Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, Бирациональные автоморфизмы трехмерной двойной квадррики с простейшей особенностью, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 1, 101–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:59:56

УДК 512.6

М. М. Гриненко

Бирациональные автоморфизмы трехмерной двойной квадрики с простейшей особенностью

В работе доказывается, что группа бирациональных автоморфизмов трехмерной двойной квадрики с особой точкой, происходящей из двойной точки на дивизоре ветвления, есть полупрямое произведение свободной группы, порожденной бирациональными инволюциями специального вида, и группы регулярных автоморфизмов.

Доказательство опирается на метод “откручивания” максимальных особенностей линейных систем.

Библиография: 5 названий.

Предварительные замечания. В предлагаемой работе изучается группа бирациональных автоморфизмов двойной квадрики с особой точкой, которая происходит из двойной точки на дивизоре ветвления (высекаемом гиперповерхностью четвертой степени в $\mathbb{P}^4$). Гладкий случай был исследован в работе [1].

Априори трудно сказать, как повлияет двойная точка на группу $\text{Bir}(V)$ бирациональных автоморфизмов многообразия V . Например, если V — трехмерная гладкая квартика, то, как хорошо известно [2], $\text{Bir}(V)$ совпадает с группой автоморфизмов; однако для квартики с двойной точкой это уже не так [3]. С другой стороны, двойные пространства, гладкие или с двойными точками, не имеют нетривиальных бирациональных автоморфизмов (во всех высших размерностях) [4]. В нашем случае (точная формулировка приводится ниже) оказывается, как и в случае двойного пространства, что особая точка не добавляет ничего нового в группу $\text{Bir}(V)$ (хотя сама она нетривиальна).

Все рассуждения работы укладываются в рамки метода максимальных особенностей. Первое строгое изложение этого метода принадлежит В. А. Исковских и Ю. И. Манину [2]. В последнее время в работах А. В. Пухликова [5] метод подвергся существенной переработке, что позволило, отказавшись от техники “пробного класса”, придать рассуждениям более геометрический и ясный характер и расширить область его применения. Предлагаемая работа также имеет целью применить новую технику к исследованию многообразий с особенностями.

Автор хотел бы выразить свою признательность А. В. Пухликову за постановку задачи и очень полезные обсуждения проблемы, а также В. А. Исковских за поддержку и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00820) и гранта поддержки ведущих научных школ (№ 96-15-96146).

§1. Формулировка основного результата

Всюду далее мы будем находиться в следующей ситуации. Пусть F – кватрика в $\mathbb{P}^4$, гладкая всюду, кроме точки P , где она имеет обыкновенную двойную особенность. Предположим, что гладкая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^4$ такова, что дивизор $F_Q = Q \cap F$ проходит через точку P , имеет в ней обыкновенную двойную особенность и не имеет других особых точек. Рассмотрим морфизм двойного накрытия $\pi: V \rightarrow Q$, разветвленный над F_Q . Многообразие V имеет обыкновенную двойную точку, которую мы также обозначим буквой P , и не содержит других особенностей.

Дополнительно мы будем предполагать, что существует в точности 12 прямых на Q , каждая из которых проходит через точку P и касается F_Q еще в некоторой точке, отличной от P , что нет прямых на Q , пересекающих F_Q только в точке P , и что F и Q не имеют общих прямых, проходящих через P . Эти условия, очевидно, выполнены для общей кватрики F .

Для двойной квадрики V , как несложно видеть, $\text{Pic}(V) = \mathbb{Z}[H]$, где H – прообраз гиперплоскости в $\mathbb{P}^4$. На самом деле выполнено большее: $\text{Cl}(V) = \text{Pic}(V)$, т.е. всякий дивизор Вейля линейно эквивалентен дивизору Картье. Действительно, пусть $\varphi: \tilde{\mathbb{P}}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ – композиция двойного накрытия $\mathbb{P}^4$ с ветвлением над кватрикой F и последующего раздутия особой точки, и $\tilde{V}$ и $\tilde{F}$ – собственные гладкие прообразы V и F в $\tilde{\mathbb{P}}^4$. Тогда $\tilde{F} = \varphi^*(4H) - 2E$ и $\tilde{V} = \varphi^*(2H) - E$, где E – исключительный дивизор раздутия, откуда следует обильность $\tilde{V}$ и $\tilde{F}$. Кроме того, $\text{Pic}(\tilde{F}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Дважды применяя теорему Лефшеца о гиперплоских сечениях, находим, что $\text{Cl}(\tilde{V}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, откуда $\text{Cl}(V) = \mathbb{Z}$.

Пусть $B \subset V$ – гладкая кривая такая, что $\pi|_B: B \rightarrow l$ – изоморфизм на прямую $l \subset Q$. Тогда l – одна из следующих трех типов:

- A. l касается Q_F в двух гладких точках;
- B. l проходит через точку P и касается Q_F еще в одной точке;
- B. $l \subset Q_F$.

Соответствующие этому кривые B будем называть прямыми типа А, Б или В на V .

Как следует из рассуждений в работе [1], на V существует в точности одномерное семейство прямых, причем каждую прямую пересекает только конечное множество других.

Конструкция бирационального автоморфизма, связанного с прямыми типа А или Б на V . Пусть $B \subset V$ – такая прямая, тогда существует прямая $B^* \subset V$, сопряженная с B относительно инволюции $\delta: V \rightarrow V$, переставляющей листы накрытия $\pi: V \rightarrow Q$. Заметим, что B и B^* пересекаются в двух точках. Линейная система $|-K_V - B - B^*|$ задает рациональное отображение $g: V \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, которое поднимается до морфизма $\bar{g}: \bar{V} \rightarrow \mathbb{P}^2$, где $\psi: \bar{V} \rightarrow V$ – композиция раздутия прямой B и, затем, собственного прообраза прямой B^* . Обозначим через E и E^* соответствующие исключительные дивизоры на $\bar{V}$.

Заметим, что общий слой X морфизма $\bar{g}$ – эллиптическая кривая, пересекающая E^* по точке. Отражение относительно этой точки (в смысле группового закона) дает автоморфизм слоя X . Этим определяется регулярный автоморфизм на некотором открытом подмножестве $\bar{V}$, который опускается уже как бирациональный автоморфизм τ_B на V (подробнее об этом см. [1]).

Бирациональная жесткость. Для определения бирационального типа V полезно следующее определение (см. [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара (W, Y) , где W – проективное многообразие, неособое в коразмерности 1, а Y – дивизор (Вейля) на W , называется *пробной*, если выполняются следующие условия:

- а) линейная система $|Y|$ подвижна;
- б) существует число $\alpha = \alpha(W, Y) \in \mathbb{R}_+$ такое, что для всякого $\beta > \alpha$, $\beta \in \mathbb{Q}$ линейная система

$$|m(Y + \beta K_W)|$$

пуста при любом $m \in \mathbb{Z}_+$, $m\beta \in \mathbb{Z}$.

Указанное число $\alpha(W, Y)$ называется *каноническим порогом* пары.

Практически важными примерами пробных пар являются следующие:

- $(\mathbb{P}^n, L)$, где L – гиперплоскость; $\alpha(\mathbb{P}^n, L) = 1/(n+1)$;
- пара (W, Y) , где $\varphi : W \rightarrow S$ – расслоение на многообразия Фано, Y – прообраз очень обильного на S дивизора, здесь канонический порог равен нулю;
- наконец, $(V, -K_V)$ дает возможность описать группу бирациональных автоморфизмов интересующего нас многообразия V , очевидно, в нашем случае $\alpha(V, -K_V) = 1$.

Основной результат статьи сформулирован в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Описанная выше сингулярная двойная квадрака V является бирационально жестким многообразием, т.е. для любой пробной пары (W, Y) и любого бирационального отображения $\psi : V \rightarrow W$ существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir}(V)$ такой, что*

$$\alpha(V, (\psi \circ \chi)^{-1}(Y)) \leq \alpha(W, Y).$$

СЛЕДСТВИЯ. 1) V нерационально и не бирационально изоморфно никакому расслоению на коники или на поверхности Дель-Пеццо.

2) Группа $\text{Bir}(V)$ бирациональных автоморфизмов включается в точную тройку

$$1 \longrightarrow * \tau_V \longrightarrow \text{Bir}(V) \longrightarrow \text{Aut}(V) \longrightarrow 1,$$

где $\text{Aut}(V)$ – группа бирегулярных автоморфизмов V , $* \tau_V$ – свободное произведение инволюций τ_V по всем прямым $B \subset V$ типа А или Б.

§ 2. Максимальные особенности двойной квадраки с двойной точкой

Происхождение максимальных особенностей. Как мы уже видели, $\text{Pic}(V) = \text{Cl}(V) = \mathbb{Z}[H]$, где $H = \pi^*(L)$, $\pi : V \rightarrow Q$ – наше двойное накрытие и L – гиперплоскость в $\mathbb{P}^4$.

Пусть (W, Y) – пробная пара, $\chi : V \dashrightarrow W$ – бирациональное отображение, $|D| = \chi^{-1}(|Y|)$ – собственный прообраз линейной системы $|Y|$. Очевидно, $|D| \subset |nH|$ для некоторого $n \geq 1$ и $\alpha(V, D) = n$.

Предположим, что $n > \alpha(W, Y)$. Пусть тогда $\varphi_0: V_0 \rightarrow V$ – раздутие особой точки $P \in V$, $D^0 = \varphi^{-1}(D) = \varphi^*(nH) - \nu_0 E_0$, где $\nu_0 \geq 0$ и E_0 – исключительный дивизор. Поднимем χ на V_0 и разрешим особенности бирационального отображения $\chi_0 = \chi \circ \varphi: V_0 \dashrightarrow W$:

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \psi \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ V_0 & \xrightarrow{\chi_0} & W \end{array}$$

В этой диаграмме ψ и ψ_1 – бирациональные морфизмы. Ясно, что существуют такие открытые подмножества $W' \subset W$ и $U' \subset U$, что $\psi_1|_{U'}: U' \rightarrow W'$ – изоморфизм, U' гладкое и $\text{codim}_W(W \setminus W') \geq 2$.

Поскольку $n > \alpha(W, Y)$, имеем $|Y + nK_W| = \emptyset$, откуда $|\psi_1^{-1}(Y) + nK_{W'}| = \emptyset$. Но, с другой стороны, $\psi_1^{-1}(Y) = \psi^{-1}(D^0)$ и, кроме того, существуют дивизоры $E_1, E_2, \dots, E_k \subset U'$, что

$$\begin{aligned} K_{U'} &= \psi^* K_{V_0} + \sum_i \delta(E_i) E_i, \\ \psi^{-1}(D^0) &= n\psi^* H - \nu_0 \psi^* E_0 - \sum_i \nu_{E_i}(D^0) E_i. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \emptyset &= |\psi_1^{-1}(Y) + nK_{U'}| \\ &= |(n - \nu_0)\psi^{-1}(E_0) + \sum_{i=0}^k (n\delta(E_i) + (n - \nu_0)\nu_{E_i}(E_0) - \nu_{E_i}(D^0)) E_i|. \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь нам понадобится

ЛЕММА. В рассматриваемых обозначениях $\nu_0 \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем цепочку морфизмов $V_0 \xrightarrow{\varphi_0} V \xrightarrow{\pi} Q$. Пусть $S' = Q \cap \overline{TPQ}$ – квадратичный конус в $\mathbb{P}^3$, $S = \pi^{-1}(S')$ и $S^0 = \varphi^{-1}(S)$. Положим $l' \subset S'$ – образующая конуса, тогда либо $l = \pi^{-1}(l')$ – рациональная кривая с двойной точкой в точке P , либо $l = l_1 \cup l_2$ – пара прямых на V , пересекающихся в точке P (и еще в одной точке). Полагая $l^0 = \varphi^{-1}(l)$ или, соответственно, $l_i^0 = \varphi^{-1}(l_i)$, получим

$$D^0 \circ l^0 = 2n - 2\nu_0 < 0$$

в первом случае и

$$D^0 \circ l_i^0 = n - \nu_0 < 0$$

во втором. Это означает, что $S^0 \subset \text{Bas}|D^0|$, т.е. противоречие с подвижностью $|D^0|$.

Таким образом, из условия (1) заключаем, что для некоторого i

$$\nu_{E_i}(D^0) - (n - \nu_0)\nu_{E_i}(E_0) > n\delta(E_i).$$

Учитывая, что $\nu_{E_i}(E_0) \geq 0$, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $n > \alpha(W, Y)$, то $\nu_{E_i}(D^0) > n\delta(E_i)$ для некоторого $i > 0$, т.е. линейная система $|D^0|$ имеет максимальную особенность в смысле работы [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. Число n фактически есть канонический порог линейной системы $|D^0|$. Действительно, пусть $n_1 > n$ – некоторое число, $m = n_1 - n > 0$. Тогда

$$|D^0 + n_1 K_{V_0}| = |-m(\varphi_0^*(H) - E_0) + (n - \nu_0)E_0| = \emptyset$$

из очевидных соображений. Таким образом, сформулированное выше предложение есть не что иное, как утверждение о существовании максимальных особенностей в линейной системе $|D^0|$.

Максимальные особенности на многообразии V_0 . В духе более современного подхода, описанного в работе [5], на сей момент нами доказано в точности следующее: если $\chi: V \dashrightarrow W$ – бирациональное отображение, $|D| = \chi^{-1}|Y| \subset |nH|$, $n > \alpha(W, Y)$, то существует тройка $(\tilde{V}, \varphi, T)$, где T – простой дивизор Вейля на $\tilde{V}$, $T \not\subset \tilde{V}_{\text{sing}}$ и $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V_0$ – бирациональный морфизм, такая, что

$$\nu_T|D^0| > n\delta(T) \quad (2)$$

(здесь, как обычно, $\nu_T|D^0| \stackrel{\text{def}}{=} \min_{C \in |D^0|} \nu_T(C)$ и $\delta(T) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ord}_T(\varphi^* \omega_{V_0} \otimes \omega_{\tilde{V}}^*)$, ω_{V_0} и $\omega_{\tilde{V}}$ – канонические пучки на V_0 и $\tilde{V}$).

Итак, пусть тройка $(\tilde{V}, \varphi, T)$ задает максимальную особенность линейной системы $|D^0| \subset |n\varphi_0^*(H) - \nu_0 E_0|$, n – канонический порог, и положим $B_0 = \varphi(T)$ (B_0 – не что иное, как центр нормирования, определяемого дивизором T). Возможны два существенно различных случая.

Случай 1. $\text{supp } B_0 \not\subset E_0$. Тогда, как несложно видеть, мы можем все опустить на V и воспользоваться практически дословно рассуждениями работы [1]. Таким образом, для $B = \varphi_0(B_0)$ мы имеем только одну возможность: $\dim B = 1$, и при этом обязательно B – прямая типа А или Б.

Случай 2. $\text{supp } B_0 \subset E_0$. Это случай так называемых бесконечно близких максимальных особенностей (линейной системы $|D|$ на V). Далее доказывается, что таких особенностей в нашем случае нет.

§3. Исключение бесконечно близких особенностей

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В прежних обозначениях пусть $|D^0| \subset |n\varphi_0^*(H) - \nu_0 E_0|$ – подвижная линейная система, $\nu_0 \leq n$. Не существует тройки $(\tilde{V}, \varphi, T)$ (см. §2) такой, что выполнялось бы неравенство (2), если $\text{supp } \varphi(T) \subset E_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть не так, тогда существует (конечная) цепочка бирациональных морфизмов (см. [5])

$$\tilde{V} = V_N \xrightarrow{\varphi_{N,N-1}} V_{N-1} \xrightarrow{\varphi_{N-1,N-2}} \dots \xrightarrow{\varphi_{i+1,i}} V_i \xrightarrow{\varphi_{i,i-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_{1,0}} V_0 \quad (3)$$

такая, что $\varphi(T) = \varphi_{N,N-1} \circ \dots \circ \varphi_{1,0}(T) \subset E_0$, каждое $\varphi_{k,k-1}$ – раздутие с центром B_{k-1} в точке или неприводимой (возможно, особой) кривой на V_{k-1} и

$\nu_T |D^0| > n\delta(T)$. Обозначим $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1}) \subset V_i$, $E_N = T$. Можно считать, что B_i – точка при $i < L$ и кривая при $i \geq L$, $0 \leq L \leq N$; более того, мы можем полагать, что для любого i $B_i \subset E_i$.

Пусть $\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} |D|^i$, где $|D|^i$ – собственный прообраз линейной системы $|D^0|$ на V_i . Ясно, что $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_N$. Более того, легко видеть, что $\nu_1 \leq 2\nu_0$.

Пусть Γ – ориентированный граф особенности: вершины i и j соединены стрелкой (из i в j), если $i > j$ и $B_{i-1} \subset E_j^{i-1}$. Обозначим через $p(i, j)$ число различных путей из вершины i в вершину j при $i > j$; $p(i, i) \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Числа $\delta_i = \text{codim } B_i - 1$ и ν_i , как известно, связаны неравенством Нётера–Фано–Исковских ([1], [2], [5]):

$$\sum_{i=1}^N p(N, i) \nu_i > \sum_{i=1}^N p(N, i) \delta_{i-1}. \quad (4)$$

Заметим, что случай $\dim B_0 = 0$, $N = 1$, т.е. максимальная особенность – в точке и реализуется первым же раздутием, невозможен, так как тогда $2n < \nu_1 \leq 2\nu_0$, откуда $\nu_0 > n$, что противоречит лемме в § 2.

Пусть теперь $\dim B_0 = 1$. Тогда из (4) следует, что $\nu_1 > n$. Поверхность E_0 изоморфна квадрике в $\mathbb{P}^3$, так что $\text{Pic}(E_0) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Линейная система $|D^0|$ при ограничении на E_0 имеет тип (ν_0, ν_0) , $\nu_0 \leq n$; с другой стороны, $\text{ord}_{B_0} D^0|_{E_0} \geq \nu_1 > n$, что невозможно.

Оставшийся случай, т.е. когда $\dim B_0 = 0$, $N > 1$, самый трудный, и его невозможность доказывается в следующем параграфе статьи.

§ 4. Трудный случай

“Трудность” этого случая объясняется следующими обстоятельствами. Пусть, например, нам требуется исключить максимальную особенность некоторой линейной системы $|M|$ над точкой A . Для этого, с точки зрения подхода, описанного в [5], нам требуется сделать две вещи: во-первых, с помощью неравенств Нётера–Фано–Исковских показать, что два общих элемента $M_1, M_2 \in |M|$ высекают кривую $C = M_1 \circ M_2$, имеющую высокую кратность в точке A ; и во-вторых, надо найти поверхность S (так называемую пробную поверхность), гладкую в точке A , не содержащую компонент кривой C и такую, что $C \circ S < \text{mult}_P C$.

В нашем случае в качестве пробных поверхностей удобно брать элементы класса $|\varphi_{1,0}^*(H) - E_0|$, но следующая лемма указывает на источник неприятностей.

ЛЕММА. Пусть Z – неприводимая приведенная кривая, $A \in Z \cap E_0$ – некоторая точка. Следующие условия эквивалентны:

- i) для любой поверхности $S \in |\varphi_{1,0}^*(H) - E_0|$, проходящей через точку A , $Z \subset S$;
- ii) $\pi \circ \varphi_{1,0}(Z)$ – прямая на квадрике Q , проходящая через точку P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проделать несложные локальные вычисления в окрестности точки P .

С другой стороны, если кривая Z удовлетворяет условию ii) предыдущей леммы и линейная система D^0 имеет максимальную особенность над точкой A , то всегда

$Z \subset \text{Bas } |D^0|$. Действительно, если $\varphi_{1,0}(Z)$ — “прямая”, т.е. $H \circ \varphi_{1,0}(Z) = 1$, то $D^0 \circ Z = n - \nu_0 \leq n < \nu_1$, что возможно, только если $Z \subset D^0$. Если же $\varphi_{1,0}(Z)$ — “коника”, т.е. $H \circ \varphi_{1,0}(Z) = 2$, и при этом $Z \not\subset D^0$, то получаем противоречие: $D^0 \circ Z = 2n - 2\nu_0 \geq \nu_1 > n$, откуда $\nu_0 < n/2$ (напомним, что $2\nu_0 \geq \nu_1 > n$). Итак, в этих случаях метод пробной поверхности напрямую применять нельзя.

Заметим, что точки на E_0 , через которые проходят “прямые” или “коники”, лежат на некоторой кривой $C_{F_Q} \subset E_0$, которая есть проективизация касательного конуса к дивизору ветвления (так что C_{F_Q} — коника на $E_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Следующее утверждение почти очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Линейная система не может содержать максимальных особенностей над точкой $B_0 \in E_0 \setminus C_{F_Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Пусть $m = \text{mult}_{B_0}(D_1^0 \circ D_2^0)$, где $D_1^0, D_2^0 \in |D^0|$ — достаточно общие. Из (4) выводится (см. [1], [2], [5]) неравенство $m > 4n^2$. Если $S \in |\varphi_{1,0}^*(H) - E_0|$ — гладкая поверхность (это поверхность типа КЗ), $B_0 \in S$ и S находится в общем положении с $D_1^0 \circ D_2^0$ (такая существует по предыдущей лемме), то получаем противоречие:

$$m \leq D_1^0 \circ D_2^0 \circ S = n^2(H)^3 - \nu_0^2(E_0)^3 = 4n^2 - 2\nu_0^2 < 4n^2.$$

Пусть теперь линейная система $|D^0|$ имеет максимальную особенность над точкой $B_0 \in E_0$, и пусть $l^0 \ni B_0$ — “коника” или “прямая” на V_0 (в последнем случае существует сопряженная ей относительно автоморфизма двойного накрытия “прямая” l^{*0}). Обозначим $\varepsilon = \text{mult}_{l^0}(D_1^0 \circ D_2^0)$ (соответственно $\varepsilon^* = \text{mult}_{l^{*0}}(D_1^0 \circ D_2^0)$). Мы хотели бы получить оценки снизу на величину ε либо на ее комбинацию с другими “вредными” параметрами. Но прежде чем это делать, посмотрим, на какие оценки сверху мы можем рассчитывать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Пусть l^0 — “коника”, тогда

$$\varepsilon \leq 2n^2. \quad (5)$$

(ii) Пусть l^0 — “прямая”, $\mu = \text{mult}_{l^0}|D^0|$, тогда

$$\varepsilon - \varepsilon^* \leq 4n^2 - \nu_0^2 - 2\mu n - (\nu_0 - \mu)^2 - (\nu_1 - \mu)^2. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $D_1, D_2 \in |D| \subset |nH|$ и $S \in |H|$ находятся в общем положении (мы все рассматриваем на V). Тогда

$$4n^2 = D_1 \circ D_2 \circ S \geq \varepsilon l \circ S = 2\varepsilon.$$

(ii) Пусть $|S^0| \in |H^* - E_0|$ — общий элемент, проходящий через точку B_0 , причем можно полагать, что $S^0 \cap \text{Bas } |D^0| = l^0 \cup l^{*0}$ (здесь и далее верхний символ $*$ в обозначении дивизора означает полный прообраз на соответствующем многообразии, в данном случае — на V_0). Естественный шаг — раздуть l^0 . Пусть $\psi: V' \rightarrow V_0$ — такое раздутие и E' — его исключительный дивизор.

ЛЕММА. $E' \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно видеть, что нормальный пучок $\mathcal{N}_{l^0|V_0}$ представляется в виде расширения

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{l^0}(-2) \longrightarrow \mathcal{N}_{l^0|V_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{l^0} \longrightarrow 0,$$

так что исключительный дивизор E' изоморфен либо поверхности F_2 , либо квадрике F_0 .

Предположим, что $E' \cong F_2$, и пусть s и f — классы исключительного сечения и слоя поверхности E' . Рассмотрим максимально общий элемент $T \in |H^* - E_0|$, содержащий кривую l^0 (это гладкая поверхность типа КЗ). Пусть $T'|_E = s + \alpha f$, где T' — собственный прообраз. Для двух таких элементов T_1 и T_2 , очевидно,

$$2 = T'_1 \circ T'_2 \circ E' = (s + \alpha f)^2 = \alpha,$$

так что $T'|_E = s + 2f$.

Далее, локальными рассмотрениями легко убедиться, что на V_0 существует пучок $|M| \subset |H^* - E_0|$ такой, что

- 1) $l^0, l^{*0} \subset \text{Bas}|M|$;
- 2) общий элемент $|M|$ имеет двойную точку в единственной точке пересечения l^0 и l^{*0} (это означает, что $\pi \circ \varphi_0(M)$ касается F_Q в точке, где $\pi \circ \varphi_0(l^0)$ касается F_Q);
- 3) два общих элемента $|M|$ не имеют касаний вдоль l^0 .

Пусть для собственного прообраза этого пучка $M'|_E = s + \alpha f$. Несложно видеть, что $2 = M' \circ T' \circ E' = \alpha$. С другой стороны, $|M'|$ имеет в качестве базисной кривой слой над особой точкой M , а система $|s + f|$ на F_2 не содержит неприводимых кривых. Таким образом, $s \subset \text{Bas}|M'|$, т.е. общие элементы $|M|$ касаются вдоль l^0 . Полученное противоречие доказывает лемму.

Несложно посчитать, что пересечение циклов равно:

$$D'_1 \circ D'_2 \circ S' = (nH^* - \nu_0 E_0^* - \mu E')^2 (H^* - E_0^* - E') = 4n^2 - 2\nu_0^2 - 2\mu n + 2\mu\nu_0 - 2\mu^2, \quad (7)$$

где $|S'|$ — собственный прообраз системы $|S^0|$.

С другой стороны, пусть $\bar{f}$ — слой E' над точкой B_0 . Легко видеть, что $\bar{f} \subset \text{Bas}|D'|$ и $m_{\bar{f}} = \text{ord}_{\bar{f}}(D'_1 \circ D'_2) \geq (\nu_1 - \mu)^2$ для общих элементов D'_1, D'_2 собственного прообраза $|D'|$ системы $|D^0|$. Кроме того, при раздутии ψ линейная система $|D'|$ приобретает еще одну базисную кривую Z' , $\text{supp}(Z') \subset E'$, имеющую степень d относительно слоев E' , причем $\mu^2 + d = \varepsilon$ (лемма 6.1(ii) в [5]). Таким образом,

$$D'_1 \circ D'_2 = m_{\bar{f}} \bar{f} + Z' + \varepsilon^* l^{*'} + Z,$$

где $l^{*'}$ — собственный прообраз l^{*0} , а Z — некоторая кривая, носитель которой не содержит $\bar{f}, l^{*'}$ и компонент кривой Z' .

Так как $S' \cap \text{Bas}|D'| = l^{*'}$, $Z' \circ S'|_{E'} = Z' \circ (s + f) \geq d$, $S' \circ \bar{f} = 1$ и $S' \circ l^{*' = -1$, то

$$D'_1 \circ D'_2 \circ S' \geq (\nu_1 - \mu)^2 + d - \varepsilon^*.$$

Следующая наша задача, как следует из доказанного только что предложения, состоит в том, чтобы получить как можно более сильные оценки снизу на ε или, соответственно, на $\varepsilon - \varepsilon^*$.

Характер наших дальнейших действий существенно зависит от того, в какой момент собственный прообраз кривой l^0 “соскочит” с очередного центра раздутья. Положим $k = \max(0 \dots L - 1 : B_k \in l^k, B_{k+1} \notin l^{k+1})$ (как обычно, верхние индексы обозначают собственный прообраз на соответствующем этаже цепочки раздутья).

$$D_1^0 \circ D_2^0 = Z_0 + \tilde{Z}_0 + \varepsilon l^0,$$

Введенные величины связаны следующими соотношениями [5]:

Введем обозначение $r_i = p(N, i)$ (числа $p(i, j)$ были определены в § 3). Умножим строки системы (8) на $r_1, r_2, \dots, r_L$ соответственно и сложим их. Стандартным образом (теорема 7.1 в [5]) получаем

В дальнейшем вместо (4) нам понадобится уточненное неравенство (выводится точно так же, как и (4), только еще учитывается E_0)

где $\Sigma_0 = \sum_{i=1}^L r_i$, $\Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^N r_i$.

Так как $\nu_0 \leq n$, то мы можем несколько уменьшить r_0 , положив $r_0 = r_1$; неравенство (10) от этого только усилится.

Далее, обычным образом, поскольку $2\nu_0 \geq \nu_1 \geq \dots \geq \nu_N$, получается квадратичное неравенство

$$2r_0\nu_0 + \sum_{i=1}^N r_i\nu_i^2 > \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1 + r_0)^2 n^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^N r_i\nu_i^2 > 4n^2\Sigma_0 + 2r_0n^2 - 2r_0\nu_0^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0}. \quad (11)$$

Неравенства (9) и (11) вместе дают

$$r_1\varepsilon + \sum_{i=1}^L r_i(m_{0,i} + \tilde{m}_{0,i}) \geq 4n^2\Sigma_0 + 2r_0n^2 - 2r_0\nu_0^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0}. \quad (12)$$

Как и ранее, пусть S^0 — общий элемент системы $|H^* - E_0|$. Ясно, что

$$m_{0,i} + \tilde{m}_{0,i} \leq m_{0,1} + \tilde{m}_{0,1} \leq D_1^0 \circ D_2^0 \circ S^0 \leq 4n^2 - 2\nu_0^2.$$

Тогда из неравенства (12) после деления на $r_1 = r_0$ получаем

$$\varepsilon > 2n^2,$$

что полностью нас устраивает, если l^0 — “коника”.

В случае, когда l^0 — “прямая”, оставим в (12) член $m_{0,1} + \tilde{m}_{0,1}$ и тоже разделим на r_1 :

$$\varepsilon + m_{0,1} + \tilde{m}_{0,1} > 6n^2 - 2\nu_0^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)r_1}. \quad (13)$$

Как и в доказательстве неравенства (6), пусть $\psi: V' \rightarrow V_0$ — раздутие “прямой” l^0 . Легко посчитать, что

$$D_1' \circ D_2' \circ E' = 2\mu^2 + 2\mu n - 2\mu\nu_0.$$

Проведем более тонкий учет кривых:

$$D_1' \circ D_2' = \varepsilon^* l^{*'} + Z' + Z_0' + \tilde{Z}_0' + C + (\text{какие-то кривые}),$$

где кривая C есть сумма слоев E' с кратностями. По-прежнему обозначая через s и f соответственно нулевое сечение и слой E' , мы можем считать, что

$$Z' + C = ds + (\nu_1 - \mu)^2 f + Mf,$$

где $M \geq 0$ — некоторое число. Далее, очевидно, что $\tilde{Z}_0' \circ E' = \tilde{m}_{0,1}$, $Z_0' \circ E' = m_{0,1}$, поэтому

$$2\mu^2 + 2\mu n - 2\mu\nu_0 \geq \varepsilon^* - d - (\nu_1 - \mu)^2 - M + \tilde{m}_{0,1} + m_{0,1}.$$

$$4n^2 - 2\nu_0^2 - 2\mu^2 - 2\mu n + 2\mu\nu_0 = D'_1 \circ D'_2 \circ S' \geq (\nu_1 - \mu)^2 + d + \tilde{d} - \tilde{m}_{0,1} + M,$$
$$4n^2 - 2\nu_0^2 \geq \varepsilon^* + \tilde{d} + m_{0,1}.$$
$$\varepsilon - \varepsilon^* > 2n^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)\Sigma_0}.$$

Предварительно сделаем два замечания о коэффициентах r_i в неравенстве Нёте-ра-Фано-Исковских (10). Во-первых, исходя из определения этих чисел, мы можем записать, что

$$r_k = \sum_{j \rightarrow k} r_j = \sum_{\substack{j \rightarrow k \\ j \leq L}} r_j + \sum_{\substack{j \rightarrow k \\ j > L}} r_j.$$

$$r_k = \sum_{\substack{j \rightarrow k \\ j \leq L}} r_j.$$

Воспользовавшись обозначениями случая $k = 0$, запишем две системы равенств:

[illegible]

[illegible]

Далее, умножим каждую строку системы (14) на r_k ; в системе же (15) первую строку умножим на r_{k+1} , вторую — на r_{k+2} и так далее, после чего сложим левые и

правые части обеих систем. Стандартный трюк с уничтожением величин d_i и $m_{i,j}$, несмотря на уменьшение коэффициента r_k , все равно срабатывает, и, применяя квадратичное неравенство (11) и учитывая, что $\Sigma_0 = kr_k + \sum_{i=k+1}^L r_i$, мы получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(k + \frac{r_{k+1}}{r_k} \right) + \tilde{m}_{0,1} + \sum_{i=1}^k m_{0,i} + \sum_{i=k+1}^L \frac{r_i}{r_k} m_{0,i} \\ > 4n^2 \left(k + \sum_{i=k+1}^L \frac{r_i}{r_k} \right) + 2n^2 - 2\nu_0^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)r_k}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{i=k+1}^L \frac{r_i}{r_k} (4n^2 - m_{0,i}) \geq (4n^2 - m_{0,1}) \sum_{\substack{j \rightarrow k \\ j \leq L}} \frac{r_j}{r_k} = 4n^2 - m_{0,1},$$

а для общей $S^0 \in |H^* - E_0|$

$$4n^2 - 2\nu_0^2 = D_1^0 \circ D_2^0 \circ S^0 \geq m_{0,1} + \tilde{m}_{0,1};$$

получаем (учитывая, что $r_k \geq r_{k+1}$)

$$\varepsilon(k+1) + \sum_{i=1}^k m_{0,i} > 4n^2 k + 2n^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)r_k}. \quad (16)$$

ЛЕММА. $\sum_{i=1}^k m_{0,i} \leq 4n^2 - \varepsilon - \varepsilon^*$ (если l^0 — “коника”, то вместо ε^* надо подставить еще одно ε).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S^0 \in |H^* - E_0|$, $B_0 \in S^0$ — общий элемент. Легко посчитать, что на k -ом этаже

$$D_1^k \circ D_2^k \circ S^k = 4n^2 - 2\nu_0^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2.$$

С другой стороны,

$$D_1^k \circ D_2^k = Z_0^k + \tilde{Z}_0^k + \varepsilon l^k + \varepsilon^* l^{*k} + Z_1^k + \dots + Z_k$$

(если l^0 — “коника”, то, конечно, соответствующий член надо выкинуть).

Ясно, что $S^k = H^* - \sum_{i=0}^k E_i^*$, откуда $l^k \circ S^k = -k$, $l^{*k} \circ S^k = 0$, $Z_0^k \circ S^0 \geq m_{0,k} \geq 0$, $\tilde{Z}_0^k = \tilde{d} - \tilde{m}_{0,1}$ (напомним, что $\tilde{d} = \deg_{E_0} \tilde{Z}_0$).

Далее, при $1 \leq i < k$ имеем $Z_i^{i+1} \circ S^{i+1} = d_i - m_{i,i+1}$, так что

$$Z_i^k \circ S^k = Z_i^{i+1} \circ S^{i+1} - Z_i^k \circ \left(\sum_{j=i+2}^k E_j^* \right) = d_i - m_{i,i+1}.$$

Наконец, учитывая, что $Z_k \circ S^k = d_k$, получим

$$4n^2 - 2\nu_0^2 - \sum_{i=1}^k \nu_i^2 \geq -k\varepsilon + \tilde{d} - \tilde{m}_{0,1} + \sum_{i=1}^{k-1} (d_i - m_{i,i+1}) + d_k.$$

Сложение обеих частей системы (14) дает

$$k\varepsilon + \tilde{m}_{0,1} + \sum_{i=1}^k m_{0,i} = \sum_{i=1}^k \nu_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (d_i - m_{i,i+1}) + d_k.$$

Сравнивая эти два выражения, видим, что

$$4n^2 - 2\nu_0^2 \geq \sum_{i=1}^k m_{0,i} + \tilde{d}.$$

Утверждение леммы получается теперь из оценки для $\tilde{d}$:

$$\begin{aligned} 2\nu_0^2 &= D_1^0 \circ D_2^0 \circ E_0 \geq \varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{d}, \text{ если } l^0 - \text{“прямая”}; \\ 2\nu_0^2 &= D_1^0 \circ D_2^0 \circ E_0 \geq 2\varepsilon - \tilde{d}, \text{ если } l^0 - \text{“коника”}. \end{aligned}$$

Теперь все готово для нужных оценок. Итак, пусть l^0 – коника; неравенство (16) вместе с утверждением леммы дает

$$(k-1)\varepsilon > 4n^2k - 2n^2.$$

Предположение $k = 1$ немедленно приводит к противоречию: $0 > 2n^2$. Если же $k > 1$, то нетрудно видеть, что $\varepsilon > 2n^2$.

Пусть теперь l^0 – прямая. Тогда

$$k\varepsilon > 4n^2k - 2n^2 + \varepsilon^* + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)r_k}.$$

Так как $kr_k \leq \Sigma_0$, то

$$\varepsilon > 4n^2 - \frac{2n^2}{k} + \frac{\varepsilon^*}{k} + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)\Sigma_0}.$$

При $k = 1$ сразу получаем нужную оценку $\varepsilon - \varepsilon^* > 2n^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)\Sigma_0}$. При $k > 1$ необходимо еще учесть неравенство $\varepsilon + \varepsilon^* \leq 4n^2$.

Таким образом, нами доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Верны следующие оценки:

- (i) $\varepsilon > 2n^2$, если l^0 – “коника”;
- (ii) $\varepsilon - \varepsilon^* > 2n^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)\Sigma_0}$, если l^0 – “прямая”.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Линейная система $|D^0|$ не может иметь максимальных особенностей над точкой B_0 , через которую проходит “коника”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k = 1$, как мы только что видели, невозможен; при других значениях k получаем противоречие с неравенством (5).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Линейная система $|D^0|$ не может иметь максимальных особенностей над точкой B_0 , через которую проходит “прямая”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся приемом, который описан в работе [3]. Неравенство (10) влечет

$$\Sigma_1 > \frac{2n - \nu_1}{\nu_1 - n} \Sigma_0 + \frac{n - \nu_0}{\nu_1 - n} r_0.$$

Далее, положим $\nu_0 + \nu_1 = 3\theta$, $n/2 < \theta \leq n$, и рассмотрим вспомогательную функцию $\Lambda(t) = 4n^2 - 2n\mu - t^2 - (t - \mu)^2 - (2t - \mu)^2$.

Заметим, что $\Lambda(t)$ убывает при $t > n/2$ и что $\varepsilon - \varepsilon^* \leq \Lambda(\theta)$. Кроме того,

$$\Sigma_1 > \frac{2n - 2\theta}{2\theta - n} \Sigma_0 + \frac{n - \theta}{2\theta - n} r_0.$$

ЛЕММА. $\theta > \frac{2}{3}n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть не так. Тогда предыдущее неравенство для Σ_1 дает $\Sigma_1 > 2\Sigma_0 + r_0$, откуда

$$\varepsilon - \varepsilon^* > 2n^2 + \frac{\Sigma_1^2 n^2}{(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \frac{1}{2}r_0)\Sigma_0} \geq 2n^2 + \frac{2}{3}n^2 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} > \frac{10}{3}n^2.$$

С другой стороны, $\varepsilon - \varepsilon^* < \Lambda(\frac{n}{2}) \leq \frac{21}{8}n^2$. Противоречие.

Таким образом, $\theta > \frac{2}{3}n$. Но тогда

$$2n^2 < \varepsilon - \varepsilon^* \leq \Lambda\left(\frac{2}{3}n\right) \leq \frac{33}{18}n^2 < 2n^2.$$

Следствие доказано.

§ 5. Откручивание автоморфизмов

К этому моменту мы установили следующее: если $\chi: V \dashrightarrow W$ – бирациональный отображение на пробную пару (W, Y) , $|D| = \chi^{-1}|Y| \subset |nH|$ и $n > \alpha(W, Y)$, то существует прямая $B \subset V$ типа А или Б, в которой линейная система $|D|$ имеет максимальную особенность.

С другой стороны, в § 1 приводилась конструкция бирационального автоморфизма τ_B , естественным образом связанного с прямой B . Если мы теперь покажем, что $(\chi \circ \tau_B)^{-1}|Y| \subset |mH|$ и при этом $m < n$, то это будет означать, что для любого такого бирационального автоморфизма существуют прямые $B_1, \dots, B_k$, не обязательно все разные, что $(\chi \circ \tau_{B_1} \circ \dots \circ \tau_{B_k})^{-1}|Y| \subset |\alpha(W, Y)H|$.

Следующее предложение показывает, что это действительно так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $|D| \subset |nH|$ – подвижная линейная система, $n > 1$, имеющая максимальную особенность в прямой $B \subset V$ типа А или Б. Тогда $\tau_B^{-1}|D| \subset |mH|$ при $m < n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B^* – сопряженная с B прямая относительно морфизма двойного накрытия $\pi : V \rightarrow Q$. Положим $\nu = \text{mult}_B |D|$, $\nu > n$ по условию, и $\nu^* = \text{mult}_{B^*} |D|$.

Пусть B – прямая типа А. Тогда доказательство аналогичного утверждения в [1] дословно переносится в нашу ситуацию. При этом $\tau_B^{-1} |D| \subset |(9n - 8\nu)H|$ и, очевидно, $9n - 8\nu < n$.

Пусть теперь B – прямая типа Б, $\varphi_0 : V_0 \rightarrow V$ – раздутие особой точки $P \in V$, E_0 – исключительный дивизор, $B^0 = \varphi_0^{-1}(B)$ и $B^{*0} = \varphi_0^{-1}(B^*)$; далее, положим $\psi : \bar{V} \rightarrow V_0$ – последовательное раздутие сначала B^0 , а затем собственного прообраза B^{*0} , и обозначим $E = \psi^{-1}(B^0)$, $E^* = \psi^{-1}(B^{*0})$.

Рассмотрим Q_H – сечение Q общей гиперплоскостью в $\mathbb{P}^4$, проходящей через $\pi(B)$, $H = \pi^*(Q_H)$, $H^0 = \varphi_0^{-1}(H) = H^* - E_0$, $\bar{H} = \psi^{-1}(H^0) = H^* - E_0^* - E - E^*$.

Линейная система $|\bar{H}|$ задает морфизм $\varphi_{|\bar{H}|} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{P}^2$, который реализует $\bar{V}$ как расслоение на кривые арифметического рода один. Бирациональная инволюция $\bar{\tau}_B$ определяется, если слой неприводим, как послойное отражение относительно E^* (в смысле группового закона). Положим $Q_P = Q \cap \bar{T}_P Q$. Несмотря на то, что целое открытое подмножество в $\bar{E}_0 \cup \bar{Q}_P$, где $\bar{E}_0 = \psi^{-1}(E_0)$ и $\bar{Q}_P = (\pi \circ \varphi_0 \circ \psi)^{-1}(Q_P)$, составлено из приводимых слоев, существует такое открытое множество $U = \bar{V} \setminus \{\text{конечное множество кривых}\}$, на котором $\bar{\tau}_B$ бирегулярно.

Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть ограничение $\bar{\tau}_B$ на поверхность $\bar{S}$, где $\bar{S} = (\pi \circ \varphi_0 \circ \psi)^{-1}(Q_L)$, а Q_L – сечение Q общей гиперплоскостью $L \subset \mathbb{P}^4$, так что $Q_L \cap Q_P = l \cup l'$, l' – прямая, проходящая через точку P , и Q_L не содержит прямых типа А или Б, кроме l .

При таких условиях $\bar{S}$ – неособая КЗ поверхность; ограничение $\varphi_{|\bar{H}|}$ на $\bar{S}$ дает морфизм $\bar{g} : \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$, кривые $\bar{B} = E \cap \bar{S}$ и $\bar{B}^* = E^* \cap \bar{S}$ – сечения этого морфизма, причем $\psi(\bar{B}) = B^0$ и $\psi(\bar{B}^*) = B^{*0}$; наконец, все слои $\bar{g}$, кроме одного, неприводимы. Этот единственный приводимый слой есть $C_1 \cup C_2$, где $(\pi \circ \varphi_0 \circ \psi)(C_1) = l'$ и $C_2 = \bar{E}_0 \cap \bar{S}$. Заметим, что $\text{Pic}(\bar{S})$ порождается классами $H_{\bar{S}}^* = H^*|_{\bar{S}}$, $\bar{B}$, $\bar{B}^*$, C_1 и C_2 .

Очевидно, всякий бирациональный автоморфизм на $\bar{S}$ бирегулярен, так что $\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}$ продолжается до автоморфизма $\bar{S}$, а тем самым $\bar{\tau}_B$ бирегулярен на $\bar{V}$ вне коразмерности два.

Наша ближайшая задача – определить действие $\bar{\tau}_B$ на $\text{Pic}(\bar{V})$. Поскольку $\bar{S}$ инвариантна относительно $\bar{\tau}_B$, то вычисления достаточно проделать на $\text{Pic}(\bar{S})$.

Обозначим через X слой морфизма $\bar{g} : \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Мы имеем следующие соотношения в $\text{Pic}(\bar{S})$:

$$\begin{aligned} X^2 &= 0; \\ H_{\bar{S}}^{*2} &= 4; \\ \bar{B}^2 = \bar{B}^{*2} &= C_1^2 = C_2^2 = -2; \\ \bar{B} \circ \bar{B}^* &= \bar{B} \circ X = \bar{B} \circ C_2 = \bar{B}^* \circ X = \bar{B}^* \circ C_2 = 1; \\ \bar{B} \circ C_1 &= \bar{B}^* \circ C_1 = X \circ C_1 = X \circ C_2 = 0; \\ C_1 \circ C_2 &= 2. \end{aligned} \tag{17}$$

Ясно, что $\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(X) = X$ и $\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}^*) = \bar{B}^*$. Кроме того, учитывая, что $C_1 \cup C_2$ инвариантно относительно $\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}$, $C_1 + C_2 \sim X$, $C_1 \circ \bar{B}^* = 0$ и $C_2 \circ \bar{B}^* = 1$, выполнено $\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(C_1) = C_1$ и $\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(C_2) = C_2$.

Из этого вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) \circ \bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) &= -2; \\ \bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) \circ X &= 1; \\ \bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) \circ \bar{B}^* &= 1; \\ \bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) \circ C_1 &= 0; \\ \bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) \circ C_2 &= 1.\end{aligned}\tag{18}$$

Положим

$$\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) = \alpha X + \beta \bar{B} + \gamma \bar{B}^* + \delta C_1 + \varepsilon C_2.$$

Тогда из соотношений (17) и (18) следуют два возможных набора коэффициентов:

$$\begin{aligned}\beta &= 1, \quad \gamma = 0, \quad \varepsilon + \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon = \delta; \\ \beta &= -1, \quad \gamma = 2, \quad \varepsilon + \alpha = 6 \quad \text{и} \quad \varepsilon = \delta.\end{aligned}$$

Первый случай нам не интересен, так как тогда $\bar{\tau}_B|_{\bar{S}} = \text{id}|_{\bar{S}}$. Во втором случае, учитывая, что $C_1 + C_2 \sim X$, мы имеем

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(\bar{B}) &= 6H_S^* - 7\bar{B} - 4\bar{B}^* - 6C_2; \\ \bar{\tau}_B|_{\bar{S}}^*(H_S^*) &= 7H_S^* - 8\bar{B} - 4\bar{B}^* - 6C_2.\end{aligned}\tag{19}$$

Итак, $\bar{\tau}_B$ действует на $\text{Pic}(\bar{V})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_B^*(H^*) &= 7H^* - 8E - 4E^* - 6\bar{E}_0; \\ \bar{\tau}_B^*(E) &= 6H^* - 7E - 4E^* - 6\bar{E}_0; \\ \bar{\tau}_B^*(E^*) &= E^*; \\ \bar{\tau}_B^*(\bar{E}_0) &= \bar{E}_0.\end{aligned}\tag{20}$$

Далее, пусть $|\bar{D}|$ – собственный прообраз $|D|$ на $\bar{V}$. По условию

$$|\bar{D}| \subset |nH^* - \nu E - \nu^* E^* - \nu_0 \bar{E}_0|.$$

Из соотношений (20) получаем

$$\bar{\tau}_B^{-1}|\bar{D}| \subset |(7n - 6\nu)H^* - (8n - 7\nu)E - (4n - 4\nu + \nu^*)E^* - \nu_0 \bar{E}_0|.$$

Наконец, опуская все это на V , мы видим, что $\tau_B^{-1}|D| \subset |(7n - 6\nu)H|$ и $7n - 6\nu < n$. Предложение доказано.

§ 6. Окончание доказательства

Последнее, что нам осталось сделать для доказательства утверждений, сформулированных в § 1, — убедиться, что в группе $B(V) \subset \text{Bir}(V)$, порожденной всеми бирациональными инволюциями вида τ_B , нет соотношений. Действительно, из рассуждений предыдущего параграфа вытекает существование точной тройки

$$1 \longrightarrow B(V) \longrightarrow \text{Bir}(V) \longrightarrow \text{Aut}(V) \longrightarrow 1.$$

Если мы теперь докажем, что линейная система $|D|$ не может иметь одновременно две максимальные особенности, то тем самым докажем единственность процесса “раскрутки” любого бирационального автоморфизма (т.е. единственность представления $\chi = g \circ \tau_{B_1} \circ \dots \circ \tau_{B_k}$, где $g \in \text{Aut}(V)$), откуда и будет следовать, что $B(V)$ есть свободное произведение бирациональных инволюций.

Пусть линейная система $|D|$ имеет максимальные особенности в прямых B_1 и B_2 ; мы можем выделить четыре случая их взаимного расположения:

- а) $B_1 \neq B_2, B_1 \cap B_2 = \emptyset$;
- б) $B_1 \neq B_2, B_1 \cap B_2 = \text{точка}, B_1 \neq \delta(B_2)$, где δ — инволюция двойного накрытия;
- в) $B_1 \neq B_2, B_1 = \delta(B_2)$;
- г) $B_1 = B_2$, т.е. B_2 лежит “над” B_1 (центр бесконечно близкой особенности).

Все это фактически разобрано в [1]: случаи а) и г), а также б) и в) при условии, что точка пересечения не является особой, вообще переносятся без изменений в нашу ситуацию, а оставшиеся два случая, которые мы рассмотрим, отличаются разве что коэффициентами в формулах.

Случай б). Пусть $B_1 \cap B_2 = \{\text{особая точка}\}$. Рассмотрим линейную подсистему $|S| \subset |2H|$ на $|V|$ такую, что $\text{Bas } |S| \cap \text{Bas } |D| = B_1 \cup B_2 \cup \{\text{изолированные точки}\}$; ее непустота обеспечивается теоремой Римана–Роха (фактически $|S|$ занимается тем, что разделяет слои накрытия $\pi: V \rightarrow Q$). Пусть $\nu_i = \text{mult}_i |D| > n, i = 1, 2$, и $\psi: \bar{V} \rightarrow V$ — композиция раздутий сначала особой точки, а затем собственных прообразов B_1 и B_2 . Тогда для собственных прообразов на $\bar{V}$ мы имеем $\bar{D}^2 \circ \bar{S} \geq 0$. С другой стороны, несложно посчитать, что

$$\bar{D}^2 \circ \bar{S} = 8n^2 - 2\nu_0^2 - 3\nu_1^2 - 3\nu_2^2 - 2(n - \nu_0)(\nu_1 + \nu_2) < 0$$

при $0 \leq \nu_0 \leq n$. Получили противоречие.

Случай в). Пусть прямая $\pi(B_1) = \pi(B_2)$ проходит через особую точку на дивизоре ветвления, S — собственный прообраз общего гиперплоского сечения квадрики Q через эту прямую, $\psi: \bar{V} \rightarrow V$ — композиция раздутий, как выше. Опять таки, прямой подсчет дает

$$\bar{D}^2 \circ \bar{S} = 4n^2 - 2\nu_0^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - 2(n - \nu_0)(\nu_1 + \nu_2) - (\nu_1 - \nu_2)^2 < 0$$

при $0 \leq \nu_0 \leq n$, что противоречит требованию $\bar{D}^2 \circ \bar{S} \geq 0$.

Теорема, сформулированная в § 1, полностью доказана.

Список литературы

1. *Исковский В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–236.
2. *Исковский В. А., Манин Ю. А.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
3. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). № 4. С. 472–496.
4. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квартики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 1. С. 229–239.
5. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities // Warwick Preprints: 31/1996.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
17.02.1997