Общероссийский математический портал

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 3, 45–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:17:20

УДК 517.9

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник

Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях

Статья посвящена изучению асимптотики решений слабонелинейных эллиптических и параболических систем уравнений второго порядка. В частности, изучается поведение при $t \rightarrow +\infty$ решения нелинейного параболического уравнения второго порядка, удовлетворяющего краевым условиям Неймана на границе ограниченной липшицевой области. Доказательства основаны на теореме об асимптотической эквивалентности двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиография: 8 названий.

Статья посвящена изучению асимптотических свойств решений некоторого класса параболических и эллиптических уравнений второго порядка и систем уравнений такого же типа. Этот класс уравнений называется полулинейные уравнения. Основное внимание уделено существованию и асимптотике положительных решений, хотя изучаются и любые, возможно, знакопеременные решения. Полученные результаты обобщают и уточняют результаты работ [1], [2]. Приведены примеры, показывающие, что методы настоящей работы позволяют рассмотреть уравнения и системы порядка выше второго.

Основой метода является некоторый результат из теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + f(x, t) + \varphi_1(t) \quad (1)$$

и

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + f(x, t) + \varphi_2(t), \quad (2)$$

где $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — постоянная матрица, $B(t) = (b_{ij}(t))_{n \times n}$ — матрица, элементы которой непрерывны при $t \geq 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0. \quad (3)$$

Векторзначная функция $f(x, t)$ определена при $t \geq 0$, $\|x\| = \max_{i \leq n} |x_i| \leq a$, $a = \text{const} > 0$, где она дифференцируема по x и измерима по t ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96177).

равномерно по $t \in [0, \infty)$.

Предполагается, что

$$\int_0^\infty \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 e^{2bt} dt < \infty, \quad (5)$$

где $b > 0$ — некоторая постоянная.

Пусть матрица A в правой части систем (1), (2) не имеет точек спектра на прямой $\operatorname{Re} \lambda = -b$.

Если все эти предположения выполнены, то имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Существует $\rho_0 = \text{const} > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы (1), удовлетворяющего условию:*

$$\|x(t)\| \leq \rho_0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (6)$$

найдется решение системы (2) $\hat{x}(t)$ такое, что

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| = o(e^{-bt}), \quad \int_0^\infty \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 e^{2bt} dt < \infty. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(t)$ — ограниченное на $[0, \infty)$ решение системы (1) и пусть

$$\rho_1 = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|. \quad (8)$$

Предположим, что $\rho_1 < a/2$, где постоянная a была определена выше. Сделаем в (2) замену переменных:

$$x = x(t) + y.$$

В результате получим систему уравнений для y :

$$\dot{y} = Ay + B(t)y + f(x(t) + y, t) - f(x(t), t) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$$

или

$$\dot{y} = Ay + B(t)y + g(y, t) + \varphi(t), \quad (9)$$

где $\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$, $g(y, t) = f(x(t) + y, t) - f(x(t), t)$. Заметим, что $g(y, t)$ дифференцируема по y , измерима по t при $t \geq 0$, $\|y\| \leq a/2$, а $g(0, t) \equiv 0$. Кроме того, в силу (4) и формулы Лагранжа

$$\|g(y, t)\| \leq C(\rho_1, \|y\|)\|y\|, \quad (10)$$

причем $C(\rho_1, \|y\|) \rightarrow 0$, если $\rho_1 \rightarrow 0$, $\|y\| \rightarrow 0$. Постоянная C в правой части неравенства (10) от t не зависит.

Вектор-функция $\varphi(t)$ в (9) такова, что

$$\int_0^\infty \|\varphi(t)\|^2 e^{2bt} dt < \infty. \quad (11)$$

Рассмотрим множество $M(t_1)$ непрерывных при $t \geq t_1$ функций $z(t)$ таких, что

$$\|z(t)\| \leq \frac{a}{2} e^{-bt} \quad \text{при } t \geq t_1$$

и

$$\int_{t_1}^{\infty} \|z(t)\|^2 e^{2bt} dt \leq \frac{a}{2}.$$

Это множество является полным метрическим пространством с метрикой:

$$\rho(z_1, z_2) = \sup_{t \geq t_1} (\|z_1 - z_2\| e^{bt}) + \left(\int_{t_1}^{\infty} \|z_1(t) - z_2(t)\|^2 e^{2bt} dt \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим на M оператор T такой, что

$$Tz = RB(t)z + Rg(z, t) + R\varphi(t),$$

где оператор R определяется следующим образом. Пусть $\psi(t)$, $-\infty < t < +\infty$, такова, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\psi(t)\|^2 e^{2bt} dt < \infty.$$

Положим $R_{t_1}\psi \equiv \psi(t)$, если $t \geq t_1$, $R_{t_1}(\psi) = 0$, если $t < t_1$. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = Au + F(t),$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|F\|^2 e^{2bt} dt < \infty.$$

Эта система имеет единственное решение $u(t)$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|u(t)\|^2 e^{2bt} dt < \infty,$$

и это решение удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|u(t)\|^2 e^{2bt} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 e^{2bt} dt \leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(t)\|^2 e^{2bt} dt.$$

Будем обозначать $u = SF$, $R = SR_{t_1}$.

Очевидно, что если $z \in M$, то оператор T определен. Если ρ_1 достаточно мало и t_1 достаточно большое, то при всяком $z \in M$ имеем

$$Tz \in M.$$

При этом t_1 зависит от φ и от $B(t)$.

Покажем, что оператор T сжимающий, если ρ_1 достаточно мало, а t_1 достаточно велико. В самом деле,

$$Tz_1 - Tz_2 = RB(t)(z_1 - z_2) + R[g(z_1, t) - g(z_2, t)]. \quad (12)$$

Так как

$$\|g(z_1, t) - g(z_2, t)\| \leq \|z_1 - z_2\| C(\|z_1\|, \|z_2\|),$$

где $C(\xi_1, \xi_2) \rightarrow 0$ при $\xi_1 \rightarrow 0, \xi_2 \rightarrow 0$, то, выбрав t_1 достаточно большим, получим:

$$\|g(z_1, t) - g(z_2, t)\| \leq \varepsilon |z_1 - z_2|$$

при любом $\varepsilon > 0$ и $t \geq t_1(\varepsilon)$. Отсюда следует

$$\int_{t_1}^{\infty} e^{2bt} \|g(z_1, t) - g(z_2, t)\|^2 dt \leq \varepsilon^2 \int_{t_1}^{\infty} e^{2bt} |z_1 - z_2|^2 dt \leq \varepsilon^2 \rho^2(z_1, z_2). \quad (13)$$

Из (12) и (13), учитывая малость $\|B(t)\|$ при больших t_1 , получим, что отображение T является сжимающим. Следовательно, существует z — неподвижная точка оператора T , т.е.

$$z = RBz + Rg(z, t) + R\varphi(t).$$

Отсюда

$$\dot{z} = Az + B(t)z + g(z, t) + \varphi(t),$$

т.е. $z(t)$ является решением уравнения (8) и

$$z(t) = o(e^{-bt}).$$

Таким образом, существует $\hat{x}(t)$ — решение уравнения (2) вида $\hat{x} = x + o(e^{-bt})$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решению уравнения (1), удовлетворяющему условию (6), может соответствовать несколько решений уравнения (2), удовлетворяющих условию (7). Нетрудно показать, что если спектр матрицы A лежит правее прямой $\operatorname{Re} \lambda = -b$, то каждому решению $X(t)$ системы (1), удовлетворяющему условию (6), соответствует единственное решение системы (2) такое, что справедливо равенство (8).

Теорема 1 будет существенно использоваться при исследовании асимптотического поведения решений эллиптических и параболических уравнений в цилиндрических областях.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - L_i(u_i) + f_i(u, t) = 0, \quad u = (u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (14)$$

где

$$L_k u \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^{(k)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^{(k)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Предполагается, что все операторы $L_i, i = 1, \dots, N$, равномерно эллиптически в некоторой ограниченной области Ω с липшицевой границей, т.е.

$$m_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x) \xi_i \xi_j \leq m_2 |\xi|^2, \quad (15)$$

$m_1 = \text{const} > 0, |\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, x = (x_1, \dots, x_n), x \in \Omega$. Кроме того, $a_{ij}^{(k)} \equiv a_{ji}^{(k)}$, все функции $a_{ij}^{(k)}, a_i^{(k)}$ измеримы и ограничены в Ω .

Пусть векторзначная функция $f(u, t) = (f_1, \dots, f_N)$ определена при $\|u\| \leq a$, где $\|u\| = \max_{i \leq N} |u_i|$, $0 \leq t < +\infty$, $f(0, t) \equiv 0$. Предполагается, что $f(u, t)$ непрерывна по u и измерима по t при фиксированном u . Кроме того, предполагается, что существуют производные $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, \dots, N$, при $\|u\| \leq a$, $0 \leq t < \infty$ и

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = 0$$

равномерно по t .

Будем рассматривать решение системы (14) в области $\Pi_0 = \Omega \times [0, \infty)$, которое удовлетворяет краевому условию:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu_i}$ – дифференцирование по направлению внешней ко нормали оператора L_i :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} = \sum_{k,j=1}^n a_{kj}^{(i)}(x) \cos(\vec{n}, x_j) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Здесь $\vec{n}$ – направление внешней нормали к $\partial\Omega$.

В качестве решения уравнения (15), удовлетворяющего условию (16), понимается обобщенное решение в стандартном определении.

Напомним определение обобщенного решения.

Будем обозначать: $\Pi_{a,b} = \Omega \times (a, b)$, $\Pi_{a,\infty} = \Pi_a$, $\Gamma_{a,b} = \partial\Omega \times (a, b)$, $\Gamma_a = \Gamma_{a,\infty}$. Вектор-функция $u(x, t)$ есть *обобщенное решение уравнения* (14), удовлетворяющее условию (16), если $u(x, t) \in W_2^1(\Pi_{a,b}) \cap L_\infty(\Pi_{a,b})$ при любых a, b , $0 < a < b < \infty$, и какова бы ни была вектор-функция $\psi(x, t) \in W_2^1(\Pi_{a,b})$ имеет место тождество:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \int_{\Pi_{a,b}} \psi_k \frac{\partial u_k}{\partial t} dx dt + \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx dt \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_i^{(k)}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \psi_k dx dt + \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N f_k(u, t) \psi_k(x, t) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из классических результатов о гладкости решений линейных параболических уравнений [3] следует, что $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{\Pi_0}$ при каждом $a > 0$ и, более того, удовлетворяет условию Гёльдера в каждой замкнутой области $\overline{\Pi_{a,b}}$, где $0 < a < b < \infty$.

В дальнейшем будет использоваться следующее свойство решений линейных эллиптических задач. Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{aligned} L_k^* u &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i^{(k)} u) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_i) - \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} u \cos(\vec{n}, x_i) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\vec{n}$ – направление внешней нормали к $\partial\Omega$. Задача (18) является сопряженной задачей к задаче Неймана для оператора L_k в Ω и, следовательно, имеет нетривиальное решение $u_{k0}(x)$. Функции $u_{k0}(x)$ являются непрерывными в $\overline{\Omega}$ и не обращаются в нуль в $\overline{\Omega}$. Будем считать, что $u_{k0}(x) > 0$ и

$$\int_{\Omega} u_{k0}(x) dx = 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $u(x, t)$ – решение системы (14) – удовлетворяет краевому условию (16) и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0,$$

то

$$u(x, t) = \chi(t) + v(x, t),$$

где $\chi(t)$ – некоторое решение системы:

$$\dot{\chi} + f(x, t) = 0, \quad (19)$$

а $v(x, t)$ таково, что

$$\int_{\Pi_{\tau}} v^2 dx dt = O(e^{-\alpha\tau}), \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем k ($1 \leq k \leq N$) и положим в (17): $\psi_i = 0$, если $i \neq k$, $\psi_k(x, t) = \varepsilon^{-1} u_{k0}(x)$, $b = a + \varepsilon$. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \int_{\Pi_{a, a+\varepsilon}} u_{k0}(x) \frac{\partial u_k}{\partial t} dx dt + \int_{\Pi_{a, a+\varepsilon}} \varepsilon^{-1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_{k0}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx dt \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_{a, a+\varepsilon}} \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} a_i^{(k)}(x) u_{k0}(x) dx dt + \int_{\Pi_{a, a+\varepsilon}} \varepsilon^{-1} f_k(u, t) u_{k0}(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Устремив в этом неравенстве ε к нулю, получим, что при почти всех $a > 0$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \Omega}^{t=a} u_{k0}(x) \frac{\partial u_k}{\partial t} dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{x \in \Omega}^{t=a} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_{k0}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{x \in \Omega}^{t=a} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} a_i^{(k)}(x) u_{k0}(x) dx + \int_{x \in \Omega}^{t=a} f_k(u, t) u_{k0}(x) dx = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Так как $u_{k0}(x)$ является обобщенным решением задачи (18), то из (21) получаем:

$$\int_{x \in \Omega}^{t=a} u_{k0}(x) \frac{\partial u_k}{\partial t} dx + \int_{x \in \Omega}^{t=a} f_k(u, t) u_{k0}(x) dx = 0. \quad (22)$$

Будем обозначать:

$$\bar{u}_k = (\text{mes } \Omega)^{-1} \int_{\Omega} u_k(x, t) u_{k0}(x) dx.$$

Из (22) следует:

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_k + \overline{f_k(u, t)} = 0, \quad t > 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Умножив обе части (23) на $\psi_k(x, t) \in W_2^1(\Pi_{a,b})$ и потом проинтегрировав по $\Pi_{a,b}$ получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_{a,b}} \psi_k(x, t) \frac{d}{dt} \overline{u_k(t)} dx dt + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_{ij}^{(k)}(x) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} dx dt \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_i^{(k)}(x) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \psi_k(x, t) dx dt + \int_{\Pi_{a,b}} \overline{f_k(u(x, t), t)} \psi_k(x, t) dx dt = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

так как $\bar{u}_k$ не зависит от x . Из (17), (24) следует:

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_{a,b}} \psi_k \frac{\partial}{\partial t} (u_k - \bar{u}_k) dx dt + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \frac{\partial (u_k - \bar{u}_k)}{\partial x_j} dx dt \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_i^{(k)} \psi_k \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) dx dt + \int_{\Pi_{a,b}} (f_k(u, t) - \overline{f_k(u, t)}) \psi_k dx dt = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

если $\psi_k \in W_2^1(\Pi_{a,b})$, $k = 1, \dots, N$. Положим в (25): $\psi_k = (u_k - \bar{u}_k)u_{k0}(x)$. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{t=b}^t u_{k0}(u_k - \bar{u}_k)^2 dx - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{t=a}^t u_{k0}(x)(u_k - \bar{u}_k)^2 dx \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_{ij}^{(k)} u_{k0} \frac{\partial (u_k - \bar{u}_k)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_k - \bar{u}_k)}{\partial x_j} dx dt \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \int_{\Pi_{a,b}} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_{k0}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_k - \bar{u}_k)^2}{\partial x_j} dx dt \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{\Pi_{a,b}} a_i^{(k)} u_{k0} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k)^2 dx dt \\ & + \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N (f_k(u, t) - \overline{f_k(u, t)}) (u_k - \bar{u}_k) u_{k0}(x) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как $u_{k0}(x)$ есть обобщенное решение задачи (18), то равенство (26) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{t=b}^t u_{k0}(x)(u_k - \bar{u}_k)^2 dx - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{t=a}^t u_{k0}(u_k - \bar{u}_k)^2 dx \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_{ij}^{(k)} u_{k0} \frac{\partial (u_k - \bar{u}_k)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_k - \bar{u}_k)}{\partial x_j} dx dt \\ & + \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N (f_k(u, t) - \overline{f_k(u, t)}) (u_k - \bar{u}_k) u_{k0} dx dt = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из неравенства Пуанкаре следует:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f_k(u, t) - \overline{f_k(u, t)}]^2 dx &\leq C \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (f_k - \overline{f_k}) \right]^2 dx \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla_u f_k|^2 |\nabla u|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla_x u|^2 dx, \end{aligned}$$

если t достаточно велико. Используя (15), (27), получаем:

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{t=b} u_{k0} (u_k - \overline{u}_k)^2 dx - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{t=a} u_{k0} (u_k - \overline{u}_k)^2 dx + c \int_{\Pi_{a,b}} |\nabla_x u|^2 dx dt \leq 0.$$

Устремив b к $+\infty$, получим:

$$- \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{t=a} u_{k0} (u_k - \overline{u}_k)^2 dx + c \int_{\Pi_a} |\nabla_x u|^2 dx dt \leq 0.$$

Используя неравенство Пуанкаре, имеем

$$\int_{\Pi_a} |\nabla_x u|^2 dx dt \leq c_1 \int_{t=a} |\nabla_x u|^2 dx. \quad (28)$$

Положим $J(\tau) = \int_{\Pi_{\tau}} |\nabla_x u|^2 dx$. Теперь (28) можно переписать следующим образом

$$J(\tau) \leq -c_1 \frac{dJ}{d\tau}.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$J(\tau) \leq C e^{-\alpha \tau}, \quad \alpha = c_1^{-1}. \quad (29)$$

Из (29) и из неравенства Пуанкаре следует:

$$\int_{\Pi_a} |\nabla_x u|^2 dx dt + \int_{\Pi_a} \sum_{k=1}^N |u_k - \overline{u}_k|^2 dx dt \leq c_2 e^{-\alpha a}. \quad (30)$$

Перепишем систему уравнений (23) в виде:

$$\frac{d}{dt} \overline{u}_s + f_s(\overline{u}, t) = g_s(t), \quad s = 1, \dots, N, \quad t > 0, \quad (31)$$

где $g_s = f_s(\overline{u}, t) - \overline{f_s(u, t)}$. Легко видеть, что

$$g_s = f_s(\overline{u}, t) - \overline{f_s(u, t)} + \overline{f_s(\overline{u}, t)} - \overline{f_s(\overline{u}, t)} = \overline{f_s(\overline{u}, t)} - \overline{f_s(u, t)}.$$

Так как $|f_s(u, t) - f_s(\overline{u}, t)| \leq |\nabla_u f_s| |u - \overline{u}|$ и $u(x)$ ограничена, то

$$|g_s(t)| \leq c_2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N |u - \overline{u}| dx.$$

Отсюда

$$|g_s|^2 \leq c_3 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N |u - \bar{u}|^2 dx.$$

Из (30) следует

$$\int_{\Pi_t} g_s^2 dx dt \leq c_3 e^{-\alpha t}.$$

К системе (31) можно применить теорему 1 и получить, что

$$\bar{u} = X(t) + v_1(t),$$

где $\|v_1\| \equiv O(e^{-\alpha t})$.

Отсюда и из (30) следует (20).

Теорема доказана.

Рассмотрим случай одного уравнения ($N = 1$). В этом случае имеет место более сильный результат.

ТЕОРЕМА 3. Если $u(x, t)$ – решение системы (14), где $N = 1$, удовлетворяет условию (16) и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0,$$

то

$$u(x, t) = \chi(t) + v(x, t),$$

где $\chi(t)$ – некоторое решение уравнения (19), а

$$v(x, t) = O(e^{-\alpha t}), \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует, что

$$u(x, t) = \chi(t) + v(x, t), \quad (33)$$

где $v(x, t)$ удовлетворяет неравенству (20). Подставим выражение (33) в (14). В результате получим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + f(\chi + v, t) - f(\chi, t). \quad (34)$$

Заметим, что $f(\chi + v, t) - f(\chi, t) = vP(x, t)$, где $P(x, t)$ – ограниченная функция.

Уравнение (34) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + P(x, t)v.$$

Из (20) и из оценок типа Нэша [3] следует (32). Теорема доказана.

Отметим, что утверждение теоремы 3 остается верным и для системы уравнений (14) при любом N , если коэффициенты $a_{ij}^{(k)}(x)$ – гладкие функции, а $\partial\Omega$ – гладкая поверхность.

Приведем несколько примеров применения теорем 2, 3.

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0 |u|^{\sigma-1} u, \quad (35)$$

$$\sigma = \text{const} > 1, \quad a_0 = \text{const} > 0, \quad (x, t) \in \Pi_0,$$

и его решение $u(x, t)$, удовлетворяющее условию:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad t > 0, \quad (36)$$

где ν – вектор внешней ко нормали.

Уравнение (35) предполагается параболическим, а его коэффициенты – ограниченные измеримые функции. Из принципа максимума следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u = 0$$

для любого решения уравнения (35), которое удовлетворяет условию (36). Применяя теорему 3, получаем, что всякое решение задачи (35), (36) имеет вид: либо

$$u = \pm c_\sigma (t + T)^{\frac{1}{1-\sigma}} + O(e^{-\alpha t}),$$

где $\frac{1}{a_0(\sigma-1)} = c_\sigma^{\sigma-1}$, а постоянная T зависит от u , либо

$$u = O(e^{-\alpha t}). \quad (37)$$

Случай (37) имеет место тогда и только тогда, когда решение $u(x, t)$ меняет знак в каждой области Π_t , $t > 0$, ибо в противном случае, в силу принципа максимума

$$|u| \geq c_\sigma (t + T)^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

2. Рассмотрим в Π_0 уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u(\ln |u| + 1)^{-s}, \quad s > 0.$$

Легко видеть, что каждое его решение, удовлетворяющее краевому условию Неймана на σ_0 , имеет нулевой предел при $t \rightarrow +\infty$ и

$$u(x, t) = \pm e^{-1} e^{-(s+1)(t+T)^{\frac{1}{s+1}}} + O(e^{-\alpha t}), \quad \alpha > 0$$

или $u = O(e^{-\alpha t})$. Второй случай имеет место тогда и только тогда, когда u меняет знак в каждой области Π_t , $t > 0$.

3. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{|u|^{\sigma-1}u}{(1+t)^s}, \quad (38)$$

где $\sigma > 1$, $s \leq 1$, $(x, t) \in \Pi_0$.

Всякое его решение, удовлетворяющее краевому условию (30), имеет следующую асимптотику при $t \rightarrow +\infty$:

при $s < 1$ либо

$$u = \pm \left(\frac{\sigma-1}{1-s} t^{1-s} + T \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} + O(e^{-\alpha t}),$$

либо $u = O(e^{-\alpha t})$.

При $s = 1$ или

$$u = \pm [(\sigma-1) \ln t T]^{\frac{1}{1-\sigma}} + O(e^{-\alpha t}),$$

или $u = O(e^{-\alpha t})$.

В обоих случаях асимптотика $u = O(e^{-\alpha t})$ имеет место тогда и только тогда, когда $u(x, t)$ меняет знак в любой области Π_a , $a > 0$.

4. Пусть уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{\sigma-1}u, \quad \sigma > 1. \quad (39)$$

Пусть $u(x, t)$ — его решение в Π_0 — удовлетворяет краевому условию (36) и таково, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.

Тогда

$$u = O(e^{-\alpha t}), \quad \alpha > 0. \quad (40)$$

Известно, что не существует положительных решений уравнения (39) в Π_0 , которые удовлетворяют (36). Можно доказать существование знакопеременных решений в Π_0 , для них имеет место (40).

5. Рассмотрим уравнение (38) при $s > 1$. В этом случае всякое решение, которое удовлетворяет условию (36), имеет конечный предел при $t \rightarrow +\infty$. Нулевой предел может иметь только то решение, которое меняет знак в каждой области Π_a , $a > 0$. Для него справедлива формула (40). Если решение знакопостоянно в некоторой области Π_a , то $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = c \neq 0$ и

$$u = \left[c + \frac{1-\sigma}{1-s} (t+1)^{-s+1} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} + O(e^{-\alpha t}).$$

6. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u - k|u|^{\sigma-1}u, \quad (x, t) \in \Pi_0, \quad (41)$$

где $\sigma = \text{const} > 0$, $k = \text{const}$, $\partial\Omega$ — липшицева поверхность.

ТЕОРЕМА 4. Если $u(x, t)$ – решение уравнения (41) в Π_0 удовлетворяет краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

и $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, а область Ω такова, что наименьшее ненулевое собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа по модулю больше 1, то справедлива формула (40).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать $\bar{u} = (\text{mes } \Omega)^{-1} \int_{\Omega} u \, dx$.

Из (41) следует

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{u} - k \overline{|u|^{\sigma-1} u}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial(u - \bar{u})}{\partial t} = \Delta(u - \bar{u}) + (u - \bar{u}) + k[|u|^{\sigma-1} u - \overline{|u|^{\sigma-1} u}].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \Omega}^{t=b} \frac{(u - \bar{u})^2}{2} dx - \int_{x \in \Omega}^{t=a} \frac{(u - \bar{u})^2}{2} dx + \int_{\Pi_{a,b}} |\nabla_x(u - \bar{u})|^2 dx dt \\ & - \int_{\Pi_{a,b}} (u - \bar{u})^2 dx dt + k \int_{\Pi_{a,b}} (u - \bar{u}) [|u|^{\sigma-1} u - \overline{|u|^{\sigma-1} u}] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Оценим последний интеграл в левой части этой формулы:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Pi_{a,b}} (u - \bar{u}) [|u|^{\sigma-1} u - \overline{|u|^{\sigma-1} u}] dx dt \right| \\ & \leq \left(\int_{\Pi_{a,b}} |u - \bar{u}|^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_{\Pi_{a,b}} ||u|^{\sigma-1} u - \overline{|u|^{\sigma-1} u}|^2 dx dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя теорему Лагранжа и неравенство Пуанкаре, получаем:

$$\left| \int_{\Pi_{a,b}} (u - \bar{u}) [|u|^{\sigma-1} u - \overline{|u|^{\sigma-1} u}] dx dt \right| \leq \varepsilon \int_{\Pi_{a,b}} |\nabla_x u|^2 dx dt,$$

если a достаточно велико. Поэтому из (42) следует:

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \Omega}^{t=b} \frac{|u - \bar{u}|^2}{2} dx - \int_{x \in \Omega}^{t=a} \frac{|u - \bar{u}|^2}{2} dx \\ & + (1 - \varepsilon) \int_{\Pi_{a,b}} |\nabla_x(u - \bar{u})|^2 dx dt - \int_{\Pi_{a,b}} |u - \bar{u}|^2 dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

Используя неравенство Пуанкаре

$$\int_{\Omega} (u - \bar{u})^2 dx \leq |\lambda_2|^{-1} \int_{\Omega} (\nabla_x u)^2 dx,$$

получаем

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Pi_{a,b}} |\nabla_x(u - \bar{u})|^2 dx dt \leq - \int_{t=b}^{t=a} \int_{x \in \Omega} \frac{|u - \bar{u}|^2}{2} dx + \int_{t=a}^{t=b} \int_{x \in \Omega} \frac{|u - \bar{u}|^2}{2} dx.$$

Устремив b к $+\infty$, получим

$$\int_{\Pi_a} |\nabla_x(u - \bar{u})|^2 dx dt \leq \int_{t=a}^{t=b} \int_{x \in \Omega} |\nabla_x(u - \bar{u})|^2 dx.$$

Отсюда следует (это рассуждение было подробно проведено выше при доказательстве теоремы 2), что

$$\int_{\Pi_\tau} |\nabla_x(u - \bar{u})|^2 dx \leq c e^{-2\alpha\tau}.$$

Применяя еще раз неравенство Пуанкаре, получаем

$$\int_{\Pi_\tau} |u - \bar{u}|^2 dx \leq c_1 e^{-2\alpha\tau}. \quad (43)$$

Перепишем уравнение (41) в виде:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{u} - k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} + k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} - k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} = \bar{u} - k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} + F(t), \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} F(t) &= k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} - k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} = k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} - k|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} \\ &= k(\text{mes } \Omega)^{-1} \int_{\Omega} [|\bar{u}|^{\sigma-1}\bar{u} - |u|^{\sigma-1}u] dx \leq c_2 \int_{\Omega} |u - \bar{u}| dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_t^\infty F^2(t) dt \leq c_2 \int_{\Pi_t} |u - \bar{u}|^2 dx \leq c_3 e^{-2\alpha\tau}.$$

Из (44) и из теоремы 1 следует:

$$\bar{u} = \chi(t) + v(t),$$

где $\chi(t)$ – некоторое решение уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = X - k|X|^{\sigma-1}X, \quad (45)$$

имеющее нулевой предел при $t \rightarrow +\infty$, а

$$v(t) = O(e^{-\alpha t}).$$

Из (45) следует, что $X(t) \equiv 0$.

Таким образом,

$$\bar{u} = O(e^{-\alpha t}). \quad (46)$$

Отсюда и из (43)

$$\int_{\Pi_\tau} |u|^2 dx \leq c_4 e^{-2\alpha\tau}.$$

Используя неравенство Нэша [3], получаем

$$|u(x, t)| \leq c_5 e^{-\alpha t},$$

что и требуется. Теорема 4 доказана.

Перейдем к рассмотрению эллиптических уравнений и систем уравнений.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} L_k u &\equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^{(k)}(\hat{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^{(k)}(\hat{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = f_k(u, x_n), \\ k &= 1, \dots, N, \quad u = (u_1, \dots, u_N). \end{aligned} \quad (47)$$

Будем предполагать, что все коэффициенты в (47) – ограниченные измеримые функции, $x = (\hat{x}, x_n)$, $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Уравнение (47) рассматривается в цилиндрической области $\Pi_0 = \{x : \hat{x} \in \Omega, 0 < x_n < \infty\}$, где Ω – ограниченная область с липшицевой границей. Предполагается выполненным условие эллиптичности:

$$m_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(\hat{x}) \xi_i \xi_j \leq m_2 |\xi|^2, \quad k = 1, \dots, N, \quad (48)$$

где

$$m_1, m_2 = \text{const}, \quad m_1 > 0, \quad |\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad u = (u_1, \dots, u_N).$$

Пусть, кроме того, $a_{nn}^{(k)} \equiv 1$, $a_{in}^{(k)} \equiv 0$ при $i < n$, $a_{ij}^{(k)} \equiv a_{ji}^{(k)}$, $a_n^{(k)} \equiv \text{const}$. Функции $f_k(u, x_n)$ определены при $0 \leq x_n < +\infty$, $\|u\| \leq a$ ($\|u\| = \max_{i \leq N} (u_i)$), где они непрерывны по u и измеримы по x_n . Предполагаем, что $f(0, t) \equiv 0$ и существуют производные $\frac{\partial f_k}{\partial u_j}$, $j, k = 1, \dots, N$, причем

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial f_k}{\partial u_j} = 0, \quad k, j = 1, \dots, N,$$

равномерно по x_n .

Будем рассматривать решение системы уравнений (47) в Π_0 , предполагая выполненным краевое условие:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} = 0, \quad \hat{x} \in \partial\Omega, \quad x_n > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (49)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu_i}$ – дифференцирование по направлению ко нормали оператора L_i . В качестве решения задачи (47), (49) понимается обобщенное решение. Приведем его определение. Будем обозначать $\Pi_{a,b} = \Omega \times (a, b)$, $\Pi_{a,\infty} = \Pi_a$, $\Gamma_{a,b} = \partial\Omega \times (a, b)$,

$\Gamma_{a,\infty} = \Gamma_a$. Вектор-функция $u(x) = (u_1, \dots, u_N)$ называется обобщенным решением уравнения (47), удовлетворяющим условию (49), если $u_i \in W_2^1(\Pi_{a,b})$, $i = 1, \dots, N$, при любых $a, b < \infty$, $\|u\| \leq a$, и имеет место равенство

$$\begin{aligned} & - \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} \psi_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx - \sum_{k=1}^N \int_{\Pi_{a,b}} \psi_k f_k(u, x_n) dx = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

каковы бы ни были функции $\psi_k(x) \in W_2^1(\Pi_{a,b})$ такие, что $\psi_k|_{x_n=0} = \psi_k|_{x_n=b} = 0$.

Из классических результатов о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений следует, что $u_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, непрерывны в $\bar{\Pi}_a$ при всех $a > 0$ и в каждой замкнутой области $\bar{\Pi}_{a,b}$ удовлетворяют условию Гёльдера, $0 < a < b < \infty$.

Кроме того, $\frac{\partial u_i}{\partial x_n} \in W_2^1(\Pi_{a,b})$, $0 < a < b < \infty$, $i = 1, \dots, N$.

Как и при исследовании решений параболических систем, будут использоваться функции $u_{k0}(\hat{x})$ – нетривиальные решения систем:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^{(k)}(\hat{x}) \frac{\partial u_{k0}}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^{(k)}(\hat{x}) u_{k0} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (51)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{\partial u_{k0}}{\partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n a_i^{(k)}(\hat{x}) u_{k0} \cos(n, x) = 0.$$

Функции $u_{k0}(\hat{x})$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и не обращаются в нуль в $\bar{\Omega}$. Будем считать, что $u_{k0}(\hat{x}) > 0$ и

$$\int_{\Omega} u_{k0}(\hat{x}) d\hat{x} = 1.$$

ТЕОРЕМА 5. *Существует $\rho_0 = \text{const} > 0$ такое, что если $u(x)$ – решение задачи (47), (49) таково, что $\|u(x)\| \leq \rho$, $x \in \Pi_a$, при некотором $a > 0$, то*

$$u(x) = \chi(x_n) + v(x),$$

где $\chi(t)$ – решение системы

$$\ddot{x}_k + a_n^{(k)} \dot{x}_k = f_k(x, t), \quad k = 1, \dots, N, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (52)$$

а

$$\int_{\Pi_T} v^2 dx = O(e^{-2\alpha T}), \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta(x_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\Theta(x_n) \equiv 0$ при $x_n < a$ и при $x_n > a + \varepsilon$, $\Theta(x_n) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x_n) dx_n = 1$. Зафиксируем k , $1 \leq k \leq N$, и в равенстве (50) положим: $\psi_k = \Theta(x_n) u_{k0}(\hat{x})$, $\psi_i \equiv 0$ при $i \neq k$.

В результате получим, после интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_{a,a+\varepsilon}} \Theta(x_n) u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} dx - \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\Pi_{a,a+\varepsilon}} a_{ij}(\hat{x}) \Theta(x_n) \frac{\partial u_{k0}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_{a,a+\varepsilon}} u_{k0}(\hat{x}) a_i(\hat{x}) \Theta(x_n) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx - \int_{\Pi_{a,a+\varepsilon}} \Theta(x_n) u_{k0}(\hat{x}) f_k(u(x), x_n) dx = 0. \end{aligned}$$

Устремив ε к нулю, получим, что при почти всех $a > 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_n^2} d\hat{x} - \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} a_{ij}(\hat{x}) \frac{\partial u_{k0}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} d\hat{x} \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} u_{k0}(\hat{x}) a_i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} d\hat{x} - \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} u_{k0}(\hat{x}) f_k(x, u) d\hat{x} = 0. \end{aligned}$$

Из определения $u_{k0}(\hat{x})$ следует:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} u_{k0}(\hat{x}) u_k(x) d\hat{x} \\ & + \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} a_n \frac{\partial}{\partial x_n} u_{k0}(\hat{x}) u_k(x) d\hat{x} - \int_{\substack{x_n=0 \\ \hat{x} \in \Omega}} u_{k0}(\hat{x}) f_k(x, u(x)) d\hat{x} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Будем обозначать $\overline{g_k(x)} = \int_{\Omega} g_k(x) u_{k0}(\hat{x}) d\hat{x}$. Теперь формулу (53) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2}{dx_n^2} \overline{u_k} + a_n^{(k)} \frac{d}{dx_n} \overline{u_k} = \overline{f_k(x_n, u)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad x_n > 0. \quad (54)$$

Из (54) следует, что каковы бы ни были функции $\psi_k(x)$, $k = 1, \dots, N$, такие, что $\psi_k \in W_2^1(a, b)$, $\psi_k|_{x_n=a} = \psi_k|_{x_n=b} = 0$, $k = 1, \dots, N$, имеет место тождество:

$$- \int_{\Pi_{a,b}} \frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{u_k} dx + a_n^{(k)} \int_{\Pi_{a,b}} \psi_k(x) \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{u_k} dx = \int_{\Pi_{a,b}} \psi_k \overline{f_k(x_n, u)} dx. \quad (55)$$

Из (50), (55) следует:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_k(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - \overline{u_k}) dx + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \int_{\Pi_{a,b}} a_i^k \psi_k \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \overline{u_k}) dx \\ & = \sum_{k=1}^N \int_{\Pi_{a,b}} \psi_k (\overline{f_k(u, x_n)} - f_k(u, x_n)) dx, \end{aligned} \quad (56)$$

если $\psi_k \in W_2^1(\Pi_{a,b})$, $\psi|_{x_n=a} = \psi|_{x_n=b} = 0$. Пусть $\Theta(x_n)$ – непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция такая, что $\Theta(x_n) \equiv 0$ при $x_n < a$, $\Theta(x_n) \equiv 0$ при $x_n > b$, $\Theta(x_n) \equiv 1$, если $a + \varepsilon < x_n < b - \varepsilon$, и $\Theta(x_n)$ линейна на $(a, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b)$. Положим в (56) $\psi_k = \Theta(x_n)u_{k0}(\hat{x})(u_k - \bar{u}_k)$. В результате получим:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)}(\hat{x}) \Theta(x_n) u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - \bar{u}_k) dx \\
& - \int_{\Pi_{a,b}} \Theta(x_n) \sum_{i,j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_{k0}(\hat{x}) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - \bar{u}_k) dx \\
& - \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) \Theta'(x_n) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) dx \\
& + \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(k)}(\hat{x}) \Theta(x_n) u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) dx \\
& + \int_{\Pi_{a,b}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} \Theta(x_n) u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k)^2 dx \\
& - \sum_{k=1}^N \int_{\Pi_{a,b}} \Theta(x_n) u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) (\bar{f}_k - f_k) dx = 0.
\end{aligned}$$

Устремим ε к нулю. В результате получим, что при почти всех a, b

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - \bar{u}_k) \\
& + \int_{\substack{x_n=b \\ \hat{x} \in \Omega}} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) \\
& - \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) d\hat{x} \\
& - \int_{\Pi_{a,b}} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)}(\hat{x}) \frac{\partial u_{k0}(\hat{x})}{\partial x_i} \frac{\partial (u_k - \bar{u}_k)^2}{\partial x_j} \\
& + \int_{\Pi_{a,b}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(k)}(\hat{x}) u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k)^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k)^2 dx \\
& - \sum_{k=1}^N \int_{\Pi_{a,b}} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) (\bar{f}_k - f_k) dx = 0. \quad (57)
\end{aligned}$$

Так как $u_{k0}(\hat{x})$ – решение системы (51), то из (57) получаем:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^N a_{ij}^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - \bar{u}_k) dx \\
& + \int_{\substack{x_n=b \\ \hat{x} \in \Omega}} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) d\hat{x} \\
& - \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) d\hat{x} \\
& + \frac{1}{2} \int_{\substack{x_n=b \\ \hat{x} \in \Omega}} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k)^2 d\hat{x} \\
& - \frac{1}{2} \int_{\substack{x_n=a \\ \hat{x} \in \Omega}} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k)^2 d\hat{x} \\
& - \sum_{k=1}^N \int_{\Pi_{a,b}} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) (\bar{f}_k - f_k) d\hat{x} = 0. \quad (58)
\end{aligned}$$

Используя условие эллиптичности операторов L_i , получаем из (58)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx \\
& - \int_{x_n=b} \left[\sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k)^2 \right] d\hat{x} \\
& + \int_{x_n=a} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) \left[(u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) \right] dx \\
& + \sum_{k=1}^N \int_{\Pi_{a,b}} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) (\bar{f}_k - f_k) dx \leq 0. \quad (59)
\end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое в левой части неравенства (59). Для этого заметим, что из неравенства Пуанкаре следует

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\bar{f}_k - f_k|^2 d\hat{x} & \leq c \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (f_k(u, x_n) - \overline{f_k(u, x_n)}) \right|^2 dx \\
& \leq c_1 \int_{\Omega} |\nabla f_k|^2 |\nabla u|^2 \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad (60)
\end{aligned}$$

если ρ в условии теоремы 4 достаточно мало. Из (60), (59) следует:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx \\ & - \int_{x_n=b} \left[\sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k)^2 \right] d\hat{x} \\ & + \int_{x_n=a} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) \left[(u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) \right] dx \leq 0. \quad (61) \end{aligned}$$

Из ограниченности $u_k(x)$ и из свойств решений линейных эллиптических уравнений следует, что

$$\int_{\Pi_{t,t+1}} |\nabla u_k|^2 dx \leq c,$$

где c от t не зависит.

Следовательно,

$$\int_{\Pi_{t,t+1}} |\nabla \bar{u}_k|^2 dx \leq c_1$$

равномерно по t .

Отсюда следует, что если $b \rightarrow \infty$ по некоторой последовательности, то

$$\frac{1}{2} \int_{\Pi_{a,b}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx \leq c_2.$$

Таким образом,

$$\int_{\Pi_{a,\infty}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx \leq c_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x_n=b_m} \left[\sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k) \frac{\partial}{\partial x_n} (u_k - \bar{u}_k) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k)^2 \right] dx = 0, \quad (62) \end{aligned}$$

где b_m некоторая последовательность, стремящаяся к $+\infty$.

Устремив в (61) b к ∞ по последовательности b_m , получим в силу (62)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Pi_{a,\infty}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx \\ & \leq - \int_{x_n=a} \sum_{k=1}^N u_{k0}(\hat{x}) \left[(u_k - \bar{u}_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_n^{(k)} u_{k0}(\hat{x}) (u_k - \bar{u}_k)^2 \right] d\hat{x}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства Пуанкаре получаем

$$J(a) = \int_{\Pi_{a,\infty}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx \leq C \int_{x_n=a} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx,$$

т. е.

$$J(t) \leq -\beta J'(t).$$

Следовательно, $J(t) \leq C e^{-\beta t}$. Используя еще раз неравенство Пуанкаре, получаем:

$$\int_{\Pi_a} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k - \bar{u}_k) \right|^2 dx + \int_{\Pi_a} \sum_{k=1}^N |u_k - \bar{u}_k|^2 dx \leq c_1 e^{-2\beta a}. \quad (63)$$

Перепишем систему уравнений (54) в виде:

$$\frac{d}{dx_n^2} \bar{u}_k + a_n^{(k)} \frac{d}{dx_n} \bar{u}_k = f_k(x_n \bar{u}) - g_k, \quad (64)$$

где $g_k(x_n) = f_k(x_n \bar{u}) - \overline{f_k(x_n u)}$, $k = 1, \dots, N$. Легко видеть, что

$$g_k(x_n) = f_k(x_n \bar{u}) - \overline{f_k(x_n u)} + \overline{f_k(x_n \bar{u})} - \overline{f_k(x_n \bar{u})} = \overline{f_k(x_n \bar{u}) - f_k(x_n u)}.$$

Так как

$$|f_k(x_n u) - f_k(x_n \bar{u})| \leq \|\nabla_u f_k\| |u - \bar{u}|$$

и $u(x)$ — ограниченная функция, то

$$|g_s| \leq c_1 \int_{\Omega} |u - \bar{u}| d\hat{x}$$

и

$$|g_s|^2 \leq c_2 \int_{\Omega} |u - \bar{u}|^2 d\hat{x}.$$

Из (63) следует, что

$$\int_{x_n}^{\infty} |g_s|^2 dt \leq c_3 e^{-2\beta x_n}.$$

К системе (64) можно применить теорему 1, из которой следует, что

$$\bar{u} = X(x_n) + v_1(x_n),$$

где $\|v_1\| = O(e^{-\alpha x_n})$.

Отсюда и из (63) получаем утверждение теоремы 5.

Отметим, что в случае одного уравнения утверждение теоремы 5 оказывается более сильным. Именно, в этом случае имеет место поточечная оценка:

$$\|v\| \leq e^{-\alpha x_n}. \quad (65)$$

Это доказывается так же, как теорема 3 для параболического уравнения с использованием оценок Де Джорджи–Мозера [4]–[6].

Неравенство (65) верно и при произвольном N , если потребовать некоторой гладкости коэффициентов $a_{ij}^{(k)}$. Достаточно, чтобы они удовлетворяли условию Гёльдера, а граница $\partial\Omega$ области Ω была бы ляпуновской поверхностью. В этом случае вместо оценок типа Де Джорджи–Мозера используются оценки Морри [7].

Приведем несколько примеров, где используется теорема 5.

1. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\hat{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\hat{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + k \frac{\partial u}{\partial x_n} - a_0 |u|^{\sigma-1} u = 0, \quad (66)$$

где $\sigma > 1$, $a_0 = \text{const} > 0$, a_{ij} , a_i удовлетворяют условиям (48), ограничены, измеримы в липшицевой ограниченной области Ω .

Рассмотрим решение уравнения (66) с краевым условием (49) при $N = 1$. Известно [8], что все такие решения имеют нулевой предел при $x_n \rightarrow +\infty$. Из теоремы 4 следует, что при $k = 0$

$$u = c_\sigma (x_n + T)^{\frac{2}{1-\sigma}} + O(e^{-\alpha x_n}),$$

где $\alpha > 0$ — постоянная, T — постоянная, которая зависит от решения. Постоянная c_σ или равна нулю, или $\left[\frac{2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2} a_0 \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} = |c_\sigma|$, причем $c_\sigma = 0$ тогда и только тогда, когда решение меняет знак в каждой области Π_a , $a > 0$.

Если $k < 0$, то из теоремы 4 следует:

$$u = \chi(x_n + T) + O(e^{-\alpha x_n}), \quad (67)$$

где χ — некоторое решение уравнения

$$\ddot{\chi} + k \dot{\chi} - a |\chi|^{\sigma-1} \chi = 0, \quad (68)$$

ограниченное при $x_n \rightarrow +\infty$. Легко видеть, что значениями в нуле всякое ограниченное на $+\infty$ решение уравнения (68) определяется однозначно, и оно стремится к нулю при $x_n \rightarrow +\infty$. Если $\chi(0) = 0$, то $\chi \equiv 0$. В формуле (67) $\chi \equiv 0$ в том и только том случае, когда $u(x)$ меняет знак в каждой области Π_a , $a > 0$. Заметим, что если $\chi(0) > 0$, то

$$\chi = C(x_n + T)^{\frac{1}{1-\sigma}} + C_1(x_n + T)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \ln(x_n + T)(1 + o(1)),$$

где $C = \left(\frac{k\lambda}{a_0} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$, $\lambda = \frac{1}{1-\sigma}$, $C_1 = \frac{C\lambda(1-\lambda)}{k}$, $T = \text{const}$, которая зависит от χ .

Наконец, если $k > 0$, то $u(x) = O(e^{-\alpha x_n})$, где u — любое решение задачи (66), (49) в Π_0 .

2. Рассмотрим в Π_0 уравнение

$$\Delta u + |u|^{\sigma-1} u = 0, \quad \sigma > 1, \quad (69)$$

и его решение, которое удовлетворяет условиям (49). Докажем, что существует $h = \text{const} > 0$ такая, что если $|u(x)| \leq h$ при x_n достаточно больших, то либо

$$u = O(e^{-\alpha x_n}), \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

либо

$$u = \chi(x_n) + O(e^{-\alpha x_n}),$$

где $\chi(x_n)$ – периодическая функция.

Действительно, из теоремы 4 следует, что

$$u = \chi(x_n) + O(e^{-\alpha x_n}),$$

где

$$\ddot{\chi} + |\chi|^{\gamma-1}\chi = 0.$$

Легко видеть, что все нетривиальные решения этого обыкновенного дифференциального уравнения периодичны.

Заметим, что уравнение (69) не имеет знакопостоянных решений в Π_0 , удовлетворяющих условиям (49). Действительно, пусть $u(x) > 0$ в Π_a . Тогда в силу принципа максимума $u(x) \geq \min_{x_n=a} u(x) = \gamma > 0$. Из (69) следует:

$$\frac{d^2}{dx_n^2} \bar{u} \leq -\gamma^\sigma,$$

откуда $\bar{u} \rightarrow -\infty$, когда $x_n \rightarrow +\infty$. Это является противоречием.

3. Рассмотрим в Π_0 уравнение:

$$\Delta u + u - k|u|^{\sigma-1}u = 0, \quad (70)$$

$\sigma = \text{const} > 1, k = \text{const}$.

Допустим, что $u(x)$ – его решение, удовлетворяет условиям (49) и $\lim_{x_n \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Если $\lambda_2(\Omega)$ – наименьшее по модулю ненулевое собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа в Ω – больше 1, то

$$u(x) = O(e^{-\alpha x_n}).$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3 и мы его приводить не будем.

4. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u - u_+^\sigma = 0, \quad \sigma > 1,$$

где u_+ – положительная часть функции u в Π_0 и его решение, удовлетворяющее однородному краевому условию Неймана на Γ_a . Пусть $\lim_{x_n \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Тогда

$$u = c_\sigma(x_n + T)^{\frac{2}{1-\sigma}} + O(e^{-\alpha x_n}),$$

где или $c_\sigma = \left[\frac{2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$, или $c_\sigma = 0$.

Случай $c_\sigma = 0$ возможен тогда и только тогда, когда $u(x)$ меняет знак в каждой области $\Pi_a, a > 0$. Заметим (это следует из теории гармонических функций), что кроме решений, стремящихся к нулю на бесконечности, рассматриваемая задача может иметь еще только решения вида:

$$u = C_1 x_n + C_2 + O(e^{-\alpha x_n}),$$

где $C_1 = \text{const} < 0$, постоянные C_1, C_2 зависят от u .

5. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + u_+^\sigma = 0, \quad \sigma > 1, \quad x \in \Pi_0,$$

и пусть $u(x)$ удовлетворяет однородному условию Неймана на Γ_0 и имеет предел — нуль на бесконечности. Тогда

$$u(x) = O(e^{-\alpha x_n}), \quad x_n \rightarrow +\infty.$$

6. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + i|u|^{\sigma-1}u = 0, \quad \sigma > 1,$$

и его решение в Π_0 , удовлетворяющее однородному краевому условию Неймана на Γ_0 . Теорема 1 применима, конечно, и для комплекснозначных функций. Это сразу следует в результате разделения вещественной и мнимой частей. Используя ее, можно сделать утверждение, что если $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} u = 0$, то

$$u = O(e^{-\alpha x_n}).$$

Приведем теперь примеры применения теоремы 1 для уравнений высокого порядка.

7. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a|u|^{\sigma-1}u + b|u|^{\tau-1}u,$$

где $\tau > \sigma > 1$. Пусть $u(x, t)$ — решение этого уравнения, периодическое по x . Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} u = 0$, то

$$u(t, x) = X(t) + O(e^{-\alpha t}), \quad \alpha > 0, \quad (71)$$

где $X(t)$ — решение уравнения

$$\dot{X}(t) = \alpha X(t)^\sigma + bX(t)^\tau. \quad (72)$$

Заметим, что если $b = 0$, $a < 0$, то всякое решение стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. Если $\alpha > 0$, то только тривиальное решение имеет нулевой предел при $t \rightarrow \infty$.

8. Рассмотрим уравнение

$$\Delta \Delta u = a|u|^{\sigma-1}u, \quad \sigma > 1,$$

и его решение $u(x) = u(x', x_n)$, периодическое по x' .

Если $\lim_{x_n \rightarrow \infty} u(x) = 0$, то

$$u(x) = X(x_n) + O(e^{-\alpha x_n}), \quad \alpha > 0,$$

где $X(x_n)$ — решение уравнения

$$X^{(4)}(x_n) = a|X|^\sigma X.$$

Если $\alpha < 0$, то все решения последнего уравнения колеблющиеся (имеют неограниченную последовательность нулей при $x_n \rightarrow \infty$) и $|X(x_n)| \leq cx_n^{4/(1-\sigma)}$. Кроме того

$$\overline{\lim}_{x_n \rightarrow +\infty} x_n^{\frac{4}{\sigma-1}} X(x_n) > 0.$$

Если $\alpha > 0$, то $X(x_n) \sim c_\sigma x_n^\lambda$, где

$$c_\sigma = \left[\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{a} \right]^{1/(\sigma-1)}, \quad \lambda = \frac{4}{1-\sigma}.$$

9. Пусть $u(x)$ решение уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a|u|^{\sigma-1}u + b|u|^{\tau-1}u, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

где $\sigma > 1$, $\tau > 1$ и его решение в Π_0 , удовлетворяющее краевым условиям:

$$u''(0) = u''(1) = 0, \quad \alpha^2 u'''(0) - u'(0) = \alpha^2 u'''(1) - u'(1) = 0.$$

Такие условия можно считать аналогом краевых условий Неймана, что следует из вариационного принципа для стационарной задачи. Если u имеет нулевой предел при $t \rightarrow +\infty$, то верна формула (71), где $X(t)$ решение уравнения (72). Отметим еще только, что в случае $a < 0$ и $X(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ или

$$X(t) = \pm \left[\frac{1}{(1-\sigma)a} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} t^{\frac{1}{1-\sigma}} (1 + o(1)),$$

или $X(t) = O(e^{-\alpha t})$, где $\alpha > 0$.

Список литературы

1. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Some results for nonlinear elliptic equations in cylindrical domains // Oper. Theory Adv. Appl. 1992. V. 57. P. 185–195.
2. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 138. № 3. С. 346–359.
3. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н., Солонников В. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
4. De Giorgi E. Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari. // Mem. Accad. Sci. Torino (3). P. I., III. 1957. P. 25–43.
5. Moser J. A new proof of de Giorgi theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. № 3. P. 457–468.
6. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
7. Morrey G. B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin: Springer-Verlag, 1966.
8. Kondratiev V., Oleinik O. On asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear elliptic equations in unbounded domains // Partial differential equations and related subjects. Proceedings of the Conference dedicated to Louis Nirenberg. Longman, 1992. P. 163–195.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
16.06.1997