Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, Об одном классе операторов Штурма–Лиувилля и приближенном вычислении первых собственных значений, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 1, 133–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:06:40

УДК 517.94

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

Об одном классе операторов Штурма–Лиувилля и приближенном вычислении первых собственных значений

В работе определяется и исследуется специальный класс S операторов Штурма–Лиувилля с простыми асимптотическими свойствами собственных функций. Изучены аналитические свойства потенциалов и дано описание операторов этого класса в терминах переходной функции обратной задачи. Доказана теорема: *класс операторов S плотен в множестве операторов Штурма–Лиувилля с потенциалом из L_2* . Далее выделено явно конструируемое подмножество операторов класса S , сохраняющее свойство плотности, и на основании свойств операторов этого подмножества предложен и обоснован метод приближенного вычисления первых собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля из его регуляризованных следов.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Задача о вычислении первых собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля является одной из важных классических задач математической физики. Достаточно упомянуть ее роль в использовании метода Фурье для приближенного решения классических краевых задач в частных производных и в задачах теории устойчивости. Естественно, что проблеме вычисления первых собственных чисел посвящены исследования многих математиков. Мы сосредоточимся на обсуждении теоретических методов и алгоритмов, не касаясь методов численных.

Одним из наиболее употребительных способов является метод, основанный на хорошо известных равенствах, связывающих итерированные функции Грина рассматриваемой задачи и ее собственные значения:

$$\int_0^\pi G_k(x, x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Одно из наиболее глубоких исследований в этом направлении принадлежит А. А. Дородницыну [1]. Суть метода проста: обрываем в равенствах (1) ряды до слагаемых с номером N и берем первые $(N + 1)$ -ое первое равенство. Решаем полученную конечную систему и получаем приближенные значения собственных чисел, тем более точные, чем большее N взято. В силу хорошо известной во многих классических задачах локализации собственных чисел с точностью до $O(1)$ оценку отброшенного остатка ряда сделать несложно и корректность метода очевидна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант ведущих научных школ № 96-15-96049).

Вместе с тем метод обладает существенным недостатком: вычисление конкретных значений интегралов из левой части (1) не алгоритмизуется и эти интегралы в конечном виде через параметры исходной задачи, вообще говоря, не выражаются.

С созданием теории регуляризованных следов И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [2] в 1953 г. и результатами И. М. Гельфанда [3], Л. А. Дикого [4], а также с появлением фундаментальной работы В. Б. Лидского и В. А. Садовниченко [5] в распоряжении математиков появились новые соотношения на собственные числа операторов – регуляризованные следы k -го порядка:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n^k - A_n(k)] = B(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

здесь $A_n(k)$ – отрезок асимптотического разложения λ_n^k по степеням n такой, что обеспечена абсолютная сходимость ряда (но, вообще говоря, не обязательно минимальный из таких фрагментов асимптотического разложения), а $B(k)$ – сумма этого ряда, собственно и называемая k -ым регуляризованным следом. Эти равенства важны и интересны из-за того, что и $A_n(k)$ и $B(k)$ выражаются в конечном виде через коэффициенты дифференциального выражения и краевых условий и их вычисление вполне может быть алгоритмизировано (см. [5], [6]).

В связи с этим И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий [7] предложили в 1957 г. новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля: аналогично схеме использования системы (1) удержать в системе (2) частные суммы рядов до N -го слагаемого в $(N + 1)$ -ом регуляризованном следе и полученную приближенную систему решить, найдя некоторые приближения к собственным числам задачи. В [7] сделано конкретное вычисление для уравнения Матье по указанной схеме и получены значения трех первых собственных значений, верные в третьем знаке после запятой. Однако в [7] данный метод не обоснован: никаких оценок при переходе от рядов к их частным суммам сделано не было.

В 1995 г. С. А. Шкарин [8] доказал неединственность решения бесконечных линейных систем определенного вида и, в частности, для систем вида (2) из его результатов следует, что если в системе регуляризованных следов (2) числа λ_n считать неизвестными и решать эту систему относительно λ_n , то у (2) существует континуум решений, причем мы можем заранее совершенно произвольно задать любое конечное число (различных) собственных чисел и всегда существуют решения с этими заданными числами. Таким образом, было показано, что метод приближенного вычисления первых собственных чисел с помощью системы регуляризованных следов в трактовке И. М. Гельфанда и Л. А. Дикого не может быть реализован.

В настоящей работе¹ мы определяем и исследуем класс S операторов Штурма–Лиувилля, для которых система регуляризованных следов однозначно определяет все их собственные числа и позволяет приближенно вычислять первые. В числе доказанных свойств этого класса операторов есть следующее: этот класс плотен в множестве всех операторов Штурма–Лиувилля с потенциалом из L_2 в смысле операторной нормы. Эти два результата образуют метод приближенного вычисления первых собственных чисел любого оператора с потенциалом из L_2 : сначала

¹Эти результаты мы анонсировали в работе [9]

мы должны приблизить рассматриваемый оператор (методом, изложенным в п. 4) с точностью до $\varepsilon/2$ оператором из класса S и затем уже для построенного приближающего оператора найти с точностью до $\varepsilon/2$ первые собственные числа (методом, изложенным в п. 3). Таким образом, собственные числа исходного оператора будут найдены с точностью до ε .

2. Операторы класса S . Рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (3)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (4)$$

где $q(x) \in L_2[0, \pi]$, $h, H \in \mathbb{R}$. На протяжении всей работы мы будем обозначать через $\varphi(x, \lambda)$ решение задачи Коши для уравнения (3) с начальными данными $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$.

Если $q(x) \in C^n[0, \pi]$, то хорошо известно (см., например, [10]), что $\varphi(x, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + k_1(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \dots + k_{2i}(x) \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{(\sqrt{\lambda})^{2i}} \\ + k_{2i+1}(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{(\sqrt{\lambda})^{2i}} + \dots + O\left(\frac{e^{|\Im \lambda| \pi}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2}}}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $k_i(x)$ можно найти из следующей рекуррентной цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} k_1'(x) &= \frac{1}{2}q(x), & k_1(0) &= h, \\ k_2'(x) &= \frac{1}{2}(k_1''(x) - q(x)k_1(x)), & k_2(0) &= 0, \\ k_3'(x) &= \frac{1}{2}(-k_2''(x) + q(x)k_2(x)), & k_3(0) &= -k_2'(0), \\ &\dots\dots\dots \\ k_l'(x) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2}(-k_{l-1}''(x) + q(x)k_{l-1}(x)), \\ &k_{2i}(0) = 0, & k_{2i}'(0) + k_{2i+1}(0) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (6)$$

Дадим следующее важное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор вида (3)–(4) мы назовем *оператором класса $S[0, \pi]$* , если в разложении (5) для некоторого целого j , $1 \leq j \leq n+1$, $k_j(x) \equiv 0$ на $[0, \pi]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично можно дать определение операторов класса $S[0, a]$ для любого вещественного a . Мы часто будем писать просто S без указания отрезка, когда это не может привести к недоразумению.

Данное определение автоматически подразумевает наличие у потенциала соответствующей гладкости.

Далее мы изучим некоторые свойства операторов класса S .

ЛЕММА 1. *Потенциал $q(x)$ любого оператора класса S есть голоморфная в некоторой окрестности отрезка $[0, \pi]$ функция, не продолжающаяся на всю плоскость как целая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторого номера N $k_N(x) \equiv 0$. Тогда в формулах (6) имеем

$$k'_N(x) \equiv 0 = \frac{(-1)^{N+1}}{2} (-k''_{N-1}(x) + q(x)k_{N-1}(x)), \quad (7)$$

$$k'_{N+1}(x) = \frac{(-1)^{N+2}}{2} (-k''_N(x) + q(x)k_N(x)) \equiv 0. \quad (8)$$

Причем если $N+1$ четное, то $k_{N+1}(0) = 0$ и тогда $k_{N+1}(x) \equiv 0$, а если $N+1$ нечетное, то $k'_N(0) + k_{N+1}(0) = 0$, отсюда $k_{N+1}(0) = 0$ и все равно $k_{N+1}(x) \equiv 0$. Таким образом, из (8) и (6) следует, что если $k_N(x) \equiv 0$, то для любого $n > N$ $k_n(x) \equiv 0$ и (7) – последнее нетривиальное соотношение в цепочке равенств (6). Обозначив $k'_l(x) = k_l^*(x)$, мы получаем из (6) систему уравнений первого порядка относительно функций $k_l(x)$, $k_l^*(x)$, $l = 1, \dots, N$, разрешенную относительно производных, содержащую $2N$ уравнений с полиномиальными нелинейностями без явного вхождения независимой переменной. Из этой системы возможно исключить все неизвестные, кроме $k_1^*(x)$ (т.е. $q(x)$), и полученное нелинейное дифференциальное уравнение удовлетворяет условиям следующей теоремы [10, с. 116]: если в дифференциальном уравнении $P(z, w, w', \dots, w^{(n)}) = 0$

$$P = \sum a_{j_0 j_1 \dots j_n}(z) w^{j_0} (w')^{j_1} \dots (w^{(n)})^{j_n}$$

есть многочлен по всем переменным и $d = \max(j_0 + \dots + j_n)$ достигается только на одном слагаемом, то у уравнения нет целых трансцендентных решений. Заметив к этому, что из (6) в случае, когда $q(x)$ многочлен, следует, что и все $k_j(x)$ многочлены строго возрастающих степеней и, следовательно, не может быть обрыва асимптотического разложения (5), мы приходим к выводу, что $q(x)$ не целая. Так как $q(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то в некоторой окрестности этого отрезка полюсов у $q(x)$ нет. Лемма доказана.

Для дальнейшего необходимо напомнить некоторые определения и факты из обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля.

Оператором преобразования для оператора (3)–(4) и оператора того же вида с $q(x) \equiv 0$ и $h = 0$ называется обратимый оператор вида $I + K$, где K – интегральный оператор с треугольным ядром $K(x, y)$, переводящий $\cos \sqrt{\lambda} x$ в $\varphi(x, \lambda)$:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (9)$$

Известно (см., например, [12]), что $K(x, y)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + q(x)K &= \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}, \\ K'_y(x, 0) &= 0, \quad K(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt, \end{aligned} \quad (10)$$

и если известна функция $K(x, y)$, то $q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$, $h = K(0, 0)$.

Переходной функцией обратной задачи $\Phi(x)$ называется следующая функция, строящаяся по заданному спектру оператора $\{\lambda_n\}$ и заданным нормировочным числам $\left\{ \alpha_n, \alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \right\}$:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \frac{2}{\pi} \cos nx \right) + \frac{1}{\pi}. \quad (11)$$

Основное интегральное уравнение обратной задачи (уравнение Гельфанда–Левитана) связывает $K(x, y)$ и $\Phi(x)$:

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi, \quad (12)$$

где

$$F(x, y) = \frac{1}{2} [\Phi(x+y) + \Phi(|x-y|)]. \quad (13)$$

Мы можем сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 2. Если потенциал $q(x)$ оператора (3)–(4) аналитичен в некоторой окрестности отрезка $[0, \pi]$, то ядро оператора преобразования $K(x, y)$ аналитично по каждой переменной в некоторой окрестности отрезка $[0, \pi]$ и переходная функция обратной задачи $\Phi(x)$ аналитична в некоторой окрестности отрезка $[0, 2\pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав в задаче (10) замену переменных $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ и обозначив $M(\alpha, \beta) = K(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2})$, можно получить для функции $M(\alpha, \beta)$ следующее интегральное уравнение (см. [12, с. 16, 17]):

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta) = h + \frac{1}{4} \int_{\beta}^{\alpha} q\left(\frac{\delta}{2}\right) d\delta + \frac{1}{4} \int_{\beta}^{\alpha} d\delta \int_0^{\beta} q\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) M(\delta, \gamma) d\gamma \\ + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} q\left(\frac{\delta}{2}\right) d\delta + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} \int_0^{\delta} q\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) M(\delta, \gamma) d\gamma d\delta. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (4) есть уравнение типа Вольтерра, оно может быть решено с помощью метода последовательных приближений, причем последовательность этих приближений будет сходиться к решению равномерно на интересующей нас области. Отсюда следует, что если $q(x)$ – аналитическая функция, то функция $K(x, y)$ также есть аналитическая функция.

Далее, интегральное уравнение обратной задачи (12), рассмотренное как уравнение относительно неизвестной функции $F(x, y)$, есть уравнение с независимой переменной x и параметром y . При значении параметра $y = 0$ это уравнение переходит в уравнение типа Вольтерра относительно переходной функции $\Phi(x)$:

$$K(x, 0) + \Phi(x) + \int_0^x K(x, t) \Phi(t) dt = 0. \quad (15)$$

Отсюда сразу следует, что при аналитической $K(x, y)$ функция $\Phi(x)$ также аналитична при $0 \leq x \leq \pi$. Для доказательства ее аналитичности при $0 \leq x \leq 2\pi$ рассмотрим уравнение (12) при $y = \pi/2$:

$$\begin{aligned} & \left[K\left(x, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} K(x, t) \left(\Phi\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \Phi\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right) dt + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^x K(x, t) \Phi\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt \right] \\ & \quad + \frac{1}{2}\Phi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^x K(x, t) \Phi\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $\Phi(x)$ уже определена (из (15)) при $0 \leq x \leq \pi$, то в квадратных скобках в (16) записана известная функция, и это уравнение типа Вольтерра на функцию $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi(x + \frac{\pi}{2})$, определяющее $\Phi(x)$ при $\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$. Продолжая действовать таким образом, мы получим $\Phi(x)$ на всем интересующем нас отрезке и докажем ее аналитичность. Лемма доказана.

Теперь мы готовы перейти к описанию функций $K(x, y)$ и $\Phi(x)$, отвечающих операторам класса S . Запишем уравнение (12) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\Phi(x+y) + \Phi(x-y)] + K(x, y) + \frac{1}{2} \int_0^y K(x, t)[\Phi(t+y) + \Phi(y-t)] dt \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_y^x K(x, t)[\Phi(t+y) + \Phi(t-y)] dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x, \end{aligned}$$

и продифференцируем его n раз по переменной y . Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\Phi^{(n)}(x+y) + (-1)^n \Phi^{(n)}(x-y)] + \frac{\partial^n K(x, y)}{\partial y^n} + \Phi'(0) \frac{\partial^{n-2} K(x, y)}{\partial y^{n-2}} \\ & \quad + \Phi'''(0) \frac{\partial^{n-4} K(x, y)}{\partial y^{n-4}} + \dots + \Phi^{(2[\frac{n}{2}]-1)}(0) \frac{\partial^{(n-2[\frac{n}{2}])} K(x, y)}{\partial y^{(n-2[\frac{n}{2}])}} \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^y K(x, t)[\Phi^{(n)}(t+y) + \Phi^{(n)}(y-t)] dt \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_y^x K(x, t)[\Phi^{(n)}(t+y) + (-1)^n \Phi^{(n)}(t-y)] dt = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Сразу отметим, что если в уравнениях (17) при n нечетных положить $y = 0$, то немедленно имеем, что

$$\left. \frac{\partial^{2k+1} K(x, y)}{\partial y^{2k+1}} \right|_{y=0} \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

т.е. разложение ядра оператора преобразования по степеням y содержит только четные степени y .

Проинтегрировав по частям представление (9), можно получить разложение (5) для $\varphi(x, \lambda)$ и, сравнив полученные коэффициенты, записать

$$-k_j(x) = (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \left. \frac{\partial^{j-1} K(x, t)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=x}. \quad (19)$$

Здесь использованы равенства (18). Из (19) и из известных свойств цепочки функций $k_j(x)$ следует, что если для некоторого j_0 функция $\frac{\partial^{j_0} K(x, t)}{\partial t^{j_0}} \Big|_{t=x} \equiv 0$, то такое же тождество верно и для всех $j > j_0$, и так как в этом случае по леммам 1 и 2 функция $K(x, t)$ – аналитическая, то нетрудно вывести утверждение следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Ядро оператора преобразования $K(x, t)$ для операторов класса S есть полином по второй переменной.*

Вернемся к уравнениям (17) и рассмотрим их при $n = 0, 2, 4, \dots$. При $n = 0$ это будет исходное уравнение (12), выразим из него $K(x, y)$ и подставим в (17) при $n = 2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \Phi'(0)F + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \int_0^x K(x, t) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \Phi'(0)F \right] dt = 0.$$

Выразив отсюда $\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}$ и подставив в (17) при $n = 4$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \Phi'(0) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\Phi'^2(0) - \Phi'''(0)]F + \frac{\partial^4 K}{\partial y^4} \\ + \int_0^x K(x, t) \left[\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \Phi'(0) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\Phi'^2(0) - \Phi'''(0)]F \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Вообще, при $n = 2k$ повторением этой процедуры будем иметь

$$M_{2k,y}(F(x, y)) + \frac{\partial^{2k} K(x, y)}{\partial y^{2k}} + \int_0^x K(x, t) M_{2k,y}(F(t, y)) dt = 0, \quad (20)$$

где $M_{2k,y}$ – линейное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами (полиномами от значений нечетных производных $\Phi(x)$ в нуле) порядка $2k$ по переменной y , содержащее производные только четного порядка. Пусть $\frac{\partial^{2k} K(x, y)}{\partial y^{2k}} \equiv 0$ при некотором k . Рассмотрим уравнение (20) при этом k и положим там значение параметра $y = 0$:

$$M_{2k,x}(\Phi(x)) + \int_0^x K(x, t) M_{2k,t}(\Phi(t)) dt = 0. \quad (21)$$

Это однородное уравнение Вольтерра относительно функции $M_{2k,x}(\Phi(x))$ и, значит, имеет лишь нулевое решение:

$$M_{2k,x}(\Phi(x)) = 0. \quad (22)$$

Таким образом, если оператор принадлежит классу S , то его переходная функция обратной задачи при некотором натуральном k (и при всех последующих) удовлетворяет уравнению (22). Обратно, если при некотором k выполнено (22), то, как следует из (20), $\frac{\partial^{2k} K(x, y)}{\partial y^{2k}} \equiv 0$ и ядро оператора преобразования $K(x, y)$ есть полином по второй переменной, что по лемме 3 означает принадлежность оператора классу S . Таким образом, уравнения (22) полностью описывают класс S .

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как (22) есть линейное уравнение с постоянными коэффициентами, то $\Phi(x)$ есть обязательно квазиполином.

Покажем, как в случае оператора класса S решить основное интегральное уравнение обратной задачи. Снова обратимся к уравнениям (17) при четных n , положим в них $y = 0$ и подставим неизвестную функцию $K(x, y)$ в виде $K(x, y) = \sum_{m=0}^N q_m(x)y^{2m}$. Получим

$$\begin{aligned} \Phi(x) + a_{11}q_0(x) + \sum_{m=0}^N q_m(x) \int_0^x t^{2m} \Phi(t) dt &= 0, \\ \Phi''(x) + a_{21}q_0(x) + a_{22}q_1(x) + \sum_{m=0}^N q_m(x) \int_0^x t^{2m} \Phi''(t) dt &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Phi^{(2N)}(x) + a_{N+1,1}q_0(x) + \dots + a_{N+1,N+1}q_N(x) + \sum_{m=0}^N q_m(x) \int_0^x t^{2m} \Phi^{(2N)}(t) dt &= 0, \end{aligned}$$

где a_{ij} — числа, зависящие только от $\Phi(x)$, конкретный вид которых опустим. Мы получили линейную систему для неизвестных функций $q_0(x), \dots, q_N(x)$, определяющих $K(x, y)$. Заметим, что так как $\Phi(x)$ — квазиполином, то $\Phi(x)$ — целая функция и, значит, определитель этой системы $\Delta(x)$ — также целая функция. Если записать (в стандартных обозначениях метода Крамера) $q_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}$ и найти вид $\Delta(x)$ и $\Delta_i(x)$, то можно увидеть, что $\Delta'(x) = -\Delta_0(x) - x^2\Delta_1(x) - \dots - x^{2N}\Delta_N(x)$ и отсюда

$$K(x, x) = \sum_{m=0}^N q_m(x)x^{2m} = -\frac{\Delta'(x)}{\Delta(x)}. \quad (23)$$

Мы видим, что $K(x, x)$ может иметь в качестве особенностей только полюса первого порядка, а $q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$ в окрестности любой своей особой точки обязательно имеет вид $q(x) = \frac{\text{const}}{(x-a)^2} + \tilde{q}(x)$, где $\tilde{q}(x)$ — регулярная в окрестности точки a функция. Эти замечания существенно уточняют результат леммы 1.

Полученное нами характеристическое уравнение (22) в общем виде чрезвычайно сложно для исследования, так как записываемое формально линейным уравнением с постоянными коэффициентами, оно является по сути существенно нелинейной задачей из-за того, что постоянные коэффициенты нелинейно связаны со значениями в точке интересующего нас решения и его производных. Однако один частный случай поддается исследованию, и соответствующий результат мы сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 4. *Любой полином по четным степеням x является переходной функцией обратной задачи для некоторого оператора класса $S[0, a]$ с некоторым $a > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, возьмем $\Phi(x) = \sum_{n=0}^l a_n x^{2n}$. Тогда $\Phi^{(2l+1)}(0) = 0$ и $M_{2l+2, x}(\Phi(x)) = \Phi^{(2l+2)}(x) = 0$ и для доказательства леммы осталось показать, что существует отрезок $[0, a]$, на котором основное интегральное уравнение обратной задачи (12)–(13) с выбранной нами функцией $\Phi(x)$

разрешимо. Но это уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром $F(x, y)$, и на достаточно малом отрезке изменения x норма этого ядра будет меньше единицы и решение явно предъядляется рядом Неймана. Лемма доказана.

3. Приближенное вычисление первых собственных чисел операторов класса S . Основным результатом этого пункта является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – спектр некоторого оператора L из класса S и пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^k - A_n(k)) = B(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

– полная система регуляризованных следов этого оператора. Тогда система (24) однозначно определяет спектр $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ и, более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N(\varepsilon)$, а также существует натуральное K , зависящее только от оператора L (и не зависящее от ε), что если использовать в $A_n(k)$ (24) при $k = 1, \dots, K$ первые N членов асимптотического разложения λ_n по степеням n , то будут верны неравенства

$$\left| \sum_{n=0}^{K-1} (\lambda_n^k - A_n(k)) - B(k) \right| \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, K. \quad (25)$$

Причем можно взять $K = 13 + [12\pi(3 + H)2^p M_1]$, а $N \geq 2(K - 1) \times \lg(4K + 12) - \lg \frac{10\varepsilon}{3}$. Здесь p – число ненулевых членов асимптотики (5) для

$$L, M_1 = \max_{0 \leq i \leq p} \left\{ \max_{x \in [0, \pi]} \left(\frac{1}{2} \int_0^x q(x) + h \right)^{(i)} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение на собственные числа оператора (3)–(4) имеет вид $\varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = 0$, что для оператора класса S можно (в силу конечности суммы (5)) переписать в виде

$$e^{2i\pi\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(\sqrt{\lambda})^k} - \sum_{k=0}^p \frac{b_k}{(\sqrt{\lambda})^k} = 0 \quad (26)$$

с некоторыми постоянными коэффициентами a_k, b_k , выражающимися через коэффициенты $k_j(x)$ (5). Индекс p в (26) совпадает с номером последнего ненулевого коэффициента в (5). Оценим коэффициенты a_k, b_k в (26), для чего необходима оценка $k_j(x)$ и $k'_j(x)$ на отрезке $[0, \pi]$. Из формул (6) видно, что для оценки $k'_p(x)$ необходимо оценить $k''_{p-1}(x)$, для чего необходима оценка $k'''_{p-2}(x)$ и т. д.

Заметим, что введенная в формулировке теоремы константа M_1 может быть записана так:

$$M_1 = \max_{0 \leq i \leq p} \left\{ \max_{x \in [0, \pi]} |k_1^{(i)}(x)| \right\}. \quad (27)$$

Так как $k_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(x) dx + h$, то все необходимые нам производные $q(x)$ не превосходят $2M_1$. Из (6) легко получаем, что $\forall l \in \mathbb{N}$

$$k_2^{(l+1)}(x) = \frac{1}{2} \left[k_1^{(l+2)}(x) - \sum_{m=0}^l C_m^l q^{(m)}(x) k_1^{(l-m)}(x) \right]$$

и для любого $l = 0, \dots, p-2$

$$|k_2^{(l+1)}(x)| \leq \frac{1}{2}M_1 + M_1M_12^l \leq 2^{p-1}M_1^2.$$

Для самой функции $k_2(x)$ воспользуемся равенством

$$k_2(x) = -\frac{1}{2}k_1'(0) + \frac{1}{2}k_1'(x) - \frac{1}{2} \int_0^x q(x)k_1(x) dx$$

и увидим, что все интересующие нас производные $k_2(x)$, включая нулевую производную, оцениваются константой $M_2 = \pi 2^{p-1}M_1^2$. Обозначим через M_j константу, ограничивающую все нужные нам производные $k_j(x)$. Тогда повторением указанной процедуры нетрудно получить следующую оценку: $M_j = \pi^{j-1}2^{(j-1)p-\frac{j(j+1)}{2}}M_1^j$. Для упрощения дальнейших выкладок примем:

$$\max_{0 \leq i \leq p+1-l} \left\{ \max_{x \in [0, \pi]} |k_l^{(i)}(x)| \right\} \leq \pi^l 2^{lp} M_1^l. \quad (28)$$

Далее, легко установить, что коэффициенты $a_k, b_k, k = 1, \dots, p$, в (26) (при нормировке $a_0 = b_0 = 1$) образуются как сумма не более чем трех слагаемых, каждое из которых есть значение в точке π функций $k_k(x), k_{k-1}(x)$ или их первых производных, причем одно из этих слагаемых умножено на H .

Исходя из этого и (28), запишем

$$|a_k|, |b_k| \leq (2 + H)\pi^k 2^{kp} M_1^k, \quad k = 1, \dots, p. \quad (29)$$

Перепишем уравнение на собственные числа $\{\lambda_n\}$ (26) в виде

$$e^{2i\pi\sqrt{\lambda_n}} = \left(1 + \sum_{k=1}^p \frac{b_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}\right)^{-1} \quad (30)$$

и прологарифмируем (30) (пользуясь также классическим фактом о том, что $\{\lambda_n\}$ находится в окрестности именно $n \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2\pi i} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^p \frac{b_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}\right) - \frac{1}{2\pi i} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}\right). \quad (31)$$

Из оценок (29) легко следует, что логарифмы в (31) разлагаются в ряд Тейлора (по степеням сумм, прибавляемых к 1) при $\sqrt{\lambda_n} > (3 + H)\pi M_1 2^p$, а следовательно, они разлагаются в ряд Тейлора по степеням $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ в той же области:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}. \quad (32)$$

Опуская несложную, но весьма громоздкую процедуру разложения логарифмов из (31) по степеням $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ и применения к получаемым выражениям оценок (29), запишем необходимую для дальнейшего оценку коэффициентов d_k из (32):

$$|d_k| \leq [\pi(3 + H)2^p M_1]^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Оценка (33) указывает, что, вообще говоря, равенства (32) верны (не как асимптотические, а как точные, со сходящимся рядом) не для всех λ_n , а только начиная с некоторого номера. Используя рассуждение типа обращения степенного ряда по Бурману–Лагранжу, нетрудно заметить, что, начиная с некоторого номера K , имеют место представления $\sqrt{\lambda_n}$ в виде сходящегося ряда по степеням n :

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{n^k}, \quad n \geq K. \quad (34)$$

Нам необходима оценка K и c_k из (34).

Итак, рассмотрим функцию² $\psi(z) = A + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}$, где $A \neq 0$, $|a_k| \leq CR^{-k-1}$, $C > 0$ и $R > 0$ – некоторые константы. Тогда функция $w(z) = \frac{z}{\psi(z)}$ аналитична в некоторой окрестности нуля и

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{A}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (35)$$

Нам надо в некоторой окрестности нуля получить разложение

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{Aw} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k \quad (36)$$

и оценить снизу ρ – радиус сходимости ряда $\sum b_k w^k$. Сразу поясним, что разложение (35) соответствует (32) (n по $\sqrt{\lambda_n}$), а (36) соответствует (34) ($\sqrt{\lambda_n}$ по n), и K из (34) связано с ρ так: $K = \left\lceil \frac{1}{\rho} \right\rceil + 1$.

Пусть D – область в C , содержащая нуль, ∂D – простая замкнутая спрямляемая кривая, $w(z)$ аналитична в $\overline{D}$ и

$$w(z_1) \neq w(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{D}, \quad z_1 \neq z_2. \quad (37)$$

Также пусть $B = \min_{z \in \partial D} |w(z)|$. Так как у нас $w(0) = 0$, то в силу (37) $B > 0$. Другими словами, w является биекцией $\overline{D}$ на ее образ и этот образ содержит круг $K_B = \{w \in C \mid |w| \leq B\}$. Пусть $G = w^{-1}(K_B)$. Запишем необходимые в дальнейшем формулы для коэффициентов степенного ряда некоторой функции

$$f(z) = f(z(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n,$$

определенные в G :

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=B} \frac{f(z(w))}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)w'(z)}{(w(z))^{n+1}} dz. \quad (38)$$

² Авторы признательны А. Ю. Попову за существенную помощь в получении нижеследующей оценки для K и c_k .

Нас в соответствии с (36) интересует разложение функции

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{Aw(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\psi(z)}{Az} = \frac{A - \psi(z)}{Az},$$

аналитической в круге $|z| < R$. В качестве областей D мы можем брать круги $|z| < r$, $r < R$, причем r надо выбрать так, чтобы $w(z)$ было инъективным в $|z| < r$, а величина

$$B = B(r) = \min_{|z|=r} |w(z)| = \min_{|z|=r} \left| \frac{z}{\psi(z)} \right| = \frac{r}{\max_{|z|=r} |\psi(z)|}$$

была бы возможно большей. Тогда $\rho = \sup_r B(r)$.

ЛЕММА 5. Пусть $C_1 = \frac{C}{|A|}$, $r_0 = \frac{R}{2(1+C_1)}$. Тогда $\psi(z) \neq 0$ при $|z| < 2r_0$ и в этом круге

$$w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k z^k, \quad |\delta_k| \leq \frac{1+2C_1}{C+|A|} r_0^{1-k}, \quad k \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$|\psi(z)| \geq |A| - \sum_{k=0}^{\infty} C \left(\frac{|z|}{R} \right)^{k+1} = |A| \left(1 - \frac{C_1 |z|}{R - |z|} \right).$$

Если $|z| < \frac{R}{1+C_1}$, то $\frac{C_1 |z|}{R - |z|} < 1$ и, действительно, $\psi(z) \neq 0$ при $|z| < 2r_0$. Если $|z| = r_0$, то $|\psi(z)| \geq |A| \frac{1+C_1}{2C_1+1}$ и

$$|\delta_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_0} \frac{w(z)}{z^{k+1}} dz \right| \leq \frac{\max_{|z|=r_0} \left| \frac{z}{\psi(z)} \right|}{r_0^k} = \frac{r_0^{1-k}}{\min_{|z|=r_0} |\psi(z)|} \leq \frac{2C_1+1}{|A|(1+C_1)} r_0^{1-k}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если $\sum_{n=2}^{\infty} n|\delta_n| r^{n-1} < |\delta_1|$, то отображение $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n$ инъективно в круге $|z| \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$w(z_1) - w(z_2) = \delta_1(z_1 - z_2) + \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n(z_1^n - z_2^n).$$

Следовательно, при $z_1 \neq z_2$, $|z_1|, |z_2| \leq r$

$$\left| \frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq |\delta_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |\delta_n| \left| \sum_{j=0}^{n-1} z_1^j z_2^{n-1-j} \right| \geq |\delta_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n|\delta_n| r^{n-1} > 0.$$

Лемма доказана.

У нас $\delta_1 = 1/A$ и надо подобрать r так, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{1}{|A|} \frac{1+2C_1}{1+C_1} \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{r}{r_0} \right)^{k-1} < \frac{1}{|A|}$$

или

$$\sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{r}{r_0} \right)^{k-1} < \frac{1+C_1}{1+2C_1}.$$

Очевидно, достаточно выполнения неравенства $\frac{1}{(1-(r/r_0))^2} - 1 \leq 1/2$, и отсюда $r/r_0 \leq 1 - \sqrt{2/3}$. Примем $r = \frac{2}{11}r_0 = \frac{R}{11(1+C_1)}$ и оценим ρ . В силу изложенного перед леммой 5 $\rho \geq \frac{r}{\max_{|z|=r} |\psi(z)|}$. В отношении $\max |\psi(z)|$ имеем:

$$\max_{|z|=r} |\psi(z)| \leq |A| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{k+1} \leq |A| + C \frac{r}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k = |A| + \frac{rC}{R-r}$$

и окончательно для ρ получаем следующую оценку: $\rho \geq \frac{R}{12(|A|+C)}$ и для K верно:

$$K = \left\lceil \frac{12(|A|+C)}{R} \right\rceil + 1. \quad (39)$$

Наконец, воспользуемся разложением (32) и оценками (33) для записи оценки для K в терминах, прямо связанных с исходной задачей: $A = 1$, $C = \frac{1}{\pi(3+H)2^p M_1}$, $R = C$, и имеем

$$K = [12 + 12\pi(3+H)2^p M_1] + 1 = 13 + [12\pi(3+H)2^p M_1]. \quad (40)$$

Для оценки коэффициентов c_k из (34) используем формулы (38), оценки для $w(z)$ из леммы 5 и несложную оценку максимума $\psi(z)$. Итак,

$$\begin{aligned} |c_k| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{2}{11}r_0} \frac{A-\psi(z)}{Az} \frac{w'(z)}{(w(z))^{k+1}} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{2}{11}r_0} \frac{1}{A} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l \right) \frac{(\psi(z))^{k+1}}{z^{k+1}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l l z^l - 1 \right) dz \right| \\ &\leq 24 \left(\frac{6}{5} \pi(3+H)2^p M_1 \right)^k. \end{aligned} \quad (41)$$

Наконец, докажем неравенства (25). Мы опять пожертвуем качеством оценки (они будут весьма грубыми) в пользу простых и коротких рассуждений и выкладок. Итак, пусть номер N таков, что

$$|\sqrt{\lambda_K} - A_N(K)| < \varepsilon_K(N), \quad (42)$$

где $A_N(K)$ отрезок разложения (34) до члена $\frac{C_N}{K^N}$. Подберем для любого $\varepsilon > 0$ номер N так, чтобы

$$|(\sqrt{\lambda_K})^l - A_N^l(K)| < \varepsilon \quad (43)$$

для $l = 1, 2, \dots, 2(K-1)$. Из (34) и оценок (40), (41) легко получаем

$$|\sqrt{\lambda_K}| < K + 3 \quad (44)$$

и, делая оценку $|A_N(K)| < 2|\sqrt{\lambda_K}|$, $(1 + \varepsilon)^n - 1 < \varepsilon n 2^{n-1}$, имеем, что при выборе

$$\varepsilon_K(N) < \frac{\varepsilon}{(4(K+3))^{2(K-1)}} \quad (45)$$

из (42) будет следовать (43). Далее, так как

$$\varepsilon_K(N) = \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{C_l}{K^l},$$

то, выбрав N в соответствии с неравенством

$$\frac{3}{10^{N+1}} \leq \frac{\varepsilon}{(4(K+3))^{2(K-1)}}, \quad (46)$$

мы определим $A_N(K)$ так, что будет выполнено (45). Теорема 1 доказана.

4. Приближение произвольного оператора Штурма–Лиувилля оператором класса S .

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного оператора Штурма–Лиувилля L с потенциалом из $L_2[0, \pi]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует оператор класса S с областью определения такой же, как и у L , и такой, что норма их разности не превосходит ε .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор (3), (4) и его переходную функцию обратной задачи $\Phi(x)$ (11). Если $q(x) \in L_2[0, \pi]$, то $\Phi(x) \in AC[0, 2\pi]$ ($\Phi(x)$ может иметь в точке 2π разрыв первого рода, что несущественно для дальнейшего, и мы будем принимать за $\Phi(x)$ функцию, совпадающую с $\Phi(x)$ на $[0, 2\pi)$ и равную в $x = 2\pi$ пределу $\Phi(x)$), и $\Phi'(x) \in L_2[0, 2\pi]$. Приближим $\Phi(x)$ многочленом $P\Phi(x, \varepsilon_1)$, содержащим лишь четные степени x , с точностью до ε_1 по норме $C[0, 2\pi]$ и таким, что $P\Phi'(x, \varepsilon_1)$ приближает $\Phi'(x)$ в $L_2[0, 2\pi]$ также с точностью ε_1 (о способах построения подобных приближений см. [13]). Тогда, очевидно, функция

$$PF(x, y, \varepsilon_1) = \frac{1}{2} [P\Phi(x + y, \varepsilon_1) + P\Phi(|x - y|, \varepsilon_1)]$$

будет аналогично приближать $F(x, y)$ (13).

Основное интегральное уравнение обратной задачи (12) есть уравнение по переменной y с параметром x , и при каждом фиксированном x есть уравнение Фредгольма второго рода. Обозначая оператор

$$\int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = \mathcal{F}_x(K(x, y)),$$

перепишем (12) в более удобной для нас форме:

$$(I + \mathcal{F}_x)K(x, y) = -F(x, y). \quad (47)$$

Аналогичное уравнение с $PF(x, y, \varepsilon_1)$ вместо $F(x, y)$ запишем так:

$$(I + \mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1})K_{\varepsilon_1}(x, y) = -PF(x, y, \varepsilon_1). \quad (48)$$

Считая для удобства $PF(x, y, 0) = F(x, y)$, перепишем (48) в виде

$$(I + \mathcal{F}_x + [\mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1} - \mathcal{F}_x])K_{\varepsilon_1}(x, y) = -F(x, y) + (-PF(x, y, \varepsilon_1) + F(x, y)). \quad (49)$$

Так как $\Phi(x)$ является переходной функцией обратной задачи некоторого оператора L , то уравнение (47) однозначно разрешимо при любом x [9] и, следовательно, существует оператор $(I + \mathcal{F}_x)^{-1}$. Применим этот оператор к обеим частям равенства (49):

$$\begin{aligned} & (I + (I + \mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1} - \mathcal{F}_x))K_{\varepsilon_1}(x, y) \\ & = K(x, y) + (I + \mathcal{F}_x)^{-1}(F(x, y) - PF(x, y, \varepsilon_1)). \end{aligned} \quad (50)$$

Далее, так как $PF(x, y, \varepsilon_1)$ есть равномерное приближение для $F(x, y)$, то норма оператора $\mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1} - \mathcal{F}_x$ может быть выбором ε_1 сделана сколь угодно малой (оценку опустим ввиду тривиальности), а значит, и норма $(I + \mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1} - \mathcal{F}_x)$ тоже может быть сделана сколь угодно мала. Тогда оператор, применяемый к $K_{\varepsilon_1}(x, y)$ в (50), обратим и, более того, обратный к нему представим в виде суммы ряда Неймана. Применим этот ряд Неймана к левой и правой частям (50):

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon_1}(x, y) &= \left(\sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l ((I + \mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1} - \mathcal{F}_x))^l \right) \\ &\quad \times (K(x, y) + (I + \mathcal{F}_x)^{-1}(F(x, y) - PF(x, y, \varepsilon_1))) \\ &= K(x, y) - (I + (I + \mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1} - \mathcal{F}_x)) \\ &\quad \times (I + \mathcal{F}_x^{-1})(F(x, y) - PF(x, y, \varepsilon_1) + (\mathcal{P}\mathcal{F}_{x, \varepsilon_1} - \mathcal{F}_x)K(x, y)). \end{aligned} \quad (51)$$

Из (51) уже легко оценивается $|K_{\varepsilon_1}(x, y) - K(x, y)|$. Заметим, что попутно мы доказали разрешимость основного интегрального уравнения, основанного на функции $P\Phi(x, \varepsilon_1)$, что само по себе не очевидно, так как про эту функцию заранее не известно, что она является переходной функцией некоторого оператора Штурма–Лиувилля на отрезке $[0, a]$ (ср. с леммой 4).

Дифференцируя уравнение (12) по x и по y , соответственно получим:

$$K'_x(x, y) + F'_x(x, y) + K(x, x)F(x, y) + \int_0^x K'_x(x, t)F(t, y) dt = 0, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & K'_y(x, y) + F'_y(x, y) + K(x, x)F(x, y) \\ & - K(x, 0)\Phi(y) - \int_0^x K'_t(x, t)F(t, y) dt = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Совершенно аналогично тому, как было получено уравнение (51), мы можем исследовать и (52), (53) (используя уже имеющуюся из (51) функцию $K_{\varepsilon_1}(x, y)$

и ее близость к $K(x, y)$ и доказать возможность дифференцирования $K(x, y)$ с сохранением необходимого приближения.

Таким образом, $q_{\varepsilon_1}(x) = 2 \frac{d}{dx} K_{\varepsilon_1}(x, x)$ и $h_{\varepsilon_1} = K_{\varepsilon_1}(0, 0)$ будут параметрами оператора, приближающего исходный с любой точностью, и при этом, ввиду того, что $P\Phi(x, \varepsilon_1)$ есть многочлен по четным степеням x , по лемме 4 это будут параметры оператора класса S . Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что h_{ε_1} всегда можно выбрать равным h . Действительно, $h = K(0, 0) = -\Phi(0)$ и мы всего лишь должны при приближении $\Phi(x)$ следить за тем, чтобы $\Phi(0) = P\Phi(0, \varepsilon_1)$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что, конечно, для произвольного оператора L нельзя рассчитывать на точно известную $\Phi(x)$. Саму $\Phi(x)$ можно найти приближенно последовательным решением двух уравнений Вольтерра второго рода: сначала уравнения (14), а затем (15) и (16). Последовательные приближения для уравнений этого типа сходятся очень быстро, и получить необходимые оценки здесь несложно. То, что мы будем знать $\Phi(x)$ приближенно, на доказательстве теоремы 2 не отразится.

Список литературы

1. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. 1952. Т. 7. № 6. С. 3–96.
2. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. С. 593–596.
3. Гельфанд И. М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // УМН. 1956. Т. 11. № 1. С. 191–198.
4. Дикий Л. А. Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 4. С. 187–200.
5. Лидский В. Б., Садовничай В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функц. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 2. С. 52–59.
6. Лидский В. Б., Садовничай В. А. Формулы следов в случае уравнения Орра–Зоммерфельда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 3. С. 633–648.
7. Дикий Л. А. Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. № 1. С. 12–14.
8. Шкарин С. А. О способе Гельфанда–Дикого вычисления первых собственных значений оператора Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 1. С. 39–44.
9. Садовничай В. А., Подольский В. Е. О вычислении первых собственных значений оператора Штурма–Лиувилля // Докл. АН. 1996. Т. 346. № 2. С. 162–164.
10. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 327–420.
11. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960.
12. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
13. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.