Общероссийский математический портал

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, Колмогоровская ε -энтропия аттракторов систем реакции-диффузии, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 2, 81–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:02:24

УДК 517.95

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Колмогоровская ε -энтропия аттракторов систем реакции-диффузии

Изучается колмогоровская ε -энтропия равномерного аттрактора $\mathcal{A}$ семейства неавтономных уравнений реакции-диффузии с внешней силой $g(x, t)$. Предполагается, что $g(x, t)$ принадлежат трансляционно-инвариантному относительно группы сдвигов по t множеству Σ , $\Sigma \subset C(\mathbb{R}; H)$, $H = (L_2(\Omega))^N$. Кроме того, Σ компактно в $C(\mathbb{R}; H)$.

В работе дается оценка ε -энтропии равномерного аттрактора $\mathcal{A}$ через $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ -энтропию компактного в $C([0, l]; H)$ множества Σ_l внешних сил $g(x, t) \in \Sigma$, суженных на интервал $[0, l]$, $l = l(\varepsilon)$ ($\varepsilon_1(\varepsilon) \sim \mu\varepsilon$, $l(\varepsilon) \sim \tau \log_2(1/\varepsilon)$). Эта общая оценка иллюстрируется рядом примеров, взятых из различных областей математической физики и теории информации.

Библиография: 23 названия.

В статье исследуется система реакции-диффузии с зависящей от времени внешней силой $g(x, t)$. При изучении таких неавтономных систем естественно рассматривать семейство систем с внешними силами, принадлежащими некоторому трансляционно-инвариантному множеству Σ , которое содержит начальную внешнюю силу $g_0(x, t)$. Таким образом, рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t u = \nu \Delta u - f(u) + g(x, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad (0.2)$$

где $u = u(x, t) = (u^1, \dots, u^N)$ является неизвестной вектор-функцией, $f = (f^1, \dots, f^N)$, $g = (g^1, \dots, g^N)$, а ν — положительный параметр. Функция f удовлетворяет некоторым условиям, описанным в §1, которые обеспечивают однозначную разрешимость соответствующей задачи Коши. Внешние силы $g(x, s) = g(s)$, $s \in \mathbb{R}$, принадлежат множеству Σ , $\Sigma \subset C(\mathbb{R}; H)$, $H = (L_2(\Omega))^N$. Пространство $C(\mathbb{R}; H)$ снабжено топологией равномерной сходимости на любом отрезке числовой оси $\mathbb{R}$, т.е., по определению, $g_n(s)$ сходится к $g(s)$ в $C(\mathbb{R}; H)$ при $n \rightarrow \infty$, если

$$\max_{s \in [t_1, t_2]} \|g_n(s) - g(s)\|_H \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для любого $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$. Предполагается, что

(I) множество Σ компактно в $C(\mathbb{R}; H)$;

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354), а также the U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF) (грант № RM1-186).

(II) множество Σ трансляционно-инвариантно, т.е.

$$T(h)\Sigma = \Sigma \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad (0.3)$$

где $T(h)g(s) = g(h + s)$, $\{T(h) : h \in \mathbb{R}\}$ ($\{T(h)\}$ называется *трансляционной группой*).

Пусть

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u_\tau \in H, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (0.4)$$

является начальным условием для (0.1). Любое решение $u(t)$, $t \geq \tau$, задачи (0.1), (0.2) и (0.4) может быть представлено в виде:

$$u(t) = U_g(t, \tau)u_\tau, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (0.5)$$

При заданном $g \in \Sigma$ двупараметрическое семейство операторов $\{U_g(t, \tau), t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$, $U_g(t, \tau) : H \rightarrow H$, называется *процессом*, отвечающим задаче (0.1), (0.2), (0.4) с внешней силой $g(s) \in \Sigma$. Очевидно, $U_g(t, \tau) = U_g(t, \theta)U_g(\theta, \tau) \quad \forall t \geq \theta \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}$, и $U_g(\tau, \tau) = \text{Id}$ есть тождественный оператор.

Компактное множество $\mathcal{A}_\Sigma \subset H$ называется *равномерным аттрактором* семейства процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, $g \in \Sigma$, если для каждого ограниченного множества $B \subset H$ и для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sup_{g \in \Sigma} \text{dist}_H(U_g(t, \tau)B, \mathcal{A}_\Sigma) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (0.6)$$

и при этом $\mathcal{A}_\Sigma$ является минимальным компактным множеством, удовлетворяющим (0.6).

В работах [1] и [2] равномерный аттрактор $\mathcal{A}_\Sigma$ был построен в случае, когда $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$, а функция $g_0(s)$ является почти периодической со значениями в H . Здесь $\mathcal{H}(g_0)$ обозначает оболочку функции g_0 . Класс почти периодических функций был существенно расширен в работах [3] и [4]. Теорема существования равномерного аттрактора была доказана для $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$, где $g_0(s)$ является трансляционно-компактной функцией в подходящем пространстве. Например, если g_0 трансляционно-компактна в $C(\mathbb{R}; H)$ (см. §1), то условия (I) и (II) выполнены для $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$.

В статье [2] были получены верхние и нижние оценки для размерности равномерного аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$ в случае, когда $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$ является оболочкой квазипериодической функции $g_0(s) = \varphi(\alpha_1 s, \dots, \alpha_k s)$, где $\varphi(\omega_1, \dots, \omega_k)$ — гладкая 2π -периодическая функция по каждому аргументу ω_j со значениями в H , а числа $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \alpha$ являются рационально независимыми (см. §1). Таким образом, в случае общего положения пространство Σ диффеоморфно k -мерному тору $\mathbb{T}^k$, и следовательно, $\dim \Sigma = k$. В [2] было доказано, что

$$\dim \mathcal{A}_\Sigma \leq k + A_1 k^{n/(n+2)} + A_2, \quad A_1, A_2 = \text{const}.$$

Значит, $\dim \mathcal{A}_\Sigma$ может быть оценено через $k = \dim \Sigma$. Кроме этого, были построены примеры показывающие, что

$$\dim \mathcal{A}_\Sigma \geq k = \dim \Sigma.$$

Следовательно, $\dim \mathcal{A}_\Sigma$ может стремиться к бесконечности при $k = \dim \Sigma \nearrow \infty$. Это явление побудило Фояша поставить задачу изучения колмогоровской ε -энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A})$ (см. [5] и §1) равномерных аттракторов неавтономных эволюционных уравнений для общих трансляционно-компактных множеств Σ . Некоторые результаты в этом направлении были получены в работе [6] для двумерной системы Навье–Стокса с зависящей от времени внешней силой.

В §3 изучается колмогоровская ε -энтропия $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma, H)$ равномерного аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$ в пространстве H для системы уравнений реакции-диффузии (0.1), когда Σ удовлетворяет условиям (I) и (II). Установлена оценка сверху для $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$, которая зависит от $\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma, C([0, l]; H))$ и от других параметров задачи. Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$, $l = l(\varepsilon)$ (см. теорему 3.1).

Если фрактальная размерность $\mathbf{d}_F(\Sigma) < +\infty$, то нами доказана оценка для $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}_\Sigma)$ через $\mathbf{d}_F(\Sigma)$. Если $\mathbf{d}_F(\Sigma) = +\infty$, приводится оценка $\mathbf{adf}_F(\mathcal{A}_\Sigma)$ через $\mathbf{adf}_F(\Sigma)$. Здесь $\mathbf{adf}_F(B)$ обозначает функциональную размерность множества B (см. [5]). Исследуется также зависимость метрического порядка $\mathbf{q}(\mathcal{A}_\Sigma)$ от метрического порядка $\mathbf{q}(\Sigma)$.

В §2 устанавливается свойство сжатия [7] для траекторий $u(t), v(t)$ системы (0.1), (0.2), когда $u(t), v(t) \in \mathcal{A}_\Sigma \ \forall t \in \mathbb{R}$. Изучается зависимость от t функций $\xi(t) = |u(t) - v(t)|$ и $\rho(t) = \|u(t) - v(t)\|^2 / |u(t) - v(t)|^2$ (см. [7]), где $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ обозначают нормы в $H = (L_2(\Omega))^N$ и в $H_1 = (H_0^1(\Omega))^N$, соответственно. Грубо говоря, доказано, что или $|Q_m(u(t) - v(t))| \leq |P_m(u(t) - v(t))|$, или $|u(t) - v(t)|$ мало, или $|u(t) - v(t)|$ экспоненциально убывает. Здесь P_m обозначает оператор ортогонального проектирования на линейное подпространство, натянутое на первые m собственные функции оператора Лапласа Δ с нулевыми граничными условиями, а $Q_m = I - P_m$. Свойство сжатия является основным инструментом при исследовании ε -энтропии в §3.

В §4 получены оценки ε -энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\Sigma)$ некоторых специальных множеств Σ . Рассмотрены три типа таких множеств, взятых из различных областей математики. Из этих оценок, а также из теоремы 3.1 вытекают оценки для ε -энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ равномерных аттракторов $\mathcal{A}_\Sigma$. Получены также оценки метрического порядка равномерных аттракторов $\mathcal{A}_\Sigma$ для всех рассмотренных типов множеств Σ .

§1. Некоторые предварительные сведения

Рассматривается семейство систем уравнений реакции-диффузии (0.1), (0.2) с внешними силами $g(s)$, принадлежащими множеству $\Sigma \subset C(\mathbb{R}; H)$, которое удовлетворяет условиям (I) и (II).

Вектор-функция $f(v) \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\gamma_1|v|^p - C_1 \leq f(v) \cdot v \leq \gamma_2|v|^p + C_2, \quad \gamma_i > 0, \quad p \geq 2, \quad (1.1)$$

$$|f_v(v)| \leq C_3(|v|^{p-2} + 1), \quad -C_4|w|^2 \leq f_v(v)w \cdot w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

Предполагается, что $p \leq 2(n-1)/(n-2)$ при $n \geq 3$ и p – любое при $n \leq 2$. В этих предположениях задача (0.1), (0.2), (0.4) имеет единственное решение $u \in C(\mathbb{R}_\tau; H) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_\tau; H_1)$ такое, что $\partial_t u \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_\tau; H_{-1})$ (см. [2], [8], [9]). Здесь $\mathbb{R}_\tau = [\tau, +\infty)$ и $H_{-1} = H^*$ является пространством, сопряженным к H_1 . Кроме

того, $u \in C(\mathbb{R}_{\tau+\delta}; H_1) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_{\tau+\delta}; H_2)$, $H_2 = (H^2(\Omega))^N$, и $\partial_t u \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_{\tau+\delta}; H)$, где $\delta > 0$ (см. [2], [8], [9]). (Условия (1.1), (1.2) могут быть обобщены.)

Таким образом, при заданном множестве Σ задача (0.1), (0.2), (0.4) порождает семейство процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, $g \in \Sigma$, действующих в H : $U_g(t, \tau)u_\tau = u(t)$, где $u(t)$ есть решение (0.1), (0.2), (0.4) с внешней силой $g \in \Sigma$.

Напомним некоторые определения, относящиеся к равномерным аттракторам семейств процессов, и сформулируем теорему о существовании и структуре аттракторов (см. также [1], [2], [10]–[15]).

Пусть задано семейство процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, действующих в банаховом пространстве E и зависящих от параметра $g \in \Sigma$. Через $\mathcal{B}(E)$ обозначается семейство всех ограниченных множеств в E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество P называется *равномерно (относительно $g \in \Sigma$) притягивающим* для семейства процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, $g \in \Sigma$, если при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ и при любом $B \in \mathcal{B}(E)$

$$\sup_{g \in \Sigma} \text{dist}_E(U_g(t, \tau)B, P) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Здесь, как обычно, $\text{dist}_E(X, Y) = \sup_{x \in X} \text{dist}_E(x, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Компактное множество $\mathcal{A}_\Sigma \subseteq E$ называется *равномерным (относительно $g \in \Sigma$) аттрактором* семейства процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, $g \in \Sigma$, если $\mathcal{A}_\Sigma$ является равномерно притягивающим множеством этого семейства и $\mathcal{A}_\Sigma$ принадлежит любому замкнутому равномерно притягивающему множеству (см. [2], [15]).

Легко показать, что если семейство процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, $g \in \Sigma$, имеет компактное равномерно притягивающее множество $P \subseteq E$, то существует и минимальное притягивающее множество, т.е. равномерный аттрактор $\mathcal{A}_\Sigma \subseteq P$.

Изучая семейство процессов, порожденное системой реакции-диффузии (0.1), (0.2), легко установить, что существует равномерно притягивающее множество B_1 , ограниченное в $H_1 = (H_0^1(\Omega))^N$ [2], [9], [16]. Следовательно, по теореме о компактности B_1 компактно в H и, значит, существует равномерный аттрактор $\mathcal{A}_\Sigma$, ограниченный в H_1 .

Для описания структуры множества $\mathcal{A}_\Sigma$ нам понадобятся некоторые дополнительные понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Кривая $\{\gamma(s), s \in \mathbb{R}\} \subset E$ называется *полной траекторией* процесса $\{U(t, \tau)\}$, если

$$U(t, \tau)\gamma(\tau) = \gamma(t) \quad \forall t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Ядро* $\mathcal{K}$ процесса $\{U(t, \tau)\}$ в E состоит из объединения всех ограниченных в E полных траекторий этого процесса:

$$\mathcal{K} = \{\gamma(\cdot) : \gamma \text{ удовлетворяет (1.3) и } \|\gamma(s)\| \leq C_\gamma \forall s \in \mathbb{R}\}.$$

Множество $\mathcal{K}(\tau) = \{\gamma(\tau) : \gamma \in \mathcal{K}\} \subset E$ называется *сечением ядра* в момент $\tau \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1.1 [2]–[4]. *Равномерный аттрактор $\mathcal{A}_\Sigma$ семейства процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, $g \in \Sigma$, может быть представлен в виде:*

$$\mathcal{A}_\Sigma = \bigcup_{g \in \Sigma} \mathcal{K}_g(0). \quad (1.4)$$

Здесь $\mathcal{K}_g$ обозначает ядро процесса $\{U_g(t, \tau)\}$. При этом, $\mathcal{K}_g$ не пусто для каждого $g \in \Sigma$.

Рассмотрим пространство Σ , удовлетворяющее условиям (I) и (II). Из теоремы Арцела–Асколи вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 [17]. *Трансляционно-инвариантное множество Σ (см. (II)) компактно в $C(\mathbb{R}; H)$, если и только если*

- (i) *множество $\{g(0) : g \in \Sigma\}$ компактно в H ;*
- (ii) *Σ равномерно-непрерывно на $\mathbb{R}$, т.е. существует положительная вещественная функция $\alpha(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0+$, такая, что*

$$|g(s_1) - g(s_2)| \leq \alpha(|s_1 - s_2|) \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall g \in \Sigma.$$

В частности, найдется константа C_5 такая, что

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |g(s)| \leq C_5 \quad \forall g \in \Sigma. \quad (1.5)$$

ПРИМЕР 1.1. Пусть $g(x, s) = g(s)$ является почти периодической функцией со значениями в H . Напомним, что в соответствии с определением Бохнера–Америо [18], [19] это означает, что множество $\{g(s + h) : h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $C_b(\mathbb{R}; H)$ относительно топологии равномерной сходимости на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Замыкание

$$\overline{\{g(s + h) : h \in \mathbb{R}\}}^{C_b(\mathbb{R}; H)} = \mathcal{H}(g)$$

называется *оболочкой* g в $C_b(\mathbb{R}; H)$. Пусть теперь $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$, где g_0 – некоторая почти периодическая функция. Очевидно, множество Σ также компактно в $C(\mathbb{R}; H)$ и свойство (I) выполнено. Условие (II) также имеет место.

ПРИМЕР 1.2. Функция $g_0(x, s) = g_0(s)$ со значениями в H называется *квазипериодической* по времени, если

$$g_0(s) = \varphi(\alpha_1 s, \alpha_2 s, \dots, \alpha_k s) = \varphi(\alpha s),$$

где $\varphi(\omega) = \varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ является 2π -периодической функцией по каждому аргументу ω_j , $j = 1, \dots, k$, $\varphi(\omega) \in C^1(\mathbb{T}^k; H)$, $\omega \in \mathbb{T}^k$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \alpha$ – рационально независимые числа. Легко убедиться в том, что квазипериодическая функция является также почти периодической. Оболочкой квазипериодической функции является (см. [2]) множество

$$\mathcal{H}(g_0) = \{\varphi(\alpha s + \omega_0) : \omega_0 \in \mathbb{T}^k\}.$$

Таким образом, оболочкой квазипериодической функции является гладкий образ k -мерного тора $\mathbb{T}^k$.

Рассмотрим более общий класс функций g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Функция $g(s) \in C(\mathbb{R}; H)$ называется *трансляционно-компактной* в $C(\mathbb{R}; H)$, если множество $\{g(s+h) : h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $C(\mathbb{R}; H)$ относительно локальной топологии равномерной сходимости. Множество

$$\overline{\{g(s+h) : h \in \mathbb{R}\}}^{C(\mathbb{R}; H)} = \mathcal{H}(g)$$

называется *оболочкой* g в $C(\mathbb{R}; H)$.

Например, пусть $g \in C(\mathbb{R}, H)$ и $g(s) \rightarrow g_{\pm}$, $s \rightarrow \pm\infty$, где $g_+, g_- \in H$ и $g_+ \neq g_-$. Тогда, очевидно, g – трансляционно-компактна в $C(\mathbb{R}; H)$ и $\mathcal{H}(g) = \{g(s+h) : h \in \mathbb{R}\} \cup \{g_+, g_-\}$. Ясно, что $g(s)$ не является почти периодической функцией. Из предложения 1.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Функция $g(s) \in C(\mathbb{R}; H)$ является трансляционно-компактной в $C(\mathbb{R}; H)$ тогда и только тогда, когда

- (i) множество $\{g(s) : s \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в H ;
- (ii) функция $g(t)$ равномерно-непрерывна на $\mathbb{R}$, т.е. существует функция $\alpha(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0+$, такая, что

$$|g(s_1) - g(s_2)| \leq \alpha(|s_1 - s_2|) \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$, где g_0 – трансляционно-компактна в $C(\mathbb{R}; H)$. Очевидно, что Σ удовлетворяет (I) и (II).

Другие примеры множеств Σ , которые удовлетворяют (I) и (II), будут приведены в § 4.

Дадим определение ε -энтропии и фрактальной размерности компактного множества Y в банаховом пространстве E : $Y \subseteq E$. Пусть $N_{\varepsilon}(Y)$ обозначает минимальное число открытых шаров в E радиуса ε , которые покрывают Y . Очевидно, $N_{\varepsilon}(Y) < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$, поскольку Y – компактно в E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 [5]. Число

$$\mathbf{H}_{\varepsilon}(Y) = \log_2(N_{\varepsilon}(Y))$$

называется *колмогоровской ε -энтропией*, или короче, *ε -энтропией* множества Y в E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. (Верхней) *фрактальной размерностью* множества Y называется величина

$$\mathbf{d}_F(Y) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon}(Y)}{\log_2(1/\varepsilon)} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log_2(N_{\varepsilon}(Y))}{\log_2(1/\varepsilon)}.$$

Если $Y = M$ есть m -мерное компактное подмногообразие в E , то $\mathbf{d}_F(M) = m$. В частности, $\mathbf{d}_F(\mathbb{T}^k) = k$. В негладком случае фрактальная размерность не обязательно является целым числом.

Рассмотрим теперь систему реакции-диффузии с квазипериодической внешней силой g_0 . Пусть $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$. Так как множество $\mathcal{H}(g_0)$ является гладким образом

k -мерного тора, то $\mathbf{d}_F(\Sigma) \leq k$ ($Y = C_b(\mathbb{R}; H)$). Как было показано в [2], равномерный аттрактор $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$ имеет конечную фрактальную размерность в H и

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}_\Sigma) \leq k + A_1 k^{n/(n+2)} + A_2. \quad (1.6)$$

Константы A_1 и A_2 зависят от Ω , а также от констант C_1 – C_5 . В работах [1] и [2] приведены примеры систем реакции-диффузии с квазипериодическими внешними силами, для которых

$$k \leq \mathbf{d}_F(\mathcal{A}_\Sigma). \quad (1.7)$$

Следовательно, размерность равномерных аттракторов может неограниченно расти, когда размерность множества Σ увеличивается.

В общем случае, когда g_0 является почти периодической функцией, фрактальная размерность равномерного аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$ может быть бесконечной. Таким образом, становится естественной попытка оценить колмогоровскую ε -энтропию $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ равномерного аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$, используя информацию о поведении колмогоровской δ -энтропии множества Σ .

Далее мы будем изучать колмогоровскую ε -энтропию равномерного аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$ системы реакции-диффузии с внешними силами, принадлежащими множеству Σ , которое удовлетворяет условиям (I), (II).

§ 2. Свойство сжатия

В этом параграфе будет доказано свойство сжатия для траекторий $u(t) \in \mathcal{A}_\Sigma$, где $\mathcal{A}_\Sigma$ – равномерный аттрактор системы реакции-диффузии (0.1), (0.2). Мы будем использовать метод, разработанный в [7] (см. также [20]). Предполагается, что множество Σ удовлетворяет (I) и (II).

Можно доказать, что множество $\mathcal{A}_\Sigma$ ограничено в H и в H_1 :

$$|\mathcal{A}_\Sigma| \leq R_0, \quad \|\mathcal{A}_\Sigma\| \leq R_1, \quad (2.1)$$

(см., например, [2], [8], [9]), причем,

$$R_0 \leq \frac{C_6}{\nu}, \quad R_1 \leq \frac{C_7}{\nu^{3/2}}, \quad 0 < \nu \leq 1,$$

где константы C_6 и C_7 зависят от Ω , C_1 – C_5 .

Пусть $g_1, g_2 \in \Sigma$ и $u_1 \in \mathcal{K}_{g_1}$, $u_2 \in \mathcal{K}_{g_2}$. Очевидно, $u_1(t), u_2(t) \in \mathcal{A}_\Sigma$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Функции u_1 и u_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 &= \nu \Delta u_1 - f(u_1) + g_1(t), \\ \partial_t u_2 &= \nu \Delta u_2 - f(u_2) + g_2(t). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Теперь мы совершим некоторые преобразования с этими уравнениями. Отметим, что все формальные выкладки корректны в силу того, что $u_1(t), u_2(t) \in \mathcal{A}_\Sigma$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и следовательно, $u_1, u_2 \in C_b(\mathbb{R}; H_1) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H_2)$, $\partial_t u_1, \partial_t u_2 \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Подробное обоснование этой техники преобразований изложено в [9], [16].

Обозначим теперь $w = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$. Тогда

$$\partial_t w - \nu \Delta w + f(u_1) - f(u_2) = g. \quad (2.2)$$

Предположим, что

$$|g_1(\tau) - g_2(\tau)| \leq \delta, \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad (2.3)$$

где $t_0 = t - T_0$ (величина T_0 будет точно определена в дальнейшем). Умножая (2.2) на w и интегрируя по Ω , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \nu \|w\|^2 + (f(u_1) - f(u_2), w) = (g, w), \quad (2.4)$$

$(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $(L_2(\Omega))^N$. Из (1.2) следует, что $(f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) \geq -C_4 |v_1 - v_2|^2$ для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N$. Следовательно, из (2.4) получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \nu \|w\|^2 \leq C_4 |w|^2 + (g, w).$$

Мы будем изучать величины $\rho(t) = \|w(t)\|^2 / |w(t)|^2 (\geq \lambda_1)$ и $\xi(t) = |w(t)|$. (Аналогичное исследование проведено в [6].) В силу последнего неравенства имеем

$$\frac{d}{dt} \xi(t) + \nu \rho(t) \xi(t) \leq C_4 \xi(t) + \delta. \quad (2.5)$$

Для функции ρ получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{(\nabla w, \nabla w)}{|w|^2} = \frac{2(\nabla w', \nabla w)}{|w|^2} - \frac{2\|w\|^2(w', w)}{|w|^4} \\ &= \frac{2}{|w|^2} (w', -\Delta w - \rho w) = \frac{2}{|w|^2} (\nu \Delta w - f(u_1) + f(u_2) + g, -\Delta w - \rho w). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Легко проверить, что

$$(\Delta w, -\Delta w - \rho w) = -|\Delta w + \rho w|^2.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} (\Delta w + \rho w, \Delta w + \rho w) &= (\Delta w, \Delta w + \rho w) + \rho(\Delta w, w) + \rho^2(w, w) \\ &= (\Delta w, \Delta w + \rho w) - \rho\|w\|^2 + \rho\|w\|^2 = (\Delta w, \Delta w + \rho w). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2\nu}{|w|^2} |\Delta w + \rho w|^2 &= \frac{2}{|w|^2} (-f(u_1) + f(u_2) + g, -\Delta w - \rho w) \\ &\leq \frac{2}{|w|^2} |g| |\Delta w + \rho w| + \frac{2}{|w|^2} |f(u_1) - f(u_2)| |\Delta w + \rho w|. \end{aligned}$$

Поскольку

$$f(v_1) - f(v_2) = \left(\int_0^1 f_v(v_2 + \theta(v_1 - v_2)) d\theta \right) (v_1 - v_2)$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N$, используя (1.2) и неравенство Гёльдера, мы получаем

$$\begin{aligned} |f(u_1) - f(u_2)|^2 &= \int_{\Omega} \left| \left(\int_0^1 f_v(u_1(x) + \theta(u_2(x) - u_1(x))) d\theta \right) w(x) \right|^2 dx \\ &\leq C_8 \int_{\Omega} (1 + |u_1(x)|^{p-2} + |u_2(x)|^{p-2})^2 |w(x)|^2 dx \\ &\leq C_8 \left(\int_{\Omega} (1 + |u_1(x)|^{p-2} + |u_2(x)|^{p-2})^n dx \right)^{2/n} \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega} |w(x)|^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/n}. \end{aligned}$$

Для краткости рассмотрим случай $n \geq 3$ (для $n = 1, 2$ рассуждения аналогичны). Из условия $p \leq 2(n-1)/(n-2)$ следует, что $q = (p-2)n \leq 2n/(n-2)$ при $n \geq 3$. Следовательно, из вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned} |f(u_1) - f(u_2)|^2 &\leq C_9 (1 + \|u_1\|^{(p-2)} + \|u_2\|^{(p-2)})^2 \|w\|^2 \\ &\leq C_{10} (1 + R_1^{(p-2)})^2 \|w\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2\nu}{|w|^2} |\Delta w + \rho w|^2 &\leq \frac{2}{|w|^2} |g| |\Delta w + \rho w| + \frac{2}{|w|^2} C_{10}^{1/2} (1 + R_1^{(p-2)}) \|w\| |\Delta w + \rho w| \\ &\leq \frac{1}{\nu|w|^2} |g|^2 + \frac{2\nu}{|w|^2} |\Delta w + \rho w|^2 + \frac{1}{\nu|w|^2} C_{10} (1 + R_1^{(p-2)})^2 \|w\|^2 \end{aligned}$$

и

$$\frac{d\rho}{dt} \leq \frac{1}{\nu|w|^2} |g|^2 + \frac{1}{\nu} C_{10} (1 + R_1^{(p-2)})^2 \rho. \quad (2.7)$$

Мы доказали два неравенства:

$$\frac{d}{dt} \xi + \nu \rho(t) \xi \leq C_4 \xi + \delta, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\rho}{dt} \leq \frac{1}{\nu \xi^2} \delta^2 + \frac{1}{\nu} C_{10} (1 + R_1^{(p-2)})^2 \rho. \quad (2.9)$$

Если $\nu \rho(\tau) \geq 2C_4$ ($\Leftrightarrow \rho(\tau) \geq \rho_0 = 2C_4/\nu$) при всех $\tau \in [t_0, t]$, то в силу (2.8)

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{\nu \rho}{2} \xi \leq \delta, \quad \rho(\tau) \geq \rho_0 \quad \forall \tau \in [t_0, t]. \quad (2.10)$$

Если $\xi(\tau) \geq \xi_0 = \delta/(\nu\lambda_1)$ при всех $\tau \in [t_0, t]$, то в силу (2.9)

$$\frac{d\rho}{dt} \leq \nu\lambda_1^2 + \alpha\rho, \quad \xi(\tau) \geq \xi_0 \quad \forall \tau \in [t_0, t], \quad (2.11)$$

где $\alpha = \nu^{-1}C_{10}(1 + R_1^{(p-2)})^2$.

Теперь, используя (2.11), получаем

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leq \rho(t_0) \exp(\alpha(t - t_0)) + \nu\lambda_1^2 \int_{t_0}^t \exp(\alpha(t - \tau)) d\tau \\ &\leq \rho(t_0) \exp(\alpha(t - t_0)) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \exp(\alpha(t - t_0)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leq \left(\rho(t_0) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \right) \exp(\alpha(t - t_0)) \\ &= \left(\rho(t_0) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \right) \exp(\alpha T_0), \quad T_0 = t - t_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.10) вытекает, что

$$\xi(t) \leq \xi(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{\nu\rho(\tau)}{2} d\tau\right) + \delta \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{\tau}^t \frac{\nu\rho(s)}{2} ds\right) d\tau. \quad (2.13)$$

Подчеркнем, что (2.12) и (2.13) имеют место при условии, что

$$\xi(\tau) \geq \xi_0, \quad \rho(\tau) \geq \rho_0 \quad \forall \tau \in [t_0, t].$$

С другой стороны, очевидно, $\rho(\tau) = \|w\|^2/|w|^2 \geq \lambda_1$. Поэтому из (2.13) следует

$$\begin{aligned} \xi(t) &\leq \xi(t_0) \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right) + \delta \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - \tau)\right) d\tau \\ &= \xi(t_0) \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right) + \frac{2\delta}{\nu\lambda_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right)\right) \\ &= 2\xi_0 + \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right) (\xi(t_0) - 2\xi_0), \end{aligned}$$

где $2\xi_0 = 2\delta/(\nu\lambda_1)$. А значит,

$$\xi(t) - 2\xi_0 \leq \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right) (\xi(t_0) - 2\xi_0).$$

В последнем неравенстве, очевидно, t_0 может быть заменено на любое $\tau \in [t_0, t]$. Таким образом, если $\xi(t) \geq 2\xi_0$, то $\xi(\tau) \geq 2\xi_0$ для любого $\tau \in [t_0, t]$. И мы имеем (2.12) и (2.13) при $\tau \in [t_0, t]$, если известно, что $\rho(\tau) \geq \rho_0$ при всех $\tau \in [t_0, t]$.

В неравенстве (2.12), очевидно, можно заменить t_0 любым $\tau \in [t_0, t]$, т.е.

$$\rho(\tau) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \geq \rho(t) \exp(-\alpha(t - \tau)) \geq \rho(t) \exp(-\alpha T_0).$$

Начиная с этого места, будем предполагать, что

$$T_0 = \alpha^{-1} = \nu C_{10}^{-1} (1 + R_1^{(p-2)})^{-2},$$

т.е. $\rho(\tau) + \nu\lambda_1^2/\alpha \geq \rho(t)e^{-1}$, $\tau \in [t - T_0, t]$. Наконец, если $e^{-1}\rho(t) \geq \rho_0 + \nu\lambda_1^2/\alpha$, то, очевидно,

$$\rho(\tau) \geq \rho_0 \quad \forall \tau \in [t - T_0, t]. \quad (2.14)$$

Следовательно, если $\xi(t) \geq 2\xi_0$ и $\rho(t) \geq e(\rho_0 + \nu\lambda_1^2/\alpha)$, то (2.12) и (2.13) выполнены при всех $\tau \in [t - T_0, t]$. Более того,

$$\rho(\tau) \geq \frac{\rho(t)}{e} - \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} = \frac{1}{2e}\rho(t) + \left(\frac{1}{2e}\rho(t) - \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha}\right). \quad (2.15)$$

Предположим теперь, что

$$\rho(t) \geq \rho_1 \equiv 2e\left(\rho_0 + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha}\right),$$

т.е.

$$\frac{1}{2e}\rho(t) - \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \geq \rho_0. \quad (2.16)$$

Тогда последний член в (2.15) положителен. Из (2.15) и (2.16) вытекает, что

$$\rho(\tau) \geq \frac{1}{2e}\rho(t) \geq \rho_0 + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \geq \rho_0 \quad \forall \tau \in [t - T_0, t]. \quad (2.17)$$

Используя (2.13) и (2.17), получаем, что

$$\begin{aligned} \xi(t) &\leq \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t - t_0)\right) \xi(t_0) + \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)} \left(1 - \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t - t_0)\right)\right), \\ \xi(t) - \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)} &\leq \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t - t_0)\right) \left(\xi(t_0) - \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t - t_0)\right) \xi(t_0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Значит, если $\xi(t) \geq 8e\delta/(\nu\rho_1)$ (и конечно, $\rho(t) \geq \rho_1$, $\xi(t) \geq 2\xi_0$), то

$$\frac{1}{2}\xi(t) \leq \xi(t) - \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)},$$

и в силу (2.18) получаем

$$\xi(t) \leq 2 \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t - t_0)\right) \xi(t_0).$$

Мы доказали следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Если*

$$\xi(t) \geq \delta \max \left\{ \frac{2}{\nu \lambda_1}; \frac{8e}{\nu \rho_1} \right\} = \frac{\delta}{\nu \lambda_1} \Gamma_1$$

и $\rho(t) \geq \rho_1$, *то*

$$\xi(t) \leq 2 \exp \left(-\frac{\nu}{4e} \rho(t) T_0 \right) \xi(t - T_0),$$

где $\rho_1 = 2e(2C_4/\nu + \nu \lambda_1^2/\alpha)$, $T_0 = \alpha^{-1}$, $\alpha = C_{10}(1 + R_1^{(p-2)})^2 \nu^{-1}$, $R_1 = C_7/\nu^{3/2}$, $\Gamma_1 \equiv \max\{2; 8e\lambda_1/\rho_1\}$.

Рассмотрим теперь проекторы P_m и Q_m , $P_m H \oplus Q_m H = H$, $P_m h = \sum_{i=1}^m (h, w_i) w_i$, где $\{w_i\}$ – собственные функции оператора $-\Delta$ с нулевыми граничными условиями: $-\Delta w_i = \lambda_i w_i$, $w_i|_{\partial\Omega} = 0$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$.

Если

$$|Q_m w|^2 \geq |P_m w|^2,$$

то, очевидно,

$$\rho = \frac{\|w\|^2}{|w|^2} = \frac{\|Q_m w\|^2 + \|P_m w\|^2}{|Q_m w|^2 + |P_m w|^2} \geq \frac{\|Q_m w\|^2}{2|Q_m w|^2} \geq \frac{\lambda_{m+1}}{2}. \quad (2.19)$$

Из утверждения 2.1 вытекает

ТЕОРЕМА 2.1 (свойство сжатия). *Пусть* $\lambda_{m+1} \geq 2\rho_1$ *и* $|g_1(\tau) - g_2(\tau)| < \delta$ *при* $\tau \in [t - T_0, t]$. *Пусть также* $u_1 \in \mathcal{H}_{g_1}$, $u_2 \in \mathcal{H}_{g_2}$. *Если*

$$|Q_m(u_1(t) - u_2(t))|^2 \geq |P_m(u_1(t) - u_2(t))|^2,$$

то

$$\xi(t) = |u_1(t) - u_2(t)| < \max \left\{ \frac{\delta}{\nu \lambda_1} \Gamma_1; \theta |u_1(t - T_0) - u_2(t - T_0)| \right\}, \quad (2.20)$$

где

$$\theta = 2 \exp \left(-\frac{\nu \lambda_{m+1}}{8e} T_0 \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отметим асимптотическое поведение параметров ρ_1 , T_0 , Γ_1 , где ν мало. Очевидно,

$$\rho_1 = O(\nu^{-1}), \quad T_0 = O(\nu^{(3p-5)}), \quad (3p-5) \leq \frac{n+4}{n-2}, \quad \Gamma_1 = 2. \quad (2.21)$$

§ 3. Колмогоровская ε -энтропия равномерного аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$

Отметим, что в силу (II)

$$\Sigma_{lT_0, (l+1)T_0} = \Sigma_{mT_0, (m+1)T_0} \quad \forall l, m \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

где $\Sigma_{a,b}$ обозначает множество функций $g \in \Sigma$, ограниченных на интервал $[a, b]$. Пусть $\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}$ – равномерный аттрактор семейства процессов, отвечающих задаче (0.1), (0.2). Пусть

$$S_k(g) = \mathcal{K}_{g; 0, kT_0}$$

обозначает множество решений $u \in \mathcal{K}_g$, ограниченных на интервал $[0, kT_0]$ для каждого $g \in \Sigma$. Целое число k будет определено далее. Пусть также

$$S_k(\Sigma) = \bigcup_{g \in \Sigma} S_k(g).$$

Поскольку множество Σ_{0, kT_0} компактно в $C([0, kT_0]; H)$ (условие (I)), оно может быть покрыто конечным числом шаров $B(\varphi_j, \delta)$, $j = 1, \dots, N$, $N = N(\delta, k)$ при любом $\delta > 0$:

$$\Sigma_{0, kT_0} \subseteq \bigcup_{j=1}^N B(\varphi_j, \delta), \quad B(\varphi_j, \delta) \subset C([0, kT_0]; H).$$

Здесь $B(\varphi, \delta)$ – шар в $C([0, kT_0]; H)$, имеющий центр φ и радиус δ . Тогда

$$S_k(\Sigma) = \bigcup_{j=1}^N \left(\bigcup_{g \in B(\varphi_j, \delta) \cap \Sigma} S_k(g) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^N S_k^j. \quad (3.2)$$

Мы будем исследовать множества

$$\mathcal{A}^j(t_i) = \{u(t_i) : u \in S_k^j\}, \quad t_i = iT_0, \quad i = 0, \dots, k. \quad (3.3)$$

Пусть $u_1(t), u_2(t) \in S_k^j$ и они являются решениями (0.1), (0.2) с внешними силами $g_1, g_2 \in \Sigma$, принадлежащими $B(\varphi_j, \delta)$. Пусть $B_r(u_0)$ обозначает шар в H с центром в u_0 и радиусом r такой, что $u_1(t_i), u_2(t_i) \in B_r(u_0)$ для некоторого фиксированного $i = 0, \dots, k-1$. По теореме 2.1, если $\lambda_{m+1} \geq 2\rho_1$, то поскольку $|g_1(\tau) - g_2(\tau)| \leq 2\delta$, $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$, или

$$|Q_m(u(t_{i+1}) - v(t_{i+1}))|^2 < |P_m(u(t_{i+1}) - v(t_{i+1}))|^2, \quad (3.4)$$

или

$$|u(t_{i+1}) - v(t_{i+1})| \leq \max \left\{ \Gamma_1 \frac{2\delta}{\lambda_1 \nu}; \theta |u(t_i) - v(t_i)| \right\} \leq \max \left\{ \Gamma_1 \frac{2\delta}{\lambda_1 \nu}; 2\theta r \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$\theta = 2 \exp \left(-\frac{\nu \lambda_{m+1}}{8e} T_0 \right), \quad t_{i+1} - t_i = T_0. \quad (3.6)$$

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_i^j = \{u(t_{i+1}) : u \in S_k^j, u(t_i) \in B_r(u_0)\}, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Выберем максимальное подмножество $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, которое удовлетворяет (3.4). В силу леммы Цорна такое множество, очевидно, существует. Тогда

$$\text{dist}(u, \mathfrak{M}) \leq \max \left\{ \Gamma_1 \frac{2\delta}{\lambda_1 \nu}; 2\theta r \right\} \quad \forall u \in \mathfrak{N} \setminus \mathfrak{M}. \quad (3.7)$$

Если $u_1, u_2 \in S_k^j$, $u_1(t_i), u_2(t_i) \in B_r(u_0)$, то для $w = u_1 - u_2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \nu \rho |w|^2 &\leq 2\delta |w| + C_4 |w|^2, \\ \frac{d}{dt} |w| &\leq 2\delta + C_4 |w|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} |u_1(t_{i+1}) - u_2(t_{i+1})| &\leq \exp(C_4 T_0) |u_1(t_i) - u_2(t_i)| + \exp(C_4 T_0) C_4^{-1} 2\delta \\ &\leq 2r\Gamma_2 + 2\delta C_4^{-1} \Gamma_2, \quad \Gamma_2 = \exp(C_4 T_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{diam } \mathfrak{N} \leq 2r\Gamma_2 + 2\delta C_4^{-1} \Gamma_2. \quad (3.9)$$

Выберем теперь m достаточно большим (см. (3.19)) и зафиксируем его. В частности, пусть

$$\theta \leq \frac{1}{8}. \quad (3.10)$$

Предположим, что δ и r удовлетворяют неравенству

$$2\theta r \geq \frac{\Gamma_1 2\delta}{\lambda_1 \nu} \quad (3.11)$$

(см. (3.7)). В силу (3.9) и (3.11)

$$\text{diam } P_m \mathfrak{M} \leq 2r\Gamma_2 + 2\delta C_4^{-1} \Gamma_2 \leq 2r(\Gamma_2 + \lambda_1 \nu \theta C_4^{-1} \Gamma_1^{-1} \Gamma_2) \equiv r\Gamma_3,$$

где $\Gamma_3 = 2\Gamma_2(1 + \lambda_1 \nu \theta C_4^{-1} \Gamma_1^{-1})$.

ЛЕММА 3.1. *Шар B_R в $\mathbb{R}^n$ радиуса R можно покрыть с помощью не более $\varkappa_n(R+2)^n$ шаров B_1 , где $\varkappa_n \leq 2^n$ (см. [21]).*

На самом деле, оценка для $\varkappa_n$ может быть существенно улучшена. Известно, например, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \varkappa_n}{n} = 0$$

(подробнее см. в [21]). Величина $\varkappa_n$ называется *наименьшей плотностью покрытия $\mathbb{R}^n$* .

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Любое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ диаметра D можно покрыть не более $(4D + 4)^n$ шарами B_1 радиуса 1, центры которых принадлежат M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, множество M принадлежит шару $B_D(m)$ при любом $m \in M$. Поэтому по лемме 3.1 оно может быть покрыто $\varkappa_n(2D + 2)^n \leq (4D + 4)^n$ шарами $B_{1/2}$. Рассмотрим те из них, которые покрывают M . Для каждого такого шара $B_{1/2}(a_i)$ найдется некоторая точка $m_i \in M \cap B_{1/2}(a_i)$. Следовательно, $B_{1/2}(a_i) \subseteq B_1(m_i)$ и $\{B_1(m_i)\}$ также покрывают M , $m_i \in M$ и $\#\{B_1(m_i)\} \leq (4D + 4)^n$.

Используя следствие 3.1, заключаем, что множество $P_m \mathfrak{M}$ может быть покрыто

$$q \leq \left(\frac{4r\Gamma_3 + 4\theta r}{\theta r} \right)^m = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right)^m \quad (3.12)$$

шарами радиуса θr с центрами в $P_m \mathfrak{M}$, например, $B_{\theta r}(P_m u_1), \dots, B_{\theta r}(P_m u_q)$, где $P_m u_i \in P_m \mathfrak{M}$.

Рассмотрим шары $B_{4\theta r}(P_m u_1), \dots, B_{4\theta r}(P_m u_q)$ в H . Для любой $v \in \mathfrak{N}$ существует $u \in \mathfrak{M}$ (см. (3.7), (3.11)) такая, что $|u - v| \leq 2\theta r$.

Для $P_m u$ найдется некоторая u_l , $l \in \{1, \dots, q\}$, такая, что $P_m u \in B_{\theta r}(P_m u_l)$. Но $u, u_l \in \mathfrak{M}$, поэтому

$$|u - u_l| \leq |P_m u - P_m u_l| + |Q_m u - Q_m u_l| \leq 2|P_m u - P_m u_l| \leq 2\theta r.$$

Следовательно, $v \in B_{4\theta r}(u_l)$. И значит,

$$\mathfrak{N} \subset \bigcup_{j=1}^q B_{4\theta r}(u_j) \subset \bigcup_{j=1}^q B_{r/2}(u_j), \quad (3.13)$$

где q определено в (3.12). При переходе к последнему включению мы воспользовались неравенством (3.10).

В заключение получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. Пусть m — фиксированное число, которое удовлетворяет (3.10). Тогда множество $\mathfrak{N}$ может быть покрыто с помощью $q \leq (4\Gamma_3/\theta + 4)^m$ шаров радиуса $r/2$ в H , где r удовлетворяет (3.11).

Заметим, что

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{A}^j(t_i) \quad (3.14)$$

для любого $i = 1, \dots, k$ (см. (1.4), (3.1) и (3.3)). В то же время в силу (2.1), очевидно, $\mathcal{A} \subset B_{R_0}(0)$. Применим лемму 3.2 к

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0^j(1) = \{u(t_1) : u \in S^j, u(t_0) \in B_{R_0}(0)\}, \quad t_0 = 0, \quad r = R_0,$$

получим покрытие $B_{R_0/2}(u_{1,j}), \dots, B_{R_0/2}(u_{q,j})$. Значит, множество $\mathfrak{N}_0^j(1) = \mathcal{A}^j(t_1)$ может быть покрыто q шарами радиуса $R_0/2$, если $r = R_0$ удовлетворяет (3.11). Рассмотрим q множеств $\mathfrak{N}_1^j(1), \mathfrak{N}_1^j(2), \dots, \mathfrak{N}_1^j(q)$, где

$$\mathfrak{N}_1^j(l) = \{u(t_2) : u \in S_k^j, u(t_1) \in B_{R_0/2}(u_{l,j})\}, \quad l = 1, \dots, q.$$

Теперь применим лемму 3.2 к каждому из множеств $\mathfrak{N}_1^j(l)$ и получим q^2 шаров радиуса $R_0/4$, которые покрывают $\mathcal{A}^j(t_2)$. После k таких шагов мы получим семейство q^k шаров радиуса $R_0/2^k$, которое покрывает множество $\mathcal{A}^j(t_k)$ при условии, что

$$2\theta \frac{R_0}{2^{k-1}} \geq \frac{\Gamma_1 2\delta}{\lambda_1 \nu}. \quad (3.15)$$

Но

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{A}^j(t_k), \quad N = N_\delta(\Sigma_{0,kT_0}).$$

Поэтому доказана

ЛЕММА 3.3. *Множество $\mathcal{A}_\Sigma$ может быть покрыто с помощью*

$$N_{R_0/2^k}(\mathcal{A}_\Sigma) \leq N_\delta(\Sigma_{0,kT_0}) q^k \quad (3.16)$$

шаров радиуса $R_0/2^k$, где q и k удовлетворяют (3.12) и (3.15), соответственно.

Пусть k удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$2\theta \frac{R_0}{2^k} \geq \frac{\Gamma_1 2\delta}{\lambda_1 \nu} > 2\theta \frac{R_0}{2^{k+1}}. \quad (3.17)$$

Тогда

$$\delta > \frac{\theta \lambda_1 \nu}{\Gamma_1} \frac{R_0}{2^{k+1}}. \quad (3.18)$$

Существуют положительные константы $\bar{c}_0, \bar{c}_1$, зависящие от формы множества Ω , такие, что

$$\bar{c}_0 k^{2/n} \lambda_1 \leq \lambda_k \leq \bar{c}_1 k^{2/n} \lambda_1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, из (3.6) вытекает, что

$$2 \exp(-\nu T_0 \lambda_1 c_1 (m+1)^{2/n}) \leq \theta \leq 2 \exp(-\nu T_0 \lambda_1 c_0 (m+1)^{2/n}), \quad (3.19)$$

где $c_0 = \bar{c}_0/(8e)$, $c_1 = \bar{c}_1/(8e)$.

Выберем минимальное целое число m , которое удовлетворяет неравенствам

$$2 \exp(-\nu T_0 \lambda_1 c_0 (m+1)^{2/n}) \leq \frac{1}{8}, \quad \lambda_{m+1} \geq \bar{c}_0 (m+1)^{2/n} \lambda_1 \geq 2\rho_1, \quad (3.20)$$

т. е.

$$(m+1)^{2/n} \geq \max \left\{ \frac{4 \ln 2}{\nu T_0 \lambda_1 c_0}; \frac{2\rho_1}{\bar{c}_0 \lambda_1} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} D > m^{2/n}. \quad (3.21)$$

Пусть

$$\frac{R_0}{2^k} \geq \varepsilon > \frac{R_0}{2^{k+1}} \implies k \leq \log_2 \frac{R_0}{\varepsilon}. \quad (3.22)$$

Применяя лемму 3.3 с $k + 1$ вместо k и используя (3.18), (3.22), (3.16) и (3.17), получаем

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(\mathcal{A}) &\leq N_{\frac{R_0}{2^{k+1}}}(\mathcal{A}) \leq N_\delta(\Sigma_{0,(k+1)T_0})q^{k+1} \\ &\leq N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{\Gamma_1}\frac{R_0}{2^{k+1}}}(\Sigma_{0,(k+1)T_0})q^{k+1} \\ &\leq N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0})\left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4\right)^{m(k+1)} \\ &\leq N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0})\left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4\right)^{m\log_2(2R_0/\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Следовательно, для колмогоровской ε -энтропии справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) &= \log_2 N_\varepsilon(\mathcal{A}) \\ &\leq \log_2 \left(N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0}) \right) + m \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right) \\ &\leq \mathbf{H}_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,T_0\log_2(2R_0/\varepsilon)}) + D^{n/2} \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right). \end{aligned}$$

В результате доказана

ТЕОРЕМА 3.1. При $0 < \varepsilon \leq R_0$

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq \mathbf{H}_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,T_0\log_2(2R_0/\varepsilon)}) + D^{n/2} \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right), \quad (3.23)$$

где

$$D = \max \left\{ \frac{4 \ln 2}{\nu T_0 \lambda_1 c_0}; \frac{2\rho_1}{\bar{c}_0 \lambda_1} \right\}, \quad \theta = 2 \exp \left(-\frac{\nu \lambda_{m+1} T_0}{8e} \right),$$

а m определено в (3.21).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Выясним асимптотическое поведение правой части неравенства (3.23), когда ν мало.

Пусть $\nu = \nu_0$ является решением алгебраического уравнения

$$\frac{4 \ln 2}{\nu T_0 \lambda_1 c_0} = \frac{2\rho_1}{\bar{c}_0 \lambda_1},$$

где $T_0 = T_0(\nu)$, $\rho_1 = \rho_1(\nu)$ (см. утверждение 2.1).

Тогда, очевидно, $D = 4 \ln(2/(\nu T_0 \lambda_1 c_0))$ при $\nu \leq \nu_0$. Поэтому в силу (3.19) и (3.21)

$$c_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \left(\frac{1}{16} \right)^{(\frac{c_1}{c_0})^{2^{2/n}}} \leq 2 \left(\frac{1}{16} \right)^{(\frac{c_1}{c_0})^{(\frac{m+1}{m})^{2/n}}} \leq \theta,$$

т.е.

$$c_2 \leq \theta \leq \frac{1}{8}. \quad (3.24)$$

Значит, в силу (3.24) из (3.23) получаем

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq \mathbf{H}_{\frac{c_2 \lambda_1 \nu}{2\Gamma_1} \varepsilon}(\Sigma_0, T_0 \log_2(2R_0/\varepsilon)) + D^{n/2} \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{c_2} + 4 \right)$$

при $0 < \nu \leq \nu_0$.

В соответствии с (2.21) $T_0 = O(\nu^{(3p-5)})$ и $D = 4 \ln 2 / (\nu T_0 \lambda_1 c_0) = O(\nu^{-(3p-4)})$ при $0 < \nu \leq \nu_0$. (Мы изучаем случай $2 \leq p \leq 2(n-1)/(n-2)$.) Для других величин имеем

$$R_0 = O(\nu^{-1}), \quad \Gamma_1 = 2, \quad \Gamma_3 = 2 + o(1).$$

Следовательно,

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq \mathbf{H}_{O(\nu)\varepsilon}(\Sigma_0, O(\nu^{(3p-5)}) \log_2(O(\nu^{-1})/\varepsilon)) + O\left(\frac{1}{\nu^{(3p-4)}}\right)^{n/2} \log_2\left(\frac{O(\nu^{-1})}{\varepsilon}\right). \quad (3.25)$$

Изучим фрактальную размерность $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}_\Sigma)$ равномерного аттрактора. Покажем сначала, что величина

$$\limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_0, \tau \log_2(K/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)}$$

не зависит от $K > 0$. В самом деле, при $K \geq 1$ имеем

$$\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_0, \tau \log_2(1/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)} \leq \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_0, \tau \log_2(K/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)}. \quad (3.26)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_0, \tau \log_2(K/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)} &\leq \frac{\mathbf{H}_{\frac{\varepsilon_1}{K}}(\Sigma_0, \tau \log_2(K/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)} \\ &= \frac{\mathbf{H}_{\frac{\varepsilon_1}{K}}(\Sigma_0, \tau \log_2(K/\varepsilon_1))}{\log_2(K/\varepsilon_1)} \cdot \frac{\log_2(1/\varepsilon_1) + \log_2 K}{\log_2(1/\varepsilon_1)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Возьмем $\limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+}$ от обеих частей (3.26) и (3.27). Получим

$$\limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_0, \tau \log_2(K/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)} = \limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_0, \tau \log_2(1/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)}. \quad (3.28)$$

Аналогично доказывается случай $K < 1$.

Определим следующие величины:

$$\mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_0, \tau \log_2(1/\varepsilon_1))}{\log_2(1/\varepsilon_1)}, \quad (3.29)$$

зависящие от Σ и положительного параметра τ .

Если, например, $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$, где g_0 — гладкая квазипериодическая функция с k независимыми частотами (см. §1), то $\mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, \tau) = k$ для любого τ , так как $\mathcal{H}(g_0)$ является липшиц-непрерывным образом k -мерного тора $\mathbb{T}^k$ и $N_\varepsilon(\mathbb{T}^k) \approx C(1/\varepsilon)^k$. Другие примеры будут рассмотрены в дальнейшем.

Если $\mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, \tau) < +\infty$ для некоторого множества Σ , то будем говорить, что Σ имеет локальную фрактальную размерность $\mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, \tau)$ в пространстве $C(\mathbb{R}; H)$. Положим $\tau = T_0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Предположим, что $\mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) < +\infty$. Тогда*

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}_\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)}{\log_2(1/\varepsilon)} \leq \mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) + D^{n/2} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right). \quad (3.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделив (3.23) на $\log_2(1/\varepsilon)$ и положив $\varepsilon_1 = \frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_F(\mathcal{A}_\Sigma) &\leq \limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1} \left(\Sigma_{0, T_0 \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{R_0 \theta \lambda_1 \nu}{\Gamma_1} \right)} \right)}{\log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} + \log_2 \frac{2\Gamma_1}{\theta \lambda_1 \nu}} + D^{n/2} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right) \\ &= \mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) + D^{n/2} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались (3.28) с $K = R_0 \theta \lambda_1 \nu / \Gamma_1$.

Пусть $\gamma(\varepsilon)$ — некоторая положительная монотонная функция такая, что $\gamma(\varepsilon) \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0+$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Пусть*

$$\frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+,$$

и предположим, что для каждого $K > 0$

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_{0, T_0 \log_2(K/\varepsilon_1)})}{\gamma(\varepsilon_1)} \\ = \limsup_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}(\Sigma_{0, T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)})}{\gamma(\varepsilon_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{d}_\gamma^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) < +\infty. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тогда

$$\mathbf{d}_\gamma(\mathcal{A}_\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)}{\gamma(\varepsilon)} \leq \mathbf{d}_\gamma^{\text{loc}}(\Sigma, T_0). \quad (3.32)$$

Для доказательства разделим (3.23) на $\gamma(\varepsilon)$. Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и используя (3.31), получим (3.32), поскольку второй член

$$\frac{D^{n/2} \log_2(2R_0/\varepsilon) \log_2(4\Gamma_3/\theta + 4)}{\gamma(\varepsilon)}$$

стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из неравенства (3.32) следует

$$N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma) \leq 2^{(\mathbf{d}_\gamma^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) + \rho)\gamma(\varepsilon)} \quad \forall \rho > 0$$

для достаточно малых $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\rho)$.

Рассмотрим теперь другие важные характеристики компактного множества B в метрическом пространстве, *функциональную размерность* $\mathbf{adf}(B)$ и *метрический порядок* $\mathbf{q}(B)$. По определению (см. [5])

$$\mathbf{adf}(B) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon(B)}{\log_2 \log_2(1/\varepsilon)}, \quad \mathbf{q}(B) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon(B)}{\log_2(1/\varepsilon)}.$$

Очевидно, если $0 < \mathbf{d}_F^{\text{loc}}(B) < \infty$, то $\mathbf{adf}(B) = 1$ и $\mathbf{q}(B) = 0$. Таким образом, величины $\mathbf{adf}(B)$ и $\mathbf{q}(B)$ описывают, в некотором смысле, множества, имеющие бесконечную фрактальную размерность.

По аналогии с (3.29) и (3.31) определим *локальную функциональную размерность* $\mathbf{adf}^{\text{loc}}(\Sigma, \tau)$ и *локальный метрический порядок* $\mathbf{q}^{\text{loc}}(\Sigma, \tau)$ множества Σ в пространстве $C(\mathbb{R}; H)$:

$$\mathbf{adf}^{\text{loc}}(\Sigma, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon(\Sigma_{0, \tau \log_2(1/\varepsilon)})}{\log_2 \log_2(1/\varepsilon)}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{q}^{\text{loc}}(\Sigma, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon(\Sigma_{0, \tau \log_2(1/\varepsilon)})}{\log_2(1/\varepsilon)}. \quad (3.34)$$

Заметим, что правые части равенств (3.33) и (3.34) не меняются, если в них заменить $\Sigma_{0, \tau \log_2(1/\varepsilon)}$ на $\Sigma_{0, \tau \log_2(K/\varepsilon)}$ при любом $K > 0$. Доказательство аналогично приведенному выше для величины $\mathbf{d}_F^{\text{loc}}(\Sigma, \tau)$.

Предположим, что при $\tau = T_0$ правая часть (3.33) больше 1, а правая часть (3.34) больше 0. Тогда справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Для равномерного аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$ имеют место следующие неравенства:

$$\mathbf{adf}(\mathcal{A}_\Sigma) \leq \mathbf{adf}^{\text{loc}}(\Sigma, T_0), \quad \mathbf{q}(\mathcal{A}_\Sigma) \leq \mathbf{q}^{\text{loc}}(\Sigma, T_0).$$

§ 4. Оценки для ε -энтропии и метрического порядка некоторых множеств Σ

В этом параграфе будут рассмотрены три класса множеств Σ , которые удовлетворяют условиям (I) и (II). Будут получены оценки для ε -энтропии и для метрического порядка множеств из этих классов.

4.1. Некоторые почти периодические функции. Как известно, решения некоторых линейных краевых задач имеют вид:

$$v_0(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^0 e^{i\mu_k s} + \overline{C}_k^0 e^{-i\mu_k s}) e_k(x), \quad \text{Im } \mu_k = 0. \quad (4.1)$$

Пусть, например, $e_k(x)$ – собственные функции эллиптического оператора

$$\Delta e_k(x) - V(x)e_k(x) = -\lambda_k e_k(x), \quad x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \quad e_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.2)$$

где $\lambda_k > 0$, $|e_k| = 1$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда (4.1) является решением гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= \Delta u - V(x)u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mu_k &= \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(Мы не приводим здесь условий на функцию $V(x)$.) Предполагается, что числа $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ рационально независимы. Теперь если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k^0|^2 < +\infty, \quad (4.3)$$

то (4.1) является почти периодической функцией со значениями в $H = L_2(\Omega)$. Предположим, что для некоторого числа $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |k|^{2\alpha} |C_k^0|^2 = M^2. \quad (4.4)$$

Отметим, что

$$\mu_k = a_k |k|^{1/n}, \quad 0 < a \leq a_k \leq a', \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим шкалу пространств H_β , соответствующую оператору $\{\Delta e - V(x)e, e|_{\partial\Omega} = 0\}$, $H = H^0$. Положим $\beta = n\alpha$. Пусть $v = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e_k$ – любая функция из H_β . Очевидно, что следующая норма

$$\|v\|_\beta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha} |A_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{1/n})^{2n\alpha} |A_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{1/n})^{2\beta} |A_k|^2 \quad (4.5)$$

эквивалентна норме

$$\|v\|_{H_\beta}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2\beta} |A_k|^2,$$

поскольку $k^\alpha = (k^{1/n})^{n\alpha} = O(\mu_k^\beta)$. Ниже мы будем использовать норму (4.5) в H_β .

Условие (4.4) означает, что

$$v_0(\cdot, t) \in H^\beta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко доказать, что оболочка $\mathcal{H}(v_0) = \mathcal{H}_\alpha(v_0)$ функции $v_0(x, s) = v_0(t)$ в $C_b(\mathbb{R}; H^\beta)$ состоит из функций

$$v(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{i\mu_k s} + \overline{C}_k e^{-i\mu_k s}) e_k, \quad |C_k| = |C_k^0|,$$

и

$$\|v(s)\|_\beta^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} |k|^{2\alpha} |C_k|^2 = 4M^2. \quad (4.6)$$

Это утверждение непосредственно вытекает из условия рациональной независимости чисел $\{\mu_k\}$.

Оболочка $\mathcal{H}_\alpha(v_0)$ компактна в $C_b(\mathbb{R}; H)$. Очевидно, для каждой функции $v(s) \in \mathcal{H}(v_0)$ множество соответствующих коэффициентов $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ принадлежит эллипсоиду $E_\alpha(M)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha} |C_k|^2 = M^2 \quad (4.7)$$

в пространстве $l_2 = \{\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \|\{C_k\}\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 < \infty\}$. Вычислим расстояние между любыми двумя функциями $v_1(s), v_2(s) \in \mathcal{H}_\alpha(v_0)$ в $C_b(\mathbb{R}; H)$:

$$\|v_1 - v_2\|_{C_b(\mathbb{R}; H)}^2 = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|v_1(s) - v_2(s)\|_H^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k^1 - C_k^2|^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{H}_\alpha(v_0)) \leq \mathbf{H}_{\varepsilon/2}(E_\alpha(M)). \quad (4.8)$$

Оценим сверху ε -энтропию $\mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M), l_2) = \mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M))$ множества $E_\alpha(M)$, измеренную в пространстве l_2 . В работе [5] доказано, что ε -энтропия $\mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M))$ удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M)) \leq c \left(\frac{M}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha}, \quad (4.9)$$

где c зависит от α и γ и не зависит от ε . Поскольку множество $\mathcal{H}_\alpha(v_0) \subseteq C_b(\mathbb{R}; H)$ удовлетворяет (4.8), то из (4.9) следует

ТЕОРЕМА 4.1. *Для ε -энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{H}_\alpha(v_0)) = \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{H}_\alpha(v_0), C_b(\mathbb{R}; H))$ множества $\mathcal{H}_\alpha(v_0)$, измеренной в $C_b(\mathbb{R}; H)$, справедлива следующая оценка сверху:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{H}_\alpha(v_0)) \leq \mathbf{H}_{\varepsilon/2}(E_\alpha(M)) \leq c \left(\frac{2M}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Для метрического порядка множества $\mathcal{H}_\alpha(v_0)$ в $C_b(\mathbb{R}; H)$ получаем*

$$\mathbf{q}(\mathcal{H}_\alpha(v_0)) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{H}_\alpha(v_0))}{\log_2(1/\varepsilon)} \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (4.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. На самом деле, в (4.10) имеет место равенство, так как $\mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M))$ удовлетворяет аналогичным (4.9) нижним оценкам (подробнее см. в [5]).

Теперь, для некоторого заданного вектора $a \in \mathbb{R}^N$ рассмотрим множество $\Sigma = a \cdot \mathcal{H}_\alpha(v_0) \subset C_b(\mathbb{R}; H)$. Множество Σ удовлетворяет (I) и (II). Пусть $\mathcal{A}_\Sigma$ — равномерный аттрактор системы реакции-диффузии с таким множеством Σ . Воспользовавшись теоремой 3.1, получим оценку для $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Справедливо следующее:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma) \leq \mathbf{H}_{\mu\varepsilon}(\Sigma) + \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 q \leq c \left(\frac{2M}{\mu\varepsilon} \right)^{1/\alpha} + \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 q,$$

где

$$\mu = \frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}, \quad q = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right)^{D^{n/2}}.$$

Мы воспользовались очевидным неравенством

$$\mathbf{H}_{\mu\varepsilon}(\Sigma_{0,\tau}) \leq \mathbf{H}_{\mu\varepsilon}(\Sigma).$$

Используя следствие 4.1, в силу (4.10) и следствия 3.4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Справедлива оценка*

$$\mathbf{q}(\mathcal{A}_\Sigma) \leq \mathbf{q}(\Sigma) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Аналогичные результаты, очевидно, имеют место для множества Σ , состоящего из функций

$$g(x, s) = \sum_{j=1}^M g_j(s) a_j, \quad (4.11)$$

где $g_j \in \mathcal{H}_\alpha(v_j)$, $a_j \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, M$. Аналогичным образом рассматриваются бесконечные суммы в (4.11).

4.2. Класс функций из теории информации. В теории информации (см. [5]) встречаются классы функций $g(s)$, $-\infty < s < +\infty$ (сигналов), имеющих ограниченный спектр. Последнее означает, что преобразование Фурье $\hat{g}(\lambda) = F_{s \rightarrow \lambda} g(s)$ этих функций имеет компактный носитель, например, $\text{supp } \hat{g}(\lambda) \subset [-\sigma, \sigma]$. Отметим, что функции вида

$$g(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\lambda_k s}, \quad C_{-k} = \overline{C_k}, \quad \lambda_k = -\lambda_{-k}, \quad (4.12)$$

где

$$|\lambda_k| \leq \sigma,$$

удовлетворяют этому условию. Предполагается также, что

$$\sum_k |C_k| = C < +\infty. \quad (4.13)$$

Сразу отметим, что подобная функция $g(s)$ является почти периодической и ее можно продолжить на комплексную плоскость $\mathbb{C} = \{z\} = \{s + i\tau\}$. Соответствующая функция $g(z)$ является целой функцией и

$$|g(s + i\tau)| = |g(z)| \leq C e^{\sigma |\text{Im } z|}, \quad z = s + i\tau, \quad (4.14)$$

где $\sigma = \sup_k \{|\lambda_k|\}$.

Следуя Тихомирову (см. [5]), рассмотрим класс $B_\sigma(C) \equiv B$ всех целых функций $g(z)$, которые удовлетворяют (4.14). Здесь $C > 0$ и $\sigma > 0$ – фиксированные числа. Из теоремы Пэли–Винера следует, что преобразование Фурье $\widehat{g}(\lambda) = F_{s \rightarrow \lambda} g(s)$ функции $g(s) \in B_\sigma(C)$ имеет компактный носитель, т.е. $g(s)$ имеет ограниченный спектр. Отметим, что множество B является трансляционно-инвариантным и компактным в $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, т.е. оно удовлетворяет (I) и (II).

Обозначим через $B_{[0,T]} = B_\sigma(C)_{[0,T]}$ ограничение функций из $B_\sigma(C)$ на интервал $[0, T]$, $T > 0$. Оценка для ε -энтропии $B_{[0,T]}$ в $C([0, T])$ получена Тихомировым в работе [5]. Он доказал, что минимальное число $N_\varepsilon(B_{[0,T]})$ шаров в $C([0, T])$, необходимое для покрытия $B_{[0,T]}$, удовлетворяет неравенству

$$N_\varepsilon(B_{[0,T]}) = N_\varepsilon(T) \leq \left(2 \left[\frac{C'C}{\varepsilon} \right] + 1 \right)^{4[T(\sigma+\alpha)/\pi] + 4[C''C/\varepsilon] + 6}, \quad (4.15)$$

где α – некоторая фиксированная постоянная, константы C' и C'' зависят от α и не зависят от T и от ε (здесь $[b]$ обозначает целую часть b). Из оценки (4.15) следует, что

$$\mathbf{H}_\varepsilon(B_{[0,T]}) = \log_2 N_\varepsilon(T) \leq \left(\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + \log_2(2C'C + 1) \right) \cdot \left(4 \frac{T(\sigma + \alpha)}{\pi} + \frac{4C''C}{\varepsilon} + 6 \right),$$

где $\varepsilon < 1$. Отсюда для $T = \tau \log_2(1/\varepsilon)$ получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varepsilon(B_{[0, \tau \log_2(1/\varepsilon)]}) &\leq C_1 \frac{1}{\varepsilon} \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \\ \mathbf{q}^{\text{loc}}(B, \tau) &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\log_2 H_\varepsilon(B_{[0, \tau \log_2(1/\varepsilon)]})}{\log_2(1/\varepsilon)} \leq 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Теперь для заданной вектор-функции $a(x) \in H = (L_2(\Omega))^N$ рассмотрим множество $\Sigma = a(x) \cdot B \subset C_b(\mathbb{R}; H)$. Множество Σ удовлетворяет (I) и (II). Пусть $\mathcal{A}_\Sigma$ обозначает равномерный аттрактор системы реакции-диффузии с таким множеством Σ . Используя теорему 3.1 и следствие 3.4, в силу (4.16) получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Справедливо следующее:*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma) &\leq \mathbf{H}_{\mu\varepsilon}(\Sigma_{0, T_0 \log_2(2R_0/\varepsilon)}) + \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 q \\ &\leq C'_1 \frac{1}{\varepsilon} \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 q, \end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{\theta \lambda_1 \nu}{2\Gamma_1}, \quad q = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right)^{D^{n/2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Справедлива оценка*

$$\mathbf{q}(\mathcal{A}_\Sigma) \leq \mathbf{q}(\Sigma) \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Очевидно, аналогичные результаты получаются для множества Σ функций

$$g(x, s) = \sum_{j=1}^M g_j(s) a_j(x), \quad (4.17)$$

где $g_j \in B_{\sigma_j}(C_j)$, $a_j \in H$, $j = 1, \dots, M$. Аналогично рассматриваются бесконечные суммы в (4.17).

4.3. Трансляционно-ограниченные функции в пространстве Соболева. Обозначим через W^1 пространство функций $g \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H_1)$, $\partial_t g \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$, имеющих конечную норму

$$\|g\|_{W^1}^2 = \sup_{h \in \mathbb{R}} \int_0^1 (\|g(s+h)\|^2 + |\partial_t g(s+h)|^2) ds < +\infty. \quad (4.18)$$

Рассмотрим

$$\Sigma = \Sigma^M = \{g \in W^1 : \|g\|_{W^1} \leq M\}. \quad (4.19)$$

Если $g \in \Sigma_M$, то, очевидно, $\|T(h)g\|_{W^1} = \|g\|_{W^1}$ и $T(h)g(s) = g(s+h) \in \Sigma_M$ для всех $h \in \mathbb{R}$, т.е. (II) выполнено. Проверим условие (I). Положим

$$W_{t_1, t_2}^1 = \{g : g \in L_2(t_1, t_2; H_1), \partial_t g \in L_2(t_1, t_2; H)\}.$$

Из теоремы вложения Соболева вытекает, что $W_{t_1, t_2}^1 \subset C([t_1, t_2]; H)$. Пусть дана последовательность $\{g_n\} \subset \Sigma_M$, тогда она предкомпактна в $C([t_1, t_2]; H)$ для каждого $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. С помощью метода диагонализации легко выделить подпоследовательность $\{g_{n_k}\}$ такую, что $\{g_{n_k}(t)\}$ сходится к $g(t)$ в $C([t_1, t_2]; H)$ при $n_k \rightarrow \infty$ для любого $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ и, значит, $g_{n_k}(t) \rightarrow g(t)$, $n_k \rightarrow \infty$, в $C(\mathbb{R}; H)$. С другой стороны, при любом фиксированном $h \in \mathbb{R}$ можно предполагать, что $g_{n_k}(t) \rightarrow g(t)$, $n_k \rightarrow \infty$, слабо в $W_{h, h+1}^1 = H^1(\Omega \times [h, h+1])$. Но $\|g_{n_k}\|_{W_{h, h+1}^1} \leq M$. Следовательно, переходя к пределу, $\|g\|_{W_{h, h+1}^1} \leq M$ для любого $h \in \mathbb{R}$, т.е. $\|g\|_{W^1} \leq M$ и $g \in \Sigma_M$. Мы доказали, что Σ_M компактно в $C(\mathbb{R}; H)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Аналогичным образом можно определить пространство W^α , $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, функций φ таких, что $\varphi(s+h) \in L_2(0, 1; H) \cap H^\alpha(\Omega \times [0, 1])$ при любом $h \in \mathbb{R}$ с конечно нормой

$$\|\varphi\|_{W^\alpha} = \sup_{h \in \mathbb{R}} \|\varphi(\cdot + h)\|_{H^\alpha(\Omega \times [0, 1])}. \quad (4.20)$$

Для множества $\Sigma = \Sigma_M^\alpha = \{\varphi \in W^\alpha : \|\varphi\|_{W^\alpha} \leq M\}$ выполнены условия (I) и (II). При доказательстве этого утверждения используется компактность вложения $H^\alpha(\Omega \times [0, 1]) \subset C([0, 1]; H)$.

Для простоты изложения мы рассмотрим случай $\Omega = (0, 1)^n$. Очевидно, множество $\Sigma = \Sigma^M$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 (см. §3). Следовательно,

$$N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma, H) \leq N_{\mu\varepsilon}(\Sigma_{0, (k+1)T_0}, C([0, (k+1)T_0]; H)) q^{k+1}, \quad (4.21)$$

где $\mathcal{A}_\Sigma$ – равномерный аттрактор семейства процессов $\{U_g(t, \tau) : g \in \Sigma\}$, отвечающего системе реакции-диффузии,

$$\mu = \frac{\theta \lambda_1 \nu}{2\Gamma_1}, \quad k = \log_2 \frac{R_0}{\varepsilon}, \quad q = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4 \right)^{D^{n/2}}.$$

Здесь $N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma, H)$ обозначает наименьшее число ε -шаров в метрике H , покрывающих $\mathcal{A}_\Sigma$, и $N_{\mu\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0}, C([0, (k+1)T_0]; H))$ – минимальное число $\mu\varepsilon$ -шаров в метрике $C([0, (k+1)T_0]; H)$, покрывающих $\Sigma_{0,(k+1)T_0}$.

Из (4.19) вытекает, что

$$\|g\|_{W_2^1(Q_{0,(k+1)T_0})} \leq M((k+1)T_0 + 1) \quad \forall g \in \Sigma_{0,(k+1)T_0}, \quad (4.22)$$

где $Q_{0,(k+1)T_0} = [0, (k+1)T_0] \times \Omega$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & N_{\mu\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0}, C([0, (k+1)T_0]; H)) \\ & \leq N_{\mu\varepsilon}(\{ \|g\|_{W_2^1(Q_{0,(k+1)T_0})} \leq M((k+1)T_0 + 1) \}, C([0, (k+1)T_0]; H)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Пусть число $\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет неравенствам

$$\mu\varepsilon > \varepsilon_1, \quad (k+1) \leq \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1}. \quad (4.24)$$

Тогда

$$Q_{0,(k+1)T_0} \subset Q_{0, \log_2(1/\varepsilon_1)T_0}. \quad (4.25)$$

Следовательно, правая часть (4.23) не превосходит

$$N_{\varepsilon_1} \left(\left\{ \|g\|_{W_2^1(Q_{0, T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)})} \leq M \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} + 1 \right) \right\}, C \left(\left[0, T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right]; H \right) \right). \quad (4.26)$$

Обозначим

$$\left\{ g : \|g\|_{W_2^1(Q_{0, T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)})} \leq M \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} + 1 \right) \right\} = G_{M, T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)}. \quad (4.27)$$

Сделаем замену переменной

$$t \mapsto \tau = \frac{t}{T_0 \log_2(\frac{1}{\varepsilon_1})} : \quad g(t) = \tilde{g}(\tau) = g \left(\tau T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Новое множество функций $\{\tilde{g}(\tau)\}$ обозначим $\tilde{G}$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)} (\|g(t)\|^2 + |\partial_t g(t)|^2) dt \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^1 \left(\|\tilde{g}(\tau)\|^2 + \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{-2} |\partial_\tau \tilde{g}(\tau)|^2 \right) T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{-1} + T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 (\|\tilde{g}(\tau)\|^2 + |\partial_\tau \tilde{g}(\tau)|^2) d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{-1/2} + \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \right) \\
&\quad \times \left(\int_0^1 (\|\tilde{g}(\tau)\|^2 + |\partial_\tau \tilde{g}(\tau)|^2) d\tau \right)^{1/2}. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Очевидно,

$$N_{\varepsilon_1} \left(G_{M, T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)}, C \left(\left[0, T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right]; H \right) \right) = N_{\varepsilon_1} (\tilde{G}, C([0, 1]; H)). \tag{4.29}$$

Положим

$$\left\{ \tilde{g} : \|\tilde{g}(\tau)\|_{W_2^1(Q_{0,1})} \leq M \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \right\} \equiv \tilde{G}_\rho, \tag{4.30}$$

где $\rho = M (T_0 \log_2(1/\varepsilon_1))^{1/2}$. Из (4.27), (4.28) и (4.30) следует

$$\tilde{G} \subset \tilde{G}_\rho. \tag{4.31}$$

В самом деле, если $\tilde{g} \in \tilde{G}_\rho$, то $\|\tilde{g}(\tau)\|_{W_2^1(Q_{0,1})} \leq M (T_0 \log_2(1/\varepsilon_1))^{1/2}$, и в силу (4.28)

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)} (\|g(t)\|^2 + |\partial_t g(t)|^2) dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{-1/2} + \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \right) M \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \\
&= M \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Поэтому $g \in G_{M, T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)}$.

Ко всем функциям $\tilde{g}(\tau) \in \tilde{G}_\rho$ применим оператор сжатия

$$\frac{\tilde{g}(\tau)}{\rho} = \hat{g}(\tau), \quad \tilde{g}(\tau) \in \tilde{G}_\rho, \quad \hat{g}(\tau) \in \hat{G}^1, \tag{4.32}$$

где

$$\hat{G}^1 = \{ \hat{g}(\tau) : \|\hat{g}(\tau)\|_{W_2^1(Q_{0,1})} \leq 1 \}. \tag{4.33}$$

В соответствии с теоремой Бирмана–Соломыка (см. [22]),

$$N_{\varepsilon_1/\rho}(\widehat{G}^1, C([0, 1]; H)) \leq 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}, \quad \omega = \frac{n+1}{1-\varrho}, \quad 1 > \varrho > \frac{1}{2}. \quad (4.34)$$

Действительно, из [22] получаем

$$N_\eta(\widehat{G}^1, W_2^\varrho(Q_{0,1})) \leq 2^{C_\omega(1/\eta)^\omega}. \quad (4.35)$$

По теореме вложения Соболева [23]

$$W_2^\varrho(Q_{0,1}) \subset C([0, 1]; H), \quad (4.36)$$

$$\|g\|_{C([0,1];H)} \leq C_{1\varrho} \|g\|_{W_2^\varrho(Q_{0,1})}, \quad \varrho > \frac{1}{2}. \quad (4.37)$$

Теперь (4.34) следует непосредственно из (4.35)–(4.37).

Наконец, делая растяжение $\rho\widehat{g} = g$, получаем из (4.34), (4.31) оценку

$$\begin{aligned} N_{\varepsilon_1}(\widetilde{G}, C([0, 1]; H)) &\leq N_{\varepsilon_1}(\widetilde{G}_\rho, C([0, 1]; H)) \\ &= N_{\varepsilon_1/\rho}(\widehat{G}^1, C([0, 1]; H)) \leq 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}. \end{aligned}$$

Тогда, в силу (4.29)

$$N_{\varepsilon_1}\left(G_{T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)}, C\left(\left[0, T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1}\right]; H\right)\right) \leq 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}. \quad (4.38)$$

Из (4.23), (4.25) и (4.38) заключаем

$$\begin{aligned} N_{\mu\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0}, C([0, (k+1)T_0]; H)) \\ \leq N_{\varepsilon_1}\left(G_{T_0 \log_2(1/\varepsilon_1)}, C\left(\left[0, T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1}\right]; H\right)\right) \leq 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где ε_1 удовлетворяет (4.24). Имея в виду (4.21), получаем

$$N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma, H) \leq 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega} q^{k+1},$$

где $\omega = (n+1)/(1-\rho)$, $1 > \rho > \frac{1}{2}$, ε_1 удовлетворяет неравенствам $\mu\varepsilon > \varepsilon_1$, $k+1 \leq \log_2(1/\varepsilon_1)$.

Взяв $\log_2$ от обеих частей, получим

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma, H) \leq C_\omega \left(\frac{\rho}{\varepsilon_1}\right)^\omega + (k+1) \log_2 q.$$

Очевидно, (4.24) имеем место, если $\varepsilon_1 = \varepsilon\mu_1$, где

$$\mu_1 = \min\left\{\mu; \frac{1}{2R_0}\right\} = \lambda_1 \nu \min\left\{\frac{\theta}{2\Gamma_1}; \frac{1}{2|\Sigma|}\right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma, H) &\leq C_\omega \left(\frac{M(T_0 \log_2(1/(\varepsilon\mu_1)))^{1/2}}{\varepsilon\mu_1}\right)^{(n+1)/(1-\varrho)} \\ &\quad + D^{n/2} \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4\right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где мы воспользовались обозначениями

$$\rho = M \left(T_0 \log_2 \frac{1}{\varepsilon\mu_1}\right)^{1/2}, \quad \omega = \frac{n+1}{1-\varrho}, \quad \varrho > \frac{1}{2}.$$

Доказана

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1, множество $\Sigma \subset W^1$ и $\|g\|_{W^1} \leq M$ при любом $g \in \Sigma$. Тогда ε -энтропия $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma, H)$ равномерно аттрактора $\mathcal{A}_\Sigma$ удовлетворяет неравенству (4.40).

Рассмотрим метрический порядок $\mathbf{q}^{\text{loc}}(\Sigma, T_0)$ множества Σ . Из (4.39) следует, что

$$\mathbf{q}^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) \leq \frac{n+1}{1-\varrho} \quad \forall \varrho > \frac{1}{2},$$

т.е. $\mathbf{q}^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) \leq 2(n+1)$. Используя следствие 3.4, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Справедлива оценка

$$\mathbf{q}^{\text{loc}}(\mathcal{A}_\Sigma) \leq \mathbf{q}^{\text{loc}}(\Sigma, T_0) \leq 2(n+1).$$

Список литературы

1. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors for non-autonomous evolution equations with almost periodic symbols // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1993. V. 316. P. 357–361.
2. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. № 3. P. 279–333.
3. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors of non-autonomous evolution equations with translation-compact symbols // Oper. Theory Adv. Appl. 1995. V. 78. P. 49–60.
4. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Non-autonomous evolutionary equations with translation-compact symbols and their attractors // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1995. V. 321. P. 153–158.
5. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. Т. 14 (86). № 2. С. 3–86.
6. Chepyzhov V. V., Foias C., Vishik M. I. Uniform attractors for non-autonomous 2D Navier–Stokes equations and estimations of their ε -entropy (to appear).
7. Constantin P., Foias C., Temam R. Attractors representing turbulent flows // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. V. 53. № 314.
8. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Trajectory attractors for reaction-diffusion systems // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1996. V. 7. № 1. P. 49–76.
9. Бабин А. В., Вилиш М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
10. Sell G. R. Non-autonomous differential equations and topological dynamics I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 241–283.
11. Sell G. R. Lectures on topological dynamics and differential equations. Princeton, NJ: Van-Nostrand-Rinhold, 1971.
12. Dafermos C. M. Semi-flows associated with compact and almost uniform processes // Math. Systems Theory. 1974. V. 8. P. 142–149.
13. Dafermos C. M. Almost periodic processes and almost periodic solutions of evolution equations // Proceedings of a University of Florida, International Symposium. New York: Academic Press, 1977. P. 43–57.
14. Hale J. K. Asymptotic behaviour of dissipative systems // Math. Surveys Monographs. V. 25. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987.
15. Haraux A. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Paris: Masson, 1991.
16. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1988.
17. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
18. Amerio L., Prouse G. Abstract Almost Periodic Functions and Functional Equations. New York: Van Nostrand, 1971.

19. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
20. *Eden A., Foias C., Nicolaenko B., Temam R.* Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. Research in Appl. Math. V. 37. New York: John Wiley, 1994.
21. *Conway J. H., Sloan N. J. A.* Sphere Packing, Lattices and Groups. New York: Springer-Verlag, 1988.
22. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^a // Матем. сб. 1967. Т. 73 (115). № 3. С. 331–355.
23. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: vishik@ippi.ac.msk.su; chep@ippi.ac.msk.su

Поступила в редакцию
18.09.1997