Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Богоявленский, Канонические формы инвариантных тензоров и A - B - C -когомологии интегрируемых гамильтоновых систем, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 3, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:13:01

УДК 517.9

О. И. Богоявленский

Канонические формы инвариантных тензоров и A - B - C -когомологии интегрируемых гамильтоновых систем

Выведены канонические формы для тензоров типа (ℓ, m) при $\ell + m \leq 3$, которые являются инвариантными по отношению к некоторой интегрируемой по Лиувиллю невырожденной гамильтоновой системе V на симплектическом многообразии M^{2k} . Доказано, что характеристический многочлен любого инвариантного тензора A_β^α типа $(1, 1)$ является полным квадратом; поэтому его собственные значения имеют четные кратности. Любая инвариантная метрика $g_{\alpha\beta}$ является неопределенной и имеет сигнатуру $\sigma \leq k$. Выведенные канонические формы применены для вычисления A - B - C -когомологий интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

1. Данная работа продолжает исследования тензорных инвариантов динамических систем, которые были начаты в статьях [1]–[5]. Основные применения тензорных инвариантов связаны с гамильтоновыми системами

$$\dot{x}^\alpha = V^\alpha(x) = P_1^{\alpha\beta} H_{,\beta}, \quad H_{,\beta} = \partial H / \partial x^\beta \quad (1.1)$$

на пуассоновых многообразиях M^{2k} с невырожденной пуассоновой структурой $P_1^{\alpha\beta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Гамильтонова система (1.1) называется C -интегрируемой, если она является интегрируемой по Лиувиллю [6], [7] и все инвариантные подмногообразия постоянного уровня ее k инволютивных и функционально независимых первых интегралов компактны.

Класс C -интегрируемых гамильтоновых систем особенно важен, потому что он лежит в основании теории Колмогорова–Арнольда–Мозера [8]–[12], которая изучает малые гамильтоновы возмущения этих систем. Тензорные инварианты этих систем доставляют инвариантную интерпретацию известных достаточных условий применимости теории КАМ. Теорема Колмогорова [8]–[10] утверждает, что условие невырожденности C -интегрируемой системы (1.1) и условие ее изоэнергетической невырожденности являются достаточными условиями для применимости теории КАМ к малым возмущениям этой системы. Оба условия невырожденности были введены Пуанкаре в 1892 году [13]. Теория тензорных инвариантов, развитая в работах [3], [5], дает симметричную интерпретацию этих двух условий:

ДВА ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ КАМ.

1) *Алгебра Ли симметрий C -интегрируемой гамильтоновой системы V является абелевой.*

2) *Алгебра Ли изоэнергетических конформных симметрий системы V является абелевой.*

В работе [5] мы получили следующее

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ КАМ. *Алгебра Ли-Пуассона первых интегралов C -интегрируемой гамильтоновой системы V обязана быть абелевой.*

Теория тензорных инвариантов имеет другое, неожиданное, применение к теории КАМ, которое заключается в конструкции [3] широкого класса негамильтоновых возмущений, динамика которых эквивалентна динамике малых гамильтоновых возмущений в теории КАМ.

Теория тензорных инвариантов привела нас к определению A - B - C -когомологий динамических систем, которые мы изучали в работах [2], [4], [5]. В статье [5] были введены B -когомологии диффеоморфизмов гладких многообразий. В §§ 13, 14 данной работы мы вычисляем A - B - C -когомологии малых размерностей для C -интегрируемых гамильтоновых систем и некоторых диффеоморфизмов $f: M^{2k} \rightarrow M^{2k}$.

Имеется некоторая параллель между теорией тензорных инвариантов интегрируемых динамических систем и теорией алгебраических инвариантов, созданной Гильбертом в 1890–1893 годах. Обе теории дают новую перспективу, исследуя основные инвариантные объекты, связанные с базисными симметриями. Однако, в то время как теория Гильберта не имела первоначально применений вне контекста, в котором она была создана, теория тензорных инвариантов интегрируемых динамических систем определенно имеет применения в конкретных задачах динамики, математической физики и механики. Некоторые из этих применений указаны выше и подробно исследованы в работах [3], [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Тензор T_m^ℓ типа (ℓ, m) на многообразии M^{2k} называется C -инвариантным, если он инвариантен по отношению к C -интегрируемой гамильтоновой системе (1.1), которая является невырожденной в смысле Пуанкаре.

В данной работе мы изучаем C -инвариантные тензоры T_m^ℓ при $\ell + m \leq 3$. Именно эти тензоры играют наиболее важную роль в теории интегрируемых гамильтоновых систем. C -инвариантные тензоры U^α типа $(1, 0)$ соответствуют симметриям этих систем. Тензоры θ_α типа $(0, 1)$ являются дифференциальными 1-формами. Тензоры $h_{\alpha\beta}$ типа $(0, 2)$ появляются как инвариантные симплектические структуры $\omega_{\alpha\beta}$ и инвариантные метрики $g_{\alpha\beta}$. Тензоры типа $(2, 0)$ имеют применения как пуассоновы структуры $P^{\alpha\beta}$. C -инвариантные тензоры A_β^α типа $(1, 1)$ появляются в виде рекурсивных операторов в теории бигамильтоновых систем. C -инвариантные тензоры $N_{\beta\gamma}^\alpha$ типа $(1, 2)$ появляются как тензоры Нейенхейса [14] рекурсивных операторов A_β^α . Тензоры $T_{\alpha\beta\gamma}$ типа $(0, 3)$ имеют применения как C -инвариантные дифференциальные 3-формы. C -инвариантные тензоры $R^{\alpha\beta\gamma}$ типа $(3, 0)$ возникают как скобки Схоутена двух общих пуассоновых структур для C -интегрируемых гамильтоновых систем. Тензоры $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2, 1)$ описывают инвариантные алгебраические структуры в кокасательном расслоении $T^*(M^n)$.

II. Результаты статей [1]–[5] приводят к следующей общей проблеме.

ПРОБЛЕМА КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ. *Какой вид имеют канонические формы C -инвариантных тензоров T_m^ℓ типа (ℓ, m) ?*

В серии предложений, мы выводим канонические формы тензоров T_m^ℓ при $\ell + m \leq 3$, которые инвариантны по отношению к C -интегрируемой невырожденной по Пуанкаре гамильтоновой системе V :

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_j = \frac{\partial H(I)}{\partial I_j}, \quad j = 1, \dots, k,$$

в переменных действие–угол I_j, φ_j . Переменные действия I_j изменяются в шаре $B_a \in \mathbb{R}^k$, угловые переменные φ_j пробегает тор $\mathbb{T}^k$. Канонические формы C -инвариантных тензоров T_m^ℓ типа (ℓ, m) выведены с помощью следующего метода.

а) Уравнение инвариантности $L_V T_m^\ell = 0$ сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве тензорных компонент T_m^ℓ (всюду L_V означает производную Ли по отношению к векторному полю V).

б) Возникающая линейная динамическая система преобразуется к верхне-треугольному виду с постоянными коэффициентами в некоторой специальной системе координат.

в) На основе обнаруженной верхне-треугольной структуры полученная линейная динамическая система интегрируется в явном виде. Выведенные формулы показывают, что область значений компонент C -инвариантных тензоров T_m^ℓ является линейным подпространством, которое состоит из особых точек этой динамической системы. Именно это особое множество и определяет канонические формы C -инвариантных тензоров T_m^ℓ .

Этот метод является общим и применим к исследованию C -инвариантных тензоров T_m^ℓ произвольных валентностей ℓ и m .

III. Основные результаты данной работы сформулированы в инвариантном виде в следующей теореме. Всюду L_U означает производную Ли по отношению к произвольной симметрии U , и i_U означает оператор внутреннего умножения [15].

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что тензор T_m^ℓ типа (ℓ, m) на пуассоновом многообразии M^{2k} инвариантен по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе V . Тогда следующие свойства справедливы для любых симметрий U и U_1 системы V и любых C -инвариантных 1-форм θ и θ_1 .*

1) *Любая C -инвариантная дифференциальная 1-форма θ удовлетворяет уравнениям*

$$\text{rank } d\theta \leq k, \quad \theta(U) = 0, \quad L_U \theta = 0, \quad i_U d\theta = 0.$$

2) *При $\ell + m = 2$ справедливо уравнение*

$$\text{rank } \|L_U T_m^\ell\| \leq k.$$

3) *Характеристический многочлен $P(\lambda, x) = \det(A(x) - \lambda)$ любого C -инвариантного тензора $A(x)$ типа $(1, 1)$ является полным квадратом, $P(\lambda, x) = Q^2(\lambda, x)$. Поэтому собственные значения любого C -инвариантного тензора $A(x)$ типа $(1, 1)$ имеют четные кратности.*

4) Любой C -инвариантный тензор $h_{\alpha\beta}$ типа $(0, 2)$ и любой C -инвариантный тензор $P^{\alpha\beta}$ типа $(2, 0)$ удовлетворяют уравнениям $h(U, U_1) = 0$, $P(\theta, \theta_1) = 0$. Любая C -инвариантная метрика $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ является неопределенной с сигнатурой $\sigma = |n_+ - n_-| \leq k$. Числа n_+ и n_- ее положительных и отрицательных квадратов удовлетворяют неравенствам $n_+ \leq k$, $n_- \leq k$. При $n = 2k = 4\ell + 2$ любая C -инвариантная метрика $g_{\alpha\beta}$ является вырожденной.

5) При $\ell + m \leq 3$ любой C -инвариантный тензор T_m^ℓ типа (ℓ, m) удовлетворяет уравнению

$$L_{U_1} L_U T_m^\ell = 0.$$

6) Любой C -инвариантный тензор $N_{\beta\gamma}^\alpha$ типа $(1, 2)$ и любой C -инвариантный тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2, 1)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \text{rank } \|N_{\beta\tau}^\alpha U^\tau\| &\leq k, & \text{rank } \|N_{\beta\gamma}^\tau \theta_\tau\| &\leq k, \\ \text{rank } \|S_\tau^{\alpha\beta} U^\tau\| &\leq k, & \text{rank } \|S_\beta^{\alpha\tau} \theta_\tau\| &\leq k. \end{aligned}$$

Любой C -инвариантный тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ типа $(0, 3)$ и любой C -инвариантный тензор $R^{\alpha\beta\gamma}$ типа $(3, 0)$ удовлетворяют соотношениям

$$\text{rank } \|T_{\alpha\beta\tau} U^\tau\| \leq k, \quad \text{rank } \|R^{\alpha\beta\tau} \theta_\tau\| \leq k.$$

7) При $\ell + m = 3$ все возможные свертки C -инвариантных тензоров $N_{\beta\gamma}^\alpha$, $S_\gamma^{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta\gamma}$ и $R^{\alpha\beta\gamma}$ с двумя произвольными симметриями или двумя произвольными C -инвариантными 1-формами равны нулю.

Доказательство теоремы 1 разбито на девять частей, которые представлены в §§3–12.

Свойства C -инвариантных тензоров T_m^l , указанные в теореме 1, имеют применения в качестве необходимых условий для невырожденной C -интегрируемости данной динамической системы V .

IV. Канонические формы C -инвариантных тензоров и теорема 1 применяются в §§ 13 и 14 для вычисления A - B - C -когомологий C -интегрируемых невырожденных гамильтоновых систем. Мы доказываем, что первые пять B -когомологий таких динамических систем V в инвариантных тороидальных областях $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$ имеют вид

$$\begin{aligned} H_B^0(V, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^1, & H_B^1(V, \mathcal{O}) &= 0, & H_B^2(V, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^\infty, \\ H_B^3(V, \mathcal{O}) &= 0, & H_B^4(V, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^\infty. \end{aligned}$$

Поэтому бесконечномерность четных когомологий $H_B^2(V, M^{2k})$ и $H_B^4(V, M^{2k})$ является необходимым условием для невырожденной C -интегрируемости данной гамильтоновой системы V .

§ 2. Предварительные результаты

I. Напомним, что гамильтонова система (1.1) называется полностью интегрируемой по Лиувиллю [6], [7], [16], если существуют $k = n/2$ инволютивных функционально-независимых первых интегралов $F_1(x), \dots, F_k(x)$ этой системы:

$$\{F_j, F_\ell\} = P_1^{\alpha\beta} F_{j,\alpha} F_{\ell,\beta} = 0.$$

В данной статье все греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ изменяются между 1 и $n = 2k$. Все латинские индексы i, j, ℓ, m изменяются между 1 и $n = k$. Всюду подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Классическая теорема Лиувилля [6], [7] утверждает, что почти все многообразие M^n (исключая некоторое инвариантное подмножество $S \subset M^n$, $\dim S \leq n-1$) покрыто системой открытых тороидальных областей $\mathcal{O}_m \subset M^n$ с координатами действие–угол $I_1, \dots, I_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k$. В этих координатах интегрируемая по Лиувиллю система (1.1) имеет вид

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}, \quad H = H(I_1, \dots, I_k). \quad (2.1)$$

Симплектическая структура $\omega_1 = P_1^{-1}$ имеет канонический вид

$$\omega_1 = dI_j \wedge d\varphi_j, \quad \omega_1 = P_1^{-1}.$$

Координаты действия $I_1, \dots, I_k$ определены в шаре

$$B_a : \sum_{j=1}^k (I_j - I_{j0})^2 < a^2. \quad (2.2)$$

Угловые координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ пробегает тор $\mathbb{T}^k$, $0 \leq \varphi_j \leq 2\pi$, в компактном случае и торический цилиндр $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{k-m}$, $0 \leq m < k$, если многообразие $I_j(x) = I_{j0}$ является некомпактным.

Полностью интегрируемая гамильтонова система (1.1), (2.1) называется невырожденной, если условие Пуанкаре [13] для гессиана

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H(I)}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} \right\| \neq 0 \quad (2.3)$$

выполнено в открытой плотной области в переменных действие–угол

$$I_1, \dots, I_k, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_k, \quad \varphi_i = \varphi_i \bmod(2\pi).$$

Инвариантные подмногообразия C -интегрируемой гамильтоновой системы (1.1) являются торами $\mathbb{T}^k$:

$$\mathbb{T}^k : I_1 = c_1, \dots, I_k = c_k, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi. \quad (2.4)$$

Соответствующие касательные подпространства определяют k -мерное распределение

$$\mathcal{L}_x = T_x(\mathbb{T}^k) \subset T_x(M^n). \quad (2.5)$$

II. Условие невырожденности по Пуанкаре (2.3) означает, что k функций

$$J_\ell(I) = \frac{\partial H(I)}{\partial I_\ell}$$

образуют систему локальных координат в шаре B_a (2.2). Гамильтонова система (2.1) принимает вид

$$\dot{J}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = J_i \quad (2.6)$$

в локальных координатах

$$J_1, \dots, J_k, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_k, \quad \varphi_i = \varphi_i \bmod(2\pi). \quad (2.7)$$

Преимущество использования неканонических координат J_i, φ_i состоит в том, что гамильтонова система (1.1), (2.1) принимает наиболее простой вид (2.6) в координатах (2.7). Наши результаты относительно алгебраических свойств инвариантных тензоров доказаны в тороидальных областях $\mathcal{O}_m$, которые покрывают все многообразие M^n за исключением некоторого инвариантного подмножества S , $\dim S \leq n - 1$. Гладкость рассматриваемых C -инвариантных тензоров влечет непрерывное продолжение их алгебраических свойств на все многообразие M^n , независимо от выбора локальных координат.

Произвольная траектория динамической системы (2.6) является всюду плотной на торе $\mathbb{T}^k$ (2.4), если и только если соответствующие k координат $J_1, \dots, J_k$ рационально независимы. Это означает, что для произвольных целых чисел $m_1, \dots, m_k$, $(m_1, \dots, m_k) \neq (0, \dots, 0)$, справедливо неравенство

$$m_1 J_1 + \dots + m_k J_k \neq 0.$$

Это условие справедливо почти всюду в шаре B_a (2.2). Поэтому траектории C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (2.1), (2.6) являются всюду плотными на почти всех торах (2.4). Следовательно, любой гладкий первый интеграл $F(J_i, \varphi_i)$ системы (2.6) является постоянным на всех торах $\mathbb{T}^k$ и поэтому зависит только от переменных действия

$$\frac{dF}{dt} = 0 \implies F = F(J_1, \dots, J_k). \quad (2.8)$$

III. Координаты (2.7) определяют базис касательных векторов

$$e_i = \frac{\partial}{\partial J_i}, \quad e_{i+k} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \quad (2.9)$$

в касательном пространстве $T_x(M^n)$ и двойственный базис

$$e^i = dJ_i, \quad e^{i+k} = d\varphi_i \quad (2.10)$$

в кокасательном пространстве $T_x^*(M^n)$. Касательные векторы обозначаются u, v, w , кокасательные векторы обозначаются u^*, v^*, w^* . Внутреннее произведение определяется формулой

$$\langle u, u^* \rangle = u^*(u). \quad (2.11)$$

Два базиса (2.9) и (2.10) связаны соотношениями $\langle e_i, e^j \rangle = \delta_i^j$.

В любой инвариантной тороидальной области $\mathcal{O}$ мы вводим нильпотентный оператор D . Этот оператор действует на касательном пространстве $T_x(M^n)$ по формулам

$$De_i = e_{i+k}, \quad De_{i+k} = 0, \quad D^2 = 0. \quad (2.12)$$

Оператор D действует на кокасательном пространстве $T_x^*(M^n)$ по формулам

$$De^i = 0, \quad De^{i+k} = e^i. \quad (2.13)$$

Очевидно справедливо тождество $\langle Du, u^* \rangle = \langle u, Du^* \rangle$ для любого вектора $u \in T_x(M^n)$ и любого ковектора $u^* \in T_x^*(M^n)$.

Оператор $D(x)$ порождает некоторое дифференцирование [15] тензорной алгебры $T(T(M^n))$. Это дифференцирование также обозначается $D(x)$.

IV. Векторное поле U на многообразии M^n называется *симметрией динамической системы* $\dot{x}^i = V^i(x)$, если оно коммутирует с векторным полем V :

$$[U, V] = 0.$$

В этом случае векторное поле U является инвариантным по отношению к динамической системе $\dot{x}^i = V^i(x)$.

В работе [5] изучались симметрии общих динамических систем с квазипериодической динамикой

$$\dot{I}_1 = 0, \dots, \dot{I}_p = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1(I), \dots, \dot{\varphi}_q = \omega_q(I) \quad (2.14)$$

в тороидальных областях $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^q \subset M^n$ при произвольных размерностях p и q , $p+q = n$. Пусть $X \subset B_a$ — множество точек $I \in B_a$, для которых траектории системы (2.14) являются всюду плотными на торах T^q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Динамическая система (2.14) называется T^q -плотной в торической области $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^q \subset M^n$, если множество X является всюду плотным в шаре B_a .

В работе [5] мы доказали следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. Векторное поле U тогда и только тогда является симметрией $\mathbb{T}^q$ -плотной динамической системы (2.14), если оно имеет вид

$$U = \sum_{j=1}^p U^j(I) \frac{\partial}{\partial I_j} + \sum_{\alpha=1}^q U^{\alpha+p}(I) \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha}.$$

Здесь гладкие функции $U^{\alpha+p}(I)$ являются произвольными и гладкие функции $U^j(I)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^p \frac{\partial \omega_\alpha(I)}{\partial I_j} U^j(I) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Применяя эту лемму к динамической системе (2.6), мы получаем, что любая ее симметрия U имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^k U^{i+k}(J) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \quad (2.15)$$

где $U^{i+k}(J)$ являются произвольными гладкими функциями.

Формула (2.15) приводит к выражению для частных производных

$$U_{,\beta}^\alpha = \delta_{i+p}^\alpha \delta_{\beta,\ell}^\ell U_{,\ell}^{i+p}(J), \quad (2.16)$$

которое используется в дальнейшем.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Любая симметрия U C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) удовлетворяет уравнению $DU = 0$. Векторное поле U касается k -мерного распределения $\mathcal{L}_x$ (2.5). Соответствующая динамическая система

$$\dot{x}^\alpha = U^\alpha(x^1, \dots, x^n) \quad (2.17)$$

является интегрируемой. Первые интегралы $F(x)$ системы (1.1) одновременно являются первыми интегралами системы (2.17).

Действительно, ввиду (2.15), система (2.17) имеет вид

$$\dot{J}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = U^{i+k}(J) \quad (2.18)$$

в тороидальных координатах (2.7). Следствие 2.1 легко выводится из формулы (2.18).

§3. C -Инвариантные дифференциальные 1-формы

I. Любая дифференциальная 1-форма θ имеет вид

$$\theta = \theta_i(J, \varphi) dJ_i + \theta_{i+k}(J, \varphi) d\varphi_i \quad (3.1)$$

в тороидальных координатах (2.7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Дифференциальная 1-форма θ является интегрируемой по отношению к C -инвариантной невырожденной гамильтоновой системе (1.1) тогда и только тогда, если она имеет вид

$$\theta = \theta_i(J) dJ_i \quad (3.2)$$

в координатах J_i, φ_i (2.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Векторное поле V , определенное динамической системой (2.6), имеет компоненты

$$V^i = 0, \quad V^{i+k} = J_i. \quad (3.3)$$

Эти формулы влекут

$$V_{,\beta}^\alpha = \delta_{i+k}^\alpha \delta_\beta^i, \quad (3.4)$$

где подразумевается суммирование по отношению к индексу $i = 1, \dots, k$. Уравнение инвариантности $L_V \theta = 0$ для дифференциальной 1-формы θ имеет вид

$$(L_V \theta)_\beta = \dot{\theta}_\beta + V_{,\beta}^\alpha \theta_\alpha = 0. \quad (3.5)$$

Здесь оператор L_V означает производную Ли по отношению к векторному полю V . После подстановки формул (3.1) и (3.4), уравнение (3.5) дает

$$\dot{\theta}_i = -\theta_{i+k}, \quad \dot{\theta}_{i+k} = 0. \quad (3.6)$$

Вследствие (2.8), решения уравнений (3.6) имеют вид

$$\theta_i(t) = -\tilde{\theta}_{i+k}(J)t + \tilde{\theta}_i(J), \quad \theta_{i+k}(t) = \tilde{\theta}_{i+k}(J), \quad (3.7)$$

где $\tilde{\theta}_i(J)$ и $\tilde{\theta}_{i+k}(J)$ являются произвольными гладкими функциями. Компоненты $\theta_\alpha(J, \varphi)$ любой гладкой дифференциальной 1-формы (3.1) ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$ (2.4). Решения (3.7) являются ограниченными при любом t тогда и только тогда, если $\tilde{\theta}_{i+k}(J) = 0$ при $i = 1, \dots, k$. Поэтому, используя (3.7) и тот факт, что общие траектории C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1), (2.6) всюду плотны на торах $\mathbb{T}^k$, мы получаем, что 1-форма θ является C -инвариантной тогда и только тогда, если она имеет вид (3.2).

Лемма Пуанкаре и предложение 3.1 приводят к следствию:

Любая замкнутая C -инвариантная 1-форма θ является точной в любой тороидальной области $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$.

II. ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 1. Если динамическая система V

$$\dot{x}^i = V^i(x^1, \dots, x^n) \quad (3.8)$$

на гладком многообразии M^{2k} является C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системой, то выполняются следующие необходимые условия.

1) Любая C -инвариантная дифференциальная 1-форма θ удовлетворяет уравнениям

$$\theta(V) = 0, \quad i_V d\theta = 0, \quad \text{rank } d\theta \leq k. \quad (3.9)$$

При $k = 2l$ справедливы уравнения

$$\theta \wedge d\theta \wedge \dots \wedge d\theta = 0, \quad (3.10)$$

где число сомножителей равно $[\frac{n}{4}] + 1 = \ell + 1$. При $k = 2\ell + 1$ справедливы уравнения

$$d\theta \wedge \dots \wedge d\theta = 0, \quad (3.11)$$

где число сомножителей равно $[\frac{n}{4}] + 1 = \ell + 1$.

2) Любая симметрия U и любая C -инвариантная дифференциальная 1-форма θ удовлетворяют уравнениям

$$\theta(U) = 0, \quad i_U d\theta = 0, \quad L_U \theta = 0. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Применяя предложение 1, мы получаем, что если динамическая система (3.8) является C -интегрируемой, то любая инвариантная 1-форма θ имеет вид (3.2) в тороидальных координатах (2.7). Отсюда следует (3.9). Внешние произведения (3.10) и (3.11) имеют степень $k + 1$. Поэтому для 1-формы θ (3.2), которая зависит только от k переменных $J_1, \dots, J_k$, мы получаем

$$\theta \wedge d\theta \wedge \dots \wedge d\theta = 0, \quad d\theta \wedge \dots \wedge d\theta = 0$$

при $k = 2\ell$ и $k = 2\ell + 1$ соответственно.

2) Применяя лемму 2.1 и предложение 3.1, мы получаем, что если динамическая система (3.8) является C -интегрируемой, то любая симметрия U имеет вид (2.15) и любая C -инвариантная 1-форма θ имеет вид (3.2) в координатах (2.7). Отсюда мы находим

$$\theta(U) = 0, \quad d\theta(U, W) = 0 \quad (3.13)$$

для любого касательного вектора W . Второе уравнение (3.13) означает, что $i_U d\theta = 0$. Поэтому, применяя (3.13) и формулу Картана [15], [17], [18]

$$L_U = i_U \circ d + d \circ i_U, \quad (3.14)$$

мы получаем

$$L_U \theta = i_U d\theta + d(\theta(U)) = 0.$$

Следовательно, любая симметрия U системы (3.8) сохраняет любую C -инвариантную 1-форму θ .

Уравнения (3.9)–(3.11) не являются независимыми. Действительно, формула Картана (3.14) влечет

$$L_V \theta = i_V d\theta + d(\theta(V)) = 0 \quad (3.15)$$

для инвариантной 1-формы θ . Ввиду (3.15) равенство $\theta(V) = 0$ влечет $i_V d\theta = 0$. Стандартные методы линейной алгебры доказывают, что (3.10) и (3.11) влекут неравенство $\text{rank } d\theta \leq k$.

III. Пусть M^{2k} – симплектическое многообразие с симплектической структурой ω . Предположим, что $\omega = d\theta$ в некоторой области $\mathcal{D} \subset M^{2k}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если некоторая гамильтонова система*

$$\dot{x}^\alpha = V^\alpha = (\omega^{-1})^{\alpha\beta} H_{,\beta}$$

в инвариантной области $\mathcal{D}$ сохраняет 1-форму θ , $d\theta = \omega$, то эта система не является C -интегрируемой и невырожденной в любой инвариантной подобласти $\mathcal{D}_a \subset \mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие $d\theta = \omega$, инвариантная 1-форма θ удовлетворяет уравнениям

$$i_V d\theta = -dH, \quad \text{rank } d\theta = 2k.$$

Эти уравнения не совместимы с необходимыми условиями (3.9).

Следствие 3.1 имеет применение к гамильтоновым системам

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.16)$$

с однородными степени 2 гамильтоновыми функциями $H(p, q)$. Эти гамильтоновы системы сохраняют 1-форму $\theta = p_i dq_i - q_i dp_i$, которая удовлетворяет уравнению $d\theta = 2\omega$. Действительно, дифференцируя 1-форму θ по отношению к системе (3.16) и применяя теорему Эйлера об однородных функциях, мы получаем

$$\dot{\theta} = d\left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} - 2H\right) = 0,$$

поскольку гамильтониан $H(p, q)$ является однородной функцией степени 2. Применяя следствие 3.1, мы получаем, что любая гамильтонова система (3.16) с однородной степени 2 гамильтоновой функцией $H(p, q)$ или не является C -интегрируемой, или вырождена.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Любая C -инвариантная 1-форма θ удовлетворяет уравнению $D\theta = 0$. C -инвариантные дифференциальные формы θ и $d\theta$ аннулируют k -мерное распределение $\mathcal{L}_x$ (2.5):*

$$\theta(\mathcal{L}_x) = 0, \quad d\theta(\mathcal{L}_x, T_x(M^n)) = 0.$$

Доказательство следует из формул (3.2) и определения оператора дифференцирования D (2.13).

§ 4. Общие C -инвариантные тензоры типа $(0, 2)$

I. Представим тензор $h_{\alpha\beta}(J, \varphi)$ типа $(0, 2)$ в блочном виде

$$h_{\alpha\beta}(J, \varphi) = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

в тороидальных координатах J_i, φ_i (2.7). Здесь b_1, b_2, b_3, b_4 – матрицы размера $k \times k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Тензор $h_{\alpha\beta}$ типа $(0, 2)$ является инвариантным по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1) тогда и только тогда, если он имеет блочный вид*

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a(J) & b(J) \\ -b(J) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

в координатах (2.7). Здесь $a(J)$ и $b(J)$ – произвольные $k \times k$ матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение инвариантности для тензора h типа $(0, 2)$ имеет вид

$$(L_V h)_{\alpha\beta} = \dot{h}_{\alpha\beta} + V_{,\alpha}^\gamma h_{\gamma\beta} + V_{,\beta}^\gamma h_{\alpha\gamma} = 0. \quad (4.3)$$

Вследствие (3.4) и (4.1), система (4.3) эквивалентна системе четырех линейных матричных уравнений

$$\dot{b}_1 = -b_2 - b_3, \quad \dot{b}_2 = -b_4, \quad \dot{b}_3 = -b_4, \quad \dot{b}_4 = 0. \quad (4.4)$$

Эта система очевидно имеет верхне-треугольную структуру. Применяя (2.8), мы получаем, что все решения уравнений (4.4) имеют вид

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \tilde{b}_4(J)t^2 - (\tilde{b}_2(J) + \tilde{b}_3(J))t + \tilde{b}_1(J), \\ b_2(t) &= -\tilde{b}_4(J)t + \tilde{b}_2(J), \quad b_3(t) = -\tilde{b}_4(J)t + \tilde{b}_3(J), \quad b_4(t) = \tilde{b}_4(J). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Компоненты $h_{\alpha\beta}(J, \varphi)$ (4.1) гладкого инвариантного тензора h типа $(0, 2)$ ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$ (2.4). Решения (4.5) ограничены при всех t тогда и только тогда, если

$$\tilde{b}_2(J) = -\tilde{b}_3(J), \quad \tilde{b}_4(J) = 0. \quad (4.6)$$

Отсюда следует блочный вид (4.2).

Типичные траектории C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) всюду плотны на торах (2.4). Поэтому формулы (4.5) и (4.6) доказывают, что компоненты $h_{\alpha\beta}$ (4.1) зависят только от координат J_i .

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Любой C -инвариантный тензор h типа $(0, 2)$ удовлетворяет уравнению*

$$h(Du, v) + h(u, Dv) = 0$$

и аннулирует k -мерное распределение $\mathcal{L}_x$ (2.5): $h(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_x) = 0$.

Доказательство следует из формул (2.12) и (4.2).

II. ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 2. 1) Любые две симметрии U и U_1 C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) и любой C -инвариантный тензор h типа $(0, 2)$ удовлетворяют уравнениям

$$h(U, U_1) = 0, \quad \text{rank}(L_U h) \leq k, \quad L_{U_1} L_U h = 0. \quad (4.7)$$

2) Симплектическая структура $\omega_1 = P_1^{-1}$ C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) удовлетворяет уравнениям

$$\text{rank}(L_U \omega) \leq k, \quad L_U L_U \omega = 0, \quad (4.8)$$

где U – произвольная симметрия системы (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первое уравнение (4.7) следует из блочной структуры (4.2) и формулы (2.15). Производная Ли $L_U h$ имеет вид

$$(L_U h)_{\alpha\beta} = \dot{h}_{\alpha\beta} + U_{,\alpha}^\gamma h_{\gamma\beta} + U_{,\beta}^\gamma h_{\alpha\gamma}. \quad (4.9)$$

Используя формулы (2.16) и (4.2), мы находим, что тензор (4.9) имеет блочную структуру

$$(L_U h)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{a}(J) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где $\tilde{a}(J)_{ij} = U_{,j}^{\ell+k} b_{i\ell} - U_{,i}^{\ell+k} b_{\ell j}$. Отсюда следует второе уравнение (4.7). Применяя производную Ли L_{U_1} к тензору $L_U h$ (4.10) типа $(0, 2)$, мы выводим третье уравнение (4.7).

2) Гамильтонова система (1.1) сохраняет симплектическую структуру ω . Поэтому (4.8) следуют из (4.7).

§ 5. Любая C -инвариантная метрика является неопределенной

C -инвариантный тензор $h_{\alpha\beta}$ (4.2) типа $(0, 2)$ очевидно является симметричным, если выполняются уравнения

$$a^t = a, \quad b^t = -b. \quad (5.1)$$

Обозначим через $g_{\alpha\beta}$ возникающую метрику на многообразии M^{2k} .

ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 3. 1) Любая C -инвариантная метрика $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ является неопределенной с сигнатурой $\sigma = |n_+ - n_-| \leq k$. Числа n_+ и n_- ее положительных и отрицательных квадратов удовлетворяют неравенствам

$$n_+ \leq k, \quad n_- \leq k. \quad (5.2)$$

Любая C -инвариантная метрика $g_{\alpha\beta}$ при $n = 4\ell + 2$ является вырожденной всюду на многообразии M^n .

2) Траектории C -интегрируемой гамильтоновой системы (1.1) и траектории любого C -инвариантного векторного поля U являются световыми геодезическими любой невырожденной C -инвариантной метрики $g_{\alpha\beta}$ при $n = 4\ell$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предложение 4.1 доказывает, что C -инвариантная метрика $g_{\alpha\beta}$ имеет блочный вид (4.2), где матрица $a(J)$ симметрична и матрица $b(J)$ кососимметрична вследствие (5.1). Поэтому ограничение метрики (4.2) на k -мерное распределение $\mathcal{L}_x \subset T_x(M^{2k})$ равно нулю и неравенства (5.2) справедливы вместе с $\sigma = |n_+ - n_-| \leq k$.

Для любого нечетного $k = 2\ell + 1$, кососимметричная $k \times k$ матрица $b(J)$ является вырожденной. Формула (4.2) влечет

$$\det \|g\| = (\det \|b\|)^2 = 0.$$

Следовательно, при $n = 2k = 4\ell + 2$ любая C -инвариантная метрика g вырождена.

2) Траектории системы (1.1) и траектории любого C -инвариантного векторного поля U (2.15) имеют вид

$$\begin{aligned} J_i &= \text{const}, & \varphi_i(t) &= J_i t + \varphi_i(0), \\ J_i &= \text{const}, & \varphi_i(t) &= U^{i+k}(J)t + \varphi_i(0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

в тороидальных координатах $x^i = J_i$, $x^{i+k} = \varphi_i$. Траектории (5.3) очевидно удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = 0, \quad \frac{dx^{i+k}(t)}{dt} = \text{const}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \frac{d^2 x^\alpha(t)}{dt^2} = 0. \quad (5.4)$$

Вследствие блочной структуры (4.2), траектории (5.3) имеют нулевую длину (или являются “световыми” траекториями) по отношению к любой C -инвариантной метрике g .

Кривая $x^\alpha(t)$ является геодезической метрики $g_{\alpha\beta}$, если она удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \quad (5.5)$$

Здесь символы Кристоффеля $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ имеют вид

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\tau} \right).$$

Вследствие (5.4), ненулевые слагаемые в (5.5) имеют коэффициенты

$$\Gamma_{i+k, j+k}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau, j+k}}{\partial x^{i+k}} + \frac{\partial g_{i+k, \tau}}{\partial x^{j+k}} - \frac{\partial g_{i+k, j+k}}{\partial x^\tau} \right). \quad (5.6)$$

Используя формулу (4.2), мы находим что все коэффициенты (5.6) равны нулю. Поэтому траектории (5.3)–(5.4) удовлетворяют уравнениям (5.5) и параметр t в (5.3) является аффинным параметром. Следовательно, траектории (5.3) являются световыми геодезическими любой C -инвариантной невырожденной метрики.

§6. Классификация C -инвариантных замкнутых дифференциальных 2-форм

I. C -инвариантный тензор $h_{\alpha\beta}$ (4.2) типа $(0, 2)$ очевидно является кососимметричным, если справедливы уравнения

$$a^t = -a, \quad b^t = b. \quad (6.1)$$

Соответствующая дифференциальная 2-форма ω_2 имеет вид

$$\omega_2 = a_{i\ell}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell + 2b_{i\ell}(J)dJ_i \wedge d\varphi_\ell. \quad (6.2)$$

В статьях [1], [3] мы представили полную классификацию C -инвариантных замкнутых 2-форм. В данном параграфе дается другое доказательство этой классификации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Замкнутая дифференциальная 2-форма ω_2 является инвариантной по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1) тогда и только тогда, если она имеет вид*

$$\omega_2 = d\left(\frac{\partial B(J)}{\partial J_i}\right) \wedge d\varphi_i + df_i(J) \wedge dJ_i \quad (6.3)$$

в тороидальных координатах (2.7). Здесь $B(J)$ и $f_i(J)$ являются произвольными гладкими функциями к переменным $J_1, \dots, J_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная Ли от 2-формы ω_2 по отношению к динамической системе (2.6) имеет вид

$$\dot{\omega}_2 = d\left(\frac{\partial B(J)}{\partial J_i}\right) \wedge dJ_i = \frac{\partial^2 B(J)}{\partial J_i \partial J_\ell} dJ_\ell \wedge dJ_i = 0.$$

Поэтому замкнутая 2-форма (6.3) является C -инвариантной.

Вследствие предложения 4.1 и уравнений (6.1) любая C -инвариантная 2-форма ω_2 имеет вид (6.2). Уравнение $d\omega_2 = 0$ эквивалентно системе $k + 1$ уравнений

$$d(a_{i\ell}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell) = 0, \quad d(b_{i\ell}(J)dJ_i) = 0, \quad \ell = 1, \dots, k.$$

Применяя лемму Пуанкаре, мы получаем

$$a_{i\ell}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell = d(f_i(J)dJ_i), \quad (6.4)$$

$$2b_{i\ell}(J)dJ_i = dB_\ell(J), \quad (6.5)$$

где $f_i(J)$ и $B_\ell(J)$ – некоторые гладкие функции. Уравнения (6.5) и симметричность матрицы b (6.1) влекут

$$2b_{i\ell} = 2b_{\ell i} = \frac{\partial B_\ell(J)}{\partial J_i} = \frac{\partial B_i(J)}{\partial J_\ell}.$$

Отсюда следуют равенства

$$B_i(J) = \frac{\partial B(J)}{\partial J_i}, \quad 2b_{i\ell} = \frac{\partial^2 B(J)}{\partial J_i \partial J_\ell} \quad (6.6)$$

где $B(J)$ – некоторая гладкая функция.

Формула (6.3) следует из (6.2) после подстановки выражений (6.4) и (6.6).

Предложения 3.1 и 6.1 приводят к следствию:

Если функция $B(J)$ нелинейна, то C -инвариантная замкнутая 2-форма ω_2 (6.3) не является внешней производной никакой C -инвариантной 1-формы θ (3.2).

II. Применим оператор i_V к C -инвариантной 2-форме ω_2 (6.3). По определению [15] мы имеем $i_V \omega_2(X) = 2\omega_2(V, X)$. Используя формулы (3.3) и (6.3), получаем

$$i_V \omega_2 = -J_i \frac{\partial^2 B(J)}{\partial J_i \partial J_\ell} dJ_\ell = d\left(B(J) - J_i \frac{\partial B(J)}{\partial J_i}\right).$$

Эта формула означает, что 1-форма $i_V \omega_2$ является дифференциалом первого интеграла

$$F(J) = B(J) - J_i \frac{\partial B(J)}{\partial J_i}$$

гамильтоновой системы (1.1)–(2.6). Первый интеграл $F(J)$ совпадает с преобразованием Лежандра функции $-B(J)$.

§ 7. Пуассоновы структуры и C -инвариантные тензоры типа $(2, 0)$

I. Представим тензор $P^{\alpha\beta}(J, \varphi)$ типа $(2, 0)$ в блочном виде

$$P^{\alpha\beta}(J, \varphi) = \begin{pmatrix} p_4 & p_3 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

в тороидальных координатах J_i, φ_i . Здесь $p_1, p_2, p_3, p_4(J, \varphi)$ – матрицы размера $k \times k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Тензор $P^{\alpha\beta}$ типа $(2, 0)$ тогда и только тогда является инвариантным по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1), если он имеет блочный вид

$$P^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -p(J) \\ p(J) & p_1(J) \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

в координатах J_i, φ_i . Здесь $p_1(J)$ и $p(J)$ – произвольные $k \times k$ матрицы, зависящие от переменных J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение инвариантности $L_V P = 0$ для тензора P типа $(2, 0)$ имеет вид

$$(L_V P)^{\alpha\beta} = \dot{P}^{\alpha\beta} - V_{,\gamma}^\alpha P^{\gamma\beta} - V_{,\gamma}^\beta P^{\alpha\gamma} = 0. \quad (7.3)$$

После подстановки формул (3.4) и (7.1), уравнение (7.3) принимает эквивалентный вид

$$\dot{p}_1 = p_2 + p_3, \quad \dot{p}_2 = p_4, \quad \dot{p}_3 = p_4, \quad \dot{p}_4 = 0, \quad (7.4)$$

где $p_1, p_2, p_3, p_4 - k \times k$ матрицы (7.1). Вследствие (2.8), все решения линейной верхнетреугольной системы (7.4) даются формулами

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \tilde{p}_4(J)t^2 + (\tilde{p}_2(J) + \tilde{p}_3(J))t + \tilde{p}_1(J), \\ p_2(t) &= \tilde{p}_4(J)t + \tilde{p}_2(J), \quad p_3(t) = \tilde{p}_4(J)t + \tilde{p}_3(J), \quad p_4(t) = \tilde{p}_4(J). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Все компоненты гладкого C -инвариантного тензора $P^{\alpha\beta}$ ограничены по модулю на любом торе (2.4). Решения (7.5) ограничены при всех t тогда и только тогда, если

$$\tilde{p}_2(J) = -\tilde{p}_3(J), \quad \tilde{p}_4(J) = 0.$$

Следовательно, используя (7.5) и тот факт, что общие траектории невырожденных интегрируемых систем (1.1), (2.6) всюду плотны на торах $\mathbb{T}^k$, мы получаем блочную структуру (7.2).

II. Скобкой Схоутена двух кососимметричных тензоров P и Q типа $(2, 0)$ называется кососимметричный тензор типа $(3, 0)$, компоненты которого имеют вид

$$2[P, Q]^{\alpha\beta\gamma} = P_{,\tau}^{\alpha\beta} Q^{\tau\gamma} + P_{,\tau}^{\beta\gamma} Q^{\tau\alpha} + P_{,\tau}^{\gamma\alpha} Q^{\tau\beta} + Q_{,\tau}^{\alpha\beta} P^{\tau\gamma} + Q_{,\tau}^{\beta\gamma} P^{\tau\alpha} + Q_{,\tau}^{\gamma\alpha} P^{\tau\beta}. \quad (7.6)$$

Тензор $P^{\alpha\beta}$ типа $(2, 0)$ называется *пуассоновой структурой*, если он кососимметричен, $P^{\alpha\beta} = -P^{\beta\alpha}$, и его скобка Схоутена с самим собой равна нулю

$$[P, P]^{\alpha\beta\gamma} = P_{,\tau}^{\alpha\beta} P^{\tau\gamma} + P_{,\tau}^{\beta\gamma} P^{\tau\alpha} + P_{,\tau}^{\gamma\alpha} P^{\tau\beta} = 0. \quad (7.7)$$

Две пуассоновы структуры P и Q называются *совместимыми* в смысле Магри [19], если их скобка Схоутена равна нулю $[P, Q] = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Тензор $P^{\alpha\beta}$ типа $(2, 0)$ является C -инвариантной пуассоновой структурой тогда и только тогда, если он имеет блочную структуру (7.2) в координатах (2.7) и $k \times k$ матрицы $p(J)$ и $p_1(J)$ удовлетворяют уравнениям

$$p^t = p, \quad p_1^t = -p_1, \quad (7.8)$$

$$p_{,m}^{ij} p^{m\ell} = p_{,m}^{i\ell} p^{mj}, \quad (7.9)$$

$$p_{1,m}^{ij} p^{m\ell} + p_{1,m}^{j\ell} p^{mi} + p_{1,m}^{\ell i} p^{mj} = 0. \quad (7.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (7.8) следуют из (7.2) и уравнений $P^{\alpha\beta} = -P^{\beta\alpha}$. Формулы (7.9) эквивалентны (7.7) для индексов $(\alpha, \beta, \gamma) = (i, j + k, \ell + k)$. Для остальных значений индексов $(\alpha, \beta, \gamma) = (i, j, \ell)$ или $(\alpha, \beta, \gamma) = (i, j, \ell + k)$, формулы (7.7) справедливы тождественно для любых тензоров (7.2).

III. ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 4. 1) Любые две симметрии U и U_1 C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) и любой C -инвариантный тензор P типа $(2, 0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\text{rank}(L_U P) \leq k, \quad L_{U_1} L_U P = 0. \quad (7.11)$$

2) Любой C -инвариантный тензор P типа $(2, 0)$ аннулирует любые две C -инвариантные 1-формы θ_1, θ_2 : $P(\theta_1, \theta_2) = 0$.

3) Любой C -инвариантный тензор P типа $(2, 0)$ и любая симметрия U удовлетворяют уравнению

$$[L_U P, L_U P] = 0. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) означает, что кососимметричный тензор $L_U P$ типа $(2, 0)$ является (C -инвариантной) пуассоновой структурой. Если тензор P типа $(2, 0)$ является пуассоновой структурой, то P и $L_U P$ совместимы в смысле Магри.

4) Для любых двух C -инвариантных кососимметричных тензоров P и Q типа $(2, 0)$ и любых двух симметрий U и U_1 кососимметричные тензоры $L_U P$ и $L_{U_1} Q$ типа $(2, 0)$ являются пуассоновыми структурами и совместимы в смысле Магри.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Производная Ли $L_U P$ имеет вид

$$(L_U P)^{\alpha\beta} = \dot{P}^{\alpha\beta} - U_{,\gamma}^{\alpha} P^{\gamma\beta} - U_{,\gamma}^{\beta} P^{\alpha\gamma}. \quad (7.13)$$

Используя формулы (2.16) и (7.2), мы получаем, что тензор (7.13) имеет блочную структуру

$$(L_U P)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{p}_1(J) \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

где $\tilde{p}_1(J)^{ij} = U_{,\ell}^{i+k} p(J)^{\ell,j+k} - U_{,\ell}^{j+k} p(J)^{i+k,\ell}$. Отсюда следует первое уравнение (7.11). Применяя производную Ли L_{U_1} к тензору $L_U P$ (7.14) типа $(2, 0)$, мы выводим второе уравнение (7.11).

2) Уравнение $P(\theta_1, \theta_2) = 0$ следует из формул (3.2) и (7.2).

3) Используя формулу (7.14), легко убедиться, что кососимметричный C -инвариантный $(2, 0)$ тензор $L_U P$ удовлетворяет уравнениям (7.8)–(7.10). Вследствие предложения 7.2, тензор $L_U P$ типа $(2, 0)$ является пуассоновой структурой. Поэтому (7.12) справедливо. Если тензор P является пуассоновой структурой, то, применяя производную Ли к скобке Схоутена (7.7), мы получаем

$$L_U[P, P] = 2[L_U P, P] = 0.$$

Следовательно, две пуассоновы структуры P и $L_U P$ совместимы в смысле Магри.

4) Кососимметричные тензоры $L_U P$ и $L_{U_1} Q$ типа $(2, 0)$ являются пуассоновыми структурами вследствие (7.12). Формулы (7.6) и (7.14) приводят к уравнению

$$[L_U P, L_{U_1} Q] = 0.$$

Поэтому две пуассоновы структуры $L_U P$ и $L_{U_1} Q$ совместимы по Магри.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть P является произвольной (возможно вырожденной) пуассоновой структурой на многообразии M^{2k} . Если гамильтонова система

$$\dot{x}^{\alpha} = P^{\alpha\beta} H_{,\beta} \quad (7.15)$$

является C -интегрируемой и невырожденной по отношению к некоторой другой пуассоновой структуре P_1 , то для любой ее симметрии U справедливы уравнения

$$[L_U P, L_U P] = 0, \quad [L_U P, P] = 0, \quad L_U L_U P = 0, \quad \text{rank}(L_U P) \leq k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гамильтонова система (7.15) сохраняет пуассонову структуру P . Поэтому представленные уравнения следуют из доказанной выше теоремы 1, часть 4.

Любой C -инвариантный тензор P типа $(2, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$P(Du^*, v^*) + P(u^*, Dv^*) = 0 \quad (7.16)$$

для любых двух ковекторов $u^*, v^* \in T_x^*(M^n)$. Действительно, уравнение (7.16) следует из формул (2.13), (3.2) и (7.2).

§ 8. Характеристический многочлен любого C -инвариантного тензора типа $(1, 1)$ является полным квадратом

I. Представим тензор $A_\beta^\alpha(J, \varphi)$ типа $(1, 1)$ в блочном виде

$$A_\beta^\alpha(J, \varphi) = \begin{pmatrix} B_2 & B_4 \\ B_1 & B_3 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

в тороидальных координатах (2.7). Здесь $B_1, B_2, B_3, B_4(J, \varphi)$ – матрицы размера $k \times k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Тензор $A_\beta^\alpha(J, \varphi)$ типа $(1, 1)$ тогда и только тогда является инвариантным по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1), если он имеет блочный вид*

$$A_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} B(J) & 0 \\ \sigma(J) & B(J) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

в координатах (2.7). Здесь $B(J)$ и $\sigma(J)$ – произвольные $k \times k$ матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение инвариантности $L_V A = 0$ для тензора $A_\beta^\alpha(J, \varphi)$ (8.1) типа $(1, 1)$ имеет вид

$$(L_V A)_\beta^\alpha = \dot{A}_\beta^\alpha - V_{,\gamma}^\alpha A_\beta^\gamma + V_{,\beta}^\gamma A_\gamma^\alpha = 0. \quad (8.3)$$

Используя формулы (8.1) и (3.4), мы находим, что уравнение инвариантности (8.3) эквивалентно следующей линейной динамической системе в пространстве матриц

$$\dot{B}_1 = B_2 - B_3, \quad \dot{B}_2 = -B_4, \quad \dot{B}_3 = B_4, \quad \dot{B}_4 = 0. \quad (8.4)$$

Эта система очевидно имеет верхне-треугольную структуру. Вследствие (2.8), решения уравнения (8.4) имеют вид

$$\begin{aligned} B_1(t) &= -\tilde{B}_4(J)t^2 + (\tilde{B}_2(J) - \tilde{B}_3(J))t + \tilde{B}_1(J), \\ B_2(t) &= -\tilde{B}_4(J)t + \tilde{B}_2(J), \quad B_3(t) = \tilde{B}_4(J)t + \tilde{B}_3(J), \quad B_4(t) = \tilde{B}_4(J). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Все компоненты гладкого инвариантного $(1, 1)$ тензора $A_\beta^\alpha(J, \varphi)$ ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$ (2.4). Решения (8.5) ограничены при всех t тогда и только тогда, если

$$\tilde{B}_2(J) = \tilde{B}_3(J), \quad \tilde{B}_4(J) = 0.$$

Поэтому, используя тот факт, что общие траектории интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы $(1, 1)$ всюду плотны на торах $\mathbb{T}^k$, мы получаем, что любой C -инвариантный тензор A_β^α типа $(1, 1)$ имеет блочный вид (8.2).

II. ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 5. 1) Если тензор $A_\beta^\alpha(x)$ типа $(1, 1)$ является C -инвариантным по отношению к C -интегрируемой гамильтоновой системе $(1, 1)$, то его характеристический многочлен

$$P(\lambda, x) = \det \|A(x) - \lambda\| \quad (8.6)$$

является полным квадратом

$$P(\lambda, x) = Q^2(\lambda, x). \quad (8.7)$$

Все собственные значения любого C -инвариантного тензора типа $(1, 1)$ имеют четные кратности.

2) Любые две симметрии U и U_1 C -интегрируемой гамильтоновой системы (1.1) и любой C -инвариантный тензор $A(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$(L_U A)^2 = 0, \quad \text{rank}(L_U A) \leq k, \quad L_{U_1} L_U A = 0. \quad (8.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Характеристический многочлен (8.6) является инвариантом тензора A_β^α типа $(1, 1)$ и не зависит от выбора локальных координат. Используя блочную структуру (8.2) C -инвариантного тензора A_β^α типа $(1, 1)$ в торoidalных координатах (2.7), мы получаем формулу (8.7), где

$$Q(\lambda, x) = \det \|B(J) - \lambda\|.$$

Формула (8.7) доказывает, что каждый корень многочлена $P(\lambda, x)$ или каждое собственное значение тензора A_β^α типа $(1, 1)$ имеют четную кратность.

2) Производная Ли $L_U A$ имеет следующие компоненты

$$(L_U A)_\beta^\alpha = \dot{A}_\beta^\alpha - U_{,\gamma}^\alpha A_\beta^\gamma + U_{,\beta}^\gamma A_\gamma^\alpha. \quad (8.9)$$

Используя формулы (2.16) и (8.2), мы получаем, что тензор (8.9) типа $(1, 1)$ имеет блочную структуру

$$L_U A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

где $k \times k$ матрица $C(J)$ имеет компоненты $C_j^i = B_\ell^i U_{,j}^{\ell+k} - U_{,\ell}^{i+k} B_j^\ell$. Тензор (8.10) типа $(1, 1)$ очевидно удовлетворяет первому и второму уравнениям (8.8).

Применяя производную Ли L_{U_1} к тензору $L_U A$ (8.10) типа $(1, 1)$, мы выводим третье уравнение (8.8).

СЛЕДСТВИЕ 8.1. 1) Нильпотентный тензор D (2.12) типа $(1, 1)$ является C -инвариантным.

2) Любой C -инвариантный тензор A типа $(1, 1)$ коммутирует с нильпотентным тензором D (2.12)

$$AD = DA. \quad (8.11)$$

Распределение $\mathcal{L}_x = T_x(\mathbb{T}^k)$ (2.5) инвариантно по отношению к любому C -инвариантному тензору A типа $(1, 1)$:

$$A(\mathcal{L}_x) \subset \mathcal{L}_x. \quad (8.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Формулы (2.12) означают что тензор D типа $(1, 1)$ имеет блочную структуру (8.2), где $B(J) = 0$ и $\sigma(J) = 1$. Поэтому инвариантность тензора D следует из предложения 8.1.

2) Уравнения (8.11) и (8.12) следуют из блочной структуры (8.2) и формул (2.12).

§9. Тензор Нейенхейса и C -инвариантные тензоры типа $(1, 2)$

I. Тензор Нейенхейса $N_{A\beta\gamma}^\alpha$ типа $(1, 2)$ определяется формулой [14]

$$N_{A\beta\gamma}^\alpha = A_{\gamma,\tau}^\alpha A_\beta^\tau - A_{\beta,\tau}^\alpha A_\gamma^\tau + (A_{\beta,\gamma}^\tau - A_{\gamma,\beta}^\tau) A_\tau^\alpha. \quad (9.1)$$

Тензор Нейенхейса N_A является C -инвариантным, если тензор A типа $(1, 1)$ C -инвариантен. Тензор Нейенхейса N_A обладает замечательными алгебраическими свойствами, которые могут быть выведены прямым вычислением, используя определение этого тензора (9.1) и формулу (8.2). Это вычисление показывает, что основные алгебраические свойства тензора Нейенхейса N_A являются проявлениями общих алгебраических свойств всех C -инвариантных тензоров $N_{\beta\gamma}^\alpha$ типа $(1, 2)$.

II. Любой тензор $N_{\beta\gamma}^\alpha$ типа $(1, 2)$ определяет билинейное произведение касательных векторов $u, v \in T_x(M^n)$

$$(N(u, v))^\alpha = N_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta v^\gamma \in T_x(M^n). \quad (9.2)$$

Эта формула определяет некоторую алгебраическую структуру в касательном пространстве $T_x(M^n)$.

Мы объединяем компоненты тензора $N_{\beta\gamma}^\alpha(J, \varphi)$ в тороидальных координатах J_i, φ_i (2.7) в следующие восемь групп

$$\begin{aligned} N_{j\ell}^{i+k} &= N_{1j\ell}^i, & N_{j+k.\ell}^{i+k} &= N_{2j\ell}^i, & N_{j.\ell+k}^{i+k} &= N_{3j\ell}^i, & N_{j\ell}^i &= N_{4j\ell}^i, \\ N_{j+k.\ell}^i &= N_{5j\ell}^i, & N_{j.\ell+k}^i &= N_{6j\ell}^i, & N_{j+k.\ell+k}^{i+k} &= N_{7j\ell}^i, & N_{j+k.\ell+k}^i &= N_{8j\ell}^i, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где индексы i, j, ℓ изменяются между 1 и k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Тензор $N_{\beta\gamma}^\alpha(J, \varphi)$ типа $(1, 2)$ является инвариантным по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1) тогда и только тогда, если все компоненты (9.3) зависят только от переменных J_i и справедливы уравнения*

$$N_4(J) = N_2(J) + N_3(J), \quad N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 0. \quad (9.4)$$

Компоненты групп $N_1(J), N_2(J)$ и $N_3(J)$ являются произвольными гладкими функциями от $J_1, \dots, J_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение инвариантности $L_V N = 0$ для тензора $N_{\beta\gamma}^\alpha(J, \varphi)$ типа $(1, 2)$ имеет вид

$$(L_V N)_{\beta\gamma}^\alpha = \dot{N}_{\beta\gamma}^\alpha - V_{,\tau}^\alpha N_{\beta\gamma}^\tau + V_{,\beta}^\tau N_{\tau\gamma}^\alpha + V_{,\gamma}^\tau N_{\beta\tau}^\alpha = 0. \quad (9.5)$$

Подставляя формулы (3.4) и (9.3), мы находим, что уравнения (9.5) эквивалентны следующей линейной динамической системе в пространстве тензоров N_a , $a = 1, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= N_4 - N_2 - N_3, & \dot{N}_2 &= N_5 - N_7, & \dot{N}_3 &= N_6 - N_7, \\ \dot{N}_4 &= -N_5 - N_6, & \dot{N}_5 &= -N_8, & \dot{N}_6 &= -N_8, & \dot{N}_7 &= N_8, & \dot{N}_8 &= 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Используя очевидную верхнетреугольную структуру системы (9.6) и основное свойство первых интегралов (2.8), мы получаем явные формулы для всех решений системы (9.6):

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= \tilde{N}_8(J)t^3 + (\tilde{N}_7(J) - \tilde{N}_5(J) - \tilde{N}_6(J))t^2 \\
&\quad + (\tilde{N}_4(J) - \tilde{N}_2(J) - \tilde{N}_3(J))t + \tilde{N}_1(J), \\
N_2(t) &= -\tilde{N}_8(J)t^2 + (\tilde{N}_5(J) - \tilde{N}_7(J))t + \tilde{N}_2(J), \\
N_3(t) &= -\tilde{N}_8(J)t^2 + (\tilde{N}_6(J) - \tilde{N}_7(J))t + \tilde{N}_3(J), \\
N_4(t) &= \tilde{N}_8(J)t^2 - (\tilde{N}_5(J) + \tilde{N}_6(J))t + \tilde{N}_4(J), \\
N_5(t) &= -\tilde{N}_8(J)t + \tilde{N}_5(J), \quad N_6(t) = -\tilde{N}_8(J)t + \tilde{N}_6(J), \\
N_7(t) &= -\tilde{N}_8(J)t + \tilde{N}_7(J), \quad N_8(t) = \tilde{N}_8(J),
\end{aligned} \tag{9.7}$$

где $\tilde{N}_a(J)$ являются произвольными гладкими функциями от $J_1, \dots, J_k$.

Компоненты $N_{\beta\gamma}^\alpha(J, \varphi)$ любого гладкого C -инвариантного тензора типа (1, 2) ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$ (2.4). Решения (9.7) ограничены при всех t тогда и только тогда, если выполнены уравнения (9.4). Поэтому, используя тот факт, что общие траектории интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) всюду плотны на торах $\mathbb{T}^k$, мы получаем, что все компоненты $N_{\beta\gamma}^\alpha$ зависят только от переменных J_i и удовлетворяют уравнениям (9.4).

III. Для любого касательного вектора $u \in T_x(M^n)$, мы определяем линейный оператор

$$N_u : T_x(M^n) \rightarrow T_x(M^n), \quad N_u w = N(u, w). \tag{9.8}$$

В статье [3], мы ввели следующую полиномиально-значную функцию на касательном расслоении $T(M^n)$

$$P_N(u, \lambda) = \det(N_u - \lambda). \tag{9.9}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. *Любой C -инвариантный тензор N типа (1, 2) обладает следующими свойствами.*

1) *Линейные k -мерные подпространства $\mathcal{L}_x$ (2.5) являются коммутативными идеалами по отношению к алгебраическим структурам (9.2):*

$$N(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_x) = 0, \quad N(T_x(M^n), \mathcal{L}_x) \subset \mathcal{L}_x, \quad N(\mathcal{L}_x, T_x(M^n)) \subset \mathcal{L}_x. \tag{9.10}$$

2) *Многочлен $P_N(u, \lambda)$ приводим и является произведением двух многочленов степени k . Справедливы тождества*

$$P_N(u + v, \lambda) = P_N(u, \lambda), \quad P_N(v, \lambda) = \lambda^n \tag{9.11}$$

для произвольных касательных векторов $u \in T_x(M^n)$ и $v \in \mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_x = T_x(\mathbb{T}^k) \subset T_x(M^n)$.

3) *Нильпотентный C -инвариантный (1, 1) тензор D (2.12) является дифференцированием C -инвариантной алгебраической структуры (9.2), что означает справедливость тождества*

$$DN(u, v) = N(Du, v) + N(u, Dv) \tag{9.12}$$

для любых касательных векторов $u, v \in T_x(M^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Касательные векторы $u \in T_x(M^n)$ и $v \in \mathcal{L}_x$ имеют вид

$$u = u^\alpha e_\alpha, \quad v = v^{i+k} e_{i+k} \quad (9.13)$$

в базисе (2.9). Поэтому формулы (9.10) являются прямым следствием последних четырех уравнений (9.4).

2) Из формулы (9.10) следует, что линейные операторы N_{e_α} (9.8) имеют следующую $k \times k$ блочную структуру

$$N_{e_i} = \begin{pmatrix} V_i & 0 \\ U_i & W_i \end{pmatrix}, \quad N_{e_{i+k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу $u = u^i e_i + u^{i+k} e_{i+k}$, мы получаем

$$P_N(u, \lambda) = \det(u^i V_i - \lambda) \det(u^i W_i - \lambda), \quad (9.14)$$

где $i = 1, \dots, k$. Эта формула представляет многочлен $P_N(u, \lambda)$ в виде произведения двух сомножителей степени k . Тожества (9.11) следуют из (9.13) и (9.14).

3) Тожество (9.12) эквивалентно (9.4). Действительно, эта эквивалентность легко проверяется в базисе (2.9).

ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 6. 1) Любые две симметрии U и U_1 C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) и любые C -инвариантные 1-форма θ и тензор $N_{\beta\gamma}^\alpha$ типа (1, 2) удовлетворяют уравнениям

$$N_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta U_1^\gamma = 0, \quad N_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta \theta_\alpha = 0, \quad L_{U_1} L_U N = 0. \quad (9.15)$$

2) C -инвариантный тензор $(A_U)^\alpha_\beta = N_{\beta\tau}^\alpha U^\tau$ и тензор $(N_\theta)_{\beta\gamma} = N_{\beta\gamma}^\tau \theta_\tau$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rank } \|A_U\| &\leq k, & A_U^2 &= 0, & L_{U_1} A_U &= 0, \\ \text{rank } \|N_\theta\| &\leq k, & L_U N_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

3) Тензор $\tilde{N} = L_U N$ типа (1, 2) определяет нильпотентную алгебраическую структуру в касательном пространстве $T(M^n)$: уравнения

$$\tilde{N}(\tilde{N}(u, v), w) = 0, \quad \tilde{N}(u, \tilde{N}(v, w)) = 0 \quad (9.17)$$

справедливы для любых касательных векторов $u, v, w \in T_x(M^n)$.

4) Многочлен $P_N(u, \lambda)$ (9.9) удовлетворяет уравнениям

$$P_N(u + U, \lambda) = P_N(u, \lambda), \quad P_N(U, \lambda) = \lambda^n$$

для любого касательного вектора $u \in T_x(M^n)$ и любой симметрии U . Многочлен $P_N(u, \lambda)$ приводим и является произведением двух многочленов степени k .

5) Для любых двух C -инвариантных тензоров M и N типа (1, 2) и любой симметрии U , тензор $h_{\alpha\beta} = M_{\alpha\nu}^\tau N_{\beta\tau}^\nu$ типа (0, 2) удовлетворяет уравнениям

$$\text{rank } \|h\| \leq k, \quad h_{\alpha\beta} U^\beta = 0, \quad L_U h = 0. \quad (9.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первое уравнение (9.15) следует из первого уравнения (9.10), так как любая симметрия U (2.15) принадлежит распределению $\mathcal{L}_x$ (2.5). Второе уравнение (9.15) следует из формул (2.15), (3.2) и (9.4).

Используя предложение 9.1 и формулы (2.16), (2.18) и (9.5), мы получаем, что все ненулевые компоненты тензора $L_U N$ типа $(1, 2)$ имеют вид

$$(L_U N)_{j\ell}^{i+k} = U_{,j}^{m+k} N_{m+k,\ell}^{i+k} + U_{,\ell}^{m+k} N_{j,m+k}^{i+k} - U_{,m}^{i+k} N_{j\ell}^m. \quad (9.19)$$

Поэтому только первая группа (9.3) компонент тензора $\tilde{N} = L_U N$ является ненулевой. Применяя формулу (9.19) к тензору $L_{U_1} \tilde{N} = L_{U_1} L_U N$ типа $(1, 2)$, мы получаем третье уравнение (9.15).

2) Вследствие формул (2.15) и (3.2) для симметрий U и для C -инвариантных 1-форм θ , и формул (9.3), (9.4), все ненулевые компоненты тензора A_U типа $(1, 1)$ и тензора N_θ типа $(0, 2)$ имеют вид

$$A_{U,j}^{i+k} = N_{j,\ell+k}^{i+k} U^{\ell+k}, \quad N_{\theta,ij} = N_{ij}^\ell \theta_\ell. \quad (9.20)$$

Отсюда следуют алгебраические уравнения (9.16). Применяя формулы (4.9) и (8.9) к тензорам (9.20), мы выводим уравнения $L_{U_1} A_U = 0$, $L_U N_\theta = 0$.

3) Мы показали, что все компоненты тензора $\tilde{N} = L_U N$ типа $(1, 2)$, за исключением $(L_U N)_{j\ell}^{i+k}$, равны нулю. Этот факт означает, что тензор $\tilde{N}$ типа $(1, 2)$ удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{N}(T_x(M^n), T_x(M^n)) \subset \mathcal{L}_x, \quad \tilde{N}(\mathcal{L}_x, T_x(M^n)) = \tilde{N}(T_x(M^n), \mathcal{L}_x) = 0.$$

Отсюда следуют уравнения (9.17).

4) Утверждение 4) следует из утверждения 2) предложения 9.2, поскольку векторное поле любой симметрии U принадлежит распределению $\mathcal{L}_x = T_x(\mathbb{T}^k)$.

5) Используя формулы (9.3) и (9.4) для любых C -инвариантных тензоров M и N типа $(1, 2)$, легко проверить, что все ненулевые компоненты тензора h типа $(0, 2)$ имеют вид

$$h_{ij} = M_{i,m}^\ell N_{j,\ell}^m + M_{i,m+k}^{\ell+k} N_{j,\ell+k}^{m+k}. \quad (9.21)$$

Отсюда следует первое неравенство (9.18). Второе уравнение (9.18) следует из выражений (2.15) для симметрии U и (9.21). Применяя формулу Лейбница, мы получаем

$$(L_U h)_{\alpha\beta} = (L_U M)_{\alpha\nu}^\tau N_{\beta\tau}^\nu + M_{\alpha\nu}^\tau (L_U N)_{\beta\tau}^\nu. \quad (9.22)$$

Используя формулы (9.19) для ненулевых компонент тензоров $L_U M$ и $L_U N$, и формулы (9.3), (9.4), мы находим, что обе суммы в (9.22) равны нулю. Поэтому $L_U h = 0$ для любой симметрии U .

§ 10. Замкнутые дифференциальные 3-формы и C -инвариантные $(0, 3)$ тензоры

I. Мы объединяем компоненты $T_{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ тензора T типа $(0, 3)$ в следующие восемь групп

$$\begin{aligned} T_{ij\ell} &= T_{1ij\ell}, & T_{i+k,j,\ell} &= T_{2ij\ell}, & T_{i,j+k,\ell} &= T_{3ij\ell}, \\ T_{i,j,\ell+k} &= T_{4ij\ell}, & T_{i+k,j,\ell+k} &= T_{5ij\ell}, & T_{i+k,j+k,\ell} &= T_{6ij\ell}, \\ T_{i,j+k,\ell+k} &= T_{7ij\ell}, & T_{i+k,j+k,\ell+k} &= T_{8ij\ell}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

где индексы i, j, ℓ изменяются между 1 и k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. *Тензор $T_{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ типа $(0, 3)$ тогда и только тогда является инвариантным по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1), если все компоненты (10.1) зависят только от переменных J_i и справедливы уравнения*

$$T_2(J) + T_3(J) + T_4(J) = 0, \quad T_5 = T_6 = T_7 = T_8 = 0. \quad (10.2)$$

Компоненты $T_1(J)$, $T_2(J)$ и $T_3(J)$ являются произвольными гладкими функциями переменных $J_1, \dots, J_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение инвариантности $L_V T = 0$ для тензора $T_{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ типа $(0, 3)$ имеет вид

$$(L_V T)_{\alpha\beta\gamma} = \dot{T}_{\alpha\beta\gamma} + V_{,\alpha}^\tau T_{\tau\beta\gamma} + V_{,\beta}^\tau T_{\alpha\tau\gamma} + V_{,\gamma}^\tau T_{\alpha\beta\tau} = 0. \quad (10.3)$$

Используя формулы (3.4) и (10.1), мы получаем, что уравнения (10.3) эквивалентны следующей линейной динамической системе в пространстве тензоров T_a , $a = 1, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= -T_2 - T_3 - T_4, & \dot{T}_2 &= -T_5 - T_6, & \dot{T}_3 &= -T_6 - T_7, \\ \dot{T}_4 &= -T_5 - T_7, & \dot{T}_5 &= -T_8, & \dot{T}_6 &= -T_8, & \dot{T}_7 &= -T_8, & \dot{T}_8 &= 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Вследствие основного свойства первых интегралов (2.8) и верхне-треугольной структуры системы (10.4), все решения (10.4) определяются формулами

$$\begin{aligned} T_1(t) &= -\tilde{T}_8(J)t^3 + (\tilde{T}_5(J) + \tilde{T}_6(J) + \tilde{T}_7(J))t^2 \\ &\quad - (\tilde{T}_2(J) + \tilde{T}_3(J) + \tilde{T}_4(J))t + \tilde{T}_1(J), \\ T_2(t) &= \tilde{T}_8(J)t^2 - (\tilde{T}_5(J) + \tilde{T}_6(J))t + \tilde{T}_2(J), \\ T_3(t) &= \tilde{T}_8(J)t^2 - (\tilde{T}_6(J) + \tilde{T}_7(J))t + \tilde{T}_3(J), \\ T_4(t) &= \tilde{T}_8(J)t^2 - (\tilde{T}_5(J) + \tilde{T}_7(J))t + \tilde{T}_4(J), \\ T_5(t) &= -\tilde{T}_8(J)t + \tilde{T}_5(J), & T_6(t) &= -\tilde{T}_8(J)t + \tilde{T}_6(J), \\ T_7(t) &= -\tilde{T}_8(J)t + \tilde{T}_7(J), & T_8(t) &= \tilde{T}_8(J), \end{aligned} \quad (10.5)$$

где $\tilde{T}_a(J)$ являются произвольными гладкими функциями переменных $J_1, \dots, J_k$.

Все компоненты $T_{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ гладкого C -инвариантного тензора T типа $(0, 3)$ ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$ (2.4). Решения (10.5) ограничены при всех t тогда и только тогда, если справедливы уравнения (10.2). Поэтому, используя тот факт, что общие траектории интегрируемой невырожденной системы (1.1) всюду плотны на торах $\mathbb{T}^k$, мы получаем, что все компоненты $T_{\alpha\beta\gamma}$ зависят только от переменных J_i и удовлетворяют уравнениям (10.2).

Уравнения (10.2) означают, что C -инвариантные тензоры $T_{\alpha\beta\gamma}$ типа $(0, 3)$ соответствуют особым точкам системы (10.4). Прямая проверка показывает, что уравнения (10.2) эквивалентны тождеству

$$T(Du, v, w) + T(u, Dv, w) + T(u, v, Dw) = 0,$$

где $u, v, w \in T_x(M^n)$ – произвольные касательные векторы и D – нильпотентный тензор (2.12) типа $(1, 1)$.

II. СЛЕДСТВИЕ 10.1. *Любая C -инвариантная дифференциальная 3-форма ω_3 имеет вид*

$$\omega_3 = b_{i\ell m}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge d\varphi_m + c_{i\ell m}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m, \quad (10.6)$$

где коэффициенты $b_{i\ell m}(J)$ удовлетворяют уравнениям

$$b_{i\ell m}(J) + b_{\ell m i}(J) + b_{m i \ell}(J) = 0, \quad b_{i\ell m}(J) = -b_{\ell i m}(J) \quad (10.7)$$

и коэффициенты $c_{i\ell m}(J)$ являются знакопеременными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (10.6) и (10.7) следуют из (10.2) для любого C -инвариантного тензора типа $(0, 3)$ и из определения дифференциальных 3-форм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. 1) *Замкнутая дифференциальная 3-форма ω_3 тогда и только тогда инвариантна по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1), если она имеет вид*

$$\omega_3 = d\left(\frac{\partial B_i(J)}{\partial J_m} + b_{im}(J)\right) \wedge dJ_i \wedge d\varphi_m + d(a_{i\ell}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell) \quad (10.8)$$

в тороидальных координатах (2.7). Здесь коэффициенты $a_{i\ell}(J)$ и $b_{im}(J)$ удовлетворяют уравнениям

$$a_{i\ell}(J) = -a_{\ell i}(J), \quad b_{im}(J) = b_{mi}(J) \quad (10.9)$$

и $B_i(J)$ – произвольные гладкие функции переменных $J_1, \dots, J_k$.

2) *Справедливо уравнение $\omega_3 = d\tilde{\omega}_2$, где*

$$\tilde{\omega}_2 = \left(\frac{\partial B_i(J)}{\partial J_m} + \frac{\partial B_m(J)}{\partial J_i} + b_{im}(J)\right) dJ_i \wedge d\varphi_m + a_{i\ell}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell \quad (10.10)$$

является C -инвариантной 2-формой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Производная Ли от замкнутой 3-формы (10.8) по отношению к динамической системе (2.6) имеет вид

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\partial^2 B_i(J)}{\partial J_m \partial J_\ell} dJ_\ell \wedge dJ_i \wedge dJ_m + db_{im}(J) \wedge dJ_i \wedge dJ_m = 0.$$

Это выражение равно нулю ввиду кососимметричности внешнего произведения и симметричности смешанных вторых производных от функции $B_i(J)$ и симметричности коэффициентов $b_{im}(J)$ (10.9). Поэтому замкнутая 3-форма (10.8) является C -инвариантной.

Следствие 10.1 показывает, что любая C -инвариантная дифференциальная 3-форма ω_3 имеет вид (10.6). Уравнение $d\omega_3 = 0$ эквивалентно $k + 1$ уравнениям

$$\begin{aligned} d(b_{i\ell m}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell) &= 0, \quad m = 1, \dots, k, \\ d(c_{i\ell m}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m) &= 0. \end{aligned}$$

Применяя лемму Пуанкаре, мы получаем

$$b_{i\ell m}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell = d(c_{im}(J)dJ_i), \quad m = 1, \dots, k, \quad (10.11)$$

$$c_{i\ell m}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m = d(a_{i\ell}(J)dJ_i \wedge dJ_\ell), \quad (10.12)$$

где $c_{im}(J)$ и $a_{i\ell}(J) = -a_{\ell i}(J)$ являются гладкими функциями. После подстановки формул (10.11) в (10.6), уравнение инвариантности $\dot{\omega}_3 = 0$ принимает вид

$$\dot{\omega}_3 = d(c_{im}(J)dJ_i \wedge dJ_m) = 0.$$

Используя лемму Пуанкаре, мы получаем

$$c_{im}(J)dJ_i \wedge dJ_m = -d(B_i(J)dJ_i), \quad (10.13)$$

где $B_i(J)$ – некоторые гладкие функции. Общее решение уравнения (10.13) имеет вид

$$c_{im}(J) = \frac{\partial B_i(J)}{\partial J_m} + b_{im}(J), \quad b_{im}(J) = b_{mi}(J), \quad (10.14)$$

где $b_{im}(J)$ – произвольные гладкие функции от $J_1, \dots, J_k$. Теперь формула (10.8) следует из (10.6), (10.11), (10.12) и (10.14) прямой подстановкой.

2) Уравнение $\omega_3 = d\tilde{\omega}_2$ легко выводится из (10.10). C -инвариантность 2-формы $\tilde{\omega}_2$ следует из формулы для производной Ли $L_V \tilde{\omega}_2$:

$$\begin{aligned} L_V \tilde{\omega}_2 &= \dot{\tilde{\omega}}_2 = \left(\frac{\partial B_i(J)}{\partial J_m} + \frac{\partial B_m(J)}{\partial J_i} + b_{im}(J) \right) dJ_i \wedge dJ_m \\ &= dJ_i \wedge dB_i(J) + dB_m(J) \wedge dJ_m + b_{im}(J)dJ_i \wedge dJ_m. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Первая и вторая суммы в правой части (10.15) сокращаются. Третья сумма в (10.15) равна нулю ввиду симметричности коэффициентов $b_{im}(J)$ и кососимметричности внешнего произведения $dJ_i \wedge dJ_m$. Отсюда мы получаем $L_V \tilde{\omega}_2 = 0$. Поэтому 2-форма $\tilde{\omega}_2$ является C -инвариантной.

Уравнение инвариантности

$$L_V \tilde{\omega}_2 = (i_V \circ d + d \circ i_V) \tilde{\omega}_2 = 0$$

и уравнение $\omega_3 = d\tilde{\omega}_2$ влекут

$$i_V \omega_3 = -d(i_V \tilde{\omega}_2).$$

Поэтому C -инвариантная 2-форма $i_V \omega_3$ является внешней производной C -инвариантной 1-формы $-i_V \tilde{\omega}_2$.

III. ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 7. 1) Любые две симметрии U и U_1 C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) и любой C -инвариантный тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ типа $(0, 3)$ удовлетворяют уравнениям

$$T_{\alpha\beta\gamma}U^\beta U_1^\gamma = 0, \quad L_{U_1}L_U T = 0. \quad (10.16)$$

2) C -инвариантный тензор $(T_U)_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta\gamma}U^\gamma$ типа $(0, 2)$ удовлетворяет уравнениям

$$\text{rank } \|T_U\| \leq k, \quad L_{U_1}T_U = 0. \quad (10.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первое уравнение (10.16) следует из предложения 10.1 и формулы (2.15) для симметрий U в тороидальных координатах (2.7).

Используя предложение 10.1 и формулы (2.16), (2.18) и (10.3), мы получаем, что все ненулевые компоненты тензора $L_U T$ типа $(0, 3)$ имеют вид

$$(L_U T)_{ij\ell} = U_{,i}^{m+k} T_{m+k,j,\ell} + U_{,j}^{m+k} T_{i,m+k,\ell} + U_{,\ell}^{m+k} T_{i,j,m+k}. \quad (10.18)$$

Поэтому только первая группа компонент (10.1) тензора $\tilde{T} = L_U T$ типа $(0, 3)$ отлична от нуля. Применяя формулы (10.18) к тензору $L_{U_1} \tilde{T} = L_{U_1} L_U T$, мы выводим второе уравнение (10.16).

2) Вследствие выражения (2.15) для симметрий U и формул (10.1), (10.2), все компоненты тензора T_U типа $(0, 2)$ имеют вид $T_{U,ij} = T_{i,j,\ell+k} U^{\ell+k}$. Отсюда следует первое уравнение (10.17). Применяя формулы (4.9) к тензору T_U , мы получаем второе уравнение (10.17).

§ 11. Скобки Схоутена и C -инвариантные тензоры типа $(3, 0)$

I. Любой тензор $R^{\alpha\beta\gamma}$ типа $(3, 0)$ определяет трилинейную функцию на кокасательном пространстве $T_x^*(M^n)$:

$$R(\zeta, \eta, \theta) = R^{\alpha\beta\gamma} \zeta_\alpha \eta_\beta \theta_\gamma.$$

Кососимметричные тензоры $R^{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ типа $(3, 0)$ имеют важные применения как скобки Схоутена двух общих пуассоновых структур.

Мы объединяем тензорные компоненты $R^{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ в тороидальных координатах J_i, φ_i (2.7) в следующие восемь групп

$$\begin{aligned} R^{i+k,j+k,\ell+k} &= R_1^{ijk}, \quad R^{i,j+k,\ell+k} = R_2^{ijk}, \\ R^{i+k,j+k,\ell} &= R_3^{ij\ell}, \quad R^{i+k,j,\ell+k} = R_4^{ij\ell}, \\ R^{i,j,\ell+k} &= R_5^{ij\ell}, \quad R^{i,j+k,\ell} = R_6^{ij\ell}, \quad R^{i+k,j,\ell} = R_7^{ij\ell}, \quad R^{ij\ell} = R_8^{ij\ell}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где индексы i, j и ℓ изменяются между 1 и k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. Тензор $R^{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ типа $(3, 0)$ тогда и только тогда инвариантен по отношению к C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системе (1.1), если все компоненты $R^{\alpha\beta\gamma}$ зависят только от переменных J_i и справедливы уравнения

$$R_4(J) = -R_2(J) - R_3(J), \quad R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 0. \quad (11.2)$$

Компоненты $R_1(J)$, $R_2(J)$ и $R_3(J)$ являются произвольными гладкими функциями переменных $J_1, \dots, J_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение инвариантности $L_V R = 0$ имеет вид

$$(L_V R)^{\alpha\beta\gamma} = \dot{R}^{\alpha\beta\gamma} - V_{,\tau}^\alpha R^{\tau\beta\gamma} - V_{,\tau}^\beta R^{\alpha\tau\gamma} - V_{,\tau}^\gamma R^{\alpha\beta\tau} = 0. \quad (11.3)$$

Подставляя формулы (3.4) и (11.1), мы получаем, что уравнения (11.3) эквивалентны следующей линейной динамической системе в пространстве тензоров R_a , $a = 1, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= R_2 + R_3 + R_4, & \dot{R}_2 &= R_5 + R_6, & \dot{R}_3 &= R_6 + R_7, \\ \dot{R}_4 &= R_5 + R_7, & \dot{R}_5 &= R_8, & \dot{R}_6 &= R_8, & \dot{R}_7 &= R_8, & \dot{R}_8 &= 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Используя очевидную верхнетреугольную структуру этой системы и основное свойство первых интегралов (2.8), мы представляем все решения уравнений (11.4) в явном виде:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \tilde{R}_8(J)t^3 + (\tilde{R}_5(J) + \tilde{R}_6(J) + \tilde{R}_7(J))t^2 \\ &\quad + (\tilde{R}_2(J) + \tilde{R}_3(J) + \tilde{R}_4(J))t + \tilde{R}_1(t), \\ R_2(t) &= \tilde{R}_8(J)t^2 + (\tilde{R}_5(J) + \tilde{R}_6(J))t + \tilde{R}_2(J), \\ R_3(t) &= \tilde{R}_8(J)t^2 + (\tilde{R}_6(J) + \tilde{R}_7(J))t + \tilde{R}_3(J), \\ R_4(t) &= \tilde{R}_8(J)t^2 + (\tilde{R}_5(J) + \tilde{R}_7(J))t + \tilde{R}_4(J), \\ R_5(t) &= \tilde{R}_8(J)t + \tilde{R}_5(J), & R_6(t) &= \tilde{R}_8(J)t + \tilde{R}_6(J), \\ R_7(t) &= \tilde{R}_8(J)t + \tilde{R}_7(J), & R_8(t) &= \tilde{R}_8(J), \end{aligned} \quad (11.5)$$

где $\tilde{R}_a(J)$ — произвольные гладкие функции переменных $J_1, \dots, J_k$.

C -инвариантный тензор $R^{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ типа $(3, 0)$ является гладким в любой тороидальной области $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$. Поэтому все компоненты $R^{\alpha\beta\gamma}(J, \varphi)$ ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$. Точные решения (11.5) ограничены при всех t тогда и только тогда, если справедливы уравнения (11.2). Поэтому, используя тот факт, что общие траектории интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) всюду плотны на торах $\mathbb{T}^k$ (2.4), мы получаем, что все компоненты $R^{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяют (11.2).

Уравнения (11.2) определяют особые точки динамической системы (11.4). Поэтому тензор $R^{\alpha\beta\gamma}$ (11.1) типа $(3, 0)$ является C -инвариантным тогда и только тогда, если функции $R_a(J)$ зависят только от переменных J_i и область их значений принадлежит особому множеству (11.2) динамической системы (11.4). Прямое вычисление доказывает, что уравнения (11.2) эквивалентны уравнению

$$R(D\zeta, \eta, \theta) + R(\zeta, D\eta, \theta) + R(\zeta, \eta, D\theta) = 0,$$

где D — C -инвариантный нильпотентный тензор (2.12), (2.13) типа $(1, 1)$ и ζ, η, θ — произвольные ковекторы.

II. ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 8. 1) Любые две симметрии U и U_1 C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1), любые две C -инвариантные 1-формы θ и η и любой C -инвариантный тензор $R^{\alpha\beta\gamma}$ типа $(3, 0)$ удовлетворяют уравнениям

$$R^{\alpha\beta\gamma}\theta_\beta\eta_\gamma = 0, \quad L_{U_1}L_U R = 0. \quad (11.6)$$

2) C -инвариантный тензор $R_\theta^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta\gamma}\theta_\gamma$ типа $(2, 0)$ удовлетворяет уравнениям

$$\text{rank } \|R_\theta\| \leq k, \quad L_U R_\theta = 0. \quad (11.7)$$

3) Для любых двух C -инвариантных тензоров R и T типа $(0, 3)$ и любой симметрии U , тензор $A_\beta^\alpha = R^{\alpha\tau\nu}T_{\beta\tau\nu}$ типа $(1, 1)$ удовлетворяет уравнениям

$$\text{rank } \|A\| \leq k, \quad A^2 = 0, \quad L_U A = 0. \quad (11.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первое уравнение (11.6) следует из предложения 11.1 и формул (3.2) для C -инвариантных 1-форм.

Вследствие предложения 10.1 и формул (2.16), (2.18) и (11.3), все ненулевые компоненты тензора $L_U R$ типа $(3, 0)$ имеют вид

$$(L_U R)^{i+k, j+k, \ell+k} = -U_{,m}^{i+k} R^{m, j+k, \ell+k} - U_{,m}^{j+k} R^{i+k, m, \ell+k} - U_{,m}^{\ell+k} R^{i+k, j+k, m}. \quad (11.9)$$

Поэтому только первая группа компонент (11.1) тензора $\tilde{R} = L_U R$ является ненулевой. Применяя формулу (11.9) к тензору $L_{U_1} \tilde{R} = L_{U_1} L_U R$ типа $(3, 0)$, мы получаем второе уравнение (11.6).

2) Вследствие формулы (3.2) для C -инвариантных 1-форм и формул (11.1), (11.2), мы получаем, что все ненулевые компоненты тензора R_θ типа $(2, 0)$ имеют вид $R_\theta^{i+k, j+k} = R^{i+k, j+k, \ell}\theta_\ell$. Отсюда следует первое уравнение (11.7). Второе уравнение (11.7) следует из (7.13).

3) Используя формулы (10.2) и (11.2), мы получаем, что все ненулевые компоненты тензора A типа $(1, 1)$ имеют вид

$$A_j^{i+k} = R^{i+k, \ell, m+k} T_{j, \ell, m+k} + R^{i+k, \ell+k, m} T_{j, \ell+k, m}.$$

Поэтому тензор A имеет блочную структуру (8.10). Отсюда следуют первые два уравнения (11.8). Применяя формулу Лейбница, мы находим

$$(L_U A)_\beta^\alpha = (L_U R)^{\alpha\tau\nu} T_{\beta\tau\nu} + R^{\alpha\tau\nu} (L_U T)_{\beta\tau\nu}. \quad (11.10)$$

Используя формулы (11.9) и (10.18) для ненулевых компонент тензоров $L_U R$ и $L_U T$, мы получаем, что обе суммы в (11.10) равны нулю. Следовательно, $L_U A = 0$ для любой симметрии U .

§ 12. C -инвариантные $(2, 1)$ тензоры

I. Любой тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2, 1)$ определяет алгебраическую структуру в кокасательном пространстве $T_x^*(M^n)$:

$$(S(\zeta, \eta))_\gamma = S_\gamma^{\alpha\beta} \zeta_\alpha \eta_\beta \in T_x^*(M^n). \quad (12.1)$$

Мы объединяем компоненты тензора $S_\gamma^{\alpha\beta}(J, \varphi)$ в тороидальных координатах J_i, φ_i (2.7) в следующие восемь групп

$$\begin{aligned} S_\ell^{i+k, j+k} &= S_{1\ell}^{ij}, & S_{\ell+k}^{i+k, j+k} &= S_{2\ell}^{ij}, & S_\ell^{i, j+k} &= S_{3\ell}^{ij}, & S_\ell^{i+k, j} &= S_{4\ell}^{ij}, \\ S_{\ell+k}^{i+k, j} &= S_{5\ell}^{ij}, & S_{\ell+k}^{i, j+k} &= S_{6\ell}^{ij}, & S_\ell^{ij} &= S_{7\ell}^{ij}, & S_{\ell+k}^{ij} &= S_{8\ell}^{ij}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.1. Тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}(J, \varphi)$ типа $(2, 1)$ тогда и только тогда является инвариантным по отношению к C -интегрируемой невырожденной

гамильтоновой системе (1.1), если все компоненты (12.2) зависят только от переменных J_i и справедливы уравнения

$$S_4(J) = S_2(J) - S_3(J), \quad S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = 0. \quad (12.3)$$

Компоненты $S_1(J)$, $S_2(J)$ и $S_3(J)$ являются произвольными гладкими функциями от переменных $J_1, \dots, J_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение инвариантности $L_V S = 0$ для тензора $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2, 1)$ имеет вид

$$(L_V S)_\gamma^{\alpha\beta} = \dot{S}_\gamma^{\alpha\beta} + V_{,\gamma}^\tau S_\tau^{\alpha\beta} - V_{,\tau}^\alpha S_\gamma^{\tau\beta} - V_{,\tau}^\beta S_\gamma^{\alpha\tau} = 0. \quad (12.4)$$

Подставляя формулы (3.4) и (12.2), мы преобразуем систему (12.4) в следующую линейную динамическую систему в пространстве тензоров S_a , $a = 1, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= S_3 + S_4 - S_2, & \dot{S}_2 &= S_5 + S_6, & \dot{S}_3 &= S_7 - S_6, \\ \dot{S}_4 &= S_7 - S_5, & \dot{S}_5 &= S_8, & \dot{S}_6 &= S_8, & \dot{S}_7 &= -S_8, & \dot{S}_8 &= 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Используя очевидную верхнетреугольную структуру этой системы и основное свойство первых интегралов (2.8), мы получаем явный вид всех решений уравнений (12.5):

$$\begin{aligned} S_1(t) &= -\tilde{S}_8(J)t^3 + (\tilde{S}_7(J) - \tilde{S}_5(J) - \tilde{S}_6(J))t^2 \\ &\quad + (\tilde{S}_4(J) + \tilde{S}_3(J) - \tilde{S}_2(J))t + \tilde{S}_1(J), \\ S_2(t) &= \tilde{S}_8(J)t^2 + (\tilde{S}_5(J) + \tilde{S}_6(J))t + \tilde{S}_2(J), \\ S_3(t) &= -\tilde{S}_8(J)t^2 + (\tilde{S}_7(J) - \tilde{S}_6(J))t + \tilde{S}_3(J), \\ S_4(t) &= -\tilde{S}_8(J)t^2 + (\tilde{S}_7(J) - \tilde{S}_5(J))t + \tilde{S}_4(J), \\ S_5(t) &= \tilde{S}_8(J)t + \tilde{S}_5(J), & S_6(t) &= \tilde{S}_8(J)t + \tilde{S}_6(J), \\ S_7(t) &= -\tilde{S}_8(J)t + \tilde{S}_7(J), & S_8(t) &= \tilde{S}_8(J), \end{aligned} \quad (12.6)$$

где $\tilde{S}_a(J)$ — произвольные гладкие функции переменных $J_1, \dots, J_k$.

C -инвариантный тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}(J, \varphi)$ типа $(2, 1)$ является гладким в любой тороидальной области $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$. Поэтому все компоненты $S_\gamma^{\alpha\beta}(J, \varphi)$ ограничены по модулю на любом торе $\mathbb{T}^k$. Точные решения (12.6) ограничены при всех t тогда и только тогда, если выполнены уравнения (12.3). Поэтому, используя тот факт, что общие траектории интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1) всюду плотны на торах $\mathbb{T}^k$ (2.4), мы получаем, что все компоненты $S_\gamma^{\alpha\beta}$ зависят только от переменных $J_1, \dots, J_k$ и удовлетворяют уравнениям (12.3).

Уравнения (12.3) определяют особые точки динамической системы (12.5). Поэтому тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}$ (12.2) типа $(2, 1)$ является C -инвариантным тогда и только тогда, если функции $\tilde{S}_a(J)$ зависят только от переменных $J_1, \dots, J_k$ и их значения принадлежат особому множеству (12.3) динамической системы (12.5). Прямая проверка доказывает, что уравнения (12.3) влекут тождество

$$DS(\zeta, \eta) = S(D\zeta, \eta) + S(\zeta, D\eta), \quad (12.7)$$

где D — C -инвариантный нильпотентный тензор (2.12), (2.13) типа $(1, 1)$ и ζ, η — произвольные ковекторы. Тождество (12.7) означает, что тензор D является

дифференцированием алгебраической структуры (12.1) в кокасательном расслоении $T^*(M^n)$.

II. Пусть $\mathcal{L}^\perp \subset T^*(M^n)$ означает k -мерное распределение, порожденное 1-формами $dJ_1, \dots, dJ_k$ (2.10). Уравнения (12.3) влекут

$$S(\mathcal{L}^\perp, \mathcal{L}^\perp) = 0, \quad S(\mathcal{L}^\perp, T_x^*(M^n)) \subset \mathcal{L}^\perp, \quad S(T_x^*(M^n), \mathcal{L}^\perp) \subset \mathcal{L}^\perp. \quad (12.8)$$

Поэтому k -мерные подпространства $\mathcal{L}_x^\perp$ являются коммутативными идеалами по отношению к алгебраической структуре (12.1).

Для любой 1-формы η мы определяем оператор S_η по формуле $S_\eta(\zeta) = S(\zeta, \eta)$. Рассмотрим эти операторы в базисе (2.10) $e^i = dJ_i$, $e^{i+k} = d\varphi_i$. Формулы (12.8) означают, что операторы S_{e^α} имеют вид

$$S_{e^i} = \begin{pmatrix} 0 & Q_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{e^{i+k}} = \begin{pmatrix} U_i & W_i \\ 0 & V_i \end{pmatrix}, \quad (12.9)$$

где U_i, V_i, W_i и Q_i — некоторые $k \times k$ матрицы. Введем следующую полиномиальную функцию

$$P_S(\eta, \lambda) = \det(S_\eta - \lambda) \quad (12.10)$$

на кокасательном расслоении $T^*(M^n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2. Если тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2,1)$ является C -инвариантным, то многочлен $P_S(\eta, \lambda)$ приводим и является произведением двух многочленов степени k . Для любого ковектора η и ковектора $\theta \in \mathcal{L}^\perp$ справедливы тождества

$$P_S(\eta + \theta, \lambda) = P_S(\eta, \lambda), \quad P_S(\theta, \lambda) = \lambda^n. \quad (12.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ковектор η имеет вид

$$\eta = \rho_1 e^1 + \dots + \rho_k e^k + \eta_1 e^{1+k} + \dots + \eta_k e^{2k}$$

в базисе (2.10). Используя формулы (12.9), получаем

$$P_S(\eta, \lambda) = \det(\eta_i U_i - \lambda) \det(\eta_i V_i - \lambda). \quad (12.12)$$

Эта формула представляет многочлен (12.10) в виде произведения двух многочленов степени k . Формулы (12.11) следуют из (12.12).

III. **ТЕОРЕМА 1, ЧАСТЬ 9.** Любые две симметрии U и U_1 C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы (1.1), любые две C -инвариантные 1-формы η и θ и любой C -инвариантный тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2,1)$ удовлетворяют уравнениям

$$S_\gamma^{\alpha\beta} \eta_\alpha \theta_\beta = 0, \quad S_\gamma^{\alpha\beta} U^\gamma \theta_\beta = 0, \quad L_{U_1} L_U S = 0. \quad (12.13)$$

2) C -инвариантный тензор $(S_\theta)_\beta^\alpha = S_\beta^{\alpha\gamma} \theta_\gamma$ типа $(1,1)$ и C -инвариантный тензор $(S_U)^{\alpha\beta} = S_\gamma^{\alpha\beta} U^\gamma$ типа $(2,0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rank } \|S_\theta\| &\leq k, & S_\theta^2 &= 0, & L_U S_\theta &= 0, \\ \text{rank } \|S_U\| &\leq k, & L_{U_1} S_U &= 0. \end{aligned} \quad (12.14)$$

3) Тензор $\tilde{S} = L_U S$ типа $(2, 1)$ определяет нильпотентную алгебраическую структуру в кокасательном расслоении $T^*(M^n)$: для произвольных ковекторов $\zeta, \eta, \theta \in T_x^*(M^n)$ справедливы уравнения

$$\tilde{S}(\tilde{S}(\zeta, \eta), \theta) = 0, \quad \tilde{S}(\zeta, \tilde{S}(\eta, \theta)) = 0. \quad (12.15)$$

4) Многочлен $P_S(\eta, \lambda)$ удовлетворяет уравнениям

$$P_S(\eta + \theta, \lambda) = P_S(\eta, \lambda), \quad P_S(\theta, \lambda) = \lambda^n$$

для любого ковектора $\eta \in T_x^*(M^n)$ и любой C -инвариантной 1-формы θ . Многочлен $P_S(\eta, \lambda)$ приводим и является произведением двух многочленов степени k .

5) Для любых двух C -инвариантных тензоров S и Q типа $(2, 1)$, любой C -инвариантной 1-формы θ и любой симметрии U , тензор $P^{\alpha\beta} = S_\nu^{\alpha\tau} Q_\tau^{\beta\nu}$ типа $(2, 0)$ удовлетворяет уравнениям

$$\text{rank } \|P\| \leq k, \quad P^{\alpha\beta} \theta_\beta = 0, \quad L_U P = 0. \quad (12.16)$$

6) Для любых C -инвариантных тензора N типа $(1, 2)$ и тензора S типа $(2, 1)$ и любой симметрии U C -инвариантные тензоры $A_\beta^\alpha = N_{\tau\nu}^\alpha S_\beta^{\tau\nu}$ и $B_\beta^\alpha = N_{\beta\nu}^\tau S_\tau^{\alpha\nu}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rank } \|A\| \leq k, \quad \text{rank } \|B\| \leq k, \quad A^2 = B^2 = AB = BA = 0, \\ L_U A = L_U B = 0. \end{aligned} \quad (12.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первое уравнение (12.13) следует из первого уравнения (12.8), поскольку любая C -инвариантная 1-форма θ (3.2) принадлежит расслоению $\mathcal{L}^\perp$. Второе уравнение (12.13) следует из формул (2.15), (3.2) и (12.3) для C -инвариантных тензоров U, θ и S .

Применяя предложение 12.1 и формулы (2.16), (2.18) и (12.4), мы получаем, что ненулевые компоненты тензора $L_U S$ типа $(2, 1)$ имеют вид

$$(L_U S)_\ell^{i+k, j+k} = U_{\ell, \ell}^{m+k} S_{m+k}^{i+k, j+k} - U_{\ell, m}^{i+k} S_\ell^{m, j+k} - U_{\ell, m}^{j+k} S_\ell^{i+k, m}. \quad (12.18)$$

Поэтому только первая группа компонент (12.2) тензора $\tilde{S} = L_U S$ типа $(2, 1)$ является ненулевой. Применяя формулу (12.18) к тензору $L_{U_1} \tilde{S} = L_{U_1} L_U S$ типа $(2, 1)$, мы получаем третье уравнение (12.13).

2) Вследствие формул (2.15), (3.2) и уравнений (12.2), (12.3), все ненулевые компоненты тензоров S_θ и S_U имеют вид

$$(S_\theta)_j^{i+k} = S_j^{i+k, \ell} \theta_\ell, \quad S_U^{i+k, j+k} = S_{\ell+k}^{i+k, j+k} U^{\ell+k}.$$

Отсюда следуют алгебраические уравнения (12.14). Применяя формулы (7.13) и (8.9), мы получаем уравнения $L_U S_\theta = 0$ и $L_{U_1} S_U = 0$.

3) Мы доказали, что все компоненты тензора $\tilde{S} = L_U S$ типа $(2, 1)$ равны нулю, за исключением компонент $(L_U S)_\ell^{i+k, j+k}$. Этот факт означает, что тензор $\tilde{S}$ типа $(2, 1)$ удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{S}(T_x^*(M^n), T_x^*(M^n)) \subset \mathcal{L}_x^\perp, \quad \tilde{S}(\mathcal{L}_x^\perp, T_x^*(M^n)) = \tilde{S}(T_x^*(M^n), \mathcal{L}_x^\perp) = 0.$$

Отсюда следуют уравнения (12.15).

4) Утверждение (4) следует из предложения 12.2, поскольку все C -инвариантные 1-формы θ принадлежат распределению $\mathcal{L}^\perp$ вследствие (3.2).

5) Используя формулы (12.2) и (12.3) для любого C -инвариантного тензора типа $(2, 1)$, мы получаем, что все ненулевые компоненты тензора P типа $(2, 0)$ имеют вид

$$P^{i+k, j+k} = S_m^{i+k, \ell} Q_\ell^{j+k, m} + S_{m+k}^{i+k, \ell+k} Q_{\ell+k}^{j+k, m+k}. \quad (12.19)$$

Отсюда следует первое неравенство (12.16). Второе уравнение (12.16) следует из формулы (3.2) для C -инвариантной 1-формы θ и (12.19). Применяя формулу Лейбница, мы находим

$$(L_U P)^{\alpha\beta} = (L_U S)_\nu^{\alpha\tau} Q_\tau^{\beta\nu} + S_\nu^{\alpha\tau} (L_U Q)_\tau^{\beta\nu}. \quad (12.20)$$

Используя формулы (12.18) для ненулевых компонент тензоров $L_U S$ и $L_U Q$ типа $(2, 1)$ и формулы (12.3), мы получаем, что обе суммы в (12.20) равны нулю. Поэтому $L_U P = 0$ для любой симметрии U .

6) Используя формулы (9.4) и (12.3) для C -инвариантных тензора N типа $(1, 2)$ и тензора S типа $(2, 1)$, мы получаем, что все ненулевые компоненты тензоров $A_\beta^\alpha = N_{\tau\nu}^\alpha S_\beta^{\tau\nu}$ и $B_\beta^\alpha = N_{\beta\nu}^\tau S_\tau^{\alpha\nu}$ типа $(1, 1)$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_j^{i+k} &= N_{\ell+k, m}^{i+k} S_j^{\ell+k, m} + N_{\ell, m+k}^{i+k} S_j^{\ell, m+k}, \\ B_j^{i+k} &= N_{j, m}^\ell S_\ell^{i+k, m} + N_{j, m+k}^{\ell+k} S_{\ell+k}^{i+k, m+k}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Поэтому тензоры A и B имеют блочную структуру (8.10). Отсюда следуют алгебраические уравнения (12.17). Уравнения $L_U A = L_U B = 0$ следуют из равенства (8.9) и формул (2.15) и (12.21).

§ 13. A - B - C -когомологии динамических систем

I. Напомним конструкцию A - B - C -когомологий динамических систем, предложенную в работах [2], [4], [5]. Пусть Λ_V^m — линейное пространство гладких дифференциальных m -форм на многообразии M^n , которые инвариантны по отношению к динамической системе V

$$\dot{x}^i = V^i(x^1, \dots, x^n) \quad (13.1)$$

на M^n . Оператор i_V внутреннего умножения и оператор d внешнего дифференцирования действуют на V -инвариантных дифференциальных формах. Любая V -инвариантная m -форма ω_m аннулируется производной Ли

$$L_V = i_V \circ d + d \circ i_V, \quad L_V \omega_m = 0.$$

Поэтому два оператора i_V и d удовлетворяют уравнениям

$$i_V^2 = 0, \quad d^2 = 0, \quad i_V \circ d = -d \circ i_V \quad (13.2)$$

на линейном пространстве V -инвариантных дифференциальных форм. Вследствие уравнений (13.2), оператор $d_V = i_V \circ d = -d \circ i_V$ удовлетворяет уравнениям

$$d_V^2 = 0, \quad d_V \circ i_V = i_V \circ d_V = 0, \quad d_V \circ d = d \circ d_V = 0. \quad (13.3)$$

Линейные подпространства Λ_V^m V -инвариантных дифференциальных m -форм с тремя операторами i_V , d и $d_V = i_V \circ d$ образуют A -, B -, и C -комплексы соответственно:

$$\begin{aligned} A : 0 &\longleftarrow \Lambda_V^0 \xleftarrow{i_V} \Lambda_V^1 \xleftarrow{i_V} \dots \xleftarrow{i_V} \Lambda_V^{n-1} \xleftarrow{i_V} \Lambda_V^n \longleftarrow 0, \\ B : 0 &\longrightarrow \Lambda_V^0 \xrightarrow{d} \Lambda_V^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda_V^{n-1} \xrightarrow{d} \Lambda_V^n \longrightarrow 0, \\ C : &\xrightarrow{d_V} \Lambda_V^m \xrightarrow{d_V} \Lambda_V^m \xrightarrow{d_V} \Lambda_V^m \xrightarrow{d_V} \dots \end{aligned}$$

II. Линейные пространства $H_A^*(V, M^n)$, $H_B^*(V, M^n)$ и $H_C^*(V, M^n)$ являются ко-гомологиями по отношению к операторам i_V , d и d_V соответственно:

$$\begin{aligned} H_A^*(V, M^n) &= \text{Ker } i_V / \text{Im } i_V, & H_B^*(V, M^n) &= \text{Ker } d / \text{Im } d, \\ H_C^*(V, M^n) &= \text{Ker } d_V / \text{Im } d_V. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Кольцевые структуры в когомологиях (13.4) индуцируются внешним произведением V -инвариантных дифференциальных форм. Факторпространства (13.4) наследуют кольцевую структуру, определенную внешним произведением V -инвариантных дифференциальных форм, вследствие того, что операторы i_V и d являются косыми дифференцированиями [15] и оператор $d_V = i_V \circ d$ является дифференцированием:

$$d_V(\omega \wedge \eta) = d_V \omega \wedge \eta + \omega \wedge d_V \eta.$$

Здесь ω и η – произвольные V -инвариантные дифференциальные формы.

Для любой постоянной c оператор $d_c = d + ci_V$ удовлетворяет уравнению $d_c^2 = 0$ на V -инвариантных дифференциальных формах. Поэтому можно определить когомологии по отношению к оператору d_c . A -когомологии $H_A^*(V, M^n)$ образуют дифференциальный комплекс по отношению к оператору d . B -когомологии $H_B^*(V, M^n)$ образуют дифференциальный комплекс по отношению к оператору i_V . C -когомологии $H_C^*(V, M^n)$ образуют два дифференциальных комплекса по отношению к операторам i_V и d . Когомологии этих дифференциальных комплексов определяют дополнительные инварианты динамической системы V .

III. Рассмотрим динамическую систему V (2.6):

$$\dot{J}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = J_i$$

в тороидальной области $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$, где B_a – k -мерный шар, и $J_i \in B_a$, $\varphi_i \in \mathbb{T}^k$. Система (2.6) является канонической формой [3] всех C -интегрируемых гамильтоновых систем, невырожденных в смысле Пуанкаре (2.3). В §§ 3, 6 и 10 мы показали, что C -инвариантные 1-, 2- и 3-формы имеют канонический вид

$$\omega_1 = \theta_i(J) dJ_i, \quad (13.5)$$

$$\omega_2 = a_{i\ell}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell + b_{i\ell}(J) dJ_i \wedge d\varphi_\ell, \quad (13.6)$$

$$\omega_3 = b_{i\ell m}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge d\varphi_m + c_{i\ell m}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m. \quad (13.7)$$

Здесь коэффициенты $a_{i\ell}(J)$ и $c_{i\ell m}(J)$ являются знакопеременными и коэффициенты $b_{i\ell}(J)$ и $b_{i\ell m}(J)$ удовлетворяют уравнениям $b_{i\ell}(J) = b_{\ell i}(J)$, $b_{i\ell m}(J) + b_{\ell m i}(J) + b_{m i \ell}(J) = 0$.

(А) Для C -инвариантных дифференциальных форм (13.5)–(13.7), мы имеем

$$i_V \omega_1 = 0, \quad i_V \omega_2 = -b_{i\ell}(J) J_\ell dJ_i, \quad i_V \omega_3 = b_{i\ell m}(J) J_m dJ_i \wedge dJ_\ell. \quad (13.8)$$

Отсюда мы получаем $H_A^1(V, \mathcal{O}) = 0$, $H_A^2(V, \mathcal{O}) = \mathbb{R}^\infty$. Векторы из группы когомологий $H_A^2(V, \mathcal{O})$ представляются 2-формами

$$\omega_{2a} = b_{i\ell}(J) dJ_i \wedge d\varphi_\ell, \quad (13.9)$$

где $b_{i\ell}(J) = b_{\ell i}(J)$ и $b_{i\ell}(J)J_\ell = 0$.

(В) Любая C -инвариантная 1-форма θ имеет вид (13.5). Поэтому, применяя лемму Пуанкаре к замкнутой 1-форме (13.5), мы получаем $\theta = dF(J)$. Поэтому $H_B^1(V, \mathcal{O}) = 0$. В предложении 6.1 мы доказали, что любая C -инвариантная замкнутая 2-форма ω_2 имеет вид (6.3). Поэтому векторы из когомологической группы $H_B^2(V, \mathcal{O})$ представляются замкнутыми 2-формами

$$\omega_{2b} = \frac{\partial^2 B(J)}{\partial J_i \partial J_\ell} dJ_i \wedge d\varphi_\ell, \quad (13.10)$$

где $B(J)$ – произвольная гладкая функция. Когомологические классы в группе $H_B^2(V, \mathcal{O})$ определяются классами гладких функций $B(J)$ по модулю линейных функций $c_1 J_1 + \dots + c_k J_k$. Поэтому группа когомологий $H_B^2(V, \mathcal{O})$ является бесконечномерной.

(С) Уравнение (13.6) и (13.8) приводят к формулам

$$d_V \omega_2 = -di_V \omega_2 = d(b_{i\ell}(J)J_\ell) \wedge dJ_i.$$

Поэтому группа когомологий $H_C^2(V, M^n)$ бесконечномерна. Векторы этой группы представляются 2-формами

$$\omega_{2c} = a_{i\ell}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell + b_{i\ell}(J) dJ_i \wedge d\varphi_\ell, \quad b_{i\ell}(J)J_\ell = \frac{\partial C(J)}{\partial J_i}, \quad (13.11)$$

где $C(J)$ – произвольная гладкая функция и $b_{i\ell}(J) = b_{\ell i}(J)$.

Формулы (13.9)–(13.11) показывают, что три группы когомологий

$$H_A^2(V, \mathcal{O}), \quad H_B^2(V, \mathcal{O}), \quad H_C^2(V, \mathcal{O})$$

отличаются друг от друга и что B -когомологическая группа $H_B^2(V, \mathcal{O})$ является “наименьшей” из них.

B -когомологии являются наиболее важными из A - B - C -типов вследствие их связей с классическими когомологиями де Рама [20]. B -когомологии динамических систем имеют аналоги для дискретных динамических систем, которые определяются гладкими отображениями $f: M^n \rightarrow M^n$ многообразия M^n в себя.

§ 14. B -когомологии динамических систем и гладких отображений

I. Существует естественный кольцевой гомоморфизм

$$\alpha: H_B^*(V, M^n) \rightarrow H^*(M^n),$$

который отображает класс B -когомологий V -инвариантной замкнутой q -формы ω_q в соответствующий класс когомологий де Рама [20] общих замкнутых q -форм.

Для любой постоянной $c \neq 0$ имеется изоморфизм

$$H_B^*(cV, M^n) = H_B^*(V, M^n).$$

При $c = 0$ когомологии $H_B^*(0, M^n)$ изоморфны когомологиям де Рама $H^*(M^n)$.

Гомоморфизм α имеет обратный и поэтому является изоморфизмом для следующих динамических систем.

1) Предположим, что все траектории динамической системы (13.1) замкнуты и имеют одинаковый период T . Обозначим через

$$\psi_\tau: M^n \rightarrow M^n, \quad \psi_T = \text{id} \quad (14.1)$$

соответствующее действие окружности S^1 . Для любой замкнутой q -формы ω_q мы определяем q -форму

$$\alpha^{-1}\omega_q = \frac{1}{T} \int_0^T \psi_\tau^*(\omega_q) d\tau.$$

Очевидно, что q -форма $\alpha^{-1}\omega_q$ замкнута и инвариантна по отношению ко всем диффеоморфизмам (14.1) и что $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}$. Эта q -форма $\alpha^{-1}\omega_q$ принадлежит тому же классу когомологий де Рама в $H^q(M^n)$, что и замкнутая q -форма ω_q , потому что q -формы $\psi_\tau^*(\omega_q)$ гомотопны ω_q при всех τ . Поэтому $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}$ в $H^q(M^n)$. Следовательно отображение α является изоморфизмом.

2) Пусть $M^n = X^{n-k} \times \mathbb{T}^k$, где X^{n-k} — гладкое $(n-k)$ -мерное многообразие с атласом локальных координат $x^1, \dots, x^n$ и $\mathbb{T}^k$ — k -мерный тор с угловыми координатами $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}^i = 0, \quad \dot{\varphi}_j = b_j \quad (14.2)$$

на многообразии M^n . Здесь b_j — произвольные рационально независимые постоянные. Динамическая система (14.2) определяет следующую группу диффеоморфизмов

$$\phi_t: (x^i, \varphi_j) \rightarrow (x^i, \varphi_j + tb_j) \quad (14.3)$$

многообразия M^n в себя.

Пусть $f(x, \varphi)$ — произвольная гладкая функция на M^n . Применяя эргодическую теорему [21] для подсистемы (14.2) на торе $\mathbb{T}^k$, получаем равенство

$$\overline{f(x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x^i, \varphi_j + tb_j) dt = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(x, \varphi) d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k.$$

Пусть ω_q — произвольная замкнутая q -форма

$$\omega_q = \sum_{\ell+m=q} \sum_{i,j} a_{i,j}(x, \varphi) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \wedge d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_m}$$

на многообразии M^n . Для всех диффеоморфизмов ϕ_t (14.3), дифференциалы $d\phi_t$ являются тождественными отображениями касательных пространств $T_{(x,\varphi)}(X^{n-k} \times \mathbb{T}^k)$. Используя этот факт, выводим равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi_t^*(\omega_q) dt = \sum_{\ell+m=q} \sum_{i,j} \overline{a_{i,j}(x)} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \wedge d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_m}.$$

Определим q -форму

$$\alpha^{-1}\omega_q = \overline{\omega}_q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi_t^*(\omega_q) dt.$$

Очевидно, что q -форма ω_q является замкнутой и инвариантной по отношению к динамической системе (15.2). Поэтому $\varpi_q \in H_B^q(V, M^n)$. Очевидно, что $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}$.

V -инвариантная замкнутая q -форма ϖ_q принадлежит тому же классу когомологий де Рама в $H^q(M^n)$, что и замкнутая q -форма ω_q , потому что q -формы $\phi_t^*(\omega_q)$ гомотопны ω_q при всех t . Поэтому $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}$ в $H^q(M^n)$. Следовательно отображение α является изоморфизмом. Таким образом, мы доказали изоморфизм двух когомологий

$$\alpha: H_B^*(V, M^n) = H^*(M^n) \quad (14.4)$$

для динамической системы (14.2) на многообразии $M^n = X^{n-k} \times \mathbb{T}^k$.

Классический гармонический осциллятор

$$\dot{p}_i = -a_i q_i, \quad \dot{q}_i = \frac{1}{m_i} p_i$$

является примером системы (14.2). Поэтому для гармонического осциллятора кольцо B -когомологий

$$H_B^*(V, \mathbb{R}^{2k}) = H^*(\mathbb{R}^{2k}) = H^0(\mathbb{R}^{2k}) = \mathbb{R}^1$$

изоморфно кольцу вещественных чисел $\mathbb{R}^1$.

II. Предположим, что динамическая система (13.1) является общей неинтегрируемой гамильтоновой системой. Тогда $V^i = P_1^{ij} \partial H(x) / \partial x^j$, где P_1 – невырожденная пуассонова структура на M^{2k} . Соответствующие B -когомологии изоморфны сумме

$$H_B^*(V, M^{2k}) = \mathbb{R}[u]/u^{k+1} \mathbb{R}[u] + H_B^{2k}(V, M^{2k}) \quad (14.5)$$

факторкольца $\mathbb{R}[u]/u^{k+1} \mathbb{R}[u]$ многочленов от одной переменной u и бесконечномерной группы $H_B^{2k}(V, M^{2k})$ с тривиальным законом умножения. Образующая $u \in H_B^2(V, M^{2k})$ соответствует V -инвариантной симплектической структуре $\omega_1 = P_1^{-1}$. Линейно независимые элементы бесконечномерной группы $H_B^{2k}(V, M^{2k})$ представляются V -инвариантными замкнутыми $2k$ -формами

$$\omega_F = F(H) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_1. \quad (14.6)$$

Внешнее произведение (14.6) содержит k сомножителей ω_1 , $F(H)$ – произвольная гладкая функция одной переменной и $H(x)$ – гамильтониан системы V .

Изоморфизм (14.4) для интегрируемой динамической системы (14.2) и изоморфизм (14.5) для общей неинтегрируемой гамильтоновой системы V показывают, что кольцо когомологий $H_B^*(V, M^n)$ является новым инвариантом, который характеризует одновременно топологические свойства многообразия M^n и глобальные свойства динамической системы V на M^n .

III. Рассмотрим C -интегрируемую невырожденную гамильтонову систему (2.1) в тороидальной области $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$. Гамильтонова система (2.1) имеет вид (2.6) в тороидальных координатах $J_\ell(I) = \partial H(I) / \partial I_\ell, \varphi_\ell$.

ТЕОРЕМА 2. *Первые пять групп B -когомологий для C -интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы V (2.1) в тороидальной области $\mathcal{O}$ имеют вид*

$$\begin{aligned} H_B^0(V, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^1, & H_B^1(V, \mathcal{O}) &= 0, & H_B^2(V, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^\infty, \\ H_B^3(V, \mathcal{O}) &= 0, & H_B^4(V, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^\infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предложение 3.1 утверждает, что любая C -инвариантная 1-форма θ имеет канонический вид (3.2). Применяя лемму Пуанкаре, мы получаем $\theta = dF(J)$, где $F(J)$ – некоторый первый интеграл системы (2.6). Поэтому $H_B^1(V, \mathcal{O}) = 0$.

2) Предложение 6.1 утверждает, что любая C -инвариантная замкнутая 2-форма ω_2 имеет канонический вид (6.3). Вследствие (3.2), любая C -инвариантная точная 2-форма имеет вид

$$d\theta = d\theta_\ell(J) \wedge dJ_\ell.$$

Поэтому все C -инвариантные замкнутые 2-формы ω_2 (6.3) с нелинейными функциями $B(J)$ не являются точными. Отсюда мы получаем $H_B^2(V, \mathcal{O}) = \mathbb{R}^\infty$.

3) Предложение 10.2 утверждает, что любая C -инвариантная замкнутая 3-форма ω_3 является точной в тороидальной области $\mathcal{O}$ и имеет вид $\omega_3 = d\tilde{\omega}_2$, где 2-форма $\tilde{\omega}_2$ (10.10) C -инвариантна. Поэтому $H_B^3(V, \mathcal{O}) = 0$.

4) Пусть ω_i – C -инвариантные замкнутые 2-формы (6.3)

$$\omega_i = d\left(\frac{\partial B_i(J)}{\partial J_\ell}\right) \wedge d\varphi_\ell + df_\ell(J) \wedge dJ_\ell, \quad (14.7)$$

отвечающие некоторым гладким функциям $B_i(J)$. Дифференциальные 4-формы

$$\omega_4 = \sum_{i,j=1}^N c_{ij} \omega_i \wedge \omega_j$$

являются C -инвариантными и замкнутыми при произвольных постоянных c_{ij} . Каноническая форма (10.6)

$$\omega_3 = b_{i\ell m}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge d\varphi_m + c_{i\ell m}(J) dJ_i \wedge dJ_\ell \wedge dJ_m$$

для любой C -инвариантной 3-формы ω_3 доказывает, что равенство $\omega_4 = d\omega_3$ невозможно, если функции $B_j(J)$ в (14.7) и постоянные c_{ij} находятся в общем положении. Поэтому группа когомологий $H_B^4(V, \mathcal{O})$ бесконечномерна.

Применяя методы данной работы, можно доказать, что для любой интегрируемой динамической системы V (2.1), невырожденной в смысле Пуанкаре (2.3), все нечетные когомологии $H_B^{2\ell+1}(V, \mathcal{O})$ равны нулю и все четные когомологии $H_B^{2\ell}(V, \mathcal{O})$ бесконечномерны при $\ell \leq k$.

IV. Метод “тороидальных перестроек” [3] определяет гладкое продолжение любой C -инвариантной замкнутой 2-формы ω_i (14.7) на все многообразие M^{2k} . Поэтому вторая и четвертая группы когомологий $H^2(V, M^{2k})$ и $H^4(V, M^{2k})$ являются бесконечномерными. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 14.1. *Бесконечномерность групп когомологий $H_B^2(V, M^{2k})$ и $H_B^4(V, M^{2k})$ является необходимым условием для невырожденной C -интегрируемости динамической системы V на многообразии M^{2k} .*

V. В §13 мы рассмотрели A - B - C -когомологии динамических систем. Среди них только B -когомологии имеют аналоги для гладких отображений. Пусть f – некоторое гладкое отображение многообразия M^n в себя. Обозначим через Λ_f^m пространство f -инвариантных m -форм ω_k : $f^*\omega_m = \omega_m$. Рассмотрим комплекс f -инвариантных дифференциальных форм

$$0 \longrightarrow \Lambda_f^0 \xrightarrow{d} \Lambda_f^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda_f^{n-1} \xrightarrow{d} \Lambda_f^n \longrightarrow 0.$$

Определим B -когомологии гладкого отображения f формулой

$$H_B^*(f, M^n) = \text{Ker } d / \text{Im } d.$$

Когомологии $H_B^*(f, M^n)$ имеют кольцевую структуру, которая индуцируется внешним произведением f -инвариантных дифференциальных форм.

Если диффеоморфизм f_τ является сдвигом на время τ вдоль траекторий некоторой динамической системы V , то определен кольцевой гомоморфизм $H_B^*(V, M^n) \rightarrow H_B^*(f_\tau, M^n)$. Поэтому когомологии $H_B^*(f_\tau, M^n)$ при $\tau \rightarrow 0$ являются дискретизациями когомологий $H_B^*(V, M^n)$.

Существует естественный гомоморфизм $\alpha: H_B^*(f, M^n) \rightarrow H^*(M^n)$, который преобразует класс когомологий f -инвариантных q -форм в соответствующий класс когомологий де Рама [20] общих замкнутых q -форм.

Обозначим $S_f M^n$ надстройку [22] многообразия M^n , соответствующую некоторому диффеоморфизму $f: M^n \rightarrow M^n$. Пусть $t \in [0, 1]$ – “вертикальная” координата на $S_f M^n$, определяющая векторное поле $V = \partial/\partial t$. Отображение f индуцирует диффеоморфизм f_1 надстройки $S_f M^n$: $f_1(x, t) = (f(x), t)$. Очевидно, что диффеоморфизм f_1 является сдвигом на 1 вдоль траекторий динамической системы $V = \partial/\partial t$ на $S_f M^n$.

Любая f -инвариантная m -форма ω_m на M^n индуцирует V -инвариантную m -форму $E\omega_m$ на $S_f M^n$. Эта m -форма $E\omega_m$ определяется вложениями $E_t: M^n \rightarrow S_f M^n$, $E_t(x) = (x, t)$ и удовлетворяет уравнениям $E_t^*(E\omega_m) = \omega_m$, $i_V E\omega_m = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.1. *Для любого диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$ следующие два кольца когомологий изоморфны:*

$$H_B^*(V, S_f M^n) = H_B^*(f, M^n) \otimes H^*(S^1).$$

Здесь $H^*(S^1) = \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^1$ – кольцо когомологий окружности S^1 .

Доказательство следует из того факта, что любая V -инвариантная $(m+1)$ -форма η_{m+1} на $S_f M^n$ имеет вид $\eta_{m+1} = dt \wedge E\omega_m + E\omega_{m+1}$, где ω_m и ω_{m+1} – некоторые f -инвариантные формы на M^n .

Пусть многообразие M^{2k} является тороидальной областью $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$, где $B_a \subset \mathbb{R}^k$ – шар (2.2). Определим диффеоморфизм $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ формулой

$$f(I_j, \varphi_j) = (I_j, \varphi_j + \alpha_j(I)), \quad j = 1, \dots, k, \quad (14.8)$$

где $\alpha_j(I)$ – произвольные гладкие функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.2. *Предположим, что диффеоморфизм f (14.8) удовлетворяет условию невырожденности*

$$\det \left\| \frac{\partial \alpha_\ell(I)}{\partial I_j} \right\| \neq 0, \quad \ell, j = 1, \dots, k,$$

и что отображение $(I_1, \dots, I_k) \rightarrow (\alpha_1(I), \dots, \alpha_k(I))$ является взаимно однозначным. Тогда первые пять групп B -когомологий имеют вид

$$\begin{aligned} H_B^0(f, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^1, & H_B^1(f, \mathcal{O}) &= 0, & H_B^2(f, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^\infty, \\ H_B^3(f, \mathcal{O}) &= 0, & H_B^4(f, \mathcal{O}) &= \mathbb{R}^\infty. \end{aligned}$$

Доказательство основано на явном виде канонических форм для f -инвариантных дифференциальных форм в локальных координатах φ_j , $J_\ell = \alpha_\ell(I)$ и аналогично доказательству теоремы 2.

§ 15. Заключительные замечания о свойствах C -инвариантных тензоров

(i) Симметрии U C -интегрируемых невырожденных гамильтоновых систем (2.1) на симплектических многообразиях M^{2k} , или C -инвариантные $(1, 0)$ тензоры, изучались в работе [5]. Теорема о симметриях [5] утверждает, что Ли алгебра $\mathcal{S}$ симметрий интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы (2.1) является абелевой тогда и только тогда, если все инвариантные подмногообразия этой системы компактны и система является невырожденной в смысле Пуанкаре.

(ii) C -инвариантные дифференциальные 1-формы θ или $(0, 1)$ тензоры удовлетворяют необходимым условиям

$$\text{rank } d\theta \leq k, \quad \theta(U) = 0, \quad L_U \theta = 0, \quad i_U d\theta = 0,$$

где U – произвольная симметрия. Здесь L_U означает производную Ли по отношению к симметрии U .

(iii) Любой C -инвариантный тензор T_m^ℓ типа (ℓ, m) для $\ell + m = 2$ удовлетворяет соотношению

$$\text{rank } \|L_U T_m^\ell\| \leq k.$$

При $\ell + m \leq 3$, справедливо уравнение

$$L_{U_1} L_U T_m^\ell = 0.$$

Здесь U и U_1 – произвольные симметрии C -интегрируемой невырожденной системы (2.1).

(iv) Характеристический многочлен $P(\lambda, x) = \det(A(x) - \lambda)$ любого C -инвариантного тензора $A(x)$ типа $(1, 1)$ является полным квадратом: $P(\lambda, x) = Q^2(\lambda, x)$. Поэтому каждое собственное значение оператора $A(x)$ имеет четную кратность. Уравнение $(L_U A)^2 = 0$ справедливо для любой симметрии U .

(v) Любой C -инвариантный тензор $h_{\alpha\beta}$ типа $(0, 2)$ удовлетворяет уравнению $h(U, U_1) = 0$ для произвольных симметрий U и U_1 . Поэтому любая C -инвариантная метрика $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ является неопределенной. Числа ее положительных и отрицательных квадратов n_+ и n_- удовлетворяют неравенствам $n_+ \leq k$, $n_- \leq k$. Любая C -инвариантная метрика $g_{\alpha\beta}$ при $n = 2k = 4\ell + 2$ является вырожденной всюду на многообразии M^{2k} .

(vi) Полная классификация C -инвариантных замкнутых дифференциальных 2-форм была получена в работах [1], [3]. Эта классификация доказывает, что общие C -инвариантные пуассоновы структуры являются несовместимыми в смысле Магри и что совместимые C -инвариантные пуассоновы структуры являются неустойчивыми.

(vii) Любой C -инвариантный тензор $P^{\alpha\beta}$ типа $(2, 0)$ удовлетворяет уравнению $P(\theta, \theta_1) = 0$, где θ и θ_1 – любые C -инвариантные 1-формы. Для любого кососимметричного C -инвариантного тензора P типа $(2, 0)$ и любой симметрии U , производная Ли $L_U P$ является пуассоновой структурой. Если P является пуассоновой структурой, то P и $L_U P$ совместимы в смысле Магри. Для любых двух C -инвариантных кососимметричных тензоров P и P_1 типа $(2, 0)$ и любых двух симметрий U и U_1 пуассоновы структуры $L_U P$ и $L_{U_1} P_1$ являются совместимыми по Магри.

(viii) Любой C -инвариантный тензор $N_{\beta\gamma}^\alpha$ типа $(1, 2)$ и любой C -инвариантный тензор $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2, 1)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rank } \|N_{\beta\tau}^\alpha U^\tau\| &\leq k, & \text{rank } \|N_{\beta\gamma}^\tau \theta_\tau\| &\leq k, \\ \text{rank } \|S_\tau^{\alpha\beta} U^\tau\| &\leq k, & \text{rank } \|S_\beta^{\alpha\tau} \theta_\tau\| &\leq k, \end{aligned}$$

где U – произвольная симметрия и θ – произвольная C -инвариантная 1-форма. Любые C -инвариантные тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ типа $(0, 3)$ и тензор $R^{\alpha\beta\gamma}$ типа $(3, 0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\text{rank } \|T_{\alpha\beta\tau} U^\tau\| \leq k, \quad \text{rank } \|R^{\alpha\beta\tau} \theta_\tau\| \leq k.$$

Любые свертки этих тензоров с двумя произвольными симметриями U и U_1 или с C -инвариантными 1-формами θ и θ_1 равны нулю:

$$\begin{aligned} N_{\tau\nu}^\alpha U^\tau U_1^\nu &= 0, & N_{\beta\nu}^\tau U^\nu \theta_\tau &= 0, & S_\nu^{\alpha\tau} U^\nu \theta_\tau &= 0, \\ S_\alpha^{\tau\nu} \theta_\tau \theta_{1,\nu} &= 0, & T_{\alpha\tau\nu} U^\tau U_1^\nu &= 0, & R^{\alpha\tau\nu} \theta_\tau \theta_{1,\nu} &= 0. \end{aligned}$$

(ix) Для произвольного C -инвариантного тензора $N_{\beta\gamma}^\alpha$ типа $(1, 2)$ многочлен

$$P_N(u, \lambda) = \det(N_u - \lambda)$$

приводим и является произведением двух многочленов степени k . Здесь $(N_u)^\alpha_\gamma = N_{\tau\gamma}^\alpha u^\tau$, $u \in T(M^{2k})$. Многочлен $P_N(u, \lambda)$ удовлетворяет уравнениям

$$P_N(u + U, \lambda) = P_N(U, \lambda), \quad P_N(U, \lambda) = \lambda^{2k},$$

где U – произвольная симметрия.

(x) Для любого C -инвариантного тензора $S_\gamma^{\alpha\beta}$ типа $(2, 1)$ многочлен

$$P_S(\eta, \lambda) = \det(S_\eta - \lambda)$$

приводим и является произведением двух многочленов степени k . Здесь $(S_\eta)^\alpha_\gamma = S_\gamma^{\alpha\tau} \eta_\tau$, $\eta \in T^*(M^{2k})$. Уравнения

$$P_S(\eta + \theta, \lambda) = P_S(\eta, \lambda), \quad P_S(\theta, \lambda) = \lambda^{2k}$$

справедливы для любой C -инвариантной 1-формы θ .

(xi) Определены кольца A - B - C -когомологий

$$H_A^*(V, M^n), \quad H_B^*(V, M^n), \quad H_C^*(V, M^n)$$

для произвольной динамической системы на многообразии M^n . В § 13, используя выведенные канонические формы для C -инвариантных тензоров, доказана бесконечность групп когомологий

$$H_A^2(V, \mathcal{O}), \quad H_B^2(V, \mathcal{O}), \quad H_C^2(V, \mathcal{O})$$

для C -интегрируемых и невырожденных по Пуанкаре гамильтоновых систем в тороидальных областях $\mathcal{O} = B_a \times \mathbb{T}^k$.

(xii) В § 14 установлены связи между B -когомологиями динамических систем $H_B^*(V, M^n)$, B -когомологиями гладких отображений $H_B^*(f, M^n)$ и классическими когомологиями де Рама $H^*(M^n)$. В теореме 2 доказано, что бесконечность групп когомологий $H_B^2(V, M^{2k})$ и $H_B^4(V, M^{2k})$ является необходимым условием для невырожденной C -интегрируемости динамической системы V на многообразии M^{2k} .

Список литературы

1. *Bogoyavlenskij O. I.* Invariant incompatible Poisson structures // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1995. V. 450. P. 723–730.
2. *Bogoyavlenskij O. I.* A cohomology of dynamical systems // Compt. Rend. Mathem. Canada. 1995. V. 17. P. 253–258.
3. *Bogoyavlenskij O. I.* Theory of tensor invariants of integrable Hamiltonian systems. I. Incompatible Poisson structures // Comm. Math. Phys. 180. №3. P. 529–586.
4. *Bogoyavlenskij O. I.* The *A-B-C*-cohomologies for dynamical systems // Compt. Rend. Mathem. Canada. 1996. V. 18. P. 199–204.
5. *Bogoyavlenskij O. I.* Theory of tensor invariants of integrable Hamiltonian systems. II. Theorem on symmetries and its applications // Comm. Math. Phys. 1997. V. 184. P. 301–365.
6. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
7. *Liouville J.* Note sur l'integration des equations differentielles de la Dynamique // J. Math. Pures Appl. 1855. V. 20. P. 137–138.
8. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели II: Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18. №5. С. 13–40.
9. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР 1954. V. 98. №4. P. 527–530.
10. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // Proc. Intern. Congr. Math. 1954. Т. 1. Amsterdam: North-Holland, 1957. С. 315–333.
11. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. 1962. V. 1. P. 1–20.
12. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions // Math. Ann. 1967. V. 169. P. 137–176.
13. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
14. *Nijenhuis A.* X_{n-1} -forming sets of eigenvectors // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. 1951. V. 54. P. 200–212.
15. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. New York: Interscience Publishers, 1963.
16. *Abraham R., Marsden J. E.* Foundations of Mechanics. London: The Benjamin/Cummings Publishing, 1978.
17. *Kozlov V. V.* Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
18. *Marsden J. E., Ratiu T. S.* Introduction to mechanics and symmetry. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
19. *Magri F.* A simple model of an integrable Hamiltonian system // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1156–1162.
20. *De Rham G.* Sur l'Analysis situs des varietes a n dimensions // J. de Mathematiques. 1931. V. 10. P. 115–200.
21. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1966.
22. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия;
Квинский Университет, Кингстон, Канада

Поступила в редакцию
25.08.1997