B) \cap D_0$ тривиальны.

Группа $\psi(H)$ содержит подгруппы $B \times B$ и D_0 , а значит, и полупрямое произведение $(B \times B) \cdot D_0$. Так как $[G : B] = 8$ и $|D_0| = 8$, то $[(G \times G) : \psi(H)] = 8$.

Переходя от группы G к факторгруппе $G^{(3)}$ убеждаемся, что пересечение подгруппы в $G^{(3)} \times G^{(3)}$, порожденной элементами (a, d) , (d, a) , $(1, b)$, $(b, 1)$, с подгруппой, порожденной элементами $(1, a)$, $(1, d)$, тривиально. Значит, D_* является дополнительной к $\psi(H)$ группой в $G \times G$.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Группа G соизмерима своему квадрату (т.е. группы G и $G \times G$ содержат изоморфные подгруппы конечного индекса).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существует константа $\alpha > 0$ такая, что $\gamma(n) \succeq e^{n^\alpha}$, где $\gamma(n)$ обозначает функцию роста группы G . Тем самым, рост G выше полиномиального.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция роста группы $G \times G$ эквивалентна функции $\gamma^2(n)$. Так как функции роста конечно порожденной группы и ее подгруппы конечного индекса эквивалентны, отсюда следует, что $\gamma(n) \sim \gamma^2(n)$.

Расширим $\gamma(n)$ до функции $\tilde{\gamma}(n)$ вещественного аргумента $n \geq 1$, положив $\tilde{\gamma}(n) = \gamma([n])$.

Существует константа $C > 1$ такая, что $\tilde{\gamma}^2(n) \leq \tilde{\gamma}(Cn)$. Так как $\gamma(1) = 4 > 1$, то

$$\gamma(n) \geq \tilde{\gamma}^2\left(\frac{n}{C}\right) \geq \tilde{\gamma}^{2^2}\left(\frac{n}{C^2}\right) \geq \dots \geq \gamma^{2^{[\log_2 n]}}(1) \sim 4^{n^{1/\beta}},$$

где число β определяется из соотношения $\beta = \log_2 C$. Таким образом, $\gamma(n) \succeq e^{n^{1/\beta}}$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [14] доказано, что в качестве C из предыдущего рассуждения может быть взято число 4. Тем самым, $\beta = 2$ и $\gamma(n) \succeq e^{\sqrt{n}}$. На самом деле верен общий факт: если конечно порожденная группа L аппроксимируется конечными p -группами (p – простое число) и $\gamma_L(n) \prec e^{\sqrt{n}}$ (неравенство строгое), то G почти нильпотента и, следовательно, имеет полиномиальный рост [24].

Свойство группы G иметь рост выше полиномиального следует также из ее свойства быть периодической группой, если воспользоваться теоремой Громова [20], утверждающей, что класс групп полиномиального роста совпадает с классом почти нильпотентных групп.

Перейдем к доказательству того, что G имеет субэкспоненциальный рост. С этой целью рассмотрим подгруппу $H^{(3)} < G$, состоящую из элементов, переводящих атомы разбиения ξ_3 в себя. $H^{(3)}$ есть ядро описанного в §2 гомоморфизма $G \rightarrow G^{(3)}$ на конечную группу и, следовательно, $[G : H^{(3)}] < \infty$.

Определим гомоморфизм

$$\begin{aligned} \psi^{(3)} : H^{(3)} &\rightarrow G \times G \times G \times G \times G \times G \times G \times G, \\ \psi^{(3)}(g) &= (g_{000}, \dots, g_{i_1 i_2 i_3}, \dots, g_{111}), \end{aligned} \quad (9)$$

где $g_{i_1 i_2 i_3} = \varphi_{i_3} \varphi_{i_2} \varphi_{i_1}(g)$, $i_1, i_2, i_3 = 0, 1$.

Суперпозиция $\varphi_{i_3} \circ \varphi_{i_2} \circ \varphi_{i_1}$ определяет гомоморфизм $H^{(3)} \rightarrow G$, полученный сужением действия группы $H^{(3)}$ на интервал $\triangle_{i_1 i_2 i_3}$. Поэтому $\psi^{(3)}(g) = 1 \Leftrightarrow g = 1$, т.е. гомоморфизм $\psi^{(3)}$ взаимно однозначен.

Основной при оценке сверху роста группы G является следующая

ЛЕММА 7. Пусть $g \in H^{(3)}$ и $\psi^{(3)}(g)$ есть набор элементов, определенный соотношением (9). Тогда

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=0,1} \partial(g_{i_1 i_2 i_3}) \leq \frac{3}{4} \partial(g) + 8. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = w(a, b, c, d)$ есть приведенное слово, представляющее элемент $g \in H^{(3)}$, и $|w| = \partial(g)$. Тогда

$$\frac{|w| - 1}{2} \leq |w|_b + |w|_c + |w|_d \leq \frac{|w| + 1}{2}.$$

Определим слова

$$\begin{aligned} w_{i_1} &= r(\varphi_{i_1}(w)), \\ w_{i_1 i_2} &= r(\varphi_{i_2}(w_{i_1})), \\ w_{i_1 i_2 i_3} &= r(\varphi_{i_3}(w_{i_1 i_2})), \end{aligned}$$

$i_1, i_2, i_3 = 0, 1$, где φ_i – переписывающие процессы, описанные в §3, а r , как и выше, обозначает редукцию.

Пусть $x = |w|_d$, а ξ равно общему числу элементарных сокращений типов (i), (ii), примененных при редуцировании слов $\varphi_0(w)$, $\varphi_1(w)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i_1} |w_{i_1}| &\leq |w| + 1 - x - \xi, \\ \sum_{i_1, i_2} |w_{i_1 i_2}|_{c,d} &\geq \frac{1}{2}|w| - 1 - x - 2\xi, \end{aligned}$$

что следует из определения переписывающих процессов φ_0 , φ_1 , а также из того факта, что каждое элементарное сокращение уменьшает длину слова не менее, чем на 1, но не более, чем на 2.

Введем обозначение: $y = \sum_{i_1, i_2} |w_{i_1 i_2}|_d$, и пусть η равно общему числу элементарных сокращений, примененных при редукции слов $\varphi_{i_2}(w_{i_1})$, $i_1, i_2 = 0, 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2} |w_{i_1 i_2}| &\leq |w| + 3 - x - y - \xi - \eta, \\ \sum_{i_1, i_2} |w_{i_1 i_2}|_d &\geq \frac{1}{2}|w| - 1 - x - y - 2\xi - 2\eta \end{aligned} \tag{11}$$

и поэтому

$$\sum_{i_1, i_2, i_3} |w_{i_1 i_2 i_3}|_{c,d} \leq |w| + 7 - x - y - \xi - \eta - \sum_{i_1, i_2} |w_{i_1 i_2}|_d \leq \frac{1}{2}|w| + 8 + \xi + \eta.$$

Если $\xi + \eta \leq \frac{1}{4}|w|$, то сразу же получаем оценку (10). Если же $\xi + \eta > \frac{1}{4}|w|$, то из (11) получаем, что

$$\sum_{i_1, i_2} |w_{i_1 i_2}| \leq \frac{3}{4}|w| + 3,$$

а следовательно,

$$\sum_{i_1, i_2, i_3} |w_{i_1 i_2 i_3}| \leq \frac{3}{4}|w| + 7.$$

Ввиду конечности индекса $[G : H^{(3)}]$ существует константа $C > 0$ такая, что

$$\gamma(n) \leq C \cdot \#\{g \in H^{(3)} : \partial(g) \leq n + C\}.$$

Отсюда и из оценки (10) вытекает неравенство

$$\gamma(n) \leq C \sum \gamma(n_1) \gamma(n_2) \cdots \gamma(n_8), \tag{12}$$

где суммирование в правой части ведется по тем наборам $(n_1, \dots, n_8)$ неотрицательных чисел, для которых

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_8 \leq \frac{3}{4}(n + C) + 8.$$

Пусть

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma(n)}$$

есть показатель роста группы G .

Для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ выполнены неравенства

$$(\lambda - \varepsilon)^n \leq \gamma(n) \leq (\lambda + \varepsilon)^n,$$

которые вместе с оценкой (10) приводят к неравенству

$$\gamma(n) \leq C \left[\frac{3}{4}(n + C) + 8 \right]^8 (\lambda + \varepsilon)^{\frac{3}{4}(n+C)+8} \gamma^8(N)$$

(выражение в квадратных скобках оценивает число всех слагаемых в (12)).

Извлекая корень n -ой степени из предыдущего неравенства и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к неравенству $\lambda \leq \lambda^{\frac{3}{4}}$, из которого следует, что $\lambda = 1$. Теорема 2 доказана.

§ 6. Построение системы определяющих соотношений для группы G

Введем обозначения: $U_i = \sigma^i((ad)^4)$, $V_i = \sigma^i((adacac)^4)$, $i = 0, 1, \dots$, а через $\langle R \rangle_\Gamma^\#$ будем, как и ранее, обозначать нормальное замыкание множества R в Γ .

Напомним, что в § 4 нами были определены нормальные подгруппы $\Omega, \Omega_n, n \geq 0$, в Γ такие, что $G = \Gamma/\Omega$ и $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Теорема 3 вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Для любого $n \geq 1$ выполнено соотношение*

$$\Omega_n = \langle U_i, V_{i-1}, 1 \leq i \leq n \rangle_\Gamma^\#. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\theta: \Xi \rightarrow \Gamma \times \Gamma$ гомоморфизм, определенный подстановкой (4) аналогично гомоморфизму ψ .

Введем в рассмотрение подгруппы $\tilde{B}, \tilde{D}, \tilde{D}_0, \tilde{D}_*$ в Γ , определенные аналогично подгруппам B, D, D_0, D_* из леммы 6: $\tilde{B} = \langle b \rangle_\Gamma^\#, \tilde{D} = \langle a, d \rangle_\Gamma, \tilde{D}_0 = \langle (a, d), (d, a) \rangle_{\Gamma \times \Gamma}, \tilde{D}_* = \langle (1, a), (1, d) \rangle_{\Gamma \times \Gamma}$.

ЛЕММА 8. *Подгруппа $\theta(\Xi) < \Gamma \times \Gamma$ совпадает с полупрямым произведением $(\tilde{B} \times \tilde{B}) \cdot \tilde{D}_0$, и дополнительной к ней является группа $\tilde{D}_*$. В частности, $[(\Gamma \times \Gamma) : \theta(\Xi)] = 8$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 6 и мы его опускаем.

ЛЕММА 9. *Имеет место соотношение $\theta(\Omega) = \Omega \times \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\theta(\Omega) \leq \Omega \times \Omega$ очевидно, если вспомнить алгоритм, решающий проблему равенства слов в G .

Докажем обратное включение. С этой целью рассмотрим гомоморфизмы $\pi_i \theta \sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $i = 0, 1$, и заметим, что они действуют на образующие группы Γ согласно правилу:

$$\pi_0 \theta \sigma : \begin{cases} a \rightarrow d, \\ b \rightarrow 1, \\ c \rightarrow a, \\ d \rightarrow a, \end{cases} \quad \pi_1 \theta \sigma : \begin{cases} a \rightarrow a, \\ b \rightarrow b, \\ c \rightarrow c, \\ d \rightarrow d. \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, $\pi_1 \theta \sigma$ является тождественным автоморфизмом группы Γ , а образ $\pi_0 \theta \sigma$ есть группа $\tilde{D}$, имеющая период 4.

Для любого $g \in \Omega$ рассмотрим элемент $\sigma(g) \in \Xi$. Мы утверждаем, что $\theta \sigma(g) = (1, g)$.

Действительно, в силу (14) $\theta \sigma(g) = (x, g)$, где $x \in \tilde{D}$ — некоторый элемент. Переходя от Γ к факторгруппе $G = \Gamma/\Omega$, мы получаем, что $\psi \sigma(g) = (\bar{x}, 1)$, где $\bar{x}$ есть образ x в G (т.е. элемент из D , определенный тем же словом, что и x). Но тогда $\psi(a \sigma(g) a) = (1, \bar{x})$, откуда следует, что $\bar{x} = 1$ в D , а значит, и $x = 1$ в $\tilde{D}$.

ЛЕММА 10. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\theta(U_i) = (1, U_{i-1}), \quad \theta(V_i) = (1, V_{i-1}), \quad i \geq 0, \quad (15)$$

причем под U_{-1} , V_{-1} понимается единичный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждое из слов U_i, V_i , $i \geq 0$, есть четвертая степень некоторого слова, из (14) следует, что при $i \geq 1$

$$\begin{aligned} \theta(U_i) &= (x^4, U_{i-1}) = (1, U_{i-1}), \\ \theta(V_i) &= (y^4, V_{i-1}) = (1, V_{i-1}), \end{aligned}$$

где $x, y \in \tilde{D}$ — некоторые элементы.

Первое из соотношений (15) при $i = 0$ очевидно (ибо $U_0 \stackrel{\Gamma}{=} 1$), а проверка второго осуществляется непосредственно:

$$\theta(V_0) = \theta((adacac)^4) = ((bad^2a)^2, (dabad)^2) = (1, 1).$$

СЛЕДСТВИЕ 9. *Элементы $U_1 = (ac)^8$ и $V_0 = (adacac)^4$ принадлежат группе $\text{Ker } \theta$.*

Следующее утверждение показывает, что этими элементами $\text{Ker } \theta$ определяется.

ЛЕММА 11. *Имеют место соотношения:*

$$\text{Ker } \theta = \Omega_1 = \langle U_1, V_0 \rangle_{\Gamma}^{\#}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое из выписанных соотношений следует из определения группы Ω_1 . Для доказательства второго соотношения нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 12. *Подгруппа $\tilde{B} < \Gamma$ порождена элементами $\xi_1 = b$, $\xi_2 = aba$, $\xi_3 = dabad$, $\xi_4 = adabada$, подчиненными соотношениям $\xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2 = \xi_4^2 = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой и следующей лемм основано на применении теоремы Рейдемейстера–Шрейера, если в качестве системы представителей Γ по $\tilde{B}$ взять множество $\{1, a, d, ad, da, ada, dad, adad\}$, а в качестве системы представителей Γ по Ξ взять множество $\{1, a\}$.

ЛЕММА 13. *Подгруппа $\Xi < \Gamma$ относительно системы порождающих $\alpha = c$, $\beta = asa$, $\delta = d$, $\gamma = ada$ имеет следующее задание:*

$$\Xi = \langle \alpha, \beta, \delta, \gamma \mid \alpha^2 = \beta^2 = \delta^2 = \gamma^2 = [\alpha, \delta] = [\beta, \gamma] = [\delta, \gamma] = 1 \rangle. \quad (17)$$

Введем следующие обозначения для порождающих группы $N = \theta(\Xi)$: $\mu = (a, d)$, $\nu = (d, a)$, $\eta_i = (1, \xi_i)$, $\zeta_i = (\xi_i, 1)$, $1 \leq i \leq 4$. Тогда из разложения $N = (\tilde{B} \times \tilde{B}) \cdot \tilde{D}$ группы N в полупрямое произведение (лемма 8) получается следующее задание группы N :

$$\begin{aligned} N = \langle \mu, \nu, \eta_i, \zeta_i, 1 \leq i \leq 4 \mid \\ \mu^2 = \nu^2 = (\mu\nu)^4 = \eta_i^2 = \zeta_j^2 = [\eta_i, \zeta_j] = 1, 1 \leq i, j \leq 4, \\ \eta_1^\mu = \eta_1, \eta_2^\mu = \eta_3, \eta_4^\mu = \eta_4, \zeta_1^\mu = \zeta_2, \zeta_3^\mu = \zeta_4, \\ \eta_1^\nu = \eta_2, \eta_3^\nu = \eta_4, \zeta_1^\nu = \zeta_1, \zeta_2^\nu = \zeta_3, \zeta_4^\nu = \zeta_4 \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Действительно, первая группа соотношений учитывает соотношения группы $\tilde{D}$, группы $\tilde{B}$ и прямого произведения $\tilde{B} \times \tilde{B}$.

Вторая группа соотношений указывает, как порождающие группы $\tilde{D}$ действуют на порождающие $\tilde{B} \times \tilde{B}$ в полупрямом произведении. Проверим эти соотношения. Имеем

$$\begin{aligned} \eta_1^\mu &= (a, d) (1, b) (a, d) = (1, b) = \eta_1, \\ \eta_2^\mu &= (a, d) (1, aba) (a, d) = (1, dabad) = \eta_3, \\ \eta_4^\mu &= (a, d) (1, adabada) (a, d) = (1, dadabadad) \\ &= (1, adadbdada) = (1, adabada) = \eta_4, \\ \zeta_1^\mu &= (a, d) (b, 1) (a, d) = (aba, 1) = \zeta_2, \\ \zeta_3^\mu &= (a, d) (dabad, 1) (a, d) = (adabada, 1) = \zeta_4, \end{aligned}$$

и аналогично осуществляется проверка для ν .

Перепишем задание (18) в терминах порождающих $\mu, \nu, \eta = \eta_1, \zeta = \zeta_1$. Остальные порождающие из (18) выражаются через эти следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_2 &= (1, aba) = (d, a) (1, b) (d, a) = \nu\eta\nu, \\ \eta_3 &= (1, dabad) = (a, d) (d, a) (a, b) (d, a) (a, d) = \mu\nu\eta\nu\mu, \\ \eta_4 &= (1, adabada) = \nu\mu\nu\eta\nu\mu, \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\zeta_2 = \mu\zeta\mu, \quad \zeta_3 = \nu\mu\zeta\mu\nu, \quad \zeta_4 = \mu\nu\mu\zeta\mu\nu\mu.$$

ЛЕММА 14. *Относительно образующих μ, ν, η, ζ группа N имеет следующее задание:*

$$N = \langle \mu, \nu, \eta, \zeta \mid \mu^2 = \nu^2 = \eta^2 = \zeta^2 = (\mu\nu)^4 \\ = [\mu, \eta] = [\eta, \zeta] = [\nu, \zeta] = (\eta\nu\mu\zeta\mu\nu)^2 = 1 \rangle. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем соотношения (18) через порождающие μ, ν, η, ζ и произведем редукцию этих соотношений.

Соотношения $\eta_i^2 = \zeta_i^2 = 1, 1 \leq i \leq 4$ очевидно редуцируются к соотношениям $\mu^2 = \nu^2 = 1$. Соотношения $\eta^2 = \zeta^2 = (\mu\nu)^4 = [\eta, \zeta] = [\mu, \eta] = [\nu, \zeta] = 1$ являются частью соотношений (18). Для первых четырех соотношений это очевидно, а соотношения $[\mu, \eta] = [\nu, \zeta] = 1$ — это записанные в иной форме соотношения $\eta_1^\mu = \eta_1, \zeta_1^\nu = \zeta_1$.

Выведем последнее из соотношений (19). Имеем

$$[\eta_1, \zeta_3] = \eta\nu\mu\zeta\mu\nu\eta\nu\mu\zeta\mu\nu = (\eta\nu\mu\zeta\mu\nu)^2.$$

Убедимся в том, что другие соотношения вида $[\eta_1, \zeta_j] = 1, 1 \leq j \leq 4$, после переписывания сводятся к старым. Будем использовать знак $\approx$ для обозначения сопряженности. Тогда по модулю уже выведенных соотношений получаем

$$[\eta_1, \zeta_2] = \eta\mu\zeta\mu\eta\mu\zeta\mu \approx \eta\mu^2\zeta\eta\mu^2\zeta = [\eta, \zeta], \\ [\eta_1, \zeta_4] = \eta\mu\nu\mu\zeta\mu\nu\mu\eta\mu\nu\mu\zeta\mu\nu\mu = \mu\eta\nu\mu\zeta\mu\nu\eta\nu\mu\zeta\mu\nu\mu \approx (\eta\nu\mu\zeta\mu\nu)^2.$$

Аналогичным образом производится редукция к (19) остальных соотношений вида $[\eta_i, \zeta_j] = 1$.

Теперь рассмотрим соотношения из второй группы. Соотношения $\eta_1^\mu = \eta_1, \zeta_1^\nu = \zeta_1$ уже были рассмотрены. Соотношения $\eta_2^\mu = \eta_3, \eta_4^\mu = \eta_4$ переписываются следующим образом:

$$\mu\eta_2\mu\eta_3 = \mu\nu\eta\nu\mu\mu\nu\eta\nu\mu = 1, \\ \mu\eta_4\mu\eta_4 = \mu\nu\mu\nu\eta\nu\mu\nu\mu\nu\eta\nu\mu\nu = \nu\mu\nu\mu\eta\nu\mu\nu\nu\mu\eta\nu\mu\nu = 1, \\ \mu\zeta_1\mu\zeta_2 = \mu\zeta\mu\mu\zeta\mu = 1, \\ \mu\zeta_3\mu\zeta_4 = \mu\nu\mu\zeta\mu\nu\mu\mu\nu\mu\zeta\mu\nu\mu = 1.$$

Редукция остальных соотношений производится аналогично, и мы ее опускаем.

Гомоморфизм $\theta: \Xi \rightarrow N$ действует на образующие Ξ следующим образом: $\alpha \mapsto \mu, \beta \mapsto \nu, \delta \mapsto \eta, \gamma \mapsto \zeta$. Сравнивая задание (17) для Ξ с заданием (19) для N , мы и получаем утверждение леммы 11.

Теперь мы готовы доказать предложение 5, причем будем это делать индукцией по $n \geq 1$, база которой доказана в лемме 11.

Предположим, что имеет место соотношение (13) при данном $n \geq 1$. Из определения групп $\Omega_n, n \geq 1$, следует, что $\theta(\Omega_{n+1}) \leq \Omega_n \times \Omega_n$.

Так как (в силу леммы 10 и индуктивного предположения) $\theta(\Omega_{n+1})$ содержит элементы $(1, U_{i+1})$, $(1, V_i)$, $0 \leq i \leq n-1$, то имеет место включение $\theta(\Omega_{n+1}) \geq 1 \times \Omega_n$, а значит, и $\theta(\Omega_{n+1}) \geq \Omega_n \times 1$, т.е. $\theta(\Omega_{n+1}) = \Omega_n \times \Omega_n$.

Кроме того, выполнены соотношения $\theta(U_i) = (1, U_{i-1})$, $\theta(aU_i a) = (U_{i-1}, 1)$, $\theta(V_j) = (1, V_{j-1})$, $\theta(aV_j a) = (V_{j-1}, 1)$, $2 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq n$. Поэтому в силу индуктивного предположения и леммы 11 имеет место соотношение (13).

Предложение 5, а вместе с ним и теорема 3 доказаны.

Заметим, что нами доказана независимость системы определяющих соотношений И. Г. Лысёнка. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Список литературы

1. *Banach S.* Sur le probleme de la mesure // *Fund. Math.* 1923. V. 4. P. 7–33.
2. *von Neumann J.* Zur allgemeinen Theorie des Maßes // *Fund. Math.* 1929. V. 13. P. 73–116.
3. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Мир, 1975.
4. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
5. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.
6. *Pier J.-P.* Amenable locally compact groups. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. New York: John Wiley & Sons, 1984.
7. *Wagon S.* The Banach–Tarski Paradox. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
8. *Стёпин А. М.* Метрические и спектральные свойства динамических систем и групп преобразований // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1986.
9. *Ceccherini-Silberstein T., Grigorchuk R., de la Harpe P.* Amenability and paradoxis for pseudogroups and for metric spaces // Preprint. Geneva, 1997.
10. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
11. *Day M. M.* Amenable semigroups // *Illinois J. Math.* 1957. V. 1. P. 509–544.
12. *Chou C.* Elementary amenable groups // *Illinois J. Math.* 1980. V. 24. P. 396–407.
13. *Григорчук Р. И.* К проблеме Милнора о групповом росте // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 31–33.
14. *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 5. С. 939–985.
15. *Milnor J.* Problem 5603 // *Amer. Math. Monthly.* 1968. V. 75. № 6. P. 685–686.
16. *Cannon J. W., Floyd W. J., Parry W. R.* Introductory notes on Richard Thompson's groups // *Enseign. Math.* (2). 1996. V. 42. № 3–4. P. 215–256.
17. *Григорчук Р. И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функци. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 53–54.
18. *Лысёнок И. Г.* О системе определяющих соотношений группы Григорчука // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 4. С. 503–516.
19. *Stepin A. M.* Approximation of groups and group actions, the Cayley topology // *Ergodic Theory of $\mathbb{Z}^d$ -actions. Proceedings of the Warwick symposium, Warwick, UK, 1993–1994* / ed. M. Pollicott, K. Schmidt. V. 228. New York: Cambridge Univ. Press, Lond. Math. Soc. Lect. Note, 1996. P. 475–484.
20. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // *Publ. Math. IHES.* 1981. V. 53. P. 53–73.
21. *Baumslag G.* Topics in Combinatorial Group Theory. Basel: Birkhäuser, 1993.

22. *Адельсон-Вельский Г. М., Шрейдер Ю. А.* Банахово среднее на группах // УМН. 1957. Т. 12. № 6. С. 131–136.
23. *Salomaa A., Soittola M.* Automata-theoretic aspects of formal power series. New York: Springer-Verlag, 1978.
24. *Григорчук Р. И.* О ряде Гильберта–Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 2. С. 307–326.

Москва

Поступила в редакцию
30.12.1996