Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Онищик, О. В. Платонова, Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством. I, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 2, 111–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:40:42

УДК 515.177

А. Л. Онищик, О. В. Платонова

Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством. I

Изучаются однородные и четно-однородные комплексные супермногообразия размерности $n | m$, редукцией которых является комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$. Предполагая, что $m \leq n$, классифицируются все расщепимые супермногообразия этого типа и вычисляем их 1-когомологии со значениями в касательном пучке, инвариантные относительно проективной группы.

Библиография: 15 названий.

Введение

Изучение однородных комплексных супермногообразий было начато в 80-х годах Маниным, который построил супермногообразия флагов, связанные с различными сериями классических линейных супералгебр Ли (см. [1]). Имея в виду приложения к теоретической физике, Манин поставил и частично решил задачу классификации однородных комплексных супермногообразий вида $(Gr_{4,2}, \mathcal{O})$, где $Gr_{4,2}$ – грасманово многообразие 2-плоскостей в $\mathbb{C}^4$ или, иначе, модель Пенроуза (см. [1, гл. 5]). Представляется актуальной следующая задача: классифицировать все однородные комплексные супермногообразия вида $(M, \mathcal{O})$, где M – заданное флаговое комплексное многообразие, т.е. однородное пространство вида G/P , где G – комплексная группа Ли, P – ее параболическая подгруппа. В настоящей работе рассматривается случай, когда $M = \mathbb{CP}^n$ – комплексное проективное пространство.

Заметим, что известным примером является супермногообразие $\Pi Gr_{n+1|n+1,1|1}$ – Π -симметричный суперграсманиан $1 | 1$ -подпространств в $\mathbb{C}^{n+1|n+1}$, определенный в [1]. Отметим также, что ранее были получены следующие отдельные результаты: в [2] классифицированы все однородные супермногообразия вида $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ размерностей $1 | 1, 1 | 2, 1 | 3$; в [3] построено однопараметрическое семейство нерасщепимых однородных супермногообразий вида $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ размерности $1 | 4$.

Наряду с однородными, естественно рассматривать $\bar{0}$ -однородные (или четно-однородные) супермногообразия, т.е. супермногообразия $(M, \mathcal{O})$, группа автоморфизмов которых транзитивно действует на их редукции M . Основной целью работы является классификация четно-однородных супермногообразий $(M, \mathcal{O})$ размерности $n | m$, где $M = \mathbb{CP}^n$, $n \geq 2$ и $n \geq m$, а также вычисление их групп когомологий со значениями в касательном пучке. В первой части мы предполагаем, что $(M, \mathcal{O})$ расщепимо; в этом случае задача сводится к теории линейных

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-01263).

представлений. Мы проводим полную классификацию четно-однородных супермногообразий указанного типа и выделяем среди них однородные. Изучению наиболее интересного нерасщепимого случая будет посвящена вторая часть работы. Оно опирается на классификацию расщепимых однородных супермногообразий (M, θ) и на вычисление G -инвариантных 1-когомологий их касательного пучка, где $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ (при $n = 2r - 1$) – комплексная группа Ли, транзитивно действующая на $\mathbb{CP}^n$. Это вычисление также проводится в первой части работы в предположении, что $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ действует на (M, θ) в качестве группы автоморфизмов.

Результаты § 4 и § 5 анонсированы в [4], [5].

§ 1. Предварительные сведения

Термин “супермногообразие” мы употребляем в смысле Березина–Лейтеса, причем рассматривается комплексно-аналитический случай (см. [1]). Таким образом, *супермногообразием* размерности $n \mid m$ называется окольцованное пространство (M, θ) , где θ – пучок коммутативных комплексных супералгебр, локально изоморфное (с сохранением $\mathbb{Z}_2$ -градуировок) окольцованному пространству вида $(U, \bigwedge_{\mathcal{F}_n}(\xi_1, \dots, \xi_m))$, где U – открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $\mathcal{F}_n$ – пучок ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$. Пучок θ называется *структурным пучком*, а числа n и m – соответственно, *четной* и *нечетной* размерностями супермногообразия (M, θ) .

Супермногообразие (M, θ) называется *расщепимым*, если оно изоморфно супермногообразию вида $(M, \bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – локально свободный аналитический пучок на комплексном многообразии $(M, \mathcal{F})$. Структурный пучок расщепимого супермногообразия обладает $\mathbb{Z}$ -градуировкой

$$\theta = \bigoplus_{p=0}^m \theta_p, \quad \theta_p = \bigwedge_{\mathcal{F}}^p \mathcal{E}, \quad (1)$$

из которой заданная $\mathbb{Z}_2$ -градуировка получается приведением по модулю 2. В дальнейшем мы, как правило, будем опускать индекс $\mathcal{F}$ в обозначении внешних степеней и тензорных произведений аналитических пучков на $(M, \mathcal{F})$.

С любым супермногообразием (M, θ) можно связать некоторое расщепимое супермногообразие. Пусть $\mathcal{J} \subset \theta$ – подпучок идеалов, порожденный подпучком $\theta_{\bar{1}}$ нечетных элементов. Рассмотрим фильтрацию пучка θ

$$\theta = \mathcal{J}^0 \supset \mathcal{J}^1 \supset \mathcal{J}^2 \supset \dots \quad (2)$$

степенями пучка $\mathcal{J}$ и присоединенный градуированный пучок

$$\mathrm{gr} \theta = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{gr}_p \theta, \quad (3)$$

где

$$\mathrm{gr}_p \theta = \mathcal{J}^p / \mathcal{J}^{p+1}.$$

Оказывается, что $(M, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} = \mathrm{gr}_0 \theta$, – комплексное многообразие, а $\mathcal{E} = \mathrm{gr}_1 \theta$ – локально свободный аналитический пучок на нем. Более того, $\mathrm{gr} \theta \simeq \bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$, так

что $(M, \text{gr } \mathcal{O})$ – расщепимое супермногообразие. Будем называть его *ретрактом* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$.

Обозначим через $\mathcal{T} = \text{Der } \mathcal{O}$ пучок дифференцирований структурного пучка $\mathcal{O}$. Пучок $\mathcal{T}$ является пучком супералгебр Ли относительно скобки Ли

$$[u, v] = uv - (-1)^{p(u)p(v)}vu.$$

Он называется *касательным пучком*, а его сечения – *голоморфными векторными полями* на $(M, \mathcal{O})$. Пространство голоморфных векторных полей $\Gamma(M, \mathcal{T}) = \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ является супералгеброй Ли. Скобка Ли определяет также операцию $[\cdot, \cdot]$ в пространстве когомологий $H^*(M, \mathcal{T}) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(M, \mathcal{T})$, которое становится градуированной алгеброй.

Если $(M, \mathcal{O})$ расщепимо, то $\mathcal{T}$ является $\mathbb{Z}$ -градуированным пучком супералгебр Ли:

$$\mathcal{T} = \bigoplus_{p \geq -1} \mathcal{T}_p, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{T}_p = \text{Der}_p \mathcal{O} = \{\delta \in \mathcal{T} : \delta(\mathcal{O}_q) \subset \mathcal{O}_{q+p} \text{ для всех } q \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) = \bigoplus_{p \geq -1} \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_p$, где $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_p = \Gamma(M, \mathcal{T}_p)$, есть $\mathbb{Z}$ -градуированная супералгебра Ли. Градуировка возникает и в любой группе когомологий $H^p(M, \mathcal{T})$.

Вернемся к общему случаю и снабдим касательный пучок $\mathcal{T}$ супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ фильтрацией:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{(-1)} \supset \mathcal{T}_{(0)} \supset \cdots \supset \mathcal{T}_{(m)} \supset \mathcal{T}_{(m+1)} = 0, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{T}_{(p)} = \{\delta \in \mathcal{T} : \delta(\mathcal{O}) \subset \mathcal{J}^p, \delta(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}^{p+1}\}.$$

Тогда $[\mathcal{T}_{(p)}, \mathcal{T}_{(q)}] \subset \mathcal{T}_{(p+q)}$, т.е. $\mathcal{T}$ – фильтрованный пучок супералгебр Ли.

Каждый $v \in \mathcal{T}_{(p)}$ переводит $\mathcal{J}^q$ в $\mathcal{J}^{q+p}$ и индуцирует при этом элемент пучка $(\mathcal{T}_{\text{gr}})_p$, где $\mathcal{T}_{\text{gr}} = \text{Der}(\text{gr } \mathcal{O})$. Таким образом, возникает гомоморфизм пучков $\sigma_p: \mathcal{T}_{(p)} \rightarrow (\mathcal{T}_{\text{gr}})_p$. Можно показать (см. [6]), что для любого $p \geq -1$ мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{(p+1)} \longrightarrow \mathcal{T}_{(p)} \xrightarrow{\sigma_p} (\mathcal{T}_{\text{gr}})_p \longrightarrow 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что градуированный пучок супералгебр Ли $\mathcal{T}_{\text{gr}}$ изоморфен градуированному пучку $\text{gr } \mathcal{T}$, присоединенному к фильтрации (5). Если $(M, \mathcal{O})$ расщепимо, то фильтрация (5) пучка $\mathcal{T}$ совпадает с фильтрацией, ассоциированной с градуировкой (4), т.е.

$$\mathcal{T}_{(p)} = \bigoplus_{r \geq p} \mathcal{T}_r.$$

Переходя к сечениям, мы видим, что супералгебра Ли векторных полей $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ допускает фильтрацию, связанную с фильтрацией (5) касательного пучка:

$$\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) = \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(-1)} \supset \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(0)} \supset \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(1)} \supset \cdots,$$

где $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)} = \Gamma(M, \mathcal{T}_{(p)})$. Эта фильтрация определяет градуированную супералгебру Ли

$$\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O}) = \bigoplus_{p \geq -1} \tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_p,$$

где $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_p = \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)} / \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p+1)}$. Из (6) вытекает точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p+1)} \longrightarrow \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)} \xrightarrow{\sigma_p} \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})_p, \quad p \geq -1,$$

приводящая к инъективному гомоморфизму градуированных супералгебр Ли $\tilde{\sigma}: \tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O}) \rightarrow \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$.

Для расщепимых супермногообразий $(M, \wedge \mathcal{E})$ частичное описание пучка $\mathcal{T}_p$, $p \geq -1$, дает следующая точная последовательность локально свободных аналитических пучков на M (см. [6]):

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^* \otimes \bigwedge^{p+1} \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{T}_p \xrightarrow{\beta} \Theta \otimes \bigwedge^p \mathcal{E} \longrightarrow 0, \quad (7)$$

где $\Theta = \text{Deg } \mathcal{F}$ – касательный пучок многообразия M , отображение β сопоставляет каждому дифференцированию степени p его ограничение на подпучок $\mathcal{F}$, а α отождествляет любой гомоморфизм пучков $\mathcal{E} \rightarrow \bigwedge^{p+1} \mathcal{E}$ с продолжающим его дифференцированием степени p , равным 0 на $\mathcal{F}$.

В частности, для $p = -1$ отображение α определяет изоморфизм

$$\mathcal{T}_{-1} \simeq \mathcal{E}^*,$$

а в случае $p = 0$ мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{T}_0 \xrightarrow{\beta} \Theta \longrightarrow 0. \quad (8)$$

Пусть $\mathbf{E}$ – голоморфное векторное расслоение над M , соответствующее локально свободному пучку $\mathcal{E}$. Легко видеть, что $\mathcal{T}_0$ – пучок эндоморфизмов расслоения $\mathbf{E}$, а $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ – его подпучок, состоящий из ростков эндоморфизмов, сохраняющих каждый слой. Первые члены точной последовательности когомологий, соответствующей (8), имеют вид

$$0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{E}) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_0 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{v}(M), \quad (9)$$

где $\mathfrak{gl}(\mathbf{E}) = \Gamma(M, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E})$ – алгебра Ли эндоморфизмов расслоения $\mathbf{E}$, сохраняющих слои, и $\mathfrak{v}(M) = \Gamma(M, \Theta)$ – алгебра Ли голоморфных векторных полей на M , причем α и β – гомоморфизмы алгебр Ли. Если M компактно, то имеем также соответствующую точную последовательность комплексных групп Ли

$$e \longrightarrow \text{GL}(\mathbf{E}) \longrightarrow \text{Aut } \mathbf{E} \xrightarrow{\mu} \text{Bih } M, \quad (10)$$

где $\text{Aut } \mathbf{E}$ – группа автоморфизмов векторного расслоения $\mathbf{E}$, $\text{GL}(\mathbf{E})$ – ее нормальная подгруппа, состоящая из автоморфизмов, сохраняющих слои (*калибровочных преобразований*), и $d\mu = \beta$ (см. [6]). Заметим, что $\text{GL}(\mathbf{E})$ есть группа обратимых элементов ассоциативной алгебры $L(\mathbf{E})$ эндоморфизмов расслоения $\mathbf{E}$.

Отметим также, что алгебра $\mathfrak{gl}(\mathbf{E})$ (или $L(\mathbf{E})$) всегда ненулевая (при условии $m > 0$). Действительно, она всегда содержит тождественный эндоморфизм id . Векторное поле $\varepsilon = \alpha(\text{id})$ совпадает с градуирующим дифференцированием пучка $\mathcal{O}$, действующим по формуле

$$\varepsilon(f) = pf \quad \text{для } f \in \mathcal{O}_p.$$

Рассмотрим теперь важный для нас частный случай, когда $\mathbf{E} = \mathbf{T}(M)^*$ – кокасательное расслоение. В этом случае $\bigwedge \mathcal{E} = \Omega$ – градуированный пучок голоморфных форм на M . Описание пучка $\mathcal{T} = \text{Der } \Omega$ хорошо известно (см., например, [7]). В частности, точные последовательности (7) в этом случае расщепляются, т.е. существуют такие гомоморфизмы пучков векторных пространств $l: \Theta \otimes \Omega^p \rightarrow \mathcal{T}$, что $\beta l = \text{id}$. Таким образом,

$$\mathcal{T}_p = \alpha(\Theta \otimes \Omega^{p+1}) \oplus l(\Theta \otimes \Omega^p) \simeq \Theta \otimes \Omega^{p+1} \oplus \Theta \otimes \Omega^p. \quad (11)$$

Пусть $(M, \mathcal{O})$ – некоторое супермногообразие, $x \in M$. Обозначим через m_x максимальный идеал локальной супералгебры $\mathcal{O}_x$. $\mathbb{Z}_2$ -градуированное пространство $T_x(M, \mathcal{O}) = (m_x/m_x^2)^*$ называется *касательным пространством к $(M, \mathcal{O})$ в точке x* . Обозначая через n_x максимальный идеал локальной алгебры $\mathcal{F}_x$, где $\mathcal{F} = \mathcal{O}/\mathcal{J}$, мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_x \longrightarrow m_x \longrightarrow n_x \longrightarrow 0.$$

Из нее вытекает следующая точная последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_x/m_x \mathcal{J}_x \longrightarrow m_x/m_x^2 \longrightarrow n_x/n_x^2 \longrightarrow 0.$$

Векторное расслоение $\mathbf{E}$, соответствующее супермногообразию $(M, \mathcal{O})$, имеет в точке x слой $\mathcal{J}_x/m_x \mathcal{J}_x = E_x$. Поскольку $T_x(M) = (n_x/n_x^2)^*$ есть касательное пространство к M в точке x , получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow T_x(M) \xrightarrow{i} T_x(M, \mathcal{O}) \xrightarrow{p} E_x^* \longrightarrow 0.$$

Очевидно, $i: T_x(M) \rightarrow T_x(M, \mathcal{O})_{\bar{0}}$ и $p: T_x(M, \mathcal{O})_{\bar{1}} \rightarrow E_x^*$ – изоморфизмы векторных пространств.

Рассмотрим теперь вместо супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ его ретракт $(M, \text{gr } \mathcal{O})$. Максимальный идеал локальной супералгебры $(\text{gr } \mathcal{O})_x = \mathcal{F}_x \oplus \bigoplus_{q \geq 1} \bigwedge^q \mathcal{E}_x$ имеет вид

$$\tilde{m}_x = n_x \oplus \bigoplus_{q \geq 1} \bigwedge^q \mathcal{E}_x,$$

причем

$$\tilde{m}_x^2 = n_x^2 \oplus n_x \mathcal{E}_x \oplus \bigoplus_{q \geq 2} \bigwedge^q \mathcal{E}_x.$$

Отсюда $\tilde{m}_x/\tilde{m}_x^2 = n_x/n_x^2 \oplus E_x$, так что

$$T_x(M, \text{gr } \mathcal{O}) = T_x(M) \oplus E_x^*.$$

Очевидно, в этом случае i и p – это вложение $T_x(M) \rightarrow T_x(M, \text{gr } \mathcal{O})$ и проекция $T_x(M, \text{gr } \mathcal{O}) \rightarrow E_x^*$, соответственно.

Заметим, что любое дифференцирование $\delta \in T_x$ удовлетворяет условию $\delta(m_x^2) \subset m_x$ и потому определяет линейное отображение $\hat{\delta}: m_x/m_x^2 \rightarrow \mathcal{O}_x/m_x = \mathbb{C}$. Это позволяет определить четное линейное отображение $\text{ev}_x: \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \rightarrow T_x(M, \mathcal{O})$ формулой

$$\text{ev}_x(v) = \hat{v}_x,$$

причем $\hat{v}_x$ называется *значением* векторного поля v в точке x . Заметим, что (в противоположность классическому случаю) поле v , вообще говоря, не определяется однозначно своими значениями во всех точках $x \in M$.

Для любого голоморфного векторного расслоения $\mathbf{E} \rightarrow M$ будем обозначать тем же символом ev_x отображение пространства его голоморфных сечений $\Gamma(\mathbf{E})$ в слой E_x , $x \in M$, сопоставляющее каждому сечению s его значение $s(x) \in E_x$ в точке x .

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – некоторое супермногообразие, $x \in M$. Тогда

(1) имеем

$$\text{ev}_x(\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)}) = 0, \quad \text{если } p \geq 1;$$

(2) следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(0)} & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})_0 & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{v}(M) \\ \text{ev}_x \downarrow & & \downarrow \text{ev}_x & & \downarrow \text{ev}_x \\ T_x(M, \mathcal{O}) & \xleftarrow{i \oplus 0} & T_x(M) \oplus E_x^* & \xleftarrow{i} & T_x(M) \end{array} \quad (12)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\sigma_{-1}} & \mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})_{-1} & \xleftarrow{\alpha} & \Gamma(E_x^*) \\ \text{ev}_x \downarrow & & \downarrow \text{ev}_x & & \downarrow \text{ev}_x \\ T_x(M, \mathcal{O}) & \xrightarrow{0 \oplus p} & T_x(M) \oplus E_x^* & \xrightarrow{p} & E_x^* \end{array} \quad (13)$$

§ 2. Транзитивные действия на супермногообразиях

Пусть $M = (M, \mathcal{F})$ – связное комплексное многообразие. С каждым голоморфным действием Φ комплексной группы Ли G на M связано действие ее касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. гомоморфизм $d\Phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{v}(M)$. Как известно из теории групп Ли, действие Φ транзитивно тогда и только тогда, когда действие $d\Phi$ транзитивно в том смысле, что отображение $\text{ev}_x(d\Phi): \mathfrak{g} \rightarrow T_x(M)$ сюръективно для всех $x \in M$. Мы введем теперь аналогичным образом понятие транзитивного действия на супермногообразии, используя язык супералгебр Ли (см. [2], [3]).

Действием комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{s}$ на комплексном супермногообразии $(M, \mathcal{O})$ называется любой гомоморфизм $\psi: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$. При рассмотрении действий мы обычно будем предполагать, что M связно и компактно и что

$\dim \mathfrak{s} < \infty$. Заметим, что из компактности многообразия M вытекает, что $\dim \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) < \infty$.

Пусть $(M, \mathcal{O})$ расщепимо. Действие ψ супералгебры Ли $\mathfrak{s}$ на $(M, \mathcal{O})$ называется *градуированным*, если $\mathfrak{s} - \mathbb{Z}$ -градуированная супералгебра Ли и ψ — гомоморфизм $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр.

Если задано действие $\psi: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$, то с любым $x \in M$ связывается четное линейное отображение $\psi^x = \text{ev}_x \psi: \mathfrak{s} \rightarrow T_x(M, \mathcal{O})$. Множество $\mathfrak{s}_x = \text{Ker } \psi^x$ есть подалгебра в $\mathfrak{s}$, называемая *стабилизатором* точки x . Действие ψ называется *транзитивным*, если ψ^x сюръективно для любого $x \in M$. В этом случае мы говорим, что $(M, \mathcal{O})$ — однородное пространство супералгебры Ли $\mathfrak{s}$. Действие ψ называется $\bar{0}$ -*транзитивным* (или *четно-транзитивным*), если четная компонента $\psi_{\bar{0}}^x: \mathfrak{s}_{\bar{0}} \rightarrow T_x(M, \mathcal{O})_{\bar{0}} = T_x(M)$ отображения ψ^x сюръективна для любого $x \in M$. Очевидно, транзитивное действие всегда $\bar{0}$ -транзитивно.

Пусть $(M, \mathcal{O})$ — супермногообразие, причем M компактно. Тогда имеется естественное действие $\psi = \text{id}$ конечномерной супералгебры Ли $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ на $(M, \mathcal{O})$. Супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ называется *однородным* (соответственно, $\bar{0}$ -*однородным* или *четно-однородным*), если это действие транзитивно (соответственно, $\bar{0}$ -транзитивно). Это значит, что отображение $\text{ev}_x: \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \rightarrow T_x(M, \mathcal{O})$ (соответственно, четная компонента этого отображения) сюръективно для любого $x \in M$.

Предположим, что задано действие ψ супералгебры Ли $\mathfrak{s}$ на супермногообразии $(M, \mathcal{O})$. Мы хотим определить некоторое градуированное действие на расщепимом супермногообразии $(M, \text{gr } \mathcal{O})$. Для этого заметим, что фильтрация (5) порождает фильтрацию

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{(-1)} \supset \mathfrak{s}_{(0)} \supset \cdots \supset \mathfrak{s}_{(m)} \supset \mathfrak{s}_{(m+1)} = 0, \quad (14)$$

где

$$\mathfrak{s}_{(p)} = \mathfrak{s} \cap \psi^{-1}(\Gamma(M, \mathcal{F}_{(p)})).$$

Очевидно, $\mathfrak{s}$ становится фильтрованной супералгеброй Ли, а ψ определяет гомоморфизм $\tilde{\psi}$ соответствующей градуированной супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{s}}$ в градуированную супералгебру Ли $\mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})$, т.е. градуированное действие супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{s}}$ на $(M, \text{gr } \mathcal{O})$. При этом для любого $p \geq -1$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{s}_{(p)} & \xrightarrow{\pi_p} & \tilde{\mathfrak{s}}_p \\ \psi \downarrow & & \downarrow \tilde{\psi} \\ \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)} & \xrightarrow{\sigma_p} & \mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})_p, \end{array} \quad (15)$$

где $\pi_p: \mathfrak{s}_{(p)} \rightarrow \tilde{\mathfrak{s}}_p$ — естественное отображение.

В частности, если рассматривать естественное действие $\psi = \text{id}$ супералгебры Ли $\mathfrak{s} = \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ на компактном супермногообразии $(M, \mathcal{O})$, то $\mathfrak{s}_{(p)} = \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)}$, а градуированная супералгебра Ли $\tilde{\mathfrak{s}}$ совпадает с супералгеброй $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$, определенной в §1. При этом $\tilde{\psi}$ — это определенный там же инъективный гомоморфизм $\tilde{\sigma}: \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \rightarrow \mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})$. В дальнейшем мы обычно будем отождествлять $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})$ с образом этого гомоморфизма в $\mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого действия ψ супералгебры Ли $\mathfrak{s}$ на супермногообразии $(M, \mathcal{O})$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) *действие ψ транзитивно;*
- (2) *действие $\tilde{\psi}$ супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{s}}$ на супермногообразии $(M, \text{gr } \mathcal{O})$ транзитивно;*
- (3) *ограничение действия $\tilde{\psi}$ на подалгебру $\tilde{\mathfrak{s}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{s}}_0 \subset \tilde{\mathfrak{s}}$ транзитивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x \in M$. Из коммутативных диаграмм (12) и (15) следует, что

$$\psi^x(\mathfrak{s}_{(0)}) = (i \oplus 0)\tilde{\psi}^x(\tilde{\mathfrak{s}}_0).$$

Поскольку $\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_{(0)}$, мы видим, что ψ_0^x сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективно $\tilde{\psi}^x: \tilde{\mathfrak{s}}_0 \rightarrow T_x(M)$. Аналогично, используя (13) и (15), убеждаемся в том, что ψ_1^x сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективно $\tilde{\psi}^x: \tilde{\mathfrak{s}}_{-1} \rightarrow E_x^*$. Отсюда видна эквивалентность утверждений (1) и (3). То, что (3) эквивалентно (2), следует из предложения 1 (1).

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого компактного супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) *супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ однородно;*
- (2) *подалгебра $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O}) \subset \mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})$ транзитивно действует на $(M, \text{gr } \mathcal{O})$;*
- (3) *подалгебра $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_0 \subset \tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})$ транзитивно действует на $(M, \text{gr } \mathcal{O})$.*

В частности, из однородности супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ следует однородность его ретракта $(M, \text{gr } \mathcal{O})$.

Очевидно, справедливы также аналогичные утверждения, касающиеся $\bar{0}$ -транзитивных действий.

ТЕОРЕМА 1'. *Для любого действия ψ супералгебры Ли $\mathfrak{s}$ на супермногообразии $(M, \mathcal{O})$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) *действие ψ является $\bar{0}$ -транзитивным;*
- (2) *действие $\tilde{\psi}$ является $\bar{0}$ -транзитивным;*
- (3) *действие $\beta\tilde{\psi}$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{s}}_0$ на M транзитивно.*

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого компактного супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) *супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ $\bar{0}$ -однородно;*
- (2) *супералгебра Ли $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})$ действует на $(M, \text{gr } \mathcal{O})$ $\bar{0}$ -транзитивно;*
- (3) *алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_0$ действует на M транзитивно.*

В частности, из $\bar{0}$ -однородности компактного супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ следуют $\bar{0}$ -однородность его ретракта $(M, \text{gr } \mathcal{O})$ и однородность многообразия M .

§3. Однородные векторные расслоения

Пусть $\mathbf{E}$ – голоморфное векторное расслоение над связным компактным комплексным многообразием M . Тогда имеется естественный гомоморфизм комплекс-

ных групп Ли $\mu: \text{Aut } \mathbf{E} \rightarrow \text{Bih } M$, входящий в (10). Расслоение $\mathbf{E}$ называется *однородным*, если действие μ группы $\text{Aut } \mathbf{E}$ на M транзитивно. В этом случае M – компактное комплексное однородное многообразие.

Предположим, что задан некоторый гомоморфизм $\Phi: G \rightarrow \text{Aut } \mathbf{E}$ такой, что действие $\mu\Phi$ группы G на M транзитивно. Тогда $\mathbf{E}$ однородно. Будем говорить, что $\mathbf{E}$ *однородно относительно Φ* (или *относительно G*). Пусть $o \in M$ и $P = G_o$ – стабилизатор точки o в G . Группа P естественно действует в слое $E = E_o$, т.е. возникает голоморфное линейное представление $\varphi: P \rightarrow \text{GL}(E)$. Известно, что расслоение $\mathbf{E}$ полностью определяется группой G , ее подгруппой P и представлением φ , причем эти три объекта могут выбираться произвольно. При этом имеются естественные отождествления $M = G/P$ и $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi = G \times_\varphi E = (G \times E)/P$, где P действует на $G \times E$ по формуле

$$p(g, \xi) = (gp^{-1}, \varphi(p)\xi), \quad g \in G, \quad p \in P, \quad \xi \in E.$$

Проекция расслоения $p: \mathbf{E}_\varphi \rightarrow M = G/P$ определяется формулой

$$p(\overline{g, \xi}) = gP,$$

где $(\overline{g, \xi}) \in \mathbf{E}_\varphi$ – P -орбита пары (g, ξ) . Группа G действует на $\mathbf{E}_\varphi$ по формуле

$$h(\overline{g, \xi}) = (\overline{hg, \xi}), \quad g, h \in G, \quad \xi \in E. \quad (16)$$

Отметим также, что стандартным операциям над представлениями отвечают аналогичные операции над расслоениями с одной и той же базой. В частности,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi^*} &= \mathbf{E}_\varphi^*, & \mathbf{E}_{\varphi_1 + \varphi_2} &= \mathbf{E}_{\varphi_1} \oplus \mathbf{E}_{\varphi_2}, \\ \mathbf{E}_{\varphi_1 \varphi_2} &= \mathbf{E}_{\varphi_1} \otimes \mathbf{E}_{\varphi_2}, & \mathbf{E}_{\bigwedge^q \varphi} &= \bigwedge^q \mathbf{E}_\varphi. \end{aligned}$$

Пространство голоморфных сечений $\Gamma(\mathbf{E})$ G -однородного векторного расслоения обладает естественной структурой G -модуля. Она задается формулой

$$(gs)(x) = \Phi(g)(s(g^{-1}x)), \quad g \in G, \quad s \in \Gamma(\mathbf{E}), \quad x \in M.$$

Таким образом, по определению

$$\text{ev}_x(gs) = \Phi(g)(\text{ev}_{g^{-1}x}(s)). \quad (17)$$

В частности, отображение $\text{ev}_o: \Gamma(\mathbf{E}) \rightarrow E_o$ является P -эквивариантным.

Будем говорить, что расслоение $\mathbf{E}$ *порождается подпространством $V \subset \Gamma(\mathbf{E})$* , если отображение $\text{ev}_x: V \rightarrow E_x$ сюръективно для любого $x \in M$. В случае, когда $V = \Gamma(\mathbf{E})$, мы говорим, что расслоение $\mathbf{E}$ *порождается сечениями*.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ψ – градуированное действие супералгебры Ли $\mathfrak{s}$ на расслоении $\mathbf{E}$ супермногообразия $(M, \mathcal{O})$, где пучок $\mathcal{O} = \bigwedge \mathcal{E}$ определяется голоморфным векторным расслоением $\mathbf{E} \rightarrow M$. Тогда

- (1) действие ψ $\bar{0}$ -транзитивно тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ однородно относительно односвязной группы Ли S_0 с касательной алгеброй $\mathfrak{s}_0$;
- (2) $\bar{0}$ -транзитивное действие ψ транзитивно тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}^*$ порождается подпространством $V = \alpha^{-1}(\psi(\mathfrak{s}_{-1})) \subset \Gamma(\mathbf{E}^*)$. При этом достаточно, чтобы отображение $\text{ev}_o: V \rightarrow E_o^*$ было сюръективным для одной фиксированной точки $o \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Psi: S_0 \rightarrow \text{Aut } \mathbf{E}$ – такой гомоморфизм групп Ли, что $d\Psi = \psi$. Тогда имеем последовательность гомоморфизмов

$$S_0 \xrightarrow{\Psi} \text{Aut } \mathbf{E} \xrightarrow{\mu} \text{Bih } M.$$

Поскольку $d(\mu\Psi) = \beta\psi$, утверждение (1) следует из теоремы 1'.

Из коммутативности диаграммы (13) следует, что $\text{ev}_x(V) = p(\psi^x(\mathfrak{s}_{-1}))$. Значит, $\psi^x: \mathfrak{s}_{-1} \rightarrow T_x((M, \mathcal{O}))_{\bar{1}}$ сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективно $\text{ev}_x: V \rightarrow E_x^*$. Покажем, что из сюръективности последнего отображения для фиксированной точки $x = o \in M$ вытекает его сюръективность для всех $x \in M$.

Заметим, что расслоение $\mathbf{E}^*$ является однородным относительно действия $g \mapsto (\Psi(g)^*)^{-1}$ группы S_0 . В силу (17) для доказательства нашего утверждения достаточно доказать, что V инвариантно относительно S_0 .

Пусть Ad – присоединенное представление группы S_0 в $\mathfrak{s}$. Легко видеть, что

$$\psi((\text{Ad } g)u) = \Psi(g)\psi(u)\Psi(g)^{-1}, \quad g \in S_0, \quad u \in \mathfrak{s}. \quad (18)$$

С другой стороны, легко проверить, что $\alpha: \Gamma(\mathbf{E}^*) \rightarrow \mathfrak{v}_{-1}(M, \mathcal{O})$ есть изоморфизм S_0 -модулей, если определить в $\mathfrak{v}_{-1}(M, \mathcal{O})$ представление группы S_0 по формуле

$$v \mapsto \Psi(g)v\Psi(g)^{-1}, \quad v \in \mathfrak{v}_{-1}(M, \mathcal{O}), \quad g \in S_0.$$

В силу (18) отсюда видно, что V инвариантно.

СЛЕДСТВИЕ. *Расщепимое супермногообразие $(M, \wedge \mathcal{E})$ является $\bar{0}$ -однородным тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ – однородное векторное расслоение. При этом условии $(M, \wedge \mathcal{E})$ однородно тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}^*$ порождается сечениями или, что равносильно, когда $\text{ev}_o: \Gamma(\mathbf{E}^*) \rightarrow E_o^*$ сюръективно для некоторой фиксированной точки $o \in M$.*

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда M – флаговое многообразие, т.е. когда M однородно и стабилизаторы $(\text{Bih } M)_x^\circ \subset (\text{Bih } M)^\circ$, $x \in M$, являются параболическими подгруппами (см. [8], [9]). Тогда группа $\text{Bih } M$ и любая ее транзитивная подгруппа суть полупростые группы Ли. Пусть $\mathbf{E} \rightarrow M$ – однородное векторное расслоение и пусть $Q = \mu((\text{Aut } \mathbf{E})^\circ)$. Тогда Q транзитивна на M и, следовательно, полупроста. Согласно теореме Леви в $\text{Aut } \mathbf{E}$ существует такая связная подгруппа Ли G , что $\mu: G \rightarrow Q$ – локальный изоморфизм. Таким образом, $\mathbf{E}$ однородно относительно связной полупростой группы Ли G , локально эффективно действующей на M .

Из доказанного выше видно, что описание однородных расщепимых супермногообразий $(M, \mathcal{O})$ с флаговым многообразием M сводится к следующей задаче. Пусть $M = G/P$, где G – связная полупростая группа Ли, P – ее параболическая подгруппа, не содержащая простых факторов группы G , $\varphi: P \rightarrow \text{GL}(E)$ – голоморфное линейное представление. При каких условиях на φ однородное расслоение $\mathbf{E}_\varphi$ порождается сечениями? Ответ на этот вопрос дан в работе [10]. Мы сформулируем его в случае, когда φ вполне приводимо (доказательство в этом случае, основанное на теореме Бореля–Вейля–Ботта, см. в [6, лемма 7]).

Введем сначала необходимые понятия и обозначения. Выберем в группе G максимальный тор T и обозначим через $\mathfrak{t}$ соответствующую картановскую подалгебру в ее касательной алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть Δ – система корней, связанная с T , и пусть выбрана подсистема положительных корней $\Delta_+ \subset \Delta$. Обозначим через Π соответствующую систему простых корней.

В $\mathfrak{g}$, как обычно, рассматривается невырожденное G -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, индуцирующее невырожденное скалярное произведение в $\mathfrak{t}^*$, инвариантное относительно группы Вейля W . Пусть $\{h_\alpha : \alpha \in \Delta\} \subset \mathfrak{t}$ – двойственная к Δ система корней, тогда $\beta(h_\alpha) = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ для любого $\beta \in \mathfrak{t}^*$. Элемент $\beta \in \mathfrak{t}^*$ называется *весом*, если $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Delta$. Вес β называется *доминантным*, если $\beta(h_\alpha) \geq 0$ для всех $\alpha \in \Delta_+$, и *строго доминантным*, если $\beta(h_\alpha) > 0$ для всех $\alpha \in \Delta_+$.

Обозначим через $\mathfrak{g}_\alpha$ корневое подпространство в $\mathfrak{g}$, отвечающее корню $\alpha \in \Delta$. Если R – подгруппа Ли в G , нормализуемая тором T , то ее касательная подалгебра $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ имеет вид

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{t}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(R)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\Delta(R) \subset \Delta$ – замкнутая подсистема, называемая *системой корней подгруппы* R . В частности, выбор системы положительных корней Δ_+ определяет две борелевские (максимальные разрешимые) подгруппы $B_\pm$ в G , содержащие T , с системами корней $\Delta(B_\pm) = \pm\Delta_+$.

Пусть P – параболическая подгруппа группы G , т.е. подгруппа, содержащая борелевскую подгруппу. В дальнейшем мы будем считать, что P содержит подгруппу B_- , соответствующую системе отрицательных корней $\Delta_- = -\Delta_+$. Как известно (см. [8], [9]), в этом случае $\Delta(P) = \Delta_- \cup [\Sigma]$, где $[\Sigma]$ – множество всех корней группы G , линейно выражающихся через подмножество $\Sigma \subset \Pi$. Имеется полупрямое разложение

$$P = H \ltimes N_-,$$

где H – максимальная редуктивная подгруппа, а N_- – унитарный радикал группы P . При этом

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= [\Sigma], \\ \Delta(N_-) &= \Delta_- \setminus [\Sigma] \end{aligned}$$

и Σ совпадает с системой простых корней группы H , соответствующей ее борелевской подгруппе $B_+ \cap H$. Обозначим через N_+ унитарную подгруппу с системой корней $\Delta(N_+) = -\Delta(N_-)$. Тогда для соответствующих алгебр Ли имеем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}, \\ \mathfrak{g} &= \mathfrak{p} + \mathfrak{n}_+ \text{ (прямая сумма векторных пространств)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что T является максимальным тором и в P . Всякий вес представления φ группы P является весом в указанном выше смысле. Представление φ вполне приводимо тогда и только тогда, когда оно тривиально на N_- ; в этом случае оно полностью определяется представлением $\varphi|_H$. Старший вес последнего

представления понимается относительно упорядочения, соответствующего борелевской подгруппе $B_+ \cap H$. В дальнейшем мы будем писать для краткости $N = N_-$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_-$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть φ вполне приводимо. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- (1) расслоение $\mathbf{E}_\varphi$ порождается сечениями;
- (2) все старшие веса представления φ доминантны.

Используя следствие из теоремы 2, получаем отсюда следующий критерий однородности.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M = G/P$, где G — связная полупростая группа Ли, P — ее параболическая подгруппа, содержащая B_- , причем G действует на M локально эффективно, $\varphi: P \rightarrow \mathrm{GL}(E)$ — вполне приводимое голоморфное линейное представление. Расщепимое супермногообразие $(M, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$ однородно тогда и только тогда, когда все старшие веса представления φ^* доминантны.

Опишем строение группы G и подгруппы P в случае, когда $M = \mathbb{CP}^n$. Пусть $\mathbf{E} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ — однородное векторное расслоение. Как известно, группа $\mathrm{Bih} \mathbb{CP}^n$ естественно изоморфна проективной группе $\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Далее, $Q = \mu(\mathrm{Aut} \mathbf{E})$ — подгруппа Ли в $\mathrm{Bih} \mathbb{CP}^n$, транзитивная на $\mathbb{CP}^n$. Как известно (см. [9, § 15]), возможны следующие два случая:

- 1) $Q = \mathrm{Bih} \mathbb{CP}^n = \mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{C})$;
- 2) $n = 2r - 1$ нечетно и $Q = \mathrm{PSp}_{2r}(\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C}) / \{E, -E\}$.

В первом случае можно взять в качестве G односвязную группу Ли $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, а во втором — ее подгруппу $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$. При этом можно считать, что $\mu\Phi$ — естественное проективное действие группы G на $\mathbb{CP}^n$. В однородных координатах оно задается формулой

$$(A, u) \mapsto A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A \in G, \quad u = (u_1 : \dots : u_{n+1}) \in \mathbb{CP}^n.$$

В качестве o выберем точку $(0 : \dots : 1)$. Опишем стабилизатор $P = G_o$ и соответствующую подалгебру $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$.

Пусть сначала $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Тогда P состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ a & \det^{-1} A \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad a \in \mathbb{C}^n. \quad (20)$$

Выберем в качестве T подгруппу всех диагональных матриц из G . Соответствующая картановская подалгебра $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ состоит из диагональных матриц

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 0. \quad (21)$$

Система корней относительно T имеет вид

$$\Delta = \{\lambda_i - \lambda_j : i \neq j\}.$$

Положим

$$\Delta_+ = \{\lambda_i - \lambda_j : i < j\}.$$

Тогда система простых корней имеет вид

$$\Pi = \{\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} : i = 1, \dots, n\}.$$

Очевидно, соответствующая подгруппа Бореля B_- – это подгруппа всех нижних треугольных матриц; она содержится в P . Легко видеть также, что

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det^{-1} A \end{pmatrix} \right\}.$$

Соответствие $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det^{-1} A \end{pmatrix}$ отождествляет H с $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -\mathrm{tr} X \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \\ \mathfrak{n} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Имеем также

$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}.$$

Теперь рассмотрим случай $G = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, $n = 2r$. Алгебра Ли $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$ этой группы есть подалгебра в $\mathfrak{sl}_{2r}(\mathbb{C})$, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} U & V \\ W & -U^\top \end{pmatrix}, \quad U, V, W \in \mathfrak{gl}_r(\mathbb{C}), \quad V^\top = V, \quad W^\top = W.$$

В этом случае, во избежание путаницы, мы будем обозначать описанные выше подгруппы $T, P, H, N \subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ через $\tilde{T}, \tilde{P}, \tilde{H}, \tilde{N}$, а их алгебры Ли через $\tilde{\mathfrak{t}}, \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{n}}$, соответственно. Тогда

$$P = \tilde{P} \cap \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C}), \quad \mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C}),$$

так что $\mathfrak{p}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} X & x & Y & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ Z & z & -X^\top & 0 \\ z^\top & a & -x^\top & -b \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $Y^\top = Y$, $Z^\top = Z$.

Подгруппа $T = \tilde{T} \cap G$ является максимальным тором в $G = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$. Подалгебра Картана $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$ выделяется в $\tilde{\mathfrak{t}}$ уравнениями $\lambda_{r+1} = -\lambda_1, \dots, \lambda_{2r} = -\lambda_r$. Введем в $\mathfrak{t}$ координаты

$$\mu_1 = \lambda_r, \quad \mu_2 = \lambda_2, \quad \dots, \quad \mu_{r-1} = \lambda_{r-1}, \quad \mu_r = \lambda_1,$$

являющиеся весами стандартного представления группы $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$. Система корней этой группы имеет вид

$$\Delta = \{\mu_i - \mu_j, \mu_i + \mu_j, 2\mu_i : i \neq j\}.$$

Выберем в качестве системы положительных корней этой группы

$$\Delta_+ = \{\mu_i - \mu_j, \mu_i + \mu_j, 2\mu_i : i < j\}.$$

Тогда

$$\Pi = \{\beta_1 = \mu_1 - \mu_2, \dots, \beta_{r-1} = \mu_{r-1} - \mu_r, \beta_r = 2\mu_r\}.$$

Легко проверить, что подалгебра $\mathfrak{p}$ содержит борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}_-$, отвечающую системе отрицательных корней Δ_- . Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ z^\top & a & -x^\top & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{h} &= \tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 & Y & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ Z & 0 & -X^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \right\}, \\ \Sigma &= \{\beta_2, \dots, \beta_r\}. \end{aligned}$$

Отметим также, что

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{z},$$

где $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \simeq \mathfrak{sp}_{2r-2}(\mathbb{C})$ выделяется в $\mathfrak{h}$ условием $b = 0$, а $\mathfrak{z} = \langle y_0 \rangle$, $y_0 = E_{rr} - E_{2r,2r}$, — одномерный центр в $\mathfrak{h}$. Очевидно,

$$\mathrm{rad} \mathfrak{p} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{z}.$$

Обозначая через N , H , H' , Z соответствующие связные подгруппы Ли в $G = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, имеем

$$H = H' \times Z, \quad H' \simeq \mathrm{Sp}_{2r-2}(\mathbb{C}), \quad B \simeq \mathbb{C}^\times, \quad \mathrm{Rad} P = N \rtimes Z.$$

При этом N — унипотентный радикал, а H — редуктивная подалгебра в P .

§4. Расщепимые супермногообразия, $\bar{0}$ -однородные относительно $SL_{n+1}(\mathbb{C})$

В этом и следующем параграфах мы дадим классификацию $\bar{0}$ -однородных расщепимых супермногообразий вида $(\mathbb{CP}^n, \bigwedge \mathcal{E})$, где нечетная размерность $m \leq n$. Будем называть такое супермногообразие $\bar{0}$ -однородным относительно $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ или $Sp_{2r}(\mathbb{C})$, $2r = n+1$, если соответствующее расслоение $\mathbf{E}$ однородно относительно G .

Здесь мы рассмотрим случай $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$. Тогда P задается формулой (20). Опишем представления этой группы, имеющие размерность $m \leq n$. Обозначим через ρ стандартное линейное представление группы $H = GL_n(\mathbb{C})$ и через d характер $d(A) = \det A$ этой группы. Теми же буквами обозначим продолжения этих представлений на P , равные 1 на N .

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi: P \rightarrow GL(E)$ – голоморфное линейное представление размерности $m \leq n$. Тогда φ вполне приводимо и верно одно из следующих утверждений:

- (1) справедливо равенство $m = n$ и φ – неприводимое представление, причем либо

$$\varphi \simeq \rho d^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (23)$$

либо

$$\varphi \simeq \rho^* d^k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (24)$$

- (2) представление φ разлагается в сумму одномерных представлений

$$\varphi \simeq d^{k_1} + \dots + d^{k_m}, \quad k_i \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $n = 1$ имеем $m = 1$, откуда легко следует, что $\varphi = d^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Будем считать, что $m \geq 2$. Положим $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Тогда нетрудно показать, что $[\mathfrak{h}', \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$ и, тем более, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Из классификации представлений группы $SL_n(\mathbb{C})$ (см. [9], [11]) следует, что при $m \leq n$ либо $\varphi(H') = \{e\}$, либо $n = m$ и $\varphi|H' \simeq \rho|H'$ или $\varphi|H' \simeq \rho^*|H'$, так что φ неприводимо.

Пусть $\varphi: P \rightarrow GL(E)$ – неприводимое представление. Рассмотрим $d\varphi$. По теореме Ли существует $E_\lambda \subset E$, $E_\lambda \neq 0$, –весовое подпространство для $\mathfrak{n}$. Поскольку $\mathfrak{n}$ – идеал в $\mathfrak{p}$, имеем $d\varphi(\mathfrak{p})(E_\lambda) \subset E_\lambda$ и, следовательно, $E_\lambda = E$. Так как $\mathfrak{n} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{n}]$, то $\lambda = 0$ и, значит, $N \subset \text{Ker } \varphi$. Поскольку $m = n$, откуда следует, что φ имеет вид (23) или (24).

Если $\varphi(H') = \{e\}$ или $d\varphi(\mathfrak{h}') = 0$, то $d\varphi(\mathfrak{n}) = d\varphi([\mathfrak{h}', \mathfrak{n}]) = 0$, и $\varphi(N) = \{e\}$. Таким образом, φ полностью определяется своим ограничением на $Z(GL_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}^\times$. Отсюда следует, что φ имеет вид (25).

Из леммы 1 и теоремы 2 (1) непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O})$ – расщепимое супермногообразие нечетной размерности $m \leq n$, $\bar{0}$ -однородное относительно $SL_{n+1}(\mathbb{C})$. Тогда $\mathcal{O} \simeq \bigwedge \mathcal{E}_\varphi$,

где φ – одно из представлений подгруппы $P \subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ вида (23), (24) или (25).

Далее мы будем пользоваться картановской подалгеброй (21). Заметим, что веса алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ имеют вид

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \lambda_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Вес λ доминантен тогда и только тогда, когда $a_1 \geq \dots \geq a_{n+1}$. Старший вес представления ρ (соответственно, ρ^*) группы H равен λ_1 (соответственно, $-\lambda_n$), а вес представления d есть $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -\lambda_{n+1}$.

ТЕОРЕМА 5. *Расщепимое супермногообразие $(\mathbb{CP}^n, \wedge \mathcal{E})$ нечетной размерности $m \leq n$, $\bar{0}$ -однородное относительно $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, однородно тогда и только тогда, когда расслоение $\mathbf{E}$ задается одним из следующих представлений φ подгруппы $P \subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$:*

- (1) $\varphi \simeq \rho d^k$, $k \leq -1$;
- (2) $\varphi \simeq \rho^* d^k$, $k \leq 0$;
- (3) $\varphi \simeq d^{k_1} + \dots + d^{k_m}$, $k_i \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4 можно считать, что $\mathbf{E}$ задается представлением φ вида (23), (24) или (25), где $k, k_i \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\varphi^* \simeq \begin{cases} \rho^* d^{-k} & \text{в случае (23),} \\ \rho d^{-k} & \text{в случае (24),} \\ d^{-k_1} + \dots + d^{-k_m} & \text{в случае (25).} \end{cases}$$

Согласно теореме 3 супермногообразию $(\mathbb{CP}^n, \wedge \mathcal{E})$ однородно тогда и только тогда, когда все старшие веса Λ^* этого представления доминантны. Очевидно,

$$\Lambda^* = \begin{cases} -\lambda_n + k\lambda_{n+1} & \text{в случае (23),} \\ \lambda_1 + k\lambda_{n+1} & \text{в случае (24),} \\ k_i\lambda_{n+1}, i = 1, \dots, m, & \text{в случае (25).} \end{cases}$$

Отсюда следует наше утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из теоремы 3, представление φ вида (3) определяет однородное расщепимое супермногообразие при любом $m \geq 1$.

§ 5. Расщепимые супермногообразия, $\bar{0}$ -однородные относительно $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$

В этом параграфе рассматривается случай $G = \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, $2r = n + 1 \geq 4$. Мы пользуемся обозначениями, введенными в § 3. Начнем с классификации представлений $\varphi: P \rightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, $m \leq n$. Очевидно, расслоение $\mathbf{E}_\varphi$ однородно относительно $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, но не относительно $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, тогда и только тогда, когда φ не продолжается до представления $\tilde{P} \rightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Нам достаточно перечислить только такие представления.

Обозначим через ρ стандартное представление группы $H' \simeq \mathrm{Sp}_{2r-2}(\mathbb{C})$, через 1 – тривиальное одномерное представление и через d – характер группы $Z \simeq \mathbb{C}^\times$, заданный формулой

$$d \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = b.$$

Для любого голоморфного представления ψ редуктивной группы H (которое, как известно, вполне приводимо, см. [11, §5.2]) будем обозначать тем же символом ψ его продолжение на P , равное 1 на N .

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi: P \rightarrow \mathrm{GL}_m(E)$, $m \leq n$, – голоморфное линейное представление, не продолжающееся до представления $\tilde{P} \rightarrow \mathrm{GL}_m(E)$. Тогда φ вполне приводимо и верно одно из следующих утверждений:

$$(1) \quad \varphi \simeq \rho \otimes d^k, k \in \mathbb{Z}; \quad (26)$$

$$(2) \quad \varphi \simeq \rho \otimes d^k + 1 \otimes d^l, k, l \in \mathbb{Z}; \quad (27)$$

$$(3) \quad n = 3, \varphi \simeq \sigma \otimes d^k, k \in \mathbb{Z}, \text{ где } \sigma - \text{трехмерное неприводимое представление группы } \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}); \quad (28)$$

$$(4) \quad n = 5, \varphi \simeq \nu \otimes d^k, k \in \mathbb{Z}, \text{ где } \nu - \text{пятимерное неприводимое представление группы } \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{a} = \langle E_{2r,r} \rangle$, тогда $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ (прямая сумма векторных пространств), где $\mathfrak{m} \simeq \mathbb{C}^{2r-2}$. Положим также $\mathfrak{f} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$, тогда $\mathrm{rad} \mathfrak{p} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$ (прямые суммы векторных пространств). Нетрудно проверить, что верны соотношения:

$$[\mathfrak{h}', \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}, \quad (30)$$

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{a}, \quad (31)$$

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{m}] = 0, \quad (32)$$

$$[\mathfrak{h}', \mathrm{rad} \mathfrak{p}] = \mathfrak{m}, \quad [\mathrm{rad} \mathfrak{p}, \mathrm{rad} \mathfrak{p}] = \mathfrak{n}. \quad (33)$$

1) Пусть $m < n - 1 = 2r - 2$, тогда, как известно из теории представлений (см., например, [9, предложение 1.3.5]), $d\varphi(\mathfrak{h}') = 0$. Используя (30) и (31), получаем $d\varphi(\mathfrak{m}) = d\varphi(\mathfrak{a}) = 0$. Следовательно, $\varphi \simeq 1 \otimes (d^{k_1} + \dots + d^{k_m})$, $k_i \in \mathbb{Z}$. Но ясно, что $1 \otimes d$ продолжается до представления $\det$ группы $\tilde{P}$, так что φ также продолжается на $\tilde{P}$.

2) Пусть $m = n - 1 = 2r - 2$, тогда если $d\varphi(\mathfrak{h}') = 0$, то все рассуждения совпадают со случаем 1). Если $d\varphi(\mathfrak{h}') \neq 0$, то из теории представлений следует, что $d\varphi|_{\mathfrak{h}'} \simeq \rho$, и φ неприводимо. Пусть $x \in \mathrm{rad} \mathfrak{p}$, тогда

$$d\varphi(x) = \lambda(x)E,$$

где $\lambda: \mathrm{rad} \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{C}$. Как известно, $\lambda([\mathfrak{p}, \mathrm{rad} \mathfrak{p}]) = 0$. В силу (33)

$$[\mathfrak{p}, \mathrm{rad} \mathfrak{p}] = [\mathfrak{h}', \mathrm{rad} \mathfrak{p}] + [\mathrm{rad} \mathfrak{p}, \mathrm{rad} \mathfrak{p}] = \mathfrak{n},$$

откуда следует, что $d\varphi(\mathfrak{n}) = 0$. Таким образом, φ определяется своим ограничением на H . Значит, φ вполне приводимо и имеет вид (26).

3) Пусть $m = n = 2r - 1$, тогда если $d\varphi(\mathfrak{h}') = 0$, то все рассуждения такие же, как и в случае 1). Пусть $d\varphi(\mathfrak{h}') \neq 0$, тогда возможны следующие случаи (см., например, [9, предложение 1.3.5]):

- (a) $d\varphi|_{\mathfrak{h}'} \simeq d\rho + 0$;
- (b) $n = 3$, $d\varphi|_{\mathfrak{h}'} \simeq d\sigma$ — трехмерное неприводимое представление;
- (c) $n = 5$, $d\varphi|_{\mathfrak{h}'} \simeq d\nu$ — пятимерное неприводимое представление.

В случае (a) пространство представления E можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств

$$E = W_1 \oplus W_0,$$

где $\dim W_1 = 2r - 2$, $\dim W_0 = 1$. Тогда ясно, что

$$\varphi|_H \simeq \rho \otimes d^k + 1 \otimes d^l, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Если $d\varphi(\mathfrak{n}) = 0$, то φ вполне приводимо и имеет место (27). Предположим, что $d\varphi(\mathfrak{n}) \neq 0$. Ограничение $d\varphi|_{\mathfrak{ta}\mathfrak{d}\mathfrak{p}}$ имеет весовое подпространство $E_\lambda \neq 0$, где $\lambda(\mathfrak{n}) = 0$, инвариантное относительно $\mathfrak{p}$. Возможны случаи $E_\lambda = W_1$, $E_\lambda = W_0$. Пусть $E_\lambda = W_1$. Тогда для $y \in \mathfrak{h}'$, $x \in \mathfrak{n}$ операторы представления записываются в подходящем базисе матрицами

$$\begin{aligned} d\varphi(y) &= \begin{pmatrix} \rho(y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ d\varphi(x) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\alpha: \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C}^{2r-2}$ — ненулевое линейное отображение. Если $z = y + by_0 \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{h}'$, $b \in \mathbb{C}$, то

$$d\varphi(z) = \begin{pmatrix} y + kb & 0 \\ 0 & lb \end{pmatrix}.$$

Если $x_1, x_2 \in \mathfrak{n}$, то

$$d\varphi([x_1, x_2]) = [d\varphi(x_1), d\varphi(x_2)] = \left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha(x_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha(x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Но в то же время

$$d\varphi([x_1, x_2]) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha([x_1, x_2]) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу (21) и (22) отсюда следует, что $d\varphi(\mathfrak{a}) = 0$. Для любых $y \in \mathfrak{h}'$, $x \in \mathfrak{n}$ имеем $[y, x] \in \mathfrak{n}$, откуда

$$d\varphi([y, x]) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha([y, x]) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$d\varphi([y, x]) = [d\varphi(y), d\varphi(x)] = \left[\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & y\alpha(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили равенство

$$\alpha([y, x]) = y\alpha(x), \quad y \in \mathfrak{h}', \quad x \in \mathfrak{n}.$$

Поскольку $\alpha \neq 0$, а ρ неприводимо, то $\alpha: \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C}^{2r-2}$ — сюръективное отображение с ядром $\text{Ker } \alpha = \mathfrak{a}$, определяющее изоморфизм $\mathfrak{h}'$ -модулей $\mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{C}^{2r-2}$.

Легко видеть, что

$$[y_0, x] = -x, \quad x \in \mathfrak{m}.$$

Поэтому

$$d\varphi(-x) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & (k-l)\alpha(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathfrak{m}.$$

Отсюда $l = k+1$. Теперь нетрудно убедиться в том, что φ изоморфно ограничению на P представления ρd^k подгруппы $\tilde{P} \subset \text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ (см. лемму 1).

Если $d\varphi|_{\mathfrak{n}} \neq 0$ и $E_\lambda = W_0$, то можно рассмотреть представление φ^* . Тогда $W_0^\perp \subset E^*$ является $(2r-2)$ -мерным весовым подпространством для $d\varphi|_{\mathfrak{rad} \mathfrak{p}}$, так что в силу доказанного выше φ^* продолжается на $\tilde{P}$. Значит, это верно и для φ . В случаях (b) и (c) рассуждения проводятся так же, как в пункте 2).

Из леммы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 6. Пусть $(\mathbb{CP}^n, \theta)$ — расщепимое супермногообразие нечетной размерности $m \leq n = 2r-1$, $\bar{0}$ -однородное относительно $\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, но не относительно $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Тогда $\theta \simeq \bigwedge \mathcal{E}_\varphi$, где φ — одно из представлений подгруппы $P \subset \text{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ вида (26), (27), (28) или (29).

Будем пользоваться картановской подалгеброй $\mathfrak{t} = \tilde{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$. Заметим, что веса алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$ имеют вид

$$\lambda = \sum_{i=1}^r a_i \mu_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Вес λ доминантен тогда и только тогда, когда $a_1 \geq \dots \geq a_r \geq 0$. Вес представления d равен $\mu_1 = \lambda_r$, а старший вес представления ρ группы H' равен $\mu_2 = \lambda_2$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\varphi: P \rightarrow \text{GL}_m(E)$, $m \leq n$, — голоморфное линейное представление, не продолжающееся до представления $\tilde{P} \rightarrow \text{GL}_m(E)$. Расщепимое супермногообразие, определенное таким представлением, однородно тогда и только тогда, когда

- (1) $\varphi \simeq \rho \otimes d^k$, $k \leq -1$;
- (2) $\varphi \simeq \rho \otimes d^k + 1 \otimes d^l$, $k \leq -1$, $l \leq 0$;
- (3) $\varphi \simeq \sigma \otimes d^k$, $k \leq -2$;
- (4) $\varphi \simeq \nu \otimes d^k$, $k \leq -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 6 следует, что φ имеет вид (26), (27), (28) или (29). Тогда

$$\varphi^* \simeq \begin{cases} \rho \otimes d^{-k} & \text{в случае (26),} \\ \rho \otimes d^{-k} + 1 \otimes d^{-l} & \text{в случае (27),} \\ \sigma \otimes d^{-k} & \text{в случае (28),} \\ \nu \otimes d^{-k} & \text{в случае (29).} \end{cases}$$

Старшие веса Λ^* таких представлений имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= -k\mu_1 + \mu_2 && \text{в случае (26),} \\ \Lambda^* &= \begin{cases} -k\mu_1 + \mu_2 \\ -l\mu_1 \end{cases} && \text{в случае (27),} \\ \Lambda^* &= -k\mu_1 + 2\mu_2 && \text{в случае (28),} \\ \Lambda^* &= -k\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 && \text{в случае (29).} \end{aligned}$$

Согласно теореме 3 супермногообразие $(\mathbb{CP}^n, \Lambda \mathcal{E}_\varphi)$ однородно тогда и только тогда, когда вес Λ^* доминантен. Отсюда следует наша теорема.

§ 6. Когомологии касательного пучка

В этом параграфе мы сделаем первый шаг в направлении классификации четно-однородных и однородных нерасщепимых супермногообразий вида $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O})$, нечетная размерность m которых удовлетворяет условию $m \leq n$. В силу следствия из теоремы 1 из однородности ($\bar{0}$ -однородности) супермногообразия $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O})$ следует однородность (соответственно, $\bar{0}$ -однородность) его ретракта $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Поэтому наша задача будет решена, если для каждого из супермногообразий $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, перечисленных в § 4 и § 5, мы сможем классифицировать все $\bar{0}$ -однородные и однородные супермногообразия, ретрактом которых является $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Как мы увидим в части II (см. также [2]), для получения этой классификации весьма существенно вычисление G -инвариантных частей групп когомологий $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_{2p})$, где $G = \text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ или $\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, $\mathcal{T}$ – касательный пучок супермногообразия $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ и $p \geq 1$. Несомненно, большой интерес представляет и вычисление всех групп когомологий $H^q(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_p)$, но мы сможем найти полное решение этой задачи только в некоторых специальных случаях.

Мы будем использовать известную теорему Ботта (см. [8], [12]), при помощи которой можно вычислить градуированное пространство когомологий $H^*(M, \mathcal{E})$, где $M = G/P$ – флаговое многообразие, а $\mathcal{E}$ – пучок голоморфных сечений однородного векторного расслоения $\mathbf{E} \rightarrow M$, определяемого неприводимым (или вполне приводимым) представлением $\varphi: P \rightarrow \text{GL}(E)$.

Мы пользуемся обозначениями § 3. Вес $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ называется *сингулярным*, если существует корень $\alpha \in \Delta_+$ такой, что $\lambda(h_\alpha) = 0$, и *регулярным* в противном случае. Положим $\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$, тогда $\gamma(h_\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in \Pi$. Если λ – регулярный вес, то существует единственный $w \in W$ такой, что $w(\lambda) - \gamma$ доминантен. Минимальное число отражений s_α , $\alpha \in \Pi$, в произведение которых разлагается элемент w , называется *индексом* регулярного веса λ (индекс равен

также числу таких $\alpha \in \Delta_+$, что $\lambda(h_\alpha) < 0$). С каждым весом $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ таким, что $\lambda + \gamma$ регулярен, свяжем доминантный вес $I(\lambda) \in \mathfrak{t}^*$ по правилу $I(\lambda) = w(\lambda + \gamma) - \gamma$.

Переходя к формулировке теоремы Ботта, заметим, что в каждом пространстве когомологий $H^q(M, \mathcal{E})$, связанном с однородным векторным расслоением $\mathbf{E} \rightarrow M = G/P$, индуцируется естественная структура G -модуля (в случае $q = 0$ эта структура рассматривалась в §3).

ТЕОРЕМА БОТТА. Пусть φ – неприводимое конечномерное голоморфное представление подгруппы P со старшим весом Λ . Тогда градуированное пространство когомологий $H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)$ определяется по Λ следующим образом:

- а) если $\Lambda + \gamma$ сингулярен, то $H^*(M, \mathcal{E}_\varphi) = 0$;
- б) если $\Lambda + \gamma$ регулярен и его индекс равен p , то $H^q(M, \mathcal{E}_\varphi) = 0$ для всех $q \neq p$ и $H^p(M, \mathcal{E}_\varphi)$ есть неприводимый G -модуль со старшим весом $I(\Lambda)$.

В частности, для $H^q(M, \mathcal{E}_\varphi)$, $q = 0, 1$, получаем следующее утверждение (для $q = 0$ это так называемая *теорема Бореля–Вейля–Ботта*, используемая при доказательстве предложения 2). Мы обозначаем через $R(\lambda)$ неприводимое представление группы G со старшим весом λ и через Σ – подсистему в Π , определяющую параболическую подгруппу P .

СЛЕДСТВИЕ. Пространство $H^0(M, \mathcal{E}_\varphi) = \Gamma(\mathbf{E}_\varphi)$ отлично от 0 тогда и только тогда, когда вес Λ доминантен. При этом условии в нем индуцируется представление $R(\Lambda)$.

Пространство $H^1(M, \mathcal{E}_\varphi)$ отлично от 0 тогда и только тогда, когда существует такой $\alpha \in \Pi \setminus \Sigma$, что вес $s_\alpha(\Lambda) - \alpha$ доминантен. При этом условии такой корень α является единственным и в $H^1(M, \mathcal{E}_\varphi)$ индуцируется представление $R(s_\alpha(\Lambda) - \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $q = 0$ мы должны иметь $w = e$ и тем самым $I(\Lambda) = \Lambda$.

В случае $q = 1$ нужно, чтобы вес $\Lambda + \gamma$ имел индекс 1, т.е. чтобы $I(\Lambda) = s_\alpha(\Lambda + \gamma) - \gamma$ был доминантным весом для некоторого $\alpha \in \Pi$, который определяется единственным образом. Очевидно, $I(\Lambda) = s_\alpha(\Lambda) + s_\alpha(\gamma) - \gamma = s_\alpha(\Lambda) - \alpha$. Поскольку Λ доминантен как вес подгруппы H с системой простых корней Σ , для любого $\beta \in \Sigma$ имеем $I(\Lambda)(h_\beta) = -(\Lambda + \gamma)(h_\beta) - 1 < 0$, что неверно для $\beta = \alpha$. Значит, $\alpha \in \Pi \setminus \Sigma$.

Пусть теперь $(\mathbb{CP}^n, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$ – $\bar{0}$ -однородное относительно $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ расщепимое супермногообразие размерности $n \mid m$, $n \geq m$, и φ – представление, определяющее соответствующее однородное векторное расслоение. Изучение когомологий касательного пучка $\mathcal{T}$ мы начнем с изучения когомологий пучков $\mathcal{A}_r = \mathcal{E}_\varphi^* \otimes \bigwedge^r \mathcal{E}_\varphi$ и $\mathcal{B}_r = \Theta \otimes \bigwedge^r \mathcal{E}_\varphi$, входящих в точную последовательность (7). Имеем $\Theta = \mathcal{E}_\tau$, где τ – представление изотропии в касательном пространстве к $\mathbb{CP}^n$. Как известно, оно неприводимо, и в обозначениях §4

$$\tau \simeq \rho d. \quad (34)$$

Возможные представления φ указаны в теореме 4. Следовательно, $\mathcal{A}_r$ и $\mathcal{B}_r$ определяются вполне приводимыми представлениями

$$\begin{aligned} A_r &= \varphi^* \bigwedge^r \varphi, \\ B_r &= \tau \bigwedge^r \varphi \end{aligned}$$

подгруппы P и для вычисления когомологий можно применить теорему Ботта.

В приведенных ниже предложениях 3 и 4 предполагается, что φ — представление группы P одного из следующих трех видов:

$$\begin{aligned} \text{(I)} : \quad & \varphi = \rho d^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(II)} : \quad & \varphi = \rho^* d^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \text{(III)} : \quad & \varphi = \sum_{i=1}^m d^{k_i}, \quad k_i \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{35}$$

Нам нужно разложить представления A_r и B_r на неприводимые компоненты. Будем обозначать через $R(\lambda)$ неприводимое представление группы $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ со старшим весом λ . Используя известное разложение

$$\rho \bigwedge^r \rho^* = \begin{cases} \rho & \text{при } r = 0, \\ R(\lambda_1 - \lambda_{n-r+1} - \dots - \lambda_n) + \bigwedge^{r-1} \rho^* & \text{при } 1 \leq r \leq n-1, \\ \bigwedge^{n-1} \rho^* & \text{при } r = n \end{cases}$$

и изоморфизм

$$\bigwedge^r \rho \simeq \left(\bigwedge^{n-r} \rho^* \right) d,$$

легко получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Предположим, что φ — представление одного из видов (I), (II), (III), указанных в (35). Тогда представления A_r и B_r разлагаются, соответственно, на неприводимые компоненты со следующими старшими весами:*

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad A_r : \quad & -\lambda_n + k\lambda_{n+1} \quad (r = 0), \\ & 0 \quad (r = 1), \\ & \lambda_1 + \dots + \lambda_r - \lambda_n - k(r-1)\lambda_{n+1} \quad (1 \leq r \leq n-1), \\ & \lambda_1 + \dots + \lambda_{r-1} - k(r-1)\lambda_{n+1} \quad (2 \leq r \leq n); \\ B_r : \quad & -\lambda_{r+2} - \dots - \lambda_n - (kr+2)\lambda_{n+1} \quad (0 \leq r \leq n-2), \\ & \lambda_1 - \lambda_{r+1} - \dots - \lambda_n - (kr+2)\lambda_{n+1} \quad (1 \leq r \leq n-1), \\ & -(k(n-1)+2)\lambda_{n+1} \quad (r = n-1), \\ & \lambda_1 - (kn+2)\lambda_{n+1} \quad (r = n); \end{aligned}$$

- (II) $A_r : \lambda_1 + k\lambda_{n+1} \quad (r = 0),$
 $0 \quad (r = 1),$
 $\lambda_1 - \lambda_{n-r+1} - \dots - \lambda_n - k(r-1)\lambda_{n+1} \quad (1 \leq r \leq n-1),$
 $-\lambda_{n-r+2} - \dots - \lambda_n - k(r-1)\lambda_{n+1} \quad (2 \leq r \leq n);$
 $B_r : \lambda_1 - \lambda_{n+1} \quad (r = 0),$
 $-(k+1)\lambda_{n+1} \quad (r = 1),$
 $\lambda_1 - \lambda_{n-r+1} - \dots - \lambda_n - (kr+1)\lambda_{n+1} \quad (1 \leq r \leq n-1),$
 $-\lambda_{n-r+2} - \dots - \lambda_n - (kr+1)\lambda_{n+1} \quad (2 \leq r \leq n);$
- (III) $A_r : k_j\lambda_{n+1}, \quad j = 1, \dots, m \quad (r = 0),$
 $(-k_{i_1} - \dots - k_{i_r} + k_j)\lambda_{n+1}, \quad i_1 < \dots < i_r, \quad j = 1, \dots, m \quad (1 \leq r \leq m);$
 $B_r : \lambda_1 - \lambda_{n+1} \quad (r = 0),$
 $\lambda_1 - (1 + k_{i_1} + \dots + k_{i_r})\lambda_{n+1}, \quad i_1 < \dots < i_r, \quad j = 1, \dots, m \quad (1 \leq r \leq m).$

Как мы видели в §3, в нашем случае подгруппа $P \subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ определяется системой $\Sigma = \Pi \setminus \{\alpha_n\}$, где $\alpha_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$. Согласно следствию из теоремы Ботта для вычисления 1-когомологий пучков $\mathcal{A}_r$ и $\mathcal{B}_r$ мы должны найти те веса Λ из списка предложения 3, для которых вес $s_{\alpha_n}(\Lambda) - \alpha_n$ доминантен. Прделав несложные вычисления, мы получим следующее предложение, описывающее эти когомологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Предположим, что φ имеет вид (35). В случаях (I) и (II) все возможные ненулевые значения для $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r$, указаны в следующей таблице, где через Φ_1 обозначено представление группы $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, индуцированное в $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{S})$.*

	φ	n	$\mathcal{S}$	Φ_1
1	ρd	≥ 2	$\mathcal{A}_0$	$R(0)$
2	ρd^{-1}	≥ 3	$\mathcal{A}_2$	$R(\lambda_1 + \lambda_2)$
3	$\rho^* d^{-1}$	≥ 2	$\mathcal{A}_2$	$R(0)$
4	$\rho^* d^{-1}$	≥ 2	$\mathcal{B}_2$	$R(0)$
5	$\rho^* d^{-2}$	≥ 2	$\mathcal{B}_1$	$R(\lambda_1)$
6	ρd^{-1}	5	$\mathcal{B}_3$	$R(0)$
7	ρd^{-1}	4	$\mathcal{A}_3$	$R(-\lambda_5)$
8	ρd^{-1}	4	$\mathcal{B}_3$	$R(\lambda_1)$
9	ρd^{-1}	3	$\mathcal{A}_3$	$R(0)$
10	ρd^{-2}	3	$\mathcal{A}_2$	$R(-\lambda_4)$
11	ρd^{-3}	3	$\mathcal{B}_1$	$R(0)$
12	ρd^{-4}	2	$\mathcal{B}_1$	$R(-\lambda_3)$

В случае (III) имеем $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_r) = 0$ при $n \geq 2$, $r \geq 0$ и $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_r) = 0$ при $n \geq 3$, $r \geq 0$ или $n \geq 2$, $r = 0$. Неприводимые компоненты G -модулей $H^1(\mathbb{CP}^2, \mathcal{B}_r)$, $r \geq 1$, имеют следующий вид: каждому набору $i_1, \dots, i_r$ такому, что $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$ и $k_{i_1} + \dots + k_{i_r} = -3$, отвечает тривиальная одномерная компонента в $H^1(\mathbb{CP}^2, \mathcal{B}_r)$.

Применим этот результат к вычислению инвариантных 1-когомологий касательного пучка.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $(\mathbb{CP}^n, \wedge \mathcal{E})$ – расщепимое супермногообразие размерности $n \mid m$, $n \geq 2$, $n \geq m$, $\bar{0}$ -однородное относительно $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, и φ – представление, определяющее соответствующее однородное векторное расслоение. Тогда пространство G -инвариантов $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_{\bar{0}})^G$, где $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$, нетривиально в точности в следующих случаях:

- (1) $n = m \geq 2$ и $\varphi = \rho^* d^{-1}$;
- (2) $n = m = 2$ и $\varphi = d^k + d^l$, где $k + l = -3$.

В этих случаях

$$H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_{\bar{0}})^G = H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_2) \simeq \mathbb{C}$$

(тривиальный G -модуль).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все расщепимые супермногообразия, $\bar{0}$ -однородные относительно $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, описаны в теореме 4. Поэтому нам достаточно рассмотреть представления φ , перечисленные в лемме 1. Для любого $r \geq 0$ последовательность (7) определяет точную последовательность когомологий

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_{2r+1}) &\xrightarrow{\alpha^*} H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_{2r}) \xrightarrow{\beta^*} H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_{2r}) \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_{2r+1}) \xrightarrow{\alpha^*} H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_{2r}) \xrightarrow{\beta^*} H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_{2r}). \end{aligned} \quad (36)$$

При этом гомоморфизмы α^* и β^* эквивариантны, так что из $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_{2r})^G \neq 0$ следует, что $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_{2r+1})^G \neq 0$ или $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_{2r})^G \neq 0$.

В предложении 4 описаны все случаи, когда 1-когомологии пучков $\mathcal{A}_r$ и $\mathcal{B}_r$ отличны от 0. Рассматривая соответствующие представления Φ_1 , мы видим, что во всех случаях из $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_{2r+1})^{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})} \neq 0$ следует, что

$$H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_{2r+1})^{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})} = H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_{2r+1})^{\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})} = H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_{2r+1}),$$

и аналогично, из $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_{2r})^{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})} \neq 0$ следует, что

$$H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_{2r})^{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})} = H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_{2r})^{\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})} = H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_{2r}),$$

причем инвариантные когомологии нетривиальны только в следующих случаях:

- 1) $n = m \geq 2$, $\varphi = \rho^* d^{-1}$, $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_2) \simeq \mathbb{C}$;
- 2) $n = m = 3$, $\varphi = \rho d^{-1}$, $H^1(\mathbb{CP}^3, \mathcal{A}_3) \simeq \mathbb{C}$;
- 3) $n = m = 2$, $\varphi = d^k + d^l$, где $k + l = -3$, $H^1(\mathbb{CP}^2, \mathcal{B}_2) \simeq \mathbb{C}$.

В случае 1) в силу (34) имеем $\varphi = \tau^*$, откуда $\mathbf{E} = \mathbf{T}(M)^*$ и $\bigwedge \mathcal{E} \simeq \Omega$. Кроме того, $\mathcal{A}_r = \mathcal{B}_r$. Используя (11), получаем

$$H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_2) \simeq H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_3) \oplus H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{B}_2) \simeq \mathbb{C}$$

в силу предложения 4.

В случае 2) воспользуемся точной последовательностью (36), где $n = 3$, $r = 1$. Из предложения 4 видим, что

$$H^1(\mathbb{CP}^3, \mathcal{A}_3) = \mathbb{C}, \quad H^1(\mathbb{CP}^3, \mathcal{B}_2) = 0.$$

С другой стороны, $H^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{B}_2) \simeq \mathbb{C}$. Действительно, в силу предложения 3 представление $\mathbf{B}_2$ разлагается в нашем случае на неприводимые компоненты со старшими весами $\lambda_1 - \lambda_3$ и 0, из которых второй вес доминантен. Наконец, заметим, что $H^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{T}_2) = 0$. Это следует из результатов работы [13, п. 2.2.1] (см. также [14]), где вычислены супералгебры Ли векторных полей на расщепимых однородных супермногообразиях, соответствующих нетривиальным неприводимым представлениям φ . В результате из (36) вытекает последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow H^1(\mathbb{CP}^3, \mathcal{T}_2) \longrightarrow 0.$$

Из ее точности, очевидно, следует, что $H^1(\mathbb{CP}^3, \mathcal{T}_2) = 0$.

В случае 3) $\mathcal{A}_3 = 0$, откуда $\mathcal{T} = \mathcal{B}_2$. Поэтому $H^1(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T}_2) \simeq \mathbb{C}$. Таким образом, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения 4 и теоремы 5 легко следует, что если супермногообразии $(\mathbb{CP}^n, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$, где φ – представление типа (I) или (II), не является однородным, то $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_p) = 0$ для всех $p \geq 0$.

В заключение мы дадим полное описание когомологий касательного пучка для некоторых расщепимых супермногообразий.

Как было отмечено при доказательстве теоремы 8, в случае, когда $\varphi \simeq \rho^* d^{-1}$, структурный пучок $\bigwedge \mathcal{E}$ изоморфен пучку голоморфных форм Ω , откуда в силу (11) $\mathcal{T}_r \simeq \mathcal{A}_{r+1} \oplus \mathcal{A}_r$. Когомологии пучков $\mathcal{A}_r = \Theta \otimes \Omega^r$ нетрудно вычислить при помощи теоремы Ботта, используя предложение 3. Поскольку эти вычисления уже были опубликованы в [15], мы приведем их результаты без доказательства.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathcal{A}_r = \Theta \otimes \Omega^r$ и $\mathcal{T}$ – касательный пучок супермногообразия $(\mathbb{CP}^n, \Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_0) &\simeq \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}), \\ H^{r-1}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_r) &\simeq \mathbb{C}, \quad 1 \leq r \leq n, \\ H^q(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_r) &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Если θ_r – базисный элемент пространства $H^{r-1}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{A}_r)$, то

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_{-1}) &\simeq \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}), \\ H^0(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_0) &\simeq \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \text{ (как алгебры Ли),} \\ H^{r-1}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_r) &= \langle l^* \theta_r \rangle \text{ при } 1 \leq r \leq n, \\ H^r(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_r) &= \langle \alpha^* \theta_{r+1} \rangle \text{ при } 1 \leq r \leq n-1, \\ H^q(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T}_r) &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Доказательство следующей теоремы легко выводится из теоремы Ботта и точной последовательности когомологий, связанной с (7).

ТЕОРЕМА 10. Пусть $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O})$ – расщепимое однородное супермногообразие размерности $2|2$, структурный пучок которого определен представлением $\varphi = d^{-1} + d^{-2}$. Тогда в ненулевых группах когомологий $H^q(\mathbb{CP}^2, \mathcal{I}_p)$ индуцируются следующие представления группы $SL_3(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \text{в } H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{I}_{-1}) : & R(-\lambda_3) + R(-2\lambda_3), \\ \text{в } H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{I}_0) : & \text{Ad} + R(-\lambda_3) + 2R(0), \\ \text{в } H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{I}_1) : & R(\lambda_1), \\ \text{в } H^1(\mathbb{CP}^2, \mathcal{I}_2) : & R(0). \end{aligned}$$

Остальные группы когомологий тривиальны.

Список литературы

1. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.
2. Vinet V. A., Onishchik A. L. Homogeneous supermanifolds associated with the complex projective line // J. Math. Sciences. 1996. V. 82. №4. P. 3503–3527.
3. Vinet V. A., Onishchik A. L. Two families of flag supermanifolds // Differential Geom. Appl. 1994. V. 4. №4. P. 329–360.
4. Платонова О. В. Об однородных супермногообразиях размерности $2|2$ // УМН. 1995. Т. 50. №6. С. 205–206.
5. Платонова О. В. Об однородных супермногообразиях, связанных с комплексным проективным пространством // Акт. проблемы естеств. наук. Математика. Информатика. Ярославль: Яросл. ун-т, 1995. С. 46–47.
6. Онищик А. Л. Транзитивные супералгебры Ли векторных полей // Деп. в ВИНТИ 12.06.86, №4329-В.
7. Kolář J., Michor P. W., Slovák J. Natural Operations in Differential Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
8. Akhiezer D. N. Lie group actions in complex analysis. Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1995.
9. Онищик А. Л. Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физматлит, 1995.
10. Snow D. M. Spanning homogeneous vector bundles // Comment. Math. Helv. 1989. V. 64. №3. P. 395–400.
11. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
12. Bott R. Homogeneous vector bundles // Ann. of Math. (2). 1957. V. 66. P. 203–248.
13. Серов А. А. Супералгебры Ли векторных полей на комплексных флаговых супермногообразиях // Деп. в ВИНТИ 26.01.87, №610-В.
14. Онищик А. Л., Серов А. А. Супералгебры Ли векторных полей на расщепимых флаговых супермногообразиях // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. С. 284–287.
15. Onishchik A. L. About derivations and vector-valued differential forms // Inst. Math. Ruhr-Universität Bochum. Bericht №181, 1995.

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова

Поступила в редакцию
03.03.1997