Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, Пример дикого странного аттрактора, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 2, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:44:46

УДК 517.95

Д. В. Тураев, Л. П. Шильников

Пример дикого странного аттрактора

В пространстве C^r -гладких, $r \geq 4$, потоков в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, доказывается существование областей, заполненных системами, каждая из которых имеет аттрактор (здесь – вполне устойчивое цепно-транзитивное замкнутое инвариантное множество), содержащий нетривиальное базисное гиперболическое множество вместе с его неустойчивым многообразием, которое при этом имеет точки нетрансверсального пересечения с устойчивым многообразием. Приведена конструкция такого дикого аттрактора, содержащего состояние равновесия типа седло–фокус.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

В настоящей работе мы выделяем класс динамических систем со странным аттрактором нового типа, чья особенность состоит в том, что он может содержать дикое гиперболическое множество (в смысле [1]). Именно, мы указываем области в пространстве C^r -гладких, $r \geq 4$, потоков в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, заполненные системами, каждая из которых имеет аттрактор (здесь – вполне устойчивое цепно-транзитивное замкнутое инвариантное множество), содержащий нетривиальное базисное гиперболическое множество вместе с его неустойчивым многообразием, которое при этом имеет точки нетрансверсального пересечения с устойчивым многообразием.

Как показано в [1]–[5], наличие дикого множества обуславливает весьма нетривиальное поведение траекторий. Мы, в частности, показываем, что построенный нами аттрактор может содержать периодические траектории с негрубыми гомоклиническими кривыми, причем порядок касания устойчивого и неустойчивого многообразия вдоль гомоклинической кривой может быть произвольно велик. Так как описание бифуркаций касания порядка n требует n независимых параметров, данный результат означает, в частности, что полное описание динамики и бифуркаций построенного аттрактора невозможно ни в каком конечно-параметрическом семействе. Другим отражением этого свойства служит то, что данный аттрактор может содержать негрубые периодические траектории произвольно высоких порядков вырождения. Кроме того, в нем могут одновременно существовать периодические траектории с различными размерностями неустойчивых многообразий ($\dim W^u = 2$ и $\dim W^u = 3$).

Наша конструкция близка к построенной в [6], [7] геометрической модели аттрактора Лоренца с той разницей, что она существенно нетрехмерна и что здесь состояние равновесия не седло, а *седло–фокус*. Именно, пусть X – C^r -гладкий, $r \geq 4$,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01135) и INTAS (грант № 930570).

поток в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, имеющий состояние равновесия O типа седло–фокус с характеристическими показателями $\gamma, -\lambda \pm i\omega, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-3}$, где $\gamma > 0, 0 < \lambda < \operatorname{Re} \alpha_j, \omega \neq 0$. Будем предполагать, что

$$\gamma > 2\lambda. \quad (1)$$

Данное условие введено в [8], где показана, в частности, его необходимость для того, чтобы в случае, когда сепаратриса возвращается в седло–фокус при $t \rightarrow +\infty$ (образует *гомоклическую петлю*), в окрестности петли не могли бы рождаться устойчивые периодические траектории.

Введем координаты (x, y, z) ($x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}^{n-3}$) так, чтобы состояние равновесия находилось в начале координат, одномерное неустойчивое многообразие точки O касалось оси x , а $(n-1)$ -мерное устойчивое многообразие касалось плоскости $\{x = 0\}$; при этом координаты $y_{1,2}$ отвечают ведущим показателям $\lambda \pm i\omega$, а координаты z – неведущим показателям α .

Предположим, что поток имеет *секущую*, скажем, поверхность $\Pi: \{\|y\| = 1, \|z\| \leq 1, |x| \leq 1\}$. Поскольку устойчивое многообразие W^s касается в точке O плоскости $\{x = 0\}$, то локально оно задается уравнением вида $x = h^s(y, z)$, где h^s – некоторая гладкая функция, $h^s(0, 0) = 0$. Мы предположим, что такое представление справедливо по крайней мере при $(\|y\| \leq 1, \|z\| \leq 1)$ и что при этом $|h^s| < 1$. Таким образом, поверхность Π служит секущей для W_{loc}^s , и при этом пересечение W_{loc}^s с Π имеет вид $\Pi_0: x = h_0(\varphi, z)$, где φ – угловая координата, $y_1 = \|y\| \cos \varphi, y_2 = \|y\| \sin \varphi$, а h_0 – некоторая гладкая функция, $-1 < h_0 < 1$. Заменой координат можно сделать $h_0 \equiv 0$, и мы будем считать, что это выполнено.

Мы предполагаем, что все траектории, стартующие на $\Pi \setminus \Pi_0$, возвращаются на Π , определяя тем самым отображения Пуанкаре: $T_+: \Pi_+ \rightarrow \Pi$ и $T_-: \Pi_- \rightarrow \Pi$, где $\Pi_+ = \Pi \cap \{x > 0\}$ и $\Pi_- = \Pi \cap \{x < 0\}$. Очевидно, что если P – точка на Π с координатами (x, φ, z) , то

$$\lim_{x \rightarrow -0} T_-(P) = P_-^1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} T_+(P) = P_+^1,$$

где P_-^1 и P_+^1 – точки первого пересечения одномерных неустойчивых сепаратрис точки O с Π . Соответственно, мы можем доопределить отображения T_+ и T_- по непрерывности, так что

$$T_-(\Pi_0) = P_-^1, \quad T_+(\Pi_0) = P_+^1. \quad (2)$$

Очевидно, что область $\mathcal{D}$, заполненная траекториями, стартующими на Π (плюс точка O и ее сепаратрисы), является *поглощающей областью* для системы X в том смысле, что траектории, стартующие на $\partial\mathcal{D}$, входят в $\mathcal{D}$ и остаются там при всех положительных значениях времени t . По построению $\mathcal{D}$ представляет собой цилиндр $\{\|y\| \leq 1, \|z\| \leq 1, |x| \leq 1\}$ с двумя подклеенными ручками, окружающими сепаратрисы (рис. 1).

Мы предположим, что (полу)поток в $\mathcal{D}$ *псевдогиперболический*. (Нам удобнее здесь вкладывать в это понятие более сильный смысл, чем это делается обычно [9].) Именно, мы предлагаем следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полупоток называется *псевдогиперболическим*, если выполнены два следующих условия:

- (А) в каждой точке фазового пространства касательное пространство инвариантным относительно линеаризованного полупотока образом раскладывается в прямую сумму подпространств N_1 и N_2 , непрерывно зависящих от

Рис. 1

точки, так что максимальный ляпуновский показатель, отвечающий N_1 , строго меньше минимального ляпуновского показателя, отвечающего N_2 : для любой точки M , для любых ненулевых векторов $u \in N_1(M)$ и $v \in N_2(M)$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|u_t\|}{\|u\|} < \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|v_t\|}{\|v\|},$$

где u_t и v_t — сдвиг векторов u и v полупотоком, линеаризованным вдоль траектории точки M ;

- (В) линеаризованный полупоток экспоненциально растягивает объем в ограничении на N_2 .

Новшество состоит здесь во введении условия (В), которое гарантирует отсутствие устойчивых периодических траекторий. Вообще говоря, данное определение не исключает случай, когда максимальный ляпуновский показатель, отвечающий N_1 , всюду неотрицателен — тогда линеаризованный полупоток тем более является растягивающим в ограничении на N_2 , и условие (В) выполнено тривиально. В данной работе мы, напротив, рассматриваем случай, когда линеаризованный полупоток является экспоненциально сжимающим в ограничении на N_1 , при этом условие (В) существенно.

Заметим, что псевдогиперболичность сохраняется при малых гладких возмущениях системы: согласно [9] инвариантное разложение касательного пространства сохраняется при малых возмущениях, и подпространства N_1 и N_2 меняются непрерывно. Очевидно, при этом, что свойство экспоненциального растяжения объемов в N_2 также устойчиво к малым возмущениям.

Приведенное определение достаточно широко; оно включает, в частности, гиперболические потоки, для которых можно положить $(N_1, N_2) = (N^s, N^u \oplus N_0)$ или $(N_1, N_2) = (N^s \oplus N_0, N^u)$, где N^s и N^u – устойчивое и неустойчивое инвариантные подпространства, а N_0 – одномерное инвариантное подпространство, натянутое на вектор фазовой скорости. Геометрическая модель аттрактора Лоренца из [7] или [10] также относится к данному классу: здесь N_1 служит касательной к сжимающему инвариантному слоению коразмерности два, а растяжение площадей в двумерном подпространстве N_2 обеспечено тем, что отображение Пуанкаре является растягивающим в направлении, трансверсальном сжимающему слоению.

В данной работе мы предполагаем, что подпространство N_1 имеет коразмерность три: $\dim N_1 = n - 3$, $\dim N_2 = 3$, и что линейаризованный поток является при $t \geq 0$ экспоненциально сжимающим на N_1 . Условие (A) означает при этом, что для векторов из N_2 если и имеет место сжатие, то более слабое чем на N_1 . Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, мы будем называть N_1 *сильно сжимающим*, а N_2 – *центральный* подпространством и обозначать их N^{ss} и N^c , соответственно. Дополнительно мы будем считать, что координаты (x, y, z) в $\mathbb{R}^n$ введены так, что в каждой точке области $\mathcal{D}$ пространство N^{ss} имеет ненулевую проекцию на координатное пространство z , а N^c – ненулевую проекцию на координатное пространство (x, y) .

Заметим, что требования псевдогиперболичности изначально выполнены в точке O : здесь N^{ss} совпадает с координатным пространством z , а N^c – с (x, y) , условие (1) как раз гарантирует растяжение объемов в инвариантном подпространстве (x, y) . Эти свойства линейаризованного потока автоматически наследуются траекториями в малой окрестности O . По существу, мы потребовали наследования этих свойств в немалой окрестности $\mathcal{D}$ точки O .

Согласно [9] экспоненциальное сжатие в N^{ss} влечет существование инвариантного сжимающего слоения $\mathcal{N}^{ss}$ с C^r -гладкими слоями, касательными к N^{ss} . Аналогично [11], [12] можно показать, что это слоение абсолютно непрерывно. При факторизации по слоям область $\mathcal{D}$ становится ветвленным трехмерным многообразием: поскольку $\mathcal{D}$ ограничена, а фактор-полупоток растягивает объем, то очевидно, траектории фактор-полупотока должны склеиваться на некоторых поверхностях, чтобы оставаться ограниченными (ср. [10]).

Естественным образом свойства псевдогиперболичности и растяжения объемов наследуются отображением Пуанкаре $T \equiv (T_+, T_-)$ на секущей Π . Здесь

(A*) существует слоение из гладких слоев вида $(x, \varphi) = h(z)|_{-1 \leq z \leq 1}$, где производная $h'(z)$ равномерно ограничена, обладающее следующими свойствами: оно *инвариантно* в том смысле, что если l – слой слоения, то $T_+^{-1}(l \cap T_+(\Pi_+ \cup \Pi_0))$ и $T_-^{-1}(l \cap T_-(\Pi_- \cup \Pi_0))$ также являются слоями слоения (если только это не пустые множества), оно *абсолютно непрерывно* в том смысле, что отображение проектирования по слоям с одной трансверсали к слоению на другую изменяет площади в конечное число раз и при этом соответствующие отношения площадей отделены от бесконечности и нуля, оно *сжимающее* в том смысле, что если две точки принадлежат одному слою, то расстояние между их итерациями под действием отображения T экспоненциально стремится к нулю;

(B*) фактор-отображения $\tilde{T}_+$ и $\tilde{T}_-$ экспоненциально растягивают площадь.

Выполнения свойств (A^*) , (B^*) и соотношения (2) для отображения Пуанкаре T достаточно для справедливости теорем 1–3 ниже. Подобно [7], где аналогичный результат доказан для аттрактора Лоренца, можно установить достаточные условия для выполнения (A^*) и (B^*) .

ЛЕММА 1. *Запишем отображение T в виде*

$$(\bar{x}, \bar{\varphi}) = g(x, \varphi, z), \quad \bar{z} = f(x, \varphi, z),$$

где f и g – функции, гладкие при $x \neq 0$, терпящие разрыв при $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} (g, f) = (x_-, \varphi_-, z_-) \equiv P_-^1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} (g, f) = (x_+, \varphi_+, z_+) \equiv P_+^1.$$

Пусть

$$\det \frac{\partial g}{\partial(x, \varphi)} \neq 0. \quad (3)$$

Обозначим

$$A = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial(x, \varphi)} \left(\frac{\partial g}{\partial(x, \varphi)} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial(x, \varphi)} \left(\frac{\partial g}{\partial(x, \varphi)} \right)^{-1},$$

$$C = \left(\frac{\partial g}{\partial(x, \varphi)} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial z}, \quad D = \left(\frac{\partial g}{\partial(x, \varphi)} \right)^{-1}.$$

При условии, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} C = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \|A\| \|D\| = 0, \quad (4)$$

$$\sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \sqrt{\|A\| \|D\|} + \sqrt{\sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \|B\| \sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \|C\|} < 1, \quad (5)$$

отображение имеет непрерывное инвариантное слоение из гладких слоев вида $(x, \varphi) = h(z)|_{-1 \leq z \leq 1}$, где производная $h'(z)$ равномерно ограничена. Если, кроме того,

$$\sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \|A\| + \sqrt{\sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \|B\| \sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \|C\|} < 1, \quad (6)$$

то слоение сжимающее и при дополнительном условии, что для некоторого $\beta > 0$

$$\text{функции } A|x|^{-\beta}, D|x|^\beta, B, C \text{ равномерно ограничены и гёльдеровы,}$$

$$\frac{\partial \ln \det D}{\partial z}, \frac{\partial \ln \det D}{\partial(x, \varphi)} D|x|^\beta \text{ равномерно ограничены,} \quad (7)$$

абсолютно непрерывное. Если при этом

$$\sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \sqrt{\det D} + \sqrt{\sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \|B\| \sup_{P \in \Pi \setminus \Pi_0} \|C\|} < 1, \quad (8)$$

то фактор-отображение $\tilde{T}$ растягивает площадь.

Заметим, что как следует из [8], в случае, когда состояние равновесия – седло-фокус, отображение Пуанкаре вблизи $\Pi_0 = \Pi \cap W^s$ записывается при подходящем выборе координат в виде

$$(\bar{x}, \bar{\varphi}) = Q_{\pm}(Y, Z), \quad \bar{z} = R_{\pm}(Y, Z). \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Y &= |x|^{\rho} \begin{pmatrix} \cos(\Omega \ln |x| + \varphi) & \sin(\Omega \ln |x| + \varphi) \\ -\sin(\Omega \ln |x| + \varphi) & \cos(\Omega \ln |x| + \varphi) \end{pmatrix} + \Psi_1(x, \varphi, z), \\ Z &= \Psi_2(x, \varphi, z), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\rho = \lambda/\gamma < \frac{1}{2}$ (см. (1)), $\Omega = \omega/\gamma$ и для некоторого $\eta > \rho$

$$\left\| \frac{\partial^{p+|q|} \Psi_i}{\partial x^p \partial(\varphi, z)^q} \right\| = O(|x|^{\eta-p}), \quad 0 \leq p + |q| \leq r - 2; \quad (11)$$

$Q_{\pm}$, $R_{\pm}$ в (9) (“+” отвечает $x > 0$ – отображение T_+ , “–” отвечает $x < 0$ – отображение T_-) – гладкие функции в окрестности $(Y, Z) = 0$, для которых можно записать разложение в ряд Тейлора

$$Q_{\pm} = (x_{\pm}, \varphi_{\pm}) + a_{\pm}Y + b_{\pm}Z + \dots, \quad R_{\pm} = z_{\pm} + c_{\pm}Y + d_{\pm}Z + \dots \quad (12)$$

Из (9)–(12) видно, что если O – седло-фокус, удовлетворяющий (1), то, если $a_+ \neq 0$ и $a_- \neq 0$, отображение T удовлетворяет условиям (4) и (7) с $\beta \in (\rho, \eta)$. Кроме того, выполнены аналоги условий (3), (5), (6), (8), где супремум берется не по $|x| \leq 1$, а только по малым x . Несложно продолжить отображение (9), (10), (12) на всю Π , так чтобы условия леммы выполнялись полностью. Таково, например, отображение

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0.9|x|^{\rho} \cos(\ln |x| + \varphi), \\ \bar{\varphi} &= 3|x|^{\rho} \sin(\ln |x| + \varphi), \\ \bar{z} &= (0.5 + 0.1z|x|^{\eta}) \operatorname{sign} x, \end{aligned} \quad (13)$$

где $0.4 = \rho < \eta$.

Как уже говорилось, растяжение объемов фактор-полупотоком накладывает ограничения на возможные типы предельного поведения траекторий. Именно, *в $\mathcal{D}$ не может быть устойчивых периодических траекторий*. Более того, *любая траектория в $\mathcal{D}$ имеет положительный показатель Ляпунова*. Следовательно, в данном случае мы должны говорить о странном аттракторе.

Предварительно, напомним ряд определений и простых фактов из топологической динамики (см., например, [13], [14] и указанную там литературу). Пусть $X_t P$ – сдвиг точки P по траектории потока X за время t . Для данных $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ назовем (ε, τ) -траекторией последовательность точек $P_1, P_2, \dots, P_k$ таких, что P_{i+1} лежит на расстоянии меньшем ε от $X_t P_i$ для некоторого $t > \tau$. Точку Q назовем (ε, τ) -достижимой из точки P , если существует (ε, τ) -траектория, соединяющая P и Q , и достижимой из точки P , если при некотором $\tau > 0$ она (ε, τ) -достижима из P для любого ε (это определение, очевидно, не зависит от выбора τ). Множество C достижимо из точки P , если оно содержит точку, достижимую из P . Точка P называется *цепно-рекуррентной*, если она достижима из точки $X_t P$ при любом t . Замкнутое инвариантное множество C называется *цепно-транзитивным*, если для любых точек P и Q из C и для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ в C лежит

(ε, τ) -траектория, соединяющая P и Q . Очевидно, все точки цепно-транзитивного множества цепно-рекуррентны.

Компактное инвариантное множество C называется *орбитно устойчивым*, если для любой его окрестности U найдется окрестность $V(C) \subseteq U$ такая, что траектории, стартующие в V , не покидают U при $t \geq 0$. Орбитно устойчивое множество назовем *вполне устойчивым*, если для любой окрестности $U(C)$ найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\tau > 0$ и окрестность $V(C) \subseteq U$ такая, что (ε_0, τ) -траектории, стартующие в V , не покидают U (очевидно, что это не что иное, как устойчивость по отношению к постоянно действующим возмущениям). Известно, что множество C орбитно-устойчиво тогда и только тогда, когда $C = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$, где U_j – система вложенных друг в друга инвариантных открытых множеств, и вполне устойчиво, когда множества U_j не только инвариантны, но и являются поглощающими областями (т.е. траектории, стартующие на ∂U_j , входят внутрь U_j за время, не превышающее некоторого τ_j ; очевидно при этом, что (ε, τ) -траектории, стартующие на ∂U_j , всегда остаются внутри U_j , если ε достаточно мало и $\tau \geq \tau_j$). Поскольку максимальное инвариантное множество (*максимальный аттрактор*), которое содержится в каждой поглощающей области, очевидно, *асимптотически устойчиво*, то всякое вполне устойчивое множество либо асимптотически устойчиво, либо является пересечением счетного числа вложенных друг в друга замкнутых инвариантных асимптотически устойчивых множеств.

Возвращаясь к исходной системе X , назовем *аттрактором* системы множество $\mathcal{A}$ точек, достижимых из состояния равновесия O (в частности, множество $\mathcal{A}$ содержит сепаратрисы точки O и их замыкание). Определенный выбор множества $\mathcal{A}$ обусловлен тем, что как показано в следующем параграфе, *множество $\mathcal{A}$ цепно-транзитивно, вполне устойчиво и достижимо из любой точки поглощающей области $\mathcal{D}$* ; более того, $\mathcal{A}$ – *единственное в $\mathcal{D}$ цепно-транзитивное вполне устойчивое множество* и оно является пересечением всех вполне устойчивых инвариантных подмножеств $\mathcal{D}$ (теоремы 1 и 2).

Эти утверждения вытекают в основном из того, что *в $\mathcal{D}$ плотны точки, асимптотические к O при $t \rightarrow +\infty$ (т.е. устойчивое многообразие точки O плотно в $\mathcal{D}$)* (лемма 2), что в свою очередь следует из того, что отображение Пуанкаре T , факторизованное по слоям сжимающего слоения, растягивает площади. Отметим, что аналогичное свойство имеет место и для аттрактора Лоренца. Также по аналогии с аттрактором Лоренца мы покажем (теорема 3), что число связных компонент пересечения аттрактора $\mathcal{A}$ с секущей ограничено, и дадим оценку числа компонент, аналогичную оценке числа лакунов в аттракторе Лоренца [7].

Эта оценка важна при доказательстве теоремы 4, где мы строим дикое множество, содержащееся в аттракторе $\mathcal{A}$. Данная теорема составляет основной результат работы.

Отметим, что дикое множество в теореме 4 указывается вполне конструктивно. Для этого мы вводим дополнительное предположение, что система X *имеет гомоклиническую петлю седло-фокуса O* (рис. 2). Точнее, мы рассматриваем однопараметрическое семейство X_μ описанного вида и предполагаем, что при $\mu = 0$ имеется гомоклиническая петля, т.е. одна из сепаратрис возвращается в точку O при $t \rightarrow +\infty$. Системы с гомоклинической петлей образуют в пространстве динамических систем бифуркационные поверхности коразмерности один, и не уменьшая общности, можно предполагать, что при $\mu = 0$ семейство X_μ пересекает соответ-

ствующую поверхность *трансверсально*. Теорема 4 утверждает, что к $\mu = 0$ *накапливается последовательность интервалов Δ_i таких, что при $\mu \in \Delta_i$ аттрактор $\mathcal{A}_\mu$ содержит дикое множество и при этом для любого $\mu^* \in \Delta_i$ для любой системы, близкой к X_{μ^*} в C^r -топологии, ее аттрактор $\mathcal{A}$ также содержит дикое множество.*

Рис. 2

Доказательство теоремы основано на следующих рассуждениях. Хорошо известно [15], что в окрестности гомоклинической петли седло–фокуса лежит нетривиальное транзитивное гиперболическое множество Λ . Это незамкнутое множество, в его замыкании лежит состояние равновесия O . При этом очевидно, что любая точка Λ достижима из O , поэтому при $\mu = 0$ множество Λ лежит в аттракторе. Так как Λ незамкнуто, оно не сохраняется целиком при малых изменениях μ , однако его замкнутые инвариантные подмножества, конечно, сохраняются. Это базисные гиперболические множества, они неустойчивы и отделены от точки O . Тем не менее, мы явно выделяем подмножество, про которое удастся доказать (леммы 3 и 4), что оно принадлежит аттрактору при всех малых $\mu > 0$ (здесь положительные значения μ отвечают расщеплению петли вовнутрь) и для всех систем, близких к X_μ при $\mu > 0$. Далее, в духе [8] мы показываем, что к $\mu = 0$ накапливаются (с положительной стороны) значения $\mu = \mu_i$, отвечающие гомоклиническому касанию инвариантных многообразий периодической траектории из указанного подмножества (лемма 5). На основании [16] отсюда следует существование уже не отдельных значений μ , а интервалов, на которых данное подмножество дикое (т.е. его неустойчивое многообразие при каждом μ из такого интервала имеет точки касания с устойчивым многообразием, и это свойство сохраняется при малых возмущениях системы), что завершает доказательство теоремы. Заметим, что применение результатов [16] требует проверки ряда условий невырожденности для гомоклинического касания при $\mu = \mu_i$, что сделано в лемме 5. Результаты, аналогичные [16], доказаны также в [17] при дополнительном предположении о существовании достаточно гладкой линеаризации для отображения Пуанкаре в окрестности периодической траектории, инвариантные многообразия которой имеют гомоклиническое касание. В нашем случае, однако, проверка этого условия была бы затруднительна и, возможно, потребовала бы дополнительных ограничений на спектр неведущих характеристических показателей α_i точки O , что не имеет отношения к сути дела.

Относительно общего случая, когда сепаратрисы точки O не образуют петлю, заметим, что как следует из плотности устойчивого многообразия в $\mathcal{D}$, сепаратрисы точки O являются *неблуждающими* траекториями, поэтому естественно предположить, что их можно замкнуть малым возмущением. Подобная проблема уже

возникала в случае лоренцевского отображения и ее удалось преодолеть (в C^1 -топологии), используя специфику отображения Пуанкаре. В настоящее время имеется весьма важная лемма Хаяши [18], которая также позволяет решить эту проблему. Поэтому и здесь справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Системы с гомоклинической петлей седло–фокуса O плотны в C^1 -топологии в рассматриваемом классе систем.*

Как уже отмечалось, наличие негрубых гомоклинических траекторий в аттракторе приводит к весьма нетривиальной динамике. Так, основываясь на результатах [4], [5], мы выводим из теоремы 4, что в построенных областях в пространстве динамических систем *плотны системы, аттрактор которых содержит негрубые гомоклинические траектории произвольно высоких порядков касания* (теорема 5), а также *плотны системы, аттрактор которых содержит негрубые периодические траектории произвольно высокого порядка вырождения* (теорема 6). В качестве частного случая теоремы 6 можно заметить, что в семействе X_μ , в построенных в теореме 4 интервалах Δ_i плотны значения μ , при которых аттрактор системы содержит периодическую траекторию типа седло–седло вместе с ее трехмерным неустойчивым многообразием, соответственно *при данных значениях μ топологическая размерность аттрактора равна трем* (теорема 7). Последнее, в частности, означает, что данный класс систем доставляет пример так называемого гиперхаоса.

§ 2. Предварительное описание аттрактора псевдогиперболического потока

В этом параграфе мы определим аттрактор системы X и дадим оценку числа связанных компонент его пересечения с секущей Π (аналогичную оценке числа лагун в аттракторе Лоренца [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *аттрактором* системы множество $\mathcal{A}$ точек, достижимых из состояния равновесия O .

Это определение оправдано следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Множество $\mathcal{A}$ цепно-транзитивно, вполне устойчиво и достижимо из любой точки поглощающей области $\mathcal{D}$.*

Устойчивость $\mathcal{A}$ следует непосредственно из определения: известно, что для любой исходной точки (и для точки O , в частности) множество точек, достижимых из нее, вполне устойчиво (систему поглощающих областей образуют множества точек, (ε_j, τ) -достижимых из исходной точки, с произвольными $\varepsilon_j \rightarrow +0$ и $\tau > 0$).

Для доказательства оставшейся части теоремы заметим, что справедлива следующая

ЛЕММА 2. *В $\mathcal{D}$ плотны точки, асимптотические к O при $t \rightarrow +\infty$ (иными словами, устойчивое многообразие точки O плотно в $\mathcal{D}$).*

Действительно, возьмем произвольную точку на Π и пусть U – ее произвольная окрестность. Если бы U не пересекалось с прообразами поверхности $\Pi_0 = W_{\text{loc}}^s \cap \Pi$, то при всех i отображение $T^i|_U$ было бы однозначно, и для множеств T_U^i площади проекций на $z = 0$ по слоям инвариантного слоения возрастали бы экспоненциально (в силу свойства (B)), что противоречит ограниченности Π . Таким

образом, прообразы Π_0 (а это – пересечения устойчивого многообразия точки O с секущей Π) плотны в Π , а следовательно, устойчивое многообразие O плотно в $\mathcal{D}$.

Из леммы 2 немедленно следует, что точка O достижима из любой точки в $\mathcal{D}$. В частности, для любых точек P и Q из $\mathcal{A}$ точка O достижима из P , в то же время, точка Q достижима из O по определению множества $\mathcal{A}$. Таким образом, Q достижима из P и для доказательства цепной транзитивности $\mathcal{A}$ осталось показать, что (ε, τ) -траектории, соединяющие P и Q , можно выбирать лежащими в $\mathcal{A}$. Последнее, впрочем, следует из вполне устойчивости множества $\mathcal{A}$: для любого $\delta > 0$, как следует из определения, (ε, τ) -траектория, соединяющая P и Q , не покидает δ -окрестности множества $\mathcal{A}$, если только ε достаточно мало, и следовательно, эта траектория может быть аппроксимирована (ε', τ) -траекторией, целиком лежащей в $\mathcal{A}$, где ε' может быть и больше чем ε , но очевидно, что $\varepsilon' \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$.

Из теоремы 1 следует, что $\mathcal{A}$ – *наименьшее* вполне устойчивое множество в $\mathcal{D}$: поскольку любое вполне устойчивое множество должно вместе с каждой своей точкой содержать все точки, достижимые из нее, то в силу теоремы 1 любое вполне устойчивое множество в $\mathcal{D}$ должно содержать точку O и, вместе с ней, множество $\mathcal{A}$. Таким образом, $\mathcal{A}$ есть пересечение всех вполне устойчивых множеств в $\mathcal{D}$.

Следующая теорема показывает, что $\mathcal{A}$ – *единственное* цепно-транзитивное вполне устойчивое множество в $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 2. *Любое орбитно устойчивое множество в $\mathcal{D}$, которое содержит точки, не принадлежащие $\mathcal{A}$, содержит не цепно-рекуррентные точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку устойчивое многообразие O плотно в $\mathcal{D}$, то O , очевидно, принадлежит любому орбитно устойчивому подмножеству $\mathcal{D}$. Так как связная компонента орбитно устойчивого множества сама является орбитно устойчивым множеством, то каждая из них содержит точку O , и таким образом, любое орбитно устойчивое множество в $\mathcal{D}$ связно. Пусть C – такое множество и пусть $P \in C, P \notin \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}$ вполне устойчиво, то найдется поглощающая область U , содержащая $\mathcal{A}$ и не содержащая P . Так как точка O принадлежит $\mathcal{A}$ и принадлежит C , то мы получили, что C содержит как точки внутри U , так и точки вне U . Множество C связно, следовательно, оно содержит хотя бы одну точку на ∂U , но как мы уже отмечали, (ε, τ) -траектории, стартующие на ∂U , для достаточно малого ε и достаточно большого τ всегда остаются внутри U на конечном расстоянии от ∂U , т.е. ни одна точка на ∂U не является цепно-рекуррентной.

Следующая теорема переносит на многомерный случай результат п. 1 теоремы 1.5 из [7] и дает описание разбиения пересечения аттрактора $\mathcal{A}$ с секущей Π на компоненты связности – мы используем это при доказательстве теоремы 4. Обозначим через $q > 1$ коэффициент растяжения площадей фактор-отображением $(\tilde{T})$: если V – область в Π , не пересекающая Π_0 , то

$$S(TV) > qS(V), \quad (14)$$

где через S обозначена площадь проекции области на поверхность $\{z = 0\}$ по слоям инвариантного слоения. Согласно (B*) $q > 1$. Кроме того, так как $S(\Pi) = 2S(\Pi_+)$ и $T\Pi_+ \subset \Pi$, то $S(T\Pi_+)/S(\Pi_+) < 2$, и следовательно, мы имеем

$$1 < q < 2.$$

Обозначим сепаратрисы точки O через Γ^+ и Γ^- , и пусть $\{P_i^\pm\}$ – точки последовательного пересечения $\Gamma^\pm$ с Π . Эти последовательности могут быть бесконечны или конечны, последнее – если соответствующая сепаратриса образует петлю (возвращается в O при $t \rightarrow +\infty$).

ТЕОРЕМА 3. Число N компонент связности множества $\mathcal{A} \cap \Pi$ конечно и справедлива оценка

$$2 \leq N < 2 + \frac{|\ln(q-1)|}{\ln q}. \quad (15)$$

Каждая компонента связности содержит по крайней мере одну из точек $P_i^\pm$. При этом для некоторых целых $N_+ \geq 1$, $N_- \geq 1$, $N_+ + N_- = N$, удовлетворяющих неравенству

$$q^{-N_+} + q^{-N_-} > 1, \quad (16)$$

множество $\mathcal{A} \cap \Pi$ может быть представлено в виде

$$\mathcal{A} \cap \Pi = \mathcal{A}_1^+ \cup \dots \cup \mathcal{A}_{N_+}^+ \cup \mathcal{A}_1^- \cup \dots \cup \mathcal{A}_{N_-}^-, \quad (17)$$

где $\mathcal{A}_i^+$ и $\mathcal{A}_i^-$ – компоненты, содержащие точки P_i^+ и P_i^- , соответственно. В этой формуле все компоненты $\mathcal{A}_i^\pm$ различны,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^+ \cap \Pi_0 &= \emptyset \quad \text{при } i < N^+, & \mathcal{A}_i^- \cap \Pi_0 &= \emptyset \quad \text{при } i < N^-, \\ \mathcal{A}_{N_+}^+ \cap \Pi_0 &\neq \emptyset, & \mathcal{A}_{N_-}^- \cap \Pi_0 &\neq \emptyset, \end{aligned} \quad (18)$$

причем

$$\begin{aligned} T_+((\mathcal{A}_{N_-}^- \cup \mathcal{A}_{N_+}^+) \cap (\Pi_+ \cup \Pi_0)) &\subseteq \mathcal{A}_1^+, \\ T_-((\mathcal{A}_{N_-}^- \cup \mathcal{A}_{N_+}^+) \cap (\Pi_- \cup \Pi_0)) &\subseteq \mathcal{A}_1^-, \\ \mathcal{A}_i^- &\subseteq T^{i-1} \mathcal{A}_1^- \quad \text{при } i < N^-, & \mathcal{A}_i^+ &\subseteq T^{i-1} \mathcal{A}_1^+ \quad \text{при } i < N^+ \end{aligned} \quad (19)$$

(см. рис. 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $\mathcal{A}$ орбитно устойчиво, то оно может быть представлено как пересечение последовательности вложенных друг в друга инвариантных областей. Соответственно, множество $\mathcal{A} \cap \Pi$ есть пересечение вложенных друг в друга окрестностей, инвариантных относительно положительных итераций отображения T . Пусть U – одна из этих областей: $\mathcal{A} \cap \Pi \subset U$, $TU \subseteq U$. Мы можем удалить из U компоненты связности, не содержащие точек из $\mathcal{A} \cap \Pi$, при этом U останется инвариантным множеством. И так как $\mathcal{A} \cap \Pi$ компактно, то в U останется только конечное число компонент. Пусть V_i^+ и V_i^- – компоненты U , содержащие точки P_i^+ и P_i^- , соответственно. Так как $P_1^+ \in T_+(\Pi_+ \cup \Pi_0)$ и $P_1^- \in T_-(\Pi_- \cup \Pi_0)$, а множества $T_+(\Pi_+ \cup \Pi_0)$ и $T_-(\Pi_- \cup \Pi_0)$ отделены друг от друга, то V_1^+ и V_1^- различны.

Заметим, что так как $TU \subseteq U$ и T непрерывно на $\Pi \setminus \Pi_0$, то если какая-то компонента U не пересекает Π_0 , то ее образ лежит целиком внутри какой-либо другой компоненты (или совпадает с ней). Более точно, если какие-то точки P_1 и $P_2 = TP_1$ принадлежат компонентам V_1 и V_2 , соответственно, и если $V_1 \cap \Pi_0 = \emptyset$, то $TV_1 \subseteq V_2$. Если же V_1 пересекает Π_0 , то $V_2 = V_1^+$ или $V_2 = V_1^-$, в зависимости

от того, $P_2 = T_+ P_1$ или $P_2 = T_- P_1$ (это следует из того, что $T_+(\Pi_0) = P_1^+ \in V_1^+$ и $T_-(\Pi_0) = P_1^- \in V_1^-$). Таким образом, если $\{P_j\}$ – некоторая траектория T , а V_j – компоненты U , содержащие P_j , то $T^k V_j \subseteq V_{j+k}$, $k \geq 1$, если только ни одна из компонент $V_j, \dots, V_{j+k-1}$ не пересекает Π_0 . Если же $V_j \cap \Pi_0 \neq \emptyset$ при некотором j , то каждая компонента с номером, большим чем j , совпадает с одной из компонент $V_i^\pm$.

Покажем теперь, что в U нет других компонент связности кроме $V_i^\pm$. Предположим, что некоторая компонента V не содержит точек $P_i^\pm$. По определению V содержит хотя бы одну точку P из $\mathcal{A}$. Так как множество $\mathcal{A} \cap \Pi$ инвариантно, т.е. состоит из целых траекторий, то оно содержит обратную полутраекторию $P_0 \equiv P, P_{-1}, P_{-2}, \dots$ ($TP_{-(j+1)} = P_{-j}$) точки P . Пусть $V_0 \equiv V, V_{-1}, V_{-2}, \dots$ – последовательность компонент связности, содержащих точки P_{-j} . Так как V не совпадает по предположению ни с одной из компонент $V_i^\pm$, то V_j не пересекают Π_0 , и $TV_{-(j+1)} \subseteq V_{-j}$, $j = 0, \dots, \infty$. Так как в U только конечное число компонент, то последовательность V_{-j} должна быть периодической, т.е. $V = V_{-k}$ для некоторого $k > 0$. Это означало бы, что T^k непрерывно на V и $T^k V \subseteq V$, что невозможно, так как при этом в силу растяжения площадей фактор-отображением должно быть $S(V) > q^k S(V)$ (см. (14)). Таким образом, множество U исчерпывается компонентами $V_i^\pm$.

Так как $TP_{i-1}^+ = P_i^+$ и $TP_{i-1}^- = P_i^-$, то $TV_{i-1}^\pm \subseteq V_i^\pm$ до тех пор, пока $V_{i-1}^\pm \cap \Pi_0 = \emptyset$. Как мы отмечали (лемма 2), прообразы линии Π_0 плотны в Π . В частности, они пересекают V_1^+ и V_1^- . Это означает, что некоторые итерации областей V_1^+ и V_1^- пересекают Π_0 . Следовательно, найдутся такие целые $N_+(U) \geq 1$ и $N_-(U) \geq 1$, что $V_{N_+(U)}^+$ и $V_{N_-(U)}^-$ пересекают Π_0 , а компоненты $V_i^\pm$ с меньшими номерами не пересекают Π_0 . Таким образом,

$$\begin{aligned} V_i^+ \cap \Pi_0 = \emptyset \quad \text{при} \quad i < N_+(U), \quad V_i^- \cap \Pi_0 = \emptyset \quad \text{при} \quad i < N_-(U), \\ V_{N_+(U)}^+ \cap \Pi_0 \neq \emptyset, \quad V_{N_-(U)}^- \cap \Pi_0 \neq \emptyset, \end{aligned} \quad (20)$$

причем

$$\begin{aligned} T_+((V_{N_-(U)}^- \cup V_{N_+(U)}^+) \cap (\Pi_+ \cup \Pi_0)) &\subseteq V_1^+, \\ T_-((V_{N_-(U)}^- \cup V_{N_+(U)}^+) \cap (\Pi_- \cup \Pi_0)) &\subseteq V_1^-, \\ V_i^- &\subseteq T^{i-1} V_1^- \quad \text{при} \quad i < N_-(U), \quad V_i^+ \subseteq T^{i-1} V_1^+ \quad \text{при} \quad i < N_+(U). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует, что

$$U = V_1^+ \cup \dots \cup V_{N_+(U)}^+ \cup V_1^- \cup \dots \cup V_{N_-(U)}^-. \quad (22)$$

Покажем, что $N_+(U)$ и $N_-(U)$ удовлетворяют неравенству

$$q^{-N_+(U)} + q^{-N_-(U)} > 1. \quad (23)$$

Действительно, очевидно, что

$$\begin{aligned} S((V_{N_-(U)}^- \cup V_{N_+(U)}^+) \cap \Pi_+) &\geq S^+ \equiv \max\{S(V_{N_-(U)}^- \cap \Pi_+), S(V_{N_+(U)}^+ \cap \Pi_+)\}, \\ S((V_{N_-(U)}^- \cup V_{N_+(U)}^+) \cap \Pi_-) &\geq S^- \equiv \max\{S(V_{N_-(U)}^- \cap \Pi_-), S(V_{N_+(U)}^+ \cap \Pi_-)\} \end{aligned}$$

(напомним, что через S обозначена площадь проекции на поверхность $\{z = 0\}$ по слоям инвариантного слоения). Отсюда и из (21), (14) следует, что

$$S(V_{N_-(U)}^-) > q^{N_-(U)} S^-, \quad S(V_{N_+(U)}^+) > q^{N_+(U)} S^+.$$

Так как $S(V_{N_-(U)}^-) \leq S^- + S^+$ и $S(V_{N_+(U)}^+) \leq S^- + S^+$, то получаем

$$q^{-N_-(U)} > \frac{S^-}{S^- + S^+}, \quad q^{-N_+(U)} > \frac{S^+}{S^- + S^+},$$

откуда следует (23).

Из (23) очевидно вытекает, что число компонент связности множества U конечно и ограничено сверху константой, не зависящей от U :

$$N_+(U) + N_-(U) < 2 + \frac{|\ln(q-1)|}{\ln q}. \quad (24)$$

Так как окрестность U сколь угодно близка к $\mathcal{A} \cap \Pi$, то отсюда следует, что число компонент связности $\mathcal{A} \cap \Pi$ также конечно. Соответственно, если U достаточно близка к $\mathcal{A} \cap \Pi$, то каждая компонента U содержит ровно одну компоненту $\mathcal{A} \cap \Pi$. Теперь, из (20)–(24) следует (15)–(18) и, кроме того,

$$\begin{aligned} T_+((\mathcal{A}_{N_-}^- \cup \mathcal{A}_{N_+}^+) \cap (\Pi_+ \cup \Pi_0)) &\subseteq \mathcal{A}_1^+, \\ T_-((\mathcal{A}_{N_-}^- \cup \mathcal{A}_{N_+}^+) \cap (\Pi_- \cup \Pi_0)) &\subseteq \mathcal{A}_1^-, \\ \mathcal{A}_i^- &\subseteq T^{i-1} \mathcal{A}_1^- \quad \text{при } i < N^-, \quad \mathcal{A}_i^+ \subseteq T^{i-1} \mathcal{A}_1^+ \quad \text{при } i < N^+. \end{aligned} \quad (25)$$

Множество $\mathcal{A} \cap \Pi$ инвариантно относительно T : $T\mathcal{A} \cap \Pi = \mathcal{A} \cap \Pi$. Отсюда и из того, что T является гомеоморфизмом множества $\Pi \setminus \Pi_0$ на его образ $T_+\Pi_+ \cup T_-\Pi_-$, следует, что образ любой компоненты связности из $\mathcal{A} \cap \Pi$, не пересекающей Π_0 , также является компонентой связности из $\mathcal{A} \cap \Pi$. Для компонент, пересекающих Π_0 , объединение образов их пересечений с $\Pi_+ \cup \Pi_0$ составляет $\mathcal{A}_1^+$, а объединение образов их пересечений с $\Pi_- \cup \Pi_0$ составляет $\mathcal{A}_1^-$. Таким образом, в (25) можно заменить знак включения на равенство, что дает (19). Теперь, так как $\mathcal{A}_1^+$ и $\mathcal{A}_1^-$ различны, мы получаем, что все компоненты в (17) различны, что завершает доказательство теоремы.

Из доказательства видно, что теорема остается верна для произвольного инвариантного орбитно устойчивого множества в $\mathcal{D}$. Заметим также, что при доказательстве теорем 1–3 мы никак не использовали тот факт, что состояние равновесия O – седло-фокус, т.е. они останутся верными и при условии, что O – седло, лишь бы существовало инвариантное слоение и фактор-отображение растягивало площади. При этом несущественно, что слоение имеет коразмерность два: теоремы 1–3 останутся верны и в общем случае, когда отображение T имеет инвариантное абсолютно непрерывное сжимающее слоение коразмерности $k \geq 1$ и фактор-отображение растягивает k -мерные объемы. В эту схему, таким образом, укладывается и аттрактор Лоренца ($k = 1$ и O – седло).

§3. Построение дикого аттрактора

В этом параграфе мы докажем основной результат данной работы. Мы вернемся к случаю, когда O – седло–фокус и сжимающее слоение имеет коразмерность два, покажем, что в этом случае аттрактор $\mathcal{A}$ может содержать дикое гиперболическое множество. В частности, это означает, что он отличен от аттрактора Лоренца (и от других известных аттракторов).

Возьмем однопараметрическое семейство X_μ систем рассматриваемого вида и предположим, что при $\mu = 0$ *имеется гомоклиническая петля седло–фокуса* O , т.е. одна из сепаратрис (скажем, Γ_+) возвращается в точку O при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 2). Другими словами, мы предполагаем, что при $\mu = 0$ семейство X_μ пересекает в пространстве динамических систем бифуркационную поверхность систем с гомоклинической петлей седло–фокуса, и мы будем считать, что данное пересечение *трансверсально*. Трансверсальность означает, что при изменении μ петля расщепляется и при этом, если M – номер последней точки пересечения сепаратрисы Γ_+ с секущей при $\mu = 0$ ($P_M^+ \in \Pi_0$ при $\mu = 0$), то расстояние от точки P_M^+ до Π_0 меняется “с ненулевой скоростью” при изменении μ . Мы выберем знак μ так, чтобы $P_M^+ \in \Pi_+$ при $\mu > 0$ (соответственно, $P_M^+ \in \Pi_-$ при $\mu < 0$).

ТЕОРЕМА 4. *К $\mu = 0$ накапливается последовательность интервалов Δ_i таких, что при $\mu \in \Delta_i$ аттрактор $\mathcal{A}_\mu$ содержит дикое множество (нетривиальное транзитивное замкнутое гиперболическое множество, неустойчивое многообразие которого имеет точки касания с устойчивым многообразием). При этом для любого $\mu^* \in \Delta_i$ для любой системы, близкой к X_{μ^*} в C^r -топологии, ее аттрактор $\mathcal{A}$ также содержит дикое множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию сепаратриса Γ_+ при $\mu = 0$ пересекает Π в конечном числе точек P_i^+ и последняя точка P_M^+ принадлежит Π_0 . Не уменьшая общности, можно считать, что число M достаточно велико. Именно, для всех малых μ фактор-отображение $\tilde{T}$ растягивает площади, при этом очевидно, что коэффициент растяжения q оценивается снизу константой, не зависящей от μ . Соответственно, согласно теореме 3 число компонент связности аттрактора в пересечении с секущей Π оценивается сверху константой N , не зависящей от μ , и мы будем считать ниже, что число M точек пересечения не меньше $N + 1$. Данное условие не является ограничением, поскольку согласно [19] гомоклиническую петлю седло–фокуса можно расщепить так, чтобы получить петлю сколь угодно высокой обходности по отношению к исходной. Более точно, к бифуркационной поверхности, отвечающей гомоклинической петле седло–фокуса, накапливаются поверхности, отвечающие гомоклиническим петлям сколь угодно высокой обходности. Семейство X_μ , трансверсальное поверхности, отвечающей исходной петле, остается трансверсальным и ко всем C^1 -близким поверхностям. Соответственно, если при $\mu = 0$ число M точек пересечения петли Γ_+ с Π меньше $N + 1$, то сколь угодно малым изменением μ можно получить петлю, у которой $M \geq N + 1$ (и семейство X_μ останется трансверсальным соответствующей бифуркационной поверхности). Поэтому, доказав теорему для таких петель, мы автоматически получим утверждение теоремы и в общем случае.

Как известно [15], в любой малой окрестности гомоклинической петли седло–фокуса имеется счетное число однообходных (т.е. гомотопных петле в данной окрестности) седловых периодических траекторий (вообще говоря, это утвержде-

ние имеет место только при выполнении некоторых дополнительных условий общего положения, которые, впрочем, в нашем случае выполнены автоматически, см. ниже). Каждая из этих траекторий пересекает малую секущую к петле в одной точке (мы возьмем в качестве такой секущей малую окрестность $\Pi_0 \equiv W_{\text{loc}}^s \cap \Pi$ в Π). Данные траектории $L_1, L_2, \dots$ можно занумеровать так, что точки пересечения $R_1, R_2, \dots$ будут лежать от W_{loc}^s на расстоянии $\text{dist}(R_k, W_{\text{loc}}^s) \sim Ce^{-\frac{\pi\gamma}{\omega}k}$, где C – некоторая константа (напомним, что характеристические показатели седло–фокуса – это $\gamma, -\lambda \pm i\omega, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-3}$, где $\gamma > 0, 0 < \lambda < \text{Re } \alpha_j, \omega \neq 0$).

В [15] показано, что на секущей можно выделить накапливающиеся к пересечению секущей с W_{loc}^s “полоски” – окрестности $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ точек $R_1, R_2, \dots$, соответственно, такие, что при $\mu = 0$ для любого $\rho' > \rho = \lambda/\gamma$ существует $\bar{k}$ такое, что для любого $i \geq \bar{k}$ образ полоски σ_i под действием отображения Пуанкаре (в нашем случае это отображение $T' \equiv T^M$, где M – число точек пересечения петли с Π) *правильно* пересекает все полоски с номерами $j \geq \rho'i$. “Правильно” означает здесь, что пересечение $T'\sigma_i \cap \sigma_j$ связно и отображение $T'|_{\sigma_i \cap T'^{-1}\sigma_j}$ седловое в смысле [20]. Это означает [15], что в малой окрестности петли лежит гиперболическое инвариантное множество Λ , которое находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всевозможных бесконечных в обе стороны последовательностей целых чисел $\{j_s\}$, удовлетворяющих условию $j_s \geq \bar{k}, j_{s+1} \geq \rho'j_s$: последовательности $\{j_s\}$ отвечает траектория, последовательные точки пересечения которой с секущей лежат в полосках с номерами $\{j_s\}$. В частности, однообходной периодической траектории L_i отвечает последовательность $\{\dots iiiiii \dots\}$.

Надо отметить, что множество Λ не замкнуто – его замыканию принадлежит состояние равновесия O , сепаратриса Γ^+ и траектории в устойчивом многообразии. Для произвольного целого $k \geq \bar{k}$ выделим в Λ замкнутое подмножество Λ_k , отвечающее последовательностям $\{j_s\}$, удовлетворяющим условию $j_s \leq k$. Так как при каждом фиксированном k множество Λ_k отделено от W_{loc}^s , то это замкнутое гиперболическое множество, следовательно, оно сохраняется при всех малых μ (и непрерывно зависит от μ). Имеет место следующая

ЛЕММА 3. *Существует C такое, что если $\bar{k}$ достаточно велико и $k \geq \bar{k}$, то множество Λ_k сохраняется при всех μ таких, что*

$$|\mu| < Ce^{-\frac{\pi\rho\gamma}{\omega}k}. \quad (26)$$

Для упрощения записи мы обозначим через Λ_μ множество Λ_k , соответствующее наименьшему k , для которого выполнено (26). Лемма 3 доказывается на основе рассмотрений отображений вблизи гомоклинической петли седло–фокуса, не связанных со спецификой данной задачи. Следующий результат, напротив, существенно использует теорему 3 и предположение, что гомоклиническая петля является достаточно многообходной.

ЛЕММА 4. *При всех малых $\mu \geq 0$ множество Λ_μ принадлежит аттрактору $\mathcal{A}_\mu$.*

Заметим, что при каждом фиксированном μ множество Λ_μ является замкнутым гиперболическим множеством, поэтому оно сохраняется и при малых возмущениях системы. Из доказательства леммы 4 станет видно, что и для всех достаточно близких систем это множество останется в аттракторе.

Неустойчивое многообразие гиперболического множества Λ_μ также принадлежит аттрактору (в силу его ε -устойчивости). Мы докажем теорему, показав, что к $\mu = 0$ накапливаются (с положительной стороны) интервалы значений μ (области Ньюхауса), при которых множество Λ_μ является *диким*, т.е. его неустойчивое многообразие касается устойчивого. Согласно [16] для этого достаточно показать, что к $\mu = 0$ накапливается последовательность положительных значений μ , при которых неустойчивое многообразие какой-либо периодической траектории из Λ_μ невырожденным образом касается ее устойчивого многообразия (мы уточним условия невырожденности ниже). Мы выберем в качестве такой периодической траектории однообходную траекторию $L_j \in \Lambda_\mu$. Искомый результат прямо вытекает из двух следующих лемм.

ЛЕММА 5. *Существует последовательность $\mu_j \rightarrow +0$ такая, что при $\mu = \mu_j$ семейство X_μ трансверсально пересекает бифуркационную поверхность, на которой сепаратриса Γ_+ ложится на устойчивое многообразие траектории $L_j \in \Lambda_\mu$, и при этом неустойчивое многообразие L_j трансверсально пересекает $W^s(O)$.*

ЛЕММА 6. *Сколько угодно близко к $\mu = \mu_j$ имеются значения μ , при которых устойчивое и неустойчивое многообразия седловой периодической траектории имеют невырожденное касание.*

Перейдем к доказательству лемм 3–6. Доказательство лемм 3, 5, 6 проводится при помощи вычислений, аналогичных [8], [15], поэтому мы опустим детали и ограничимся только схемой. По условию при $\mu = 0$ сепаратриса Γ_+ образует гомотопическую петлю: P_M^+ (точка M -го пересечения Γ_+ с Π) лежит на Π_0 . Заметим, что эта петля удовлетворяет условиям общего положения из [15]. Одно из этих условий состоит в том, что сепаратриса входит в O (при $t \rightarrow +\infty$), касаясь ведущей плоскости, т.е. не лежит в сильно-устойчивом инвариантном многообразии точки O . Заметим, что сильно-устойчивое многообразие – это *единственное* $(n - 3)$ -мерное гладкое инвариантное многообразие, проходящее через O и касательное в O к собственному подпространству, отвечающему неведущим характеристическим показателям $-\alpha_i$. В нашем случае таким многообразием является слой слоения $\mathcal{N}^{ss}$, проходящий через O . Он имеет по предположению вид $(x, y) = h^{ss}(z)$ и не пересекает секущую Π , поэтому Γ_+ не может лежать в нем. Другое условие общего положения сформулировано в [15] как неравенство нулю некоторой величины и эквивалентно (см. [21]) наличию сильно-сжимающего слоения в окрестности петли – в нашем случае это условие выполнено по предположению. Отметим, что, как следует из [21], [22], данные условия общего положения гарантируют, что система при всех малых μ имеет в окрестности петли инвариантное трехмерное C^1 -многообразие $\mathcal{M}_\mu$, которое трансверсально слоению $\mathcal{N}^{ss}$ и которому принадлежат все траектории, остающиеся в малой окрестности петли при $t \rightarrow -\infty$.

Согласно [8] в подходящих координатах отображение Пуанкаре $T' \equiv T^M|_{\Pi_+}$ вблизи Π_0 может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x^* + a'x^p \sin(\Omega \ln x + \varphi - \varphi^*) + \psi_1(x, \varphi, z, \mu), \\ \bar{\varphi} &= \varphi^* + b'x^p \cos(\Omega \ln x + \varphi - \varphi^* + \theta) + \psi_2(x, \varphi, z, \mu), \\ \bar{z} &= z^* + \psi_3(x, \varphi, z, \mu),\end{aligned}\tag{27}$$

где (x^*, φ^*, z^*) – координаты точки P_M^+ , a', b', θ – некоторые величины и

$$\left\| \frac{\partial^{p+|q|} \psi_i}{\partial x^p \partial (\varphi, z, \mu)^q} \right\| = O(|x|^{\eta-p}), \quad 0 \leq p + |q| \leq r-2, \quad (28)$$

для некоторого $\eta > \rho$. Все константы в (27) зависят от μ . По условию $P_M^+ \in \Pi_0$ (т.е. $x^* = 0$) при $\mu = 0$. Трансверсальность семейства X_μ бифуркационной поверхности, отвечающей гомоклиническим петлям означает, что $\frac{\partial x^*}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} \neq 0$. Не уменьшая общности, мы можем положить

$$x^* \equiv \mu. \quad (29)$$

Отметим, что координаты, в которых справедливо представление (27), (28), вводятся так, что в ограничении на W_{loc}^s производная $\dot{y}$ не зависит от z (см. [8]). Поэтому слои инвариантного слоения $\mathcal{N}^{ss}$ в пересечении с W_{loc}^s имеют вид $\{\varphi = \text{const}\}$. Отсюда видно, что инвариантность слоения $\mathcal{N}^{ss} \cap \Pi$ относительно отображения $(T')^{-1}$ эквивалентна условию

$$a' \neq 0, \quad b' \neq 0, \quad \cos \theta \neq 0. \quad (30)$$

Неподвижные точки отображения T' находятся из условия $(\bar{x} = x, \bar{\varphi} = \varphi, \bar{z} = z)$. Следовательно, в этом случае из последних двух уравнений системы (27) можно при малых x и μ выразить φ и z как функции x и μ (см. (27)–(30)), после чего уравнение на координату x примет вид

$$x = \mu + a' x^\rho \sin(\Omega \ln x) + o(x^\rho).$$

При $\mu = 0$ для неподвижной точки R_j имеем

$$x_j = e^{-\frac{\pi j}{\Omega}} + o(e^{-\frac{\pi j}{\Omega}}) \quad (31)$$

и

$$\varphi_j = \varphi^* + o(e^{-\frac{\pi j}{\Omega}}), \quad z_j = z^* + o(e^{-\frac{\pi j}{\Omega}}), \quad (32)$$

где (x_j, φ_j, z_j) – координаты неподвижной точки, индекс j пробегает все натуральные значения, начиная с некоторого достаточно большого $\bar{k}$. Очевидно, что соотношения (31), (32) останутся справедливы и в случае $\mu \neq 0$, если только $\mu e^{\frac{\pi \rho j}{\Omega}}$ достаточно мало. Мультипликаторы неподвижной точки оцениваются следующим образом:

$$\nu_1 \sim (-1)^j a' \Omega x_j^{\rho-1}, \quad \nu_2 \sim -(-1)^j b' \frac{\rho \cos \theta}{\Omega} x_j^\rho, \quad \nu_m = o(x_j^\rho), \quad m = 3, \dots, n-1. \quad (33)$$

Отметим, что ν_1 – единственный мультипликатор, больший единицы по абсолютной величине, а остальные лежат внутри единичного круга. Поэтому неустойчивое многообразие точки R_j одномерно, а устойчивое $(n-2)$ -мерно (соответственно, однообходная периодическая траектория L_j , которая пересекает Π в точке R_j , имеет двумерное неустойчивое и $(n-1)$ -мерное устойчивое многообразия).

Чтобы найти устойчивое многообразие W_j^s точки R_j , поступим следующим образом. Возьмем малый кусок поверхности $x = x_j$, содержащий точку R_j , и рассмотрим его прообраз относительно отображения T^{-1} . Согласно (27)–(32) его можно представить в виде

$$\sin(\Omega \ln x + \varphi - \varphi^*) = O\left(\frac{x_j}{x^\rho} + \frac{\mu}{x^\rho} + x^{\eta-\rho}\right)$$

при условии, что x достаточно мало. Мы будем считать, что

$$x < 2e^{-\frac{\pi \bar{k}}{\Omega}},$$

где $\bar{k}$ достаточно велико. При условии, что x также и не слишком мало, именно, если малы величины x_j/x^ρ и μ/x^ρ , уравнение данной поверхности принимает вид

$$\Omega \ln x = -\pi j - \varphi + \varphi^* + O\left(\frac{x_j}{x^\rho} + \frac{\mu}{x^\rho} + x^{\eta-\rho}\right)$$

или

$$x = e^{-\frac{\varphi - \varphi^* + \pi j}{\Omega}} (1 + \dots), \quad (34)$$

где многоточием обозначена функция от φ и μ , малая вместе со своими производными до порядка $(r-2)$. Как мы отмечали, данное представление справедливо при условии, что x , x_j/x^ρ и μ/x^ρ достаточно малы, т.е. на участке значений φ

$$\pi \bar{k} < \varphi - \varphi^* + \pi j < \pi k, \quad (35)$$

где $\bar{k}$ – произвольное достаточно большое целое, не зависящее от j и μ , а k может быть выбрано много большим j при условии, что

$$|\mu| e^{\frac{\pi \rho}{\Omega} k} \text{ и } e^{\frac{\pi}{\Omega}(\rho k - j)} \text{ малы} \quad (36)$$

(последнее условие можно выполнить при k много большем чем j , поскольку $\rho < 1$). Пользуясь формулами (27)–(32), можно проверить, что прообраз относительно отображения T^{-1} малого куска этой поверхности, содержащего неподвижную точку R_j , представляется в том же самом виде на том же самом интервале значений φ . То же самое остается справедливым для всех последующих итераций, причем величина $o(1)$ в (34) остается равномерно малой. Так как многообразие W_j^s есть предел последовательности таких итераций, то получаем в результате, что на участке (35), (36) устойчивое многообразие точки R_j задается уравнением (34).

Для неустойчивого многообразия W_j^u точки R_j можно показать (взяв образ малого куска прямой $\varphi = \varphi_j$ и оценив поправку при последующих итерациях), что оно C^{r-2} -близко к спирали, задаваемой параметрическим соотношением вида

$$\begin{aligned} x &= \mu - a' e^{-\frac{\rho}{\Omega} u} \sin u, \\ \varphi &= \varphi^* + b' e^{-\frac{\rho}{\Omega} u} \cos(-u + \theta), \\ z &= z^* \end{aligned} \quad (37)$$

на участке, отвечающем значениям параметра $u > \pi \rho' j$, где $\rho' > \rho$ (и может быть выбрано сколь угодно близко к ρ), при условии, что j достаточно велико и $|\mu|e^{\frac{\rho}{\Omega}j}$ мало. Отметим, что спираль наматывается на точку P_M^+ и пересекает трансверсально Π_0 . Из формул (34)–(37) видно, что W_j^u имеет точки трансверсального пересечения с W_i^s для $i > \rho' j$. В частности, имеются точки трансверсального пересечения W_j^u с W_j^s , и значит, точки R_j включаются в нетривиальное гиперболическое множество.

Выберем малое $\xi > 0$ и рассмотрим окрестности

$$\sigma_j: e^\xi < x e^{\frac{\pi j}{\Omega}} e^{\frac{\varphi - \varphi^*}{\Omega}} e^{\frac{\arctan(\Omega/\rho)}{\Omega}} < e^{\pi - \xi}, \quad |\varphi - \varphi^*| < \pi$$

точек R_j (неформально говоря, мы исключили из рассмотрения значения x , отвечающие экстремумам функции $x^\rho \sin(\Omega \ln x)$). Пользуясь формулами (27), (28), можно проверить, что при $\mu = 0$ для любого $\rho' > \rho$ существует $\bar{k}$ такое, что для любого $j \geq \bar{k}$ образ полосы σ_j под действием отображения T' правильно пересекает все полосы с номерами $i \geq \rho' j$ в том смысле, что пересечение $T'\sigma_j \cap \sigma_i$ связно и отображение $T'|_{\sigma_j \cap T'^{-1}\sigma_i}$ седловое в смысле [20] (сильно растягивает по координате x и сильно сжимает по координатам (φ, z)).

Пусть $\{P_s\}_{s=-\infty}^{s=+\infty}$ – траектория отображения T' , целиком лежащая в объединении полосок $\bigcup_{j=\bar{k}}^{\infty} \sigma_j$: $P_s \in \sigma_{j_s}$. Назовем последовательность $\{j_s\}_{s=-\infty}^{s=+\infty}$ *кодировкой* данной траектории. По лемме о последовательности седловых отображений [20] каждой кодировке, удовлетворяющей условию $j_s \geq \bar{k}$, $j_{s+1} \geq \rho' j_s$, отвечает одна и только одна траектория с данной кодировкой. Объединение всех таких траекторий образует гиперболическое инвариантное множество Λ , которое содержит, в частности, все точки R_j . Несложно проверить, что при $\mu \neq 0$ образ полосы σ_j по-прежнему правильно пересекает полосы σ_i с $i > \rho' j$, если только величина $|\mu|e^{\frac{\rho}{\Omega}j}$ достаточно мала, откуда в силу леммы о последовательности седловых отображений [20] следует утверждение леммы 3.

Для доказательства леммы 5 достаточно заметить, что искомые значения $\mu_j \sim e^{-\frac{\pi j}{\Omega}}$, при которых точка P_M^+ ложится на устойчивое многообразие точки R_j , находятся при помощи формулы (34), куда вместо x и φ следует подставить координаты точки P_M^+ , соответственно, μ и φ^* . Так как $\rho < 1$, то $\mu_j e^{\frac{\pi \rho j}{\Omega}}$ мало и аппроксимация (34) для W_j^s действительно применима.

Для доказательства леммы 6 заметим, что так как неустойчивое многообразие W_j^u имеет вид спирали, наматывающейся на точку P_M^+ , то вблизи μ_j найдутся значения μ , при которых W_j^u касается W_j^s . Из (34), (37) можно непосредственной проверкой убедиться, что касание *квадратичное* и что при изменении μ это касание расщепляется общим образом. Мы должны также проверить дополнительные условия невырожденности, необходимые для применения теоремы 2 из [16], а именно, что вблизи значений μ , отвечающих гомоклиническому касанию, есть интервалы значений μ , при которых соответствующее гиперболическое множество дикое.

Заметим, что неподвижная точка R_j имеет (см. (33)) ровно один мультипликатор (ν_2), ближайший к единичной окружности изнутри (т.е. R_j является *седлом типа* (1, 1) по терминологии [16]). При этом всего один мультипликатор лежит вне единичного круга. В этом случае условия невырожденности сводятся к двум

требованиям: траектория гомоклинического касания *не должна лежать в неведущем многообразии точки R_j* , и всюду в точках данной траектории *расширенное неустойчивое многообразие W_j^{ue} точки R_j должно быть трансверсально сильно устойчивому слоению устойчивого многообразия*. Локально, неведущее многообразие W_j^{ss} — это гладкое инвариантное многообразие, касательное в точке R_j к собственному подпространству, отвечающему неведущим мультипликаторам $\nu_3, \dots, \nu_n$. В нашем случае таковым как раз является слой слоения $\mathcal{N}^{ss} \cap \Pi$, проходящий через точку R_j , поэтому локально он совпадает с W_j^{ss} (в силу единственности последнего). Известно, что неведущее многообразие неподвижной точки вкладывается в сильно устойчивое инвариантное слоение, причем, так как всюду на устойчивом многообразии это слоение определяется однозначно, то на устойчивом многообразии точки R_j оно совпадает с $\mathcal{N}^{ss} \cap \Pi$.

Как мы отмечали, это слоение трансверсально трехмерному многообразию $\mathcal{M}_\mu$, которое содержит все траектории, целиком лежащие в малой окрестности гомоклинической петли седло-фокуса. В частности, $\mathcal{M}_\mu \cap \Pi$ содержит точку R_j и рассматриваемую траекторию гомоклинического касания. В силу трансверсальности, R_j — изолированная точка пересечения W_j^{ss} и $\mathcal{M}_\mu \cap \Pi$, поэтому W_j^{ss} не может содержать траекторий, асимптотических к R_j и лежащих в $\mathcal{M}_\mu \cap \Pi$. Следовательно, рассматриваемая траектория гомоклинического касания действительно не лежит в W_j^{ss} .

Двумерное многообразие $\mathcal{M}_\mu \cap \Pi$ инвариантно и трансверсально W_j^{ss} , и как следствие, оно касается в точке R_j двумерного собственного подпространства, отвечающего мультипликаторам (ν_1, ν_2) . Любое инвариантное многообразие, касательное в неподвижной точке к собственной плоскости, отвечающей неустойчивому и ведущему устойчивому мультипликаторам, может рассматриваться как расширенное неустойчивое многообразие W_j^{ue} : любое из них содержит неустойчивое многообразие и любые два из них касаются друг друга всюду на неустойчивом многообразии (детали см. в [21]). Так как $\mathcal{M}_\mu \cap \Pi$ трансверсально слоению $\mathcal{N}^{ss} \cap \Pi$, то мы получаем, что действительно, в любой точке рассматриваемой негрубой гомоклинической траектории расширенное неустойчивое многообразие трансверсально сильно устойчивому слоению. Таким образом, условия невырожденности выполнены и теорема 2 из [16] действительно применима в нашем случае.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать лемму 4. Представим полноторий Π как полосу $\tilde{\Pi} = D^{n-2} \prod \mathbb{R}^1$ (где (x, z) служат координатами в D^{n-2} , а φ — в $\mathbb{R}^1$), в которой точки (x, z, φ) и $(x, z, \varphi + 2\pi k)$ отождествлены для любого целого k . Возьмем поднятие полнотория Π на $\tilde{\Pi}$, и пусть $\mathcal{P}$ — образ множества $T_+(\Pi_+ \cup \Pi_0) \cup T_-(\Pi_- \cup \Pi_0)$ при данном поднятии. Так как $T_+(\Pi_+ \cup \Pi_0) \cup T_-(\Pi_- \cup \Pi_0)$ *стягиваемо в точку* в Π , то при всех μ $\mathcal{P}$ лежит в ограниченной области $\tilde{\Pi}$, т.е. для некоторого целого s

$$\mathcal{P} \subset \{-\pi s < \varphi - \varphi^* < \pi s\}.$$

Так как для аттрактора $\mathcal{A}_\mu$ системы X_μ пересечение $\mathcal{A}_\mu \cap \Pi$ содержится в $T_+(\Pi_+ \cup \Pi_0) \cup T_-(\Pi_- \cup \Pi_0)$, то поднятие в $\tilde{\Pi}$ пересечения аттрактора с секущей содержится в $\mathcal{P}$, и следовательно, целиком лежит в ограниченной области $\{-\pi s < \varphi - \varphi^* < \pi s\}$.

Как было показано выше, устойчивое многообразие точки R_j содержит кусок, задаваемый соотношениями (34)–(36), где $\bar{k}$ достаточно велико и фиксировано, а k

растет пропорционально j с ростом j и стремлением μ к нулю. Мы можем считать, что $(k - \bar{k})$ делится на $2s$ и что $(j - \bar{k} - s)$ четно, и нарезать поднятие W_j^s на куски, отвечающие значениям $(\varphi - \varphi^*)$ из интервалов $(\pi\bar{k} - \pi j + 2\pi sl, \pi\bar{k} - \pi j + 2\pi s(l+1))$, где $l = 0, \dots, (k - \bar{k})/(2s - 1)$. Поскольку мы отождествляем точки, чья φ -координата отличается на кратное 2π , то можно сдвинуть кусок с номером l на $-2\pi(sl - (j - \bar{k} - s)/2)$. В результате получим набор поверхностей $\mathcal{W}_l$ вида

$$x = w_l(\varphi, z, \mu),$$

где функции w_l определены при $-\pi s < \varphi - \varphi^* < \pi s$ и

$$w_l \sim e^{-\frac{\varphi - \varphi^* + \pi(\bar{k} + s) + 2\pi sl}{\Omega}}$$

(см. (34)). В частности, для верхней из этих поверхностей, w_0 , имеем

$$x > \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi\bar{k} + 2\pi s}{\Omega}}$$

и для нижней поверхности, $w_{\bar{l}}$, где $\bar{l} = (k - \bar{k})/(2s - 1)$,

$$x < 2e^{-\frac{\pi k - 2\pi s}{\Omega}}.$$

Очевидно, что ограничения (36) не мешают (поскольку $\rho < 1$) выбрать k и $\bar{k}$ так, чтобы поднятие точки P_M^+ , чья x -координата равна μ , лежало ниже поверхности w_0 и выше поверхности $w_{\bar{l}}$. Заметим, что на обеих этих поверхностях координата x мала. Точка P_M^+ принадлежит аттрактору $\mathcal{A}_\mu$ (так как это точка на сепаратрисе). Пусть V – компонента связности множества $\mathcal{A}_\mu \cap \Pi$, содержащая точку P_M^+ , и $\tilde{V}$ – ее поднятие в $\tilde{\Pi}$. Как отмечалось, множество $\tilde{V}$ целиком лежит в области $\{-\pi s < \varphi - \varphi^* < \pi s\}$. По теореме 3 V содержит одну из точек $P_1^+, \dots, P_N^+$ или $P_1^-, \dots, P_N^-$, где N – число компонент связности множества $\mathcal{A}_\mu \cap \Pi$. Так как по предположению $M > N$, то точки $P_i^+, i = 1, \dots, N$, лежат на конечном расстоянии от Π_0 при всех малых μ . Если при $\mu = 0$ сепаратриса Γ_- не образует петли, то же самое справедливо и для точек $P_i^-, i = 1, \dots, N$. Таким образом, в этом случае компонента V наряду с точкой P_M^+ содержит точку, лежащую на конечном расстоянии от Π_0 , т.е. координата x этой точки отделена от нуля. Так как на поверхностях w_0 и $w_{\bar{l}}$ координата x мала, то поднятие данной точки в $\tilde{P}$ лежит вне области, ограниченной данными поверхностями (область $w_{\bar{l}}(\varphi, z, \mu) < x < w_0(\varphi, z, \mu)$). В то же время, поднятие точки P_M^+ лежит внутри этой области. Так как $\tilde{V}$ связно, то это множество пересекает по крайней мере одну из поверхностей w_0 или $w_{\bar{l}}$.

Напомним, что данные поверхности представляют собой куски поднятия многообразия W_j^s в $\tilde{\Pi}$, т.е. мы получили, что при всех малых μ аттрактор содержит хотя бы одну точку на устойчивом многообразии траектории L_j . Отсюда следует, что он содержит саму траекторию L_j , ее неустойчивое многообразие и его замыкание. В частности, он содержит гиперболическое множество Λ_μ .

Если же при $\mu = 0$ сепаратриса Γ_- тоже образует петлю, то совершенно аналогично, при всех малых μ в окрестности этой петли лежит гиперболическое множество Λ_μ^- . Для кусков устойчивого и неустойчивого многообразий однообходной

периодической траектории из Λ_μ^- справедливы представления вида (34) и (37) с переменной знака x с положительного на отрицательный. Если $N^+ < N < M -$ число из теоремы 3, то точка $P_{N^+}^+$ принадлежит компоненте V множества $\mathcal{A}_\mu \cap \Pi$, пересекающей Π_0 . Как мы отмечали, точка $P_{N^+}^+$ лежит на конечном расстоянии от Π_0 . Так как V содержит и $P_{N^+}^+$, и некоторую точку на Π_0 , то так же, как и выше, V пересекает либо устойчивое многообразие одной из периодических точек из Λ_μ^+ (если $P_{N^+}^+ \in \Pi_+$), либо одной из периодических точек из Λ_μ^- (если $P_{N^+}^+ \in \Pi_-$). Соответственно, либо Λ_μ^+ , либо Λ_μ^- лежит в аттракторе. Но так как неустойчивые многообразия периодических траекторий из Λ_μ^- пересекают трансверсально Π_0 (см. (37)), а устойчивые многообразия периодических точек из Λ_μ^+ подходят сколь угодно близко к Π_0 при достаточно малых μ (см. (34)–(36)), то получаем, что неустойчивое многообразие Λ_μ^- пересекает устойчивое многообразие Λ_μ^+ , т.е. в любом случае Λ_μ^+ входит в аттрактор, что завершает доказательство теоремы.

Мы указали области в пространстве динамических систем, в которых аттрактор содержит дикое множество вместе с его неустойчивым многообразием. В этих областях плотны системы, для которых одна из периодических траекторий дикого множества имеет траекторию гомоклинического касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Согласно [4] в любой окрестности такой системы есть системы, у которых устойчивое и неустойчивое многообразия этой периодической траектории имеют касания произвольно высокого порядка. Так как гомоклинические траектории принадлежат неустойчивому многообразию и, следовательно, входят в аттрактор, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *В построенных областях плотны системы, аттрактор которых содержит негрубые гомоклинические траектории произвольно высоких порядков касания.*

Данная теорема показывает, что бифуркации рассматриваемого аттрактора не могут быть полностью описаны ни в каком конечно-параметрическом семействе. Другим отражением этого свойства является то, что в аттрактор могут входить сколь угодно вырожденные периодические траектории.

ТЕОРЕМА 6. *В построенных областях плотны системы, аттрактор которых содержит негрубые периодические траектории, имеющие один мультипликатор, равный единице, и произвольно большое число равных нулю ляпуновских величин.*

Эта теорема также является следствием плотности в построенных областях систем с гомоклиническими касаниями: согласно [4] в любой окрестности системы с гомоклиническим касанием есть системы со сколь угодно вырожденными периодическими траекториями. Следующая лемма уточняет результат из [4] (мы не воспроизводим здесь доказательство, чтобы не загромождать изложение).

ЛЕММА 7. *Пусть некоторая система имеет седловую периодическую траекторию L с мультипликаторами $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$. Предположим, что $|\nu_1| > 1$ и $1 > |\nu_2| > |\nu_m|$, $m = 3, \dots, n$ (это означает, в частности, что ν_1 и ν_2 вещественны). Пусть также*

$$|\nu_1 \cdot \nu_2| > 1.$$

Предположим, что неустойчивое и устойчивое многообразия L имеют касание порядка k по некоторой траектории. Тогда в произвольном k -параметрическом семействе общего положения, содержащем данную систему, найдутся значения параметров, отвечающие существованию негрубой периодической траектории с одним мультипликатором, равным единице, одним мультипликатором, большим единицы по абсолютной величине, и остальными мультипликаторами внутри единичного круга, и у ограничения отображения Пуанкаре на центральное многообразие (отвечающее единичному мультипликатору) первые $(k - 1)$ ляпуновских величин равны нулю. При этом устойчивое многообразие данной периодической траектории имеет траектории трансверсального пересечения с неустойчивым многообразием L .

Чтобы применить данную лемму к доказательству теоремы 6, заметим, что седловые периодические траектории с негрубыми гомоклиническими траекториями произвольных порядков касания входят в аттрактор согласно теореме 5 (для плотного множества систем из рассматриваемых областей). Как видно из (33), данные седловые периодические траектории (траектории L_j) удовлетворяют условиям леммы 7. Следовательно, в указанных областях плотны системы, для которых неустойчивое многообразие седловой периодической траектории в аттракторе пересекает устойчивое многообразие какой-либо негрубой периодической траектории сколь угодно высокого наперед заданного порядка вырождения. Так как эта траектория принадлежит замыканию неустойчивого многообразия траектории из аттрактора, то она сама принадлежит аттрактору.

Применив лемму 7 к однопараметрическому ($k = 1$) семейству X_μ из теоремы 4, мы получим, что в интервалах Δ_i плотны значения μ , при которых аттрактор содержит негрубую периодическую траекторию типа седло–седло. У такой траектории один мультипликатор больше единицы по абсолютной величине, один мультипликатор равен единице и соответствующая первая ляпуновская величина не равна нулю, и остальные мультипликаторы лежат внутри единичного круга. Неустойчивое многообразие такой траектории трехмерно. Так как каждая траектория входит в аттрактор вместе со своим неустойчивым многообразием, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *В интервалах Δ_i плотны значения μ , при которых топологическая размерность аттрактора $\mathcal{A}_\mu$ равна трем.*

Список литературы

1. Newhouse S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1979. V. 50. P. 101–151.
2. Newhouse S. E. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1974. V. 13. P. 9–18.
3. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves // Phys. D. 1993. V. 62. № 1–4. P. 1–14.
4. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. АН. 1993. Т. 330. № 2. С. 144–147.
5. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits // Interdisc. J. Nonlinear Sci. CHAOS. 1996. V. 6. № 1. P. 1–17.

6. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О возникновении и структуре аттракторов Лоренца // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 336–339.
7. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО. 1982. Т. 44. С. 150–212.
8. *Овсянников И. М., Шильников Л. П.* О системах с гомоклинической кривой седло–фокуса // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 4. С. 552–570.
9. *Hirsh M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds // Lect. Notes in Math. V. 583, 1977.
10. *Guckenheimer J., Williams R.-F.* Structural stability of Lorenz attractors // Astérisque. 1979. V. 50. P. 307–320.
11. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. 1967. Т. 90.
12. *Песин Я. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 55–111.
13. *Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З.* Гладкие динамические системы. II // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 151–242.
14. *Auslender J.* Generalized recurrence in dynamical systems // Contributions to differential equations. V. 3. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1964. P. 65–74.
15. *Шильников Л. П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло–фокус // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123). № 1. С. 92–113.
16. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Докл. АН. 1993. Т. 329. № 4. С. 404–407.
17. *Palis J., Viana M.* High-dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors // Ann. of Math. 1994. V. 140. P. 207–250.
18. *Hayashi S.* On the solution of C^1 -stability conjecture for flow // Preprint.
19. *Feroe J. A.* Homoclinic orbits in a parametrized saddle-focus system // Phys. D. 1993. V. 62. № 1–4. P. 254–262.
20. *Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). № 4. С. 378–397.
21. *Turaev D. V.* On dimension of non-local bifurcational problems // Int J. Bifur. Chaos. Appl. Sci. Engrg. 1996. V. 6. № 5. P. 919–948.
22. *Sandstede B.* Center manifolds for homoclinic solutions // Preprint, 1994.

Weierstrass Institute of Mathematics;
 НИИ прикладной математики и кибернетики,
 Нижний Новгород
E-mail: shilnikov@focus.nnov.su

Поступила в редакцию
 20.01.1997