Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Буаве, П. В. Парамонов, Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 4, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:07:12

УДК 517.538.5+517.956.2

А. Бовен, П. В. Парамонов

Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений

Для заданного однородного эллиптического дифференциального оператора L в частных производных с постоянными коэффициентами и класса функций (струй-распределений), определенных на замкнутом, не обязательно компактном, подмножестве в $\mathbb{R}^n$ и локально принадлежащих данному банахову пространству V , исследуются аппроксимации в норме V функций этого класса целыми и мероморфными решениями уравнения $Lu = 0$. Доказываются теоремы типа Рунге, Мергеляна, Рот и Аракеяна для широкого класса банаховых пространств V и операторов L , при этом получается большинство известных ранее обобщений этих теорем, а также новые результаты.

Библиография: 30 названий.

§ 1. Введение

Классическая аппроксимационная теорема Рунге [1] общеизвестна. В 1938 г. А. Рот [2] получила следующее обобщение этой теоремы:

ТЕОРЕМА (Р). Пусть F – замкнутое (не обязательно компактное) подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, f – голоморфная в (некоторой) окрестности F функция. Тогда f равномерно на F (с любой точностью) приближается мероморфными функциями с полюсами вне F . Если, кроме того, $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ связно и локально связно ($\overline{\mathbb{C}}$ – сфера Римана), то f равномерно на F приближается целыми функциями.

Один из наиболее сильных результатов в этом направлении принадлежит Н. У. Аракеяну [3]:

ТЕОРЕМА (А). Пусть F – замкнутое подмножество в $\mathbb{C}$. Следующие условия (на F) эквивалентны:

- (а) всякая функция, голоморфная в окрестности F , приближается равномерно на F целыми функциями;
- (б) всякая функция, непрерывная на множестве F и голоморфная в его внутренности F° , приближается целыми функциями равномерно на F ;
- (с) множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ связно и локально связно.

Работа первого автора поддержана грантом NSERC(Canada).

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-01240 и № 96-15-96846) и INTAS (грант № 930047).

Отметим, что для компактов F множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ всегда локально связно, так что в этом случае теорема (Р) и часть (с) $\Rightarrow$ (а) теоремы (А) фактически представляют собой утверждения теоремы Рунге, а часть (b) $\Leftrightarrow$ (с) теоремы (А) есть утверждение известной теоремы С. Н. Мергеляна [4]. В приведенных теоремах аппроксимации осуществляются в стандартной (равномерной) норме пространства $BC(F)$ непрерывных и ограниченных на F функций (при этом сами приближаемые функции не обязательно ограничены), а приближающие функции являются глобальными (мероморфными и целыми) решениями (эллиптического, в частных производных) уравнения Коши–Римана $\partial f / \partial \bar{z} = 0$.

В настоящей работе мы будем рассматривать весьма общие постановки аппроксимационных задач в духе работ [5] и [6]. Наш первый основной результат (§3, теорема 1) представляет собой непосредственный аналог теоремы (Р) (о других ее обобщениях см. [7] и литературу в этой работе). В качестве приближающих функций берутся глобально определенные “ L -мероморфные” функции (см. определения в п. 2.3), а классы приближаемых функций (струй–распределений по Уитни) определены на замкнутых (не обязательно компактных) подмножествах F в $\mathbb{R}^n$. Аппроксимации осуществляются в банаховых пространствах $(V, \|\cdot\|)$, удовлетворяющих определенным, на наш взгляд весьма естественным, условиям (см. пп. 2.1 и 2.2). Отметим, что доказательство теоремы 1 базируется на локализационной технике, предложенной в [6]. В качестве следствия нашего (L -мероморфного) аналога теоремы (Р) и [6, теорема 3] мы получаем (см. п. 4.2, предложение 1) соответствующую редукционную теорему об аппроксимации для классов функций (названную так, поскольку она “редуцирует”, т.е. сводит общую задачу к локальной), которую во многих случаях удается сформулировать в терминах соответствующих емкостей в духе критериев А. Г. Витушкина [8] или даже в чисто геометрических терминах (см. п. 4.2, следствие 2 и п. 4.3, теорема 4).

В теореме 3 из §4 мы приводим точное условие (условие (N)) на пару (L, V) , при котором достаточное условие аппроксимации целыми функциями в теореме 1 является одновременно и необходимым, т.е. для этих (L, V) имеет место аналог утверждения (a) $\Leftrightarrow$ (с) теоремы (А). Последнее позволяет получить также ряд новых аналогов утверждения (b) $\Leftrightarrow$ (с) этой теоремы (см. §4, теорема 4). В заключение §4 мы приводим конкретные примеры, а также обсуждаем взаимосвязь между условием (N), порядком банахова пространства V и порядком оператора L . Так, в нашу схему укладывается случай равномерных приближений голоморфными функциями [3], но не укладываются равномерные гармонические аппроксимации (см. [9]). Здесь следует упомянуть, что в отличие от большой серии работ, посвященных обобщениям теоремы Рунге (см. [7], [10], [11] и др.), авторам известны всего несколько работ, в которых получены аналоги или обобщения теоремы (А). Приведем их: [12]–[14] (для оператора Коши–Римана и Lip_α , C^m , ВМО норм), а также [9] и [15] (для лапласиана и равномерной нормы).

Коротко цель этой работы можно изложить так. Для широкого класса операторов L и пространств V задачи об аппроксимации функций (струй–распределений) классов $V_{\text{loc}}(F)$ (где F – замкнуто в $\mathbb{R}^n$) L -мероморфными и L -целыми функциями в нормах пространств $V(F)$ (см. п. 2.1) удастся единым методом свести к задачам аппроксимации функций классов $V(K)$ на компактах K в нормах пространств $V(K)$ функциями u , удовлетворяющими уравнению $Lu = 0$ в (зависящей от u) окрестности множества K . Последняя задача, в свою очередь, уже решена для многих

конкретных пространств V и операторов L (см. литературу в [16]).

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Банаховы пространства V и $V(F)$. Следуя [6], введем в рассмотрение банахово пространство V с нормой $\|\cdot\|$, которое содержит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv C_0^\infty$ (пространство основных функций в $\mathbb{R}^n$) и само содержится в $(C_0^\infty)^*$ (пространстве распределений). Предположим также, что V наделено структурой топологического C_0^∞ -подмодуля в $(C_0^\infty)^*$. Последнее означает, что при всех $f \in V$ и $\varphi \in C_0^\infty$ имеет место включение $\varphi f \in V$ (т.е. V полулокально в смысле Хёрмандера [17, определение 2.3.1]), причем

$$\|\varphi f\| \leq C(\varphi)\|f\|, \quad (1)$$

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C(\varphi)\|f\|, \quad (2)$$

где $\langle f, \varphi \rangle$ означает действие распределения f на основную функцию φ , а константа $C(\varphi)$ не зависит от f .

Отметим, что из указанных свойств вытекает непрерывность вложений $C_0^\infty \hookrightarrow V$ и $V \hookrightarrow (C_0^\infty)^*$. Действительно, если $\|f_n\| \rightarrow 0$, $f_n \in V$, то из (2) следует, что $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow 0$ для любого $\varphi \in C_0^\infty$, т.е. вложение $V \hookrightarrow (C_0^\infty)^*$ непрерывно в $*$ -слабой топологии пространства $(C_0^\infty)^*$. Далее, если $\varphi_n \rightarrow 0$ в C_0^∞ , причем $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$ в V , то $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$, откуда $\varphi = 0$. По теореме о замкнутом графике для LF-пространств [18, гл. 3, теорема 10] вложение $C_0^\infty \hookrightarrow V$ также является непрерывным. То, что C_0^∞ является LF-пространством, можно найти, например, в [19, гл. 5, § 4].

Для замкнутого множества F в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $I(F)$ замыкание в V семейства тех элементов $f \in V$, носители которых (рассматриваемые в смысле теории распределений и обозначаемые, соответственно, $\text{supp } f$) не пересекаются с F . Банахово пространство $V(F) = V/I(F)$, наделенное факторнормой, рассматривается нами как наиболее естественная (типа Уитни) версия “сужения” V на F (см. [20, гл. 6]). Через $\|f\|_F$ обозначается норма класса эквивалентности (струи) $f_{(F)} := f + I(F)$ в $V(F)$ распределения $f \in V$.

Для произвольного открытого множества D в $\mathbb{R}^n$ положим

$$V_{\text{loc}}(D) = \{f \in (C_0^\infty(D))^* : f\varphi \in V \text{ для всех } \varphi \in C_0^\infty(D)\}.$$

При этом φ и $f\varphi$ полагаются равными нулю всюду вне D .

Через V_{loc} будем обозначать пространство $V_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. В $V_{\text{loc}}(D)$ естественным образом вводится топология Фреше (см. [6, с. 253], где это сделано для случая V_{loc}). Для замкнутого множества F определим $V_{\text{loc}}(F) = V_{\text{loc}}/J(F)$, где $J(F)$ есть замыкание в V_{loc} класса распределений с носителями вне F . Пространство $V_{\text{loc}}(F)$ также рассматривается с соответствующей фактортопологией (Фреше). Для $f \in V_{\text{loc}}$ положим $f_{(F), \text{loc}} := f + J(F)$.

Если D является окрестностью F , то каждое распределение $h \in V_{\text{loc}}(D)$ естественным образом определяет элемент (струю) $h_{(F), \text{loc}}$ в $V_{\text{loc}}(F)$, где $h_{(F), \text{loc}}$ есть замыкание в V_{loc} семейства функций $f \in V_{\text{loc}}$, удовлетворяющих условию $f = h$ (как распределения) в некоторой (зависящей от f) окрестности F . В частности,

это имеет смысл для всех $h \in C^\infty(D) \subset V_{\text{loc}}(D)$. Для $f_{(F),\text{loc}} \in V_{\text{loc}}(F)$ будем по определению считать, что $f_{(F),\text{loc}} \in V(F)$ (для краткости пишем $f \in V(F)$), если $V \cap f_{(F),\text{loc}} \neq \emptyset$. Для таких $f_{(F),\text{loc}}$ положим $\|f_{(F),\text{loc}}\|_F$ (или короче, $\|f\|_F$) равным $\|g\|_F$, где $g \in V \cap f_{(F),\text{loc}}$.

Докажем, что $\|f_{(F),\text{loc}}\|_F$ определена корректно. Для этого достаточно установить, что равенство

$$V \cap J(F) = I(F)$$

справедливо для всех замкнутых множеств F . Зафиксируем некоторое локально конечное разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j=1}^\infty$ в $\mathbb{R}^n$ (здесь B_j — шары, $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j \equiv 1$) и введем $C_j = C(\varphi_j) > 0$ — константы из (1) для $\varphi = \varphi_j$. Тогда для всякой $f \in V_{\text{loc}}$ получим $f\varphi_j \in V$ и

$$\|f\varphi_j\| \leq C_j \|f\|_{\overline{B_j}},$$

что непосредственно следует из определения $\|f\|_{\overline{B_j}}$. Зафиксируем произвольные замкнутое F , $h \in V \cap J(F)$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $h \in J(F)$, то для каждого j можно найти $h_j \in V_{\text{loc}}$, удовлетворяющую условиям $h_j = 0$ в окрестности F и

$$\|h - h_j\|_{\overline{B_j}} < \frac{\varepsilon}{2^j C_j},$$

так что

$$\|h\varphi_j - h_j\varphi_j\| < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Таким образом, распределение $h_\varepsilon = \sum_{j=1}^\infty h_j\varphi_j$ принадлежит V_{loc} , $h_\varepsilon = 0$ в окрестности F и $\|h - h_\varepsilon\| \leq \sum_{j=1}^\infty \|h\varphi_j - h_j\varphi_j\| < \varepsilon$. В частности, $h_\varepsilon \in V$, откуда $h_\varepsilon \in I(F)$ и, следовательно, $h \in I(F)$.

Полезно отметить также следующий факт. Если $f \in V_{\text{loc}}$ и $f_{(F),\text{loc}} \in V(F)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $g_\varepsilon \in V$, удовлетворяющая условиям $f = g_\varepsilon$ в некоторой окрестности F и $\|g_\varepsilon\| \leq \|f\|_F + \varepsilon$. Действительно, так как $f_{(F),\text{loc}} \in V(F)$, то найдется $g \in V$ такая, что $\|g\| \leq \|f\|_F + \varepsilon/2$ и $h = f - g \in J(F)$. По аналогии с доказанным выше мы можем найти $h_\varepsilon \in V_{\text{loc}}$ такое, что $h_\varepsilon = 0$ в окрестности F , $h_\varepsilon - h \in V$ и $\|h_\varepsilon - h\| < \varepsilon/2$. Искомое g_ε имеет вид $f - h_\varepsilon$.

2.2. Эллиптический оператор L . Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$, положим $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ при $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а также $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$.

Обозначим через $B(a, \delta)$ (соответственно, $\overline{B}(a, \delta)$) открытый (соответственно, замкнутый) шар с центром $a \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $\delta > 0$. Если $B = B(a, \delta)$ и $\theta > 0$, то положим $\theta B = B(a, \theta\delta)$ и $\theta \overline{B} = \overline{B}(a, \theta\delta)$.

Всюду в этой работе через $L(\xi) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, обозначается какой-либо фиксированный однородный полином степени r с постоянными комплексными коэффициентами, удовлетворяющий условию эллиптичности $L(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \neq 0$. Мы ассоциируем с $L(\xi)$ однородный эллиптический оператор L порядка r :

$$L = L(\partial) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Пусть Φ – специальное фундаментальное решение для L , приведенное, например, в [21] или [6, с. 254], $\varphi \in C_0^\infty$. *Локализационный оператор Витушкина* $\mathcal{V}_\varphi: (C_0^\infty)^* \rightarrow (C_0^\infty)^*$, ассоциированный с L и φ , определим по формуле $\mathcal{V}_\varphi f = \Phi * (\varphi Lf)$, в которой “ $*$ ” означает оператор свертки. Мы потребуем, чтобы для любой функции $\varphi \in C_0^\infty$ оператор $\mathcal{V}_\varphi$ был инвариантным на V_{loc} , т.е. непрерывно отображал V_{loc} в V_{loc} . Последнее означает, что если B – шар, для которого $\text{supp}(\varphi) \subset B$, то для всякой $f \in V_{\text{loc}}$ имеет место включение $\mathcal{V}_\varphi f \in V_{\text{loc}}$ и

$$\|\mathcal{V}_\varphi f\|_{\overline{B}} \leq C(\varphi, B) \|f\|_{\overline{B}}, \quad (3)$$

где $C(\varphi, B)$ не зависит от f .

Отметим, что последнее условие выполняется для любого (из рассматриваемых) L и всякого пространства V , локально эквивалентного какому-либо классическому пространству функций в $\mathbb{R}^n$ (см. [5], [6]).

Нам будет необходимо еще одно условие, связывающее L и V . А именно, должны найтись $p \geq 0$, $R_0 > 0$ и положительная функция $\varepsilon(R)$, определенная на $[R_0, \infty)$, $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, такие, что для любых $R \geq R_0$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \geq p$, справедлива оценка

$$\|\partial^\alpha \Phi(x)\|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)} \leq \alpha! (\varepsilon(R))^{|\alpha|}. \quad (4)$$

В частности, $\partial^\alpha \Phi \in V(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R))$ при $|\alpha| \geq p$. Ряд примеров, связанных с условием (4), см. в [6, с. 253–254]. Из условий (1)–(4) вытекает “специальный принцип максимума”, сформулированный в лемме 1 (он и будет использоваться вместо условия (4)).

2.3. L -аналитические и L -мероморфные функции. Пусть D – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $L(D)$ класс распределений f в D , для которых $Lf = 0$ в D в смысле теории распределений. Хорошо известно (лемма Вейля), что $L(D) \hookrightarrow C^\infty(D)$, откуда $L(D) \subset V_{\text{loc}}(D)$. Далее, если $\{f_m\}$ – последовательность в $L(D)$ такая, что $f_m \rightarrow f$ в $V_{\text{loc}}(D)$ при $m \rightarrow \infty$, то $f \in L(D)$, поскольку сходимость в $V_{\text{loc}}(D)$ сильнее сходимости в $(C_0^\infty)^*$, а для нее последнее утверждение выполняется. Функции из $L(D)$ и $L(\mathbb{R}^n)$ будем называть *L -аналитическими* в D и *L -целыми*, соответственно.

Будем говорить, что функция g является *L -мероморфной* в $\mathbb{R}^n$, если $\text{supp}(Lg)$ дискретен, а для любой $a \in \text{supp}(Lg)$ найдутся h , L -аналитическая в окрестности точки a , и $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$, $0 \leq |\alpha| \leq k < \infty$, такие, что

$$g(x) = h(x) + \sum_{|\alpha| \leq k} \lambda_\alpha \partial^\alpha \Phi(x - a)$$

в некоторой окрестности точки a . Точки $a \in \text{supp}(Lg)$ будут называться *полюсами функции g* .

2.4. Ряды Тейлора и Лорана. Пусть $B = B(a, \delta)$, $g \in L(B)$. Хорошо известно, что g вещественно-аналитична в B и, кроме того, найдется $\theta_1 \in (0, 1)$, зависящая только от L , такая, что

$$g(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\partial^\alpha g(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha, \quad x \in \theta_1 B, \quad (5)$$

причем этот ряд сходится в $C^\infty(\theta_1 B)$. Заметим, что однородные составляющие ряда (5) являются L -аналитическими полиномами. В самом деле, положим

$$P_m(x - a) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha g(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha.$$

Пусть p – степень многочлена LP_m и β – мультииндекс ранга $|\beta| = p$. В шаре $\theta_1 B$ выполнено

$$0 = L(\partial^\beta g) = L\left(\sum_j \partial^\beta P_j\right) = \sum_j \partial^\beta LP_j = (\partial^\beta LP_m)(0) + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые высших порядков. Согласно выбору β $\partial^\beta LP_m$ есть константа, т.е. $\partial^\beta(LP_m) = 0$ при $|\beta| = p$. Следовательно, $LP_m \equiv 0$.

Напомним, что вложение $C_0^\infty \hookrightarrow V$ непрерывно. Отсюда и из (5) следует, что для каждого $\theta \in (0, \theta_1)$ и любого положительного ε найдется L -аналитический полином P_ε такой, что

$$\|g - P_\varepsilon\|_{\theta\overline{B}} < \varepsilon. \quad (6)$$

Напомним также (см. [6], [7, с. 239]), что найдется $k > 1$ такое, что если T – распределение с компактным носителем в $B(a, \delta)$ и $f = \Phi * T$, то при $|x - a| > k\delta$ справедливо разложение *лорановского типа*:

$$f(x) = \langle T(y), \Phi(x - y) \rangle = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \Phi(x - a),$$

где $c_\alpha = (-1)^{|\alpha|} (\alpha!)^{-1} \langle T(y), (y - a)^\alpha \rangle$, причем этот ряд сходится в смысле $C^\infty(|x - a| > k\delta)$.

§ 3. Теорема типа Рунге и достаточные условия аппроксимации L -целыми функциями

3.1. Теорема типа Рунге. Обозначим через $\mathbb{R}_\infty^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ одноточечную компактификацию $\mathbb{R}^n$. Замкнутое подмножество F в $\mathbb{R}^n$ назовем *РКЛ-множеством*, если $\mathbb{R}_\infty^n \setminus F$ является связным и локально связным. Впервые такие множества (в контексте теории приближений) были введены в работах Рот [2], М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [22], однако в литературе их часто именуют K -множествами (подробнее об этих множествах см. [23, гл. 4], а также § 4, замечание 4).

Теперь мы готовы сформулировать наш первый основной результат – аналог теоремы (Р) § 1 об аппроксимациях L -мероморфными и L -целыми функциями.

ТЕОРЕМА 1. Пусть пара (L, V) удовлетворяет условиям (1)–(4), F – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и f является L -аналитической в окрестности F . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует L -мероморфная функция g с полюсами вне F такая, что $(f_{(F), \text{loc}} - g_{(F), \text{loc}}) \in V(F)$ и

$$\|f - g\|_F < \varepsilon.$$

Более того, если F – РКЛ-множество, то в качестве g может быть выбрана L -целая функция.

Непосредственным следствием теоремы 1 и [6, теорема 3] является

ТЕОРЕМА 2. Пусть пара (L, V) удовлетворяет условиям (1)–(4), F – замкнуто в $\mathbb{R}^n$, $f \in V_{\text{loc}}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) для произвольного положительного ε найдется L -мероморфная функция g с полюсами вне F такая, что $(f_{(F), \text{loc}} - g_{(F), \text{loc}}) \in V(F)$ и $\|f - g\|_F < \varepsilon$;
- (ii) для любого шара B и положительного ε найдется функция g такая, что $Lg = 0$ в некоторой окрестности $F \cap \overline{B}$ и $\|f - g\|_{F \cap \overline{B}} < \varepsilon$;
- (iii) предыдущее утверждение верно для каждого шара из некоторого локально конечного семейства шаров $\{B'_j\}$, покрывающего F .

Уточним, что при получении (iii) $\Rightarrow$ (i) последней теоремы мы модифицируем доказательство теоремы 3 из [6, с. 257] следующим образом. В самом начале этого доказательства вместо семейства конгруэнтных шаров $\{B_j\}$ мы выбираем такое локально конечное покрытие $\{B_j\}$ всего $\mathbb{R}^n$ (и соответствующее подчиненное ему разбиение единицы $\{\varphi_j\}$), что при каждом j выполняется $\overline{B}_j \cap F = \emptyset$ или $\overline{B}_j \subset B'_s$ при некотором s . Остальная часть доказательства остается без изменений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 2 нетрудно получить соответствующую аппроксимационную теорему для классов функций (струй) (см. п. 4.2, предложение 1). Во многих конкретных случаях ее удастся установить в терминах соответствующих емкостей и (или) обхватов по Хаусдорфу как аналог теорем Витушкина [8] и Нерсисяна [24] (см. п. 4.3, теорема 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что приближения, имеющие место в теореме 1 и теореме 2 (i), вообще говоря, могут быть более сильными, чем в топологии (Фреше) пространства $V_{\text{loc}}(F)$. С другой стороны, в теореме 2 утверждается, что при соответствующих условиях эти типы приближений ((i) и (ii) в теореме 2) эквивалентны. Далее, условие (4) в теоремах 1 и 2 можно отбросить, если F – компакт.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для широкого класса пар (L, V) условие на F быть РКЛ-множеством является не только достаточным, но также и необходимым для возможности приближения всякой L -аналитической в окрестности F функции L -целыми функциями в норме $V(F)$. Для таких (L, V) , подпадающих, кроме того, под описание в замечании 1, удастся получить (п. 4.3, теорема 4) полную характеристику LV -множеств Аракеяна, т.е. обобщить на эти случаи основные результаты работ [3], [12]–[14] (в которых $L = \overline{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$ – оператор Коши–Римана в $\mathbb{C}$).

3.2. Доказательство теоремы 1. Из условий (1)–(4) вытекает следующая лемма, доказанная в [6].

ЛЕММА 1. Пусть B – открытый шар и f – распределение из V_{loc} такое, что $Lf = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B$ и $f(x) = O(|x|^{-d})$ при $x \rightarrow \infty$, где $d = \max\{p+n-r; 1\}$, p – целое число из условия (4). Тогда $f \in V$ и $\|f\| \leq C\|f\|_{3\overline{B}}$, где C – константа, не зависящая от f .

Следующее утверждение использовалось без доказательства в [6] при получении предыдущей леммы. Для полноты изложения мы предпочли привести это доказательство, тем более что оно с минимальными изменениями подойдет и для леммы 5.

ЛЕММА 2. Пусть V – банахово пространство с условием (1). Тогда для всякого открытого шара B в $\mathbb{R}^n$ найдется константа $A = A(V, B) > 0$ такая, что из условий $f \in V_{\text{loc}}$ и $f \in V(\mathbb{R}^n \setminus B)$ вытекает, что $f \in V$ и

$$\|f\| \leq A(\|f\|_{2\overline{B}} + \|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus B}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\varphi \in C_0^\infty(2B)$, $\varphi = 1$ в некоторой окрестности шара $\overline{B}$, и положим $f_1 = \varphi f$, $f_2 = (1 - \varphi)f = f - \varphi f$. Ясно, что $f_1 \in V$. Покажем, что f_2 тоже принадлежит V . Действительно, поскольку $f \in V(\mathbb{R}^n \setminus B)$, найдется $g \in V$ такая, что $g = f$ в окрестности $\mathbb{R}^n \setminus B$ и $\|g\| \leq 2\|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus B}$ (см. п. 2.1). Следовательно, $f_2 = (1 - \varphi)g = g - \varphi g \in V$, что и требовалось.

Теперь заметим, что f_1 на самом деле определяется также и элементом $f_{(2\overline{B})}$. Поэтому из определения элемента $f_{(2\overline{B})}$ мы можем найти $h \in V$ такую, что $h_{(2\overline{B})} = f_{(2\overline{B})}$ и $\|h\| \leq 2\|f\|_{2\overline{B}}$. Таким образом, $f_1 = \varphi h$. Из (1) получаем

$$\|f_1\| \leq C(\varphi)\|h\| \leq A_1 C(\varphi)\|f\|_{2\overline{B}}.$$

По аналогии,

$$\|f_2\| = \|(1 - \varphi)g\| \leq \|g\| + C(\varphi)\|g\| \leq A_2(1 + C(\varphi))\|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus B}.$$

Остается вспомнить, что $f = f_1 + f_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть (L, V) удовлетворяет условиям (1)–(4), T – распределение, $\text{supp } T \subset B(a, \delta)$, $f = \Phi * T$ и

$$f_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \Phi(x - a)$$

– частичные суммы разложения Лорана функции f вне $\overline{B}(a, k\delta)$ (см. п. 2.4). Тогда найдется такое натуральное M , что для всех $m > M$ имеем $f - f_m \in V(\mathbb{R}^n \setminus B(a, 2k\delta))$ и

$$\|f - f_m\|_{\mathbb{R}^n \setminus B(a, 2k\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала напомним, что $f_m \rightarrow f$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a, k\delta))$. Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таково, что

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{в окрестности } \overline{B}(a, k\delta), \\ 1 & \text{в окрестности } \mathbb{R}^n \setminus B(a, 2k\delta). \end{cases}$$

Имеем $\psi f_m \rightarrow \psi f$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f_m - f\|_{\mathbb{R}^n \setminus B(a, 2k\delta)} \leq \|\psi(f_m - f)\|.$$

Кроме того, заметим, что для достаточно больших m распределение $\psi(f_m - f)$ удовлетворяет условиям леммы 1, откуда $\psi(f_m - f) \in V$ и

$$\|\psi(f_m - f)\| \leq C\|\psi(f_m - f)\|_{\overline{B}(a, 6k\delta)}.$$

Для завершения доказательства леммы 3 остается учесть, что

$$\|\psi(f_m - f)\|_{\overline{B}(a, 6k\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty,$$

так как топология в C^∞ сильнее, чем в V_{loc} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть f является L -аналитической в окрестности U множества F . Пусть U_1 — такая окрестность множества F , что $\overline{U}_1 \subset U$. Продолжим f до функции (также обозначаемой через f) из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы она осталась L -аналитической в окрестности множества $\overline{U}_1$. Напомним, что θ и k — константы из п. 2.4. Найдем последовательность пар $\{B(a_j, \delta_j), \varphi_j\}_{j=1}^\infty$, где семейство шаров $\{B_j\} = \{B(a_j, \delta_j)\}$ локально конечно, $2k\overline{B}_j \cap F = \emptyset$, $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, причем $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j = 1$ в некоторой окрестности U_2 множества $\mathbb{R}^n \setminus U_1$.

Определим $f_j = \mathcal{V}_{\varphi_j} f = \Phi * (\varphi_j Lf)$. Каждое f_j принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. При $l \geq 1$ положим $J_l = \{j : B_j \cap B(0, l/\theta) \neq \emptyset\}$. Отметим, что

$$L\left(f - \sum_{j \in J_1} f_j\right) = Lf - \sum_{j \in J_1} \varphi_j Lf = Lf \left(1 - \sum_{j \in J_1} \varphi_j\right) = 0$$

(т.е. $f - \sum_{j \in J_1} f_j$ является L -аналитической) в $B(0, 1/\theta)$. Следовательно (см. (6)), найдется L -аналитический полином P_1 такой, что

$$\left\|f - \left(\sum_{J_1} f_j\right) - P_1\right\|_{\overline{B}(0,1)} < \frac{1}{2}.$$

Далее, поскольку $f - (\sum_{J_1} f_j) - P_1 - (\sum_{J_2 \setminus J_1} f_j)$ является L -аналитической в $B(0, 2/\theta)$, найдется такой L -аналитический полином P_2 , что

$$\left\|f - \left(\sum_{J_1} f_j\right) - P_1 - \left(\sum_{J_2 \setminus J_1} f_j\right) - P_2\right\|_{\overline{B}(0,2)} < \frac{1}{2^2}.$$

По индукции найдем такие L -аналитические полиномы P_l , что

$$\left\|f - \left(\sum_{J_1} f_j\right) - P_1 - \left(\sum_{J_2 \setminus J_1} f_j\right) - P_2 - \dots - \left(\sum_{J_l \setminus J_{l-1}} f_j\right) - P_l\right\|_{\overline{B}(0,l)} < \frac{1}{2^l},$$

так что равенство

$$f = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{J_l \setminus J_{l-1}} f_j + P_l\right)$$

справедливо в V_{loc} .

Каждое f_j разложим в ряд типа Лорана (см. п. 2.4)

$$f_j(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha^j \partial^\alpha \Phi(x - a_j),$$

сходящийся вне $k\overline{B}_j$ и, следовательно, в окрестности F . По лемме 3 для каждого $\eta_j > 0$ найдется m_j такое, что для

$$g_j(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m_j} c_\alpha^j \partial^\alpha \Phi(x - a_j)$$

имеем $(f_j - g_j) \in V(\mathbb{R}^n \setminus 2kB_j)$ и $\|g_j - f_j\|_{\mathbb{R}^n \setminus 2kB_j} < \eta_j$.

Положим $F_1 = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j (2kB_j)$. Тогда $F \subset F_1$ и для всех j справедливо $(f_j - g_j) \in V(F_1)$ и $\|f_j - g_j\|_{F_1} < \eta_j$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем последовательность $\{\eta_j\}$, $\eta_j > 0$, так, чтобы $\sum_j \eta_j < \varepsilon$. Обозначим

$$g = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{J_l \setminus J_{l-1}} g_j + P_l \right),$$

где $J_0 = \emptyset$.

Поскольку для каждого $m \geq 1$ ряд

$$\sum_{l=m+1}^{+\infty} \left(\sum_{J_l \setminus J_{l-1}} g_j + P_l \right)$$

сходится в $V(\overline{B}(0, m))$, то g есть L -мероморфная функция с полюсами (возможно только) в a_j , $j = 1, 2, \dots$.

Более того, $g \in V_{\text{loc}}(F_1)$ и

$$(f - g)_{(F_1), \text{loc}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{J_l \setminus J_{l-1}} (f_j - g_j)_{(F_1), \text{loc}} \right).$$

Но тогда $f - g \in V(F)$ и

$$\|f - g\|_F < \varepsilon,$$

поскольку $(f - g)_{(F), \text{loc}}$ определяется элементом

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{J_l \setminus J_{l-1}} \Psi_j \right),$$

где $\Psi_j \in V$ таковы, что $(\Psi_j)_{(\mathbb{R}^n \setminus 2kB_j)} = (f_j - g_j)_{(\mathbb{R}^n \setminus 2kB_j)}$ и $\|\Psi_j\| \leq \eta_j$. Первая часть теоремы 1 доказана.

Предположим теперь, что F есть РКЛ-множество, т.е. $\mathbb{R}_{\infty}^n \setminus F$ связно и локально связно. Мы должны найти L -целую функцию $h \in V_{\text{loc}}$ такую, что

$$\|g - h\|_F < \varepsilon.$$

Пусть $\{a_j\}_{j \geq 1}$ — последовательность полюсов функции g . Она лежит в $\mathbb{R}^n \setminus F$ и не имеет предельных точек в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathbb{R}_{\infty}^n \setminus F$ связно и локально связно в ∞ , найдутся пути σ_j , соединяющие a_j и ∞ , $\sigma_j \subset \mathbb{R}^n \setminus F$, причем семейство $\{\sigma_j\}$ локально конечно в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем j и для $m = 0, 1, \dots$ построим $B_{j_m} = B(a_{j_m}, 2kr_{j_m}) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ такие, что $a_{j_m} \in \sigma_j$, $a_{j_0} = a_j$, $a_{j_m} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, $|a_{j_m} - a_{j_{m+1}}| < r_{j_{m+1}} < 1$, семейство шаров B_{j_m} локально конечно в $\mathbb{R}^n$, причем $\overline{G_j} \cap F = \emptyset$, где $G_j = \bigcup_{m=0}^{\infty} B_{j_m}$. Мы можем выбрать эти шары так, что $\{G_j\}$ тоже локально конечно в $\mathbb{R}^n$.

Положим $h_0 = g$. Построим последовательность функций h_j , L -мероморфных в $\mathbb{R}^n$, так, чтобы при каждом $j = 1, 2, \dots$ функция h_j имела те же полюсы (и сингулярные части), что и h_{j-1} , кроме точки a_j , где h_j является L -аналитической, причем

$$\|h_{j-1} - h_j\|_{\mathbb{R}^n \setminus G_j} < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Если такая последовательность найдена, то $h = \lim_{j \rightarrow \infty} h_j$ есть L -целая функция. Действительно, по построению (напомним, что $\{G_j\}$ локально конечно) имеем $G_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, поэтому $\{h_j\}$ есть последовательность Коши в $V(\overline{B}(0, R))$ при любом $R > 0$, остается воспользоваться тем (см. п. 2.3), что сходимость в V_{loc} сохраняет L -аналитичность. Более того, мы имеем $\|g - h\|_F < \varepsilon$, что и требовалось.

Для построения h_j положим $h_0 = g$ и допустим, что h_l уже построены для $l \leq j-1$. Пусть s_0 — сингулярная часть функции h_{j-1} в точке $a_j = a_{j_0}$. По лемме 3 найдется L -мероморфная функция s_1 с единственной особой точкой a_{j_1} , удовлетворяющая условию

$$\|s_0 - s_1\|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{j_1}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

По индукции построим L -мероморфную функцию s_m с единственной особенностью в a_{j_m} , удовлетворяющую условию

$$\|s_{m-1} - s_m\|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{j_m}} < \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Наконец, положим

$$h_j = h_{j-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (s_m - s_{m-1}).$$

Функция h_j — искомая. Теорема 1 доказана.

§ 4. О необходимых условиях приближаемости L -цельми функциями

4.1. Основной результат и его доказательство. В пп. 4.1 и 4.2 мы будем предполагать (или проверять), что наше пространство V и оператор L (с фундаментальным решением Φ в $\mathbb{R}^n$) удовлетворяют условиям (1) — (4), приведенным в § 2.

Для замкнутого множества F в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $M_{LV}(F)$ (соответственно, $E_{LV}(F)$) класс всех $f_{(F), \text{loc}} \in V_{\text{loc}}(F)$, которые удовлетворяют следующему условию: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется функция g , L -мероморфная в $\mathbb{R}^n$ с полюсами вне F (соответственно, L -целая), такая, что $f - g \in V(F)$ и $\|f - g\|_F < \varepsilon$. Введем еще пространство $V_L(F) = V_{\text{loc}}(F) \cap L(F^\circ)$, где F° — внутренность множества F . По теореме 1 $M_{LV}(F)$ есть замыкание в $V_{\text{loc}}(F)$ пространства $\{h_{(F), \text{loc}} \in V_{\text{loc}}(F) : h \text{ является } L\text{-аналитической в некоторой (зависящей от } h) \text{ окрестности } F\}$. Более того, если F есть РКЛ-множество, то $M_{LV}(F) = E_{LV}(F)$.

Множества F , для которых $V_L(F) = E_{LV}(F)$, будем называть *LV-множествами Аракеяна*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что замкнутое множество F в $\mathbb{R}^n$ является РКЛ-множеством (т.е. множество $G = \mathbb{R}_\infty^n \setminus F$ связно и локально связно), если и только если для каждого $R > 0$ найдется $R' > R$, удовлетворяющее следующему условию: для всякой точки $a \in G$, $R' < |a| < +\infty$, существует непрерывное отображение $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow G$ такое, что $\gamma(0) = a$, $|\gamma(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и $|\gamma(t)| > R$ при всех $t \geq 0$. Более того, для компактов F в $\mathbb{R}^n$ пространство $E_{LV}(F)$ совпадает с $P_{LV}(F)$ – замыканием в $V(F)$ пространства $\{p_{(F)} : p \text{ является } L\text{-аналитическим полиномом}\}$, причем для таких F множество $G = \mathbb{R}_\infty^n \setminus F$ всегда локально связно.

Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\hat{K}$ объединение K и всех его ограниченных компонент (связности) дополнения. Очевидно, что условие $\hat{K} = K$ эквивалентно связности дополнения компакта K . Положим

$$N(K) = \{a \in \hat{K} \setminus K : (\Phi_a)_{(K)} \notin P_{LV}(K)\},$$

где $\Phi_a(x) = \Phi(x - a)$.

УСЛОВИЕ (N). Будем говорить, что пара (L, V) удовлетворяет условию (N) (“незатираемости дыр”), если $N(K) \neq \emptyset$ для всякого компакта K с “дырами”, т.е. такого, что $K \neq \hat{K}$.

Второй основной результат этой работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (L, V) удовлетворяет условиям (1)–(4). Тогда следующие утверждения равносильны:

(i) для всякого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^n$

$$M_{LV}(F) = E_{LV}(F) \iff \{F \text{ есть РКЛ-множество}\};$$

(ii) для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$

$$M_{LV}(K) = P_{LV}(K) \iff \{\mathbb{R}^n \setminus K \text{ связно}\};$$

(iii) пара (L, V) удовлетворяет условию (N).

Таким образом, условие (N) в точности описывает пары (L, V) (со свойствами (1)–(4)), для которых справедлив аналог утверждения (a) $\Leftrightarrow$ (c) теоремы (A). Важно также отметить, что в условии (N) по определению рассматриваются только компактные множества K . Если ограничиться компактами F , то условия (3) и (4) в формулировке последней теоремы можно отбросить.

В качестве приложений теоремы 3 мы получаем аналоги утверждения (b) $\Leftrightarrow$ (c) теоремы (A) для большого класса пар (L, V) (см. п. 4.3, теорема 4).

В доказательстве теоремы 3 используются две следующие леммы, в которых условие (N) не требуется.

ЛЕММА 4. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$ с условием $N(K) \neq \emptyset$ (в частности, $K \neq \hat{K}$). Пусть D – такая ограниченная компонента из $\hat{K} \setminus K$, что $N_D(K) = N(K) \cap D \neq \emptyset$. Тогда $N_D(K)$ открыто и всюду плотно в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, от противного, $N_D(K)$ не является открытым, т.е. найдется $a \in N_D(K)$ такое, что $a_l \rightarrow a$ при $l \rightarrow +\infty$ для некоторой последовательности $\{a_l\} \subset D \setminus N_D(K)$. Тогда найдется такая окрестность U множества K , что $\Phi_{a_l} \rightarrow \Phi_a$ равномерно на $\overline{U}$ при $l \rightarrow +\infty$. При этом $\Phi_{a_l} \rightarrow \Phi_a$ также и в пространстве $C^\infty(U)$ и, следовательно, в $V(K)$ при $l \rightarrow +\infty$. Таким образом, $\Phi_a \in P_{LV}(K)$. Противоречие.

Если, от противного, $N_D(K)$ не плотно в D , то найдется шар $B \subset D \setminus N_D(K)$, в котором $\Phi_b \in P_{LV}(K)$ для каждого $b \in B$. По определению частных производных имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_b(x) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x_i e_i - b) - \Phi(x - b)}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_{b - \Delta x_i e_i}(x) - \Phi_b(x)}{\Delta x_i},$$

где $x \neq b$, $i = 1, \dots, n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}_x^n$. Указанный предел является равномерным на каждом компакте в $\mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, и следовательно (см. выше), этот предел существует также в $V(K)$.

По индукции получим, что $\partial^\alpha \Phi_b \in P_{LV}(K)$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $b \in B$. Используя разложения типа Лорана и метод Рунге (см. доказательство теоремы 1), нетрудно установить, что множество $\{b \in D : \partial^\alpha \Phi_b \in P_{LV}(K) \text{ при всех } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ одновременно открыто и замкнуто в D , т.е. совпадает с D . Последнее противоречит предположению $N_D(K) \neq \emptyset$. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Для каждого шара B в $\mathbb{R}^n$ найдется константа $A = A(V, B) \in (0, +\infty)$ такая, что для любого компакта K и любой $f_{(K)} \in V(K)$ имеем

$$\|f\|_K \leq A(\|f\|_{K \cap 3\overline{B}} + \|f\|_{K \setminus (2B)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 2. Заметим только, что каждый элемент $f_{(K)}$ из $V(K)$ естественно определяет элемент $f_{(K')} \in V(K')$ для любого компакта $K' \subset K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Очевидно, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Установим (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть (ii) верно и K — произвольный компакт, для которого $\hat{K} \neq K$. Из (ii) вытекает, что найдется окрестность U компакта K и $f \in L(U) \setminus P_{LV}(K)$. Мы можем дополнительно предположить, что $f \in C_0^\infty$. Согласно [6, лемма 1] имеем $f = \Phi_*(Lf)$. Пользуясь тем, что римановы суммы интеграла из предыдущей свертки сходятся к нему равномерно на компактах из U , мы получаем, что $f_{(K)}$ приближается (с любой точностью) в $V(K)$ конечными линейными комбинациями элементов $(\Phi_a)_{(K)}$, $a \notin K$. По теореме 1 для каждого $a \notin \hat{K}$ имеем $(\Phi_a)_{(K)} \in P_{LV}(\hat{K}) \subset P_{LV}(K)$. Следовательно, найдется $a \in \hat{K} \setminus K$, для которой $\Phi_a \notin P_{LV}(K)$, что и требовалось.

Остается доказать (iii) $\Rightarrow$ (i). Итак, предположим, что (L, V) удовлетворяет условию (N) (а также (1)–(4)). Включение $(\Leftarrow)$ в (i) справедливо по теореме 1 (независимо от условия (N)). Теперь установим $(\Rightarrow)$ в (i). Пусть F замкнуто в $\mathbb{R}^n$ и $M_{LV}(F) = E_{LV}(F)$. Необходимо проверить

- (a) $G = \mathbb{R}_\infty^n \setminus F$ связно;
- (b) $G = \mathbb{R}_\infty^n \setminus F$ локально связно в точке ∞

(поскольку в любой точке $a \in G \setminus \{\infty\}$ множество G , очевидно, локально связно).

Докажем (а). Пусть, от противного, G не связно. Тогда G имеет ограниченную (связную, открытую) компоненту D (иначе G была бы связной “через точку” ∞). Выберем какой-либо шар B , содержащий $\overline{D}$, и положим $X = F \cap \overline{B}$. Ясно, что $(\widehat{X} \setminus X) \supset D \neq \emptyset$. Согласно (iii) найдется $a \in \widehat{X} \setminus X$ такое, что $(\Phi_a)_{(X)} \notin P_{LV}(X)$. Поскольку $X \subset F$ и $\widehat{X} \subset \overline{B}$, мы получаем $a \notin F$, откуда $(\Phi_a)_{(F)} \in M_{LV}(F) \setminus E_{LV}(F)$, что противоречит выбору множества F .

Будем доказывать (b) также от противного, модифицируя идею Рот (см. [23, с. 155–156]). Поскольку (а) уже доказано, мы можем предположить, что G связно, но не локально связно в точке ∞ . Из этого предположения (см. замечание 4) следует, что найдется шар $B = B(0, R)$, $R > 0$, такой, что множество $(G \setminus \overline{B}) \setminus \{\infty\}$ содержит бесконечный набор (попарно внешних) ограниченных (открытых) компонент связности D_m , $m = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условию $\text{diam } D_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$ (подробнее см. [23, гл. IV, раздел 2]). Введем $K_m = \partial \widehat{D_m} \setminus D_m$. Так как $\widehat{K_m} = \partial \widehat{D_m}$, то по условию (N) для каждого m найдется $a_m \in D_m$ такое, что $\Phi_{a_m} \notin P_{LV}(K_m)$. По лемме 4 мы вправе выбрать последовательность $\{a_m\}$ так, что $a_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Взяв, если это необходимо, подпоследовательность в $\{D_m, a_m\}$, мы дополнительно потребуем, чтобы было выполнено $|a_m| > 3R$ и $D_m \subset B(0, |a_{m+1}|/2)$ при всех $m \geq 1$. Положим

$$\varepsilon_m = \inf \{ \|\Phi_{a_m} - p\|_{K_m} : p \in P_{LV}(K_m) \}.$$

Заметив, что $\varepsilon_m > 0$, введем $\lambda_m = m/\varepsilon_m$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 1, мы можем найти полиномы Q_m , $m = 1, 2, \dots$, для которых ряд

$$f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} (\lambda_m \Phi_{a_m}(x) - Q_m(x))$$

сходится в C^∞ и, следовательно, равномерно на компактах в $\mathbb{R}^n$. Последнее означает, что для каждого компакта K найдется $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $a_m \notin K$ для всех $m \geq k$ и

$$\sum_{m=k}^{+\infty} (\lambda_m \Phi_{a_m} - Q_m)$$

сходится равномерно (и в C^∞) на K в обычном смысле. Осюда $f \in M_{LV}(F)$ и точки $\{a_m\}$ являются единственно возможными особенностями функции f в $\mathbb{R}^n$. По предположению $M_{LV}(F) = E_{LV}(F)$, поэтому найдется такая L -целая функция h , что $f - h \in V(F)$ и $\|f - h\|_F \leq 1$. Пусть $M = \max\{\|f\|_{3\overline{B}}; \|h\|_{3\overline{B}}\}$, так что $M < +\infty$. При всех $m \geq 1$ справедлива оценка

$$\|f - h\|_F = \left\| \lambda_m \Phi_{a_m} - Q_m + \sum_{l \neq m} (\lambda_l \Phi_{a_l} - Q_l) - h \right\|_F \leq 1.$$

Мы утверждаем, что функция

$$h_m = Q_m + h - \sum_{l \neq m} (\lambda_l \Phi_{a_l} - Q_l)$$

принадлежит $P_{LV}(K_m)$. Действительно, поскольку $K_m \subset B(0, |a_l|/2)$ при всех $l > m$, то по теореме 1 достаточно будет установить, что для каждого $l = 1, 2, \dots, m-1$ справедливо $\Phi_{a_l} \in P_{LV}(K_m)$. На самом деле мы докажем, что $\Phi_{a_l} \in P_{LV}(\widehat{K_m})$, показав, что $a_l \notin \widehat{K_m}$.

Напомним, что все компоненты множества $G \setminus \{\infty\}$ неограничены (так как G связно), поэтому для каждой точки a_l , $l < m$, найдется путь γ_l , лежащий вне $\overline{D_m}$, с концевыми точками a_l и a_{m+1} . Этот путь, к примеру, может идти из точки a_l к 0, оставаясь в $D_l \cup (\partial D_l \cap \partial B \setminus F) \cup B$, а затем из 0 к a_{m+1} , оставаясь в $D_{m+1} \cup (\partial D_{m+1} \cap \partial B \setminus F) \cup B$. Здесь мы используем тот факт, что (при всех m) множество ∂D_m , не являясь подмножеством F , должно содержать некоторый непустой открытый кусок сферы ∂B (иначе D_m — ограниченная компонента дополнения F , что невозможно). Таким образом, путь γ_l принадлежит неограниченной компоненте дополнения множества ∂D_m , т.е. $\gamma_l \cap \widehat{K_m} = \emptyset$ и $B \cap \widehat{K_m} = \emptyset$. Остается воспользоваться теоремой 1.

Теперь покажем, что $K_m \subset (F \cup (\partial B))$ для всех m . Пусть, от противного, это не так, т.е. найдется точка $b \in K_m \setminus F \setminus (\partial B)$. По доказанному $B \cap \widehat{K_m} = \emptyset$, поэтому b не лежит в B . По предположению b не принадлежит также ∂B и F . Таким образом, b должна находиться в одной из компонент D (отличной от D_m) множества $G \setminus \overline{B}$. Ясно, что D может быть только ограниченной (иначе D лежало бы вне ∂D_m , т.е. и вне $\widehat{K_m}$). С другой стороны, если D ограничена, то, рассуждая как и выше (заменяя D_l на D и a_l на b), снова получаем противоречие: $b \notin \widehat{K_m}$.

Наконец, из оценок

$$\|f - h\|_F \leq 1, \quad \|f - h\|_{3\overline{B}} \leq 2M$$

и леммы 5 (для $K = K_m \subset F \cup \partial B$, т.е. $K \setminus (2B) \subset F$) мы получаем

$$\|f - h\|_{K_m} \leq A(2M + 1)$$

или, эквивалентно,

$$\left\| \Phi_{a_m} - \frac{h_m}{\lambda_m} \right\|_{K_m} \leq \frac{A(2M + 1)}{\lambda_m},$$

где A не зависит от m .

Из определения ε_m и того, что $h_m \in P_{LV}(K_m)$, имеем $\varepsilon_m \leq A(2M + 1)/\lambda_m$ при всех $m \geq 1$.

Однако последнее неравенство не может выполняться, так как $\varepsilon_m \lambda_m = m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

4.2. Примеры и следствия. Теперь мы приведем несколько примеров и замечаний, связанных с условием (N).

Обозначим через $BC^m(\mathbb{R}^n)$, $m = 0, 1, \dots$, пространство всех m -раз непрерывно дифференцируемых функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ с (конечной) нормой

$$\|f\|_m = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|,$$

и пусть $C^m(\mathbb{R}^n) = (BC^m(\mathbb{R}^n))_{\text{loc}}$.

ПРИМЕР 1. Пусть $V = BC^0(\mathbb{R}^2)$ и $L = \bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$ – оператор Коши–Римана в $\mathbb{C}_z$. Выполнение условий (1), (2) и (4) проверяется элементарно. Справедливость (3) следует из [8, гл. 2, § 3]. Для удобства читателя установим справедливость условия (N) (см. [23, гл. 2, § 3]).

Пусть K ($K \neq \widehat{K}$) – компакт в $\mathbb{C}$ и D – какая-либо компонента из $\widehat{K} \setminus K$. Докажем большее: $\Phi_a(z) = 1/(\pi(z-a)) \notin P_{LV}(\partial D)$ для всех $a \in D$. Пусть, от противного, $\Phi_a(z) \in P_{LV}(\partial D)$ для некоторого $a \in D$. Тогда найдется последовательность $\{p_m\}$ полиномов комплексного переменного, удовлетворяющая условию $p_m \rightarrow \Phi_a$ равномерно на ∂D при $m \rightarrow \infty$, что эквивалентно

$$\|(z-a)(p_m(z) - \Phi_a(z))\|_{0, \partial D} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Последнее противоречит принципу максимума модуля в D , поскольку

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)(p_m(z) - \Phi_a(z)) = -\frac{1}{\pi}$$

(особенность в точке $z = a$ устранима для функции под знаком предела).

Таким образом, из теоремы 2, теоремы 3 и теоремы Мергеляна [4] вытекает результат теоремы (A) (подробности в следующем примере).

ПРИМЕР 2. Зафиксируем произвольную положительную радиально симметричную функцию $\omega = \omega(z) = \omega(|z|)$ на плоскости $\mathbb{C}$. Пусть V – пространство функций $f \in C^0(\mathbb{C})$, для которых

$$\|f\|_\omega = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|\omega(z) < \infty.$$

Пространство V (с нормой $\|\cdot\|_\omega$) и оператор $L = \bar{\partial}$ удовлетворяют условиям (1), (2), (3) и (N), так как локально норма $\|\cdot\|_\omega$ эквивалентна равномерной.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если вес ω при некотором $q > 0$ удовлетворяет свойству

$$(a) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \omega(z)|z|^{-q} = 0,$$

то для любого замкнутого F в $\mathbb{C}$

$$(b) \quad V_L(F) = E_{LV}(F) \iff M_{LV}(F) = E_{LV}(F) \iff F \text{ есть РКЛ-множество.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [6, теорема 4] условие (a) этого следствия равносильно условию (4). Поскольку всегда выполняется $E_{LV}(F) \subset M_{LV}(F) \subset V_L(F)$, по теореме 3 нам остается доказать, что если F есть РКЛ-множество, то $V_L(F) = M_{LV}(F)$. Последнее вытекает из теоремы 2 и теоремы Мергеляна [4], так как в этом случае для любого замкнутого круга $\bar{B}$ в $\mathbb{C}$ компакт $F \cap \bar{B}$ имеет связное дополнение. Следствие 1 доказано.

Полезно отметить, что в [6, теорема 4] соответствующее условие (a) представляет собой точное условие, при котором справедлива теорема 2 из п. 3.1 (в рамках рассматриваемого примера). Однако в следствии 1 условия (a) и (b) не эквивалентны. Аракелян доказал (см. [23, с. 175]), что (b) остается верным для весов ω со свойством

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \omega(t)}{t^{3/2}} dt < +\infty.$$

Например, таковым является $\omega(t) = \exp(t^{1/2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

ПРИМЕР 3. Пусть $V = BC^1(\mathbb{R}^n)$ и $L = \Delta$, $n \geq 2$. В работе [25, § 7] (см. также [26, с. 125]) доказано, что указанная пара (L, V) удовлетворяет условию (N). Точнее, показано большее: для любой ограниченной области D и $K = \partial D$ выполнено $D \subset N(K)$. Поскольку (L, V) удовлетворяет также (1)–(4) (см. [6] и [25]), имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. При $V = BC^1(\mathbb{R}^n)$ и $L = \Delta$ для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $V_L(F) = E_{LV}(F)$;
- (b) F есть РКЛ-множество и, кроме того, для каждого шара $B = B(x, \delta)$ имеем $\varkappa(B \setminus F^\circ) = \varkappa(B \setminus F)$;
- (c) F является РКЛ-множеством и найдутся $k \geq 1$ и $A > 0$ такие, что $\varkappa(B(x, \delta) \setminus F^\circ) \leq A \varkappa(B(x, k\delta) \setminus F)$ для каждого шара $B(x, \delta)$.

(Здесь $\varkappa(\cdot)$ есть C^1 -гармоническая емкость (см. [25]).)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству следствия 1. Заметим только, что из теоремы 2 п. 3.1, из [25, теорема 2] и стандартных аргументов [25, с. 1363] вытекает, что условие $V_L(F) = M_{LV}(F)$ эквивалентно емкостным условиям, введенным в (b) и (c).

ПРИМЕР 4. В этом примере положим $V = BC^0(\mathbb{R}^n)$ (с равномерной нормой $\|f\|_0 = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$) и $L = \Delta$ — лапласиан. Хорошо известно, что всякая жорданова область D с гладкой границей ∂D является регулярной для задачи Дирихле, поэтому для $K = \partial D$ имеем $N(K) = \emptyset$. Однако существуют также иррегулярные ограниченные области G , $0 \in G$, для которых при $F = \partial G$ выполнено $\Phi = \Phi_0 \notin P_{LV}(F)$, т.е. $N(F) \neq \emptyset$. Нетрудно непосредственно установить, что в данном примере условия (1)–(4) выполнены, однако утверждения (i)–(iii) теоремы 3 нарушаются (например, $P_{LV}(\partial B(0, 1)) = V(\partial B(0, 1)) = M_{LV}(\partial B(0, 1))$). Если (в предыдущих обозначениях) взять K и F так, чтобы $\hat{K} \cap \hat{F}$ содержало не более одной точки, то компакт $K \cup F$ имеет ограниченную компоненту дополнения D , не пересекающую $N(K \cup F)$, и компоненту G дополнения, имеющую с $N(K \cup F)$ общие точки.

Полную характеристику LV -множеств Аракеяна для этого примера (равномерные гармонические приближения) получил Гардинер (см. [9]).

ПРИМЕР 5. Пусть $L = \partial^2/\partial \bar{z}^2$ и $V = BC^0(\mathbb{R}^2)$. Мы найдем такую аналитическую жорданову кривую K , ограничивающую область D , для которой $N(K)$ устроено не тривиально: оно не пусто и не совпадает с D .

Интересно отметить [27], что для рассматриваемой пары (L, V) найдутся такие аналитические жордановы кривые F , для которых $C(F) = P_{LV}(F)$, а также такие, для которых последнее равенство нарушается.

Итак, обозначим через K образ кривой (эллипса) $\{z = x + yi \in \mathbb{C} : x^2 + 2y^2 = 1\}$ при отображении $w = 1/z$ и через D — область, ограниченную контуром K . Элементарные выкладки показывают, что на K выполняется следующее соотношение (уравнение Шварца кривой K): $\bar{w} = wh(w)/(4w^2 + 1)$, где h — голоморфная ветвь функции $3 + 2\sqrt{2 - w^2}$ в некоторой окрестности множества $\bar{D} = \hat{K}$, равная 5 при $w = 1$. Пользуясь полярными координатами, нетрудно показать, что приведенное соотношение (Шварца) не выполняется ни в одной точке области D , за исключением точки $w = 0$.

Отметим, что решения уравнения $Lu = 0$ в какой-либо области G (так называемые *бианалитические функции* в G) имеют вид: $u(w) = h_1(w)\bar{w} + h_0(w)$, где h_0 и h_1 — голоморфные в G функции. В частности, указанные решения являются бианалитическими полиномами, если и только если h_0 и h_1 — полиномы комплексного переменного w . Далее, если h_0 и h_1 голоморфны в окрестности $\widehat{K}$, то функция u (см. выше) принадлежит $P_{LV}(K)$, что вытекает из теоремы Рунге. Поскольку $\Phi(w) = \bar{w}/(\pi w)$, то из вышеприведенного уравнения Шварца для K получаем, что $\pi\Phi(w) = -4w\bar{w} + h(w)$ на K , откуда $0 \notin N(K)$.

Пусть теперь $a \in D \setminus \{0\}$, т.е. $ah(a) \neq \bar{a}(4a^2 + 1)$. Используя (на K) вместо $\bar{w}$ его выражение из формулы Шварца (в том числе и в формуле для $\Phi(w - a)$), а также идею доказательства из примера 1, получаем, что $a \in N(K)$. Что и требовалось.

В заключение этого пункта мы установим следующее предложение (редукционную теорему для классов функций (струй)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть пара (L, V) удовлетворяет условиям (1)–(4). Следующие условия на замкнутое множество F в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны:

- (i) справедливо равенство $V_L(F) = M_{LV}(F)$;
- (ii) для каждого шара $B = B(a, r)$ в $\mathbb{R}^n$ и любого $\theta \in (0, 1)$ имеет место вложение

$$V_L(\overline{B} \cap F) \subset M_{LV}(\overline{B}(a, \theta r) \cap F);$$

- (iii) существует локально конечное покрытие $\{B(a_j, r_j)\}$ множества F шарами такое, что при каждом j найдется $k_j \geq 1$ такое, что

$$V_L(\overline{B}(a_j, k_j r_j) \cap F) \subset M_{LV}(\overline{B}(a_j, r_j) \cap F).$$

Напомним, что если K — компакт, принадлежащий замкнутому множеству F в $\mathbb{R}^n$, то каждый элемент $f_{(F), \text{loc}} \in V_{\text{loc}}(F)$ естественным образом определяет элемент $f_{(K)}$ в $V(K)$, так что указанные в предложении 1 вложения пространств определены корректно.

Отметим, что в теореме 4 далее будут рассмотрены такие пары (L, V) (со свойствами (1)–(4)), для которых в предложении 1 можно положить $\theta = 1$, а также такие (L, V) , для которых (i) $\Rightarrow$ (ii) при $\theta = 1$ уже не верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $B = B(a, r)$ и $\theta > 0$ — произвольны. Возьмем какую-либо $f_{(\overline{B} \cap F)} \in V_L(\overline{B} \cap F)$ с представителем $f \in V$. Выберем $\varphi \in C_0^\infty(B)$, принимающую значение 1 в некоторой окрестности $\overline{B}(a, \theta r)$. Положим $f_1 = \varphi f$ (см. п. 2.2), $f_2 = f - f_1$. По свойству оператора Витушкина имеем $f_1 \in V_{\text{loc}} \cap L(F^\circ)$, т.е. согласно (i)

$$f_1 \in M_{LV}(F) \subset M_{LV}(\overline{B}(a, \theta r) \cap F).$$

Но $Lf_2 = 0$ в окрестности $\overline{B}(a, \theta r)$, т.е. по теореме 1 $f_2 \in M_{LV}(\overline{B}(a, \theta r) \cap F)$, что и требовалось.

Поскольку (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидно, а (iii) $\Rightarrow$ (i) непосредственно вытекает из теоремы 2, то предложение 1 доказано.

4.3. Условие (N) и порядок пространства V . Пусть V – банахово пространство, удовлетворяющее условиям (1) и (2) из § 2. Будем говорить, что *порядок (гладкости)* пространства V не меньше m ($\text{Ord}(V) \geq m$), $m = 0, 1, \dots$, если $V_{\text{loc}} \subset C^m(\mathbb{R}^n) = (BC^m(\mathbb{R}^n))_{\text{loc}}$ и топология в V_{loc} не слабее, чем в $C^m(\mathbb{R}^n)$ (рассматриваем $BC^m(\mathbb{R}^n)$ как подпространство в $(C_0^\infty)^*$, удовлетворяющее (1) и (2)). Если $\text{Ord}(V) \geq 0$, то определим $\text{Ord}(V) = \sup\{m : \text{Ord}(V) \geq m\}$.

В работе А. Г. О’Фаррелла [28] приводится естественное конструктивное определение $\text{Ord}(V)$ для широкого класса так называемых “симметрических конкретных банаховых пространств” (SCBS), а также (основанная на этом определении) абстрактная теорема вложения соболевского типа.

Пусть L – эллиптический оператор порядка $r \geq 1$ в $\mathbb{R}^n$ (см. § 2). При $n = 2$ нам не потребуется никаких дополнительных ограничений на L , но при $n \geq 3$ нам придется рассматривать операторы L со следующим символом:

$$L(\xi) = P_2(\xi)Q_{r-2}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

где P_2 – некоторый однородный (эллиптический) полином порядка 2 с вещественными коэффициентами (так что P_2 знакоопределен в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) и Q_{r-2} – однородный полином порядка $r - 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть L удовлетворяет условию (7) (в частности, никакого дополнительного ограничения при $n = 2$), а пара (L, V) – условиям (1) и (2). Если $\text{Ord}(V) \geq r - 1$, то (L, V) удовлетворяет условию (N).

Отметим, что формулировка условия (N) не использует условия (3) и (4).

СЛЕДСТВИЕ 3. Если (L, V) удовлетворяет условиям (1)–(4), (7) и $\text{Ord}(V) \geq r - 1$, то

$$M_{LV}(F) = E_{LV}(F) \iff F \text{ есть РКЛ-множество.} \quad (8)$$

Вопрос о том, справедливо ли предложение 2 без требования условия (7), остается открытым. Представляет интерес также и следующий вопрос: существует ли пара (L, V) , удовлетворяющая условиям (1)–(4), для которой $\text{Ord}(V) < \text{Ord}(L) - 1$, но при этом утверждение (8) остается верным?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Аналогично примерам 1 и 3 мы установим, что (в условиях предложения 2) если D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то для $K = \partial D$ имеем $D \subset N(K)$. Пусть, от противного, найдется $a \in D$ и последовательность $\{p_m^a\}$ таких L -аналитических полиномов, что $\|\Phi_a - p_m^a\|_K \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Это в точности означает, что найдется $f^a \in V$, которая совпадает с Φ_a в некоторой окрестности U^a множества K , и такие $h_m^a \in V$, равные p_m^a в каких-то своих окрестностях U_m^a компакта K , $U_m^a \subset U^a$, $m = 1, 2, \dots$, что $\|f^a - h_m^a\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Выберем некоторый шар B , содержащий K . Так как $\text{Ord}(V) \geq r - 1$, то мы знаем, что f^a и h_m^a принадлежат $C^{r-1}(\overline{B})$, причем

$$\|f^a - h_m^a\|_{r-1, \overline{B}} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Пользуясь подходящей (линейной невырожденной) заменой переменных в $\mathbb{R}^n$, мы можем свести нашу ситуацию к одной из следующих: при $n = 2$ оператор L

имеет форму $Lu = \bar{\partial}L_{r-1}u$, а при $n \geq 3$ – форму $Lu = \Delta L_{r-2}u$, где L_{r-1} и L_{r-2} – некоторые однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка $r-1$ и $r-2$, соответственно. Очевидно, что класс $C^{r-1}(\mathbb{R}^n)$ и класс всех полиномов в $\mathbb{R}^n$ (от действительных переменных) инвариантны относительно указанной замены переменных и, более того, имеется естественное соответствие между решениями исходного уравнения и нового (которое снова запишем как $Lu = 0$). Например, исходное Φ_a соответствует новому $k\Phi_b$, где $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и Φ_b – соответствующий сдвиг *нового* фундаментального решения. Следовательно, соответствующее (новое) свойство (9) будет выполняться для нового L и нового (эллипсоида) B .

Действуя оператором L_{r-1} (при $n = 2$) или L_{r-2} (если $n \geq 3$) на разность, записанную внутри нормы в (9), мы получим

$$\begin{aligned} \|L_{r-1}f^a - L_{r-1}h_m^a\|_{0,\bar{B}} &\rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (n = 2), \\ \|L_{r-2}f^a - L_{r-2}h_m^a\|_{1,\bar{B}} &\rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Поскольку $L_{r-1}h_m^a$, $n = 2$ (соответственно, $L_{r-2}h_m^a$ при $n \geq 3$), совпадает с некоторым комплексным (соответственно, гармоническим при $n \geq 3$) полиномом в U_m^a и $L_{r-1}f^a$ (соответственно, $L_{r-2}f^a$ для $n \geq 3$) пропорционально в U^a фундаментальному решению для оператора $\bar{\partial}$ (соответственно, Δ для $n \geq 3$), мы получаем нужное противоречие с фактами, изложенными в примерах 1 и 3 п. 4.2. Доказательство завершено.

В качестве приложения доказанных выше утверждений мы получаем следующие аналоги теорем Нерсисяна [24] (см. также [29]) и Аракеляна [3].

ТЕОРЕМА 4. Пусть L (порядка r) удовлетворяет свойству (7), F – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$.

- (i) При $V = \text{lip}(s, \mathbb{R}^n)$, где $s \in (r-1, r)$ (см. [16]), для выполнения равенства $V_L(F) = M_{LV}(F)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $A \in (0, +\infty)$ такая, что для всякого шара B в $\mathbb{R}^n$

$$M_*^{n-r+s}(B \setminus F^\circ) \leq AM^{n-r+s}(B \setminus F). \quad (10)$$

- (ii) При $V = BC^m(\mathbb{R}^n)$, $m = r, r+1, \dots$, или $V = \text{lip}(s, \mathbb{R}^n)$, $s > r$, $s \notin \mathbb{Z}$, для выполнения равенства $V_L(F) = M_{LV}(F)$ необходимо и достаточно, чтобы F° было всюду плотно в F .
- (iii) Для каждого из упомянутых в (i) или (ii) пространств V равенство $V_L(F) = E_{LV}(F)$ справедливо, если и только если $V_L(F) = M_{LV}(F)$ и (одновременно) F является РКЛ-множеством.

Здесь $M^{n-r+s}(\cdot)$ и $M_*^{n-r+s}(\cdot)$ есть обхват по Хаусдорфу и нижний обхват по Хаусдорфу порядка $n-r+s$, соответственно (см. [21]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Необходимость (10) проверяется так же, как в [21, с. 187] (см. также [25, с. 1363]). Для доказательства достаточности нужно установить, что из (10) вытекает, что для каждого замкнутого шара $\bar{B}_1$ при $F_1 = F \cap \bar{B}_1$ имеем $V_L(F_1) = M_{LV}(F_1)$ (априори не известно, что (10) справедливо для F_1 вместо F). Однако легко проверить, что (10) влечет

$$M_*^{n-r+s}(B \setminus F_1^\circ) \leq A_1 M^{n-r+s}(2B \setminus F_1) \quad (11)$$

для всех шаров B , где $A_1 > 0$ не зависит от B . Наконец, доказательство теоремы 2 в [21] остается справедливым (практически без изменений), если вместо (10) мы всюду потребуем (11), что дает $V_L(F_1) = M_{LV}(F_1)$. Остается воспользоваться предложением 1. Отметим, что в этом случае предложение 1 верно и при $\theta = 1$.

(ii) Необходимость устанавливается аналогично [26, следствие 2.9]. Достаточность следует из [21, теорема 1], [30] и предложения 1. Здесь, однако, при $\theta = 1$ уже не верно, что (i) $\Rightarrow$ (ii) в предложении 1. Достаточно рассмотреть $F = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$ и $B(a, r) = B(0, 1)$.

(iii) Непосредственно следует из (i), (ii), теоремы 3 и предложения 2. Теорема доказана.

В заключение отметим, что так же, как в классическом случае $L = \bar{\partial}$, $V = BC(\mathbb{C})$ (см. [23, гл. 4]), большинство результатов этой работы можно обобщить (с необходимыми очевидными изменениями) на случай, когда пространство V определено не на всем $\mathbb{R}^n$, а на некоторой его области. Эти обобщения и их приложения к теории граничных значений L -аналитических функций мы планируем изложить в последующей работе.

Список литературы

1. Runge C. Zur theorie der eindeutigen analytischen funktionen // Acta Math. 1885. V. 6. P. 228–244.
2. Roth A. Approximationseigenschaften und strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer funktionen // Comment. Math. Helv. 1938. V. 11. P. 77–125.
3. Аракелян Н. У. Равномерная аппроксимация на замкнутых множествах целыми функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №5. С. 1187–1206.
4. Мергелян С. Н. Равномерное приближение функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7. №2 (48). С. 31–122.
5. O'Farrell A. G. T-invariance // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1992. V. 92. №2. P. 185–203.
6. Paramonov P. V., Verdera J. Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space // Math. Scand. 1994. V. 74. P. 249–259.
7. Dufresnoy A., Gauthier P. M., Ow W. H. Uniform approximation on closed sets by solutions of elliptic partial differential equations // Complex Variables Theory Appl. 1986. V. 6. P. 235–247.
8. Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6. С. 141–199.
9. Gardiner S. J. Harmonic Approximation. London Mathematical Society Lecture Notes Series. V. 221. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
10. Lax P. A stability theorem for abstract differential equations and its applications to the study of local behaviour of solutions of elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9. P. 747–766.
11. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des equations aux dérivées partielles et des equations de convolution // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955–56. V. 6. P. 271–355.
12. Fariña J. C. Lipschitz approximation on closed sets // J. Anal. Math. 1991. V. 57. P. 152–171.
13. Bonilla A., Fariña J. C. Meromorphic and holomorphic approximation in C^m -norms // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 181. P. 132–149.
14. Bonilla A., Fariña J. C. Meromorphic and entire approximation in BMO-norm // J. Approx. Theory. 1994. V. 76. P. 203–218.
15. Bagby T., Gauthier P. M. Uniform approximation by global harmonic functions // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations. NATO ASI Series. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 15–26.

16. *Verdera J.* Removability, capacity and approximation // Complex Potential Theory. NATO ASI Series. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. P. 419–473.
17. *Hörmander L.* Linear Partial Differential Operator. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
18. *Husain T.* The Open Mapping and Closed Graph Theorems in Topological Vector Spaces. London: Oxford Univ. Press, 1965.
19. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. V. I. New York: Academic Press, 1972.
20. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
21. *Verdera J.* C^m approximation by solutions of elliptic equations, and Calderón–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. P. 157–187.
22. *Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.* Sur une probleme de M. Carleman // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. № 8. С. 746–748.
23. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.
24. *Нерсисян А. А.* Равномерная и касательная аппроксимация мероморфными функциями // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1972. Т. 7. С. 405–412.
25. *Парамонов П. В.* О гармонических аппроксимациях в C^1 -норме // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1341–1365.
26. *Парамонов П. В.* C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 2. С. 105–128.
27. *Федоровский К. Ю.* О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 604–610.
28. *O'Farrell A. G.* The order of a symmetric concrete space // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1988. V. 88. № 1. P. 39–48.
29. *Boivin A., Verdera J.* Approximation par fonctions holomorphes dans les espaces L^p , Lip_α et BMO // Indiana Univ. Math. J. 1991. V. 40. P. 393–418.
30. *O'Farrell A. G.* Rational approximation in Lipschitz norms – II // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1979. V. 79. № 11. P. 103–114.

University of Western Ontario, London, Canada;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию

23.06.1997