Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, А. М. Ильин, Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 4, 25–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:01:43

УДК 517.956

Р. Р. Гадыйльшин, А. М. Ильин

Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью

Рассматривается задача Дирихле в двумерной области с узкой щелью, ширина которой является малым параметром. Методом согласования асимптотических разложений строится полное асимптотическое разложение собственного значения возмущенной задачи, сходящегося к простому собственному значению предельной задачи. Показано, что регулярная теория возмущений может быть формально проведена естественным образом вплоть до величины ε^2 , но полученный таким образом результат неверен. Только привлечение внутреннего асимптотического разложения позволяет получить правильный ответ.

Библиография: 14 названий.

Введение

Исследованию асимптотик собственных значений эллиптических краевых задач при различных типах сингулярных возмущений граничных условий посвящено достаточно много работ (см., например, [1]–[8] и содержащийся в этих работах обзор литературы). Ниже рассмотрена задача Дирихле в двумерной области с узкой щелью, именуемая в дальнейшем *возмущенной задачей*. Малым параметром является ширина щели. Такая задача является бисингулярной — коэффициенты внешнего разложения имеют нарастающие особенности вблизи концов разреза, к которому стягивается щель. В настоящей работе методом согласования асимптотических разложений [9]–[12] строится полное асимптотическое разложение собственного значения возмущенной задачи, сходящегося к простому собственному значению предельной задачи. Методика исследования имеет сходные черты с методикой статьи [9], где предельная задача считалась однозначно разрешимой, однако есть и существенные отличия. Вследствие того, что надо одновременно с асимптотикой решения (собственной функции) получать и асимптотику собственного значения, здесь затруднительно строить сначала внешнее асимптотическое разложение и затем “исправлять” его с помощью внутреннего. Более того, ниже (в § 3) показывается, что регулярная теория возмущений может быть формально проведена естественным образом вплоть до величины ε^2 . Но выясняется, что полученный таким образом результат неверен. Только привлечение внутреннего асимптотического разложения позволяет получить правильный ответ.

Исследование можно провести для любого эллиптического оператора второго порядка, однако, чтобы сделать изложение менее громоздким, мы рассматриваем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-00501 и № 96-15-96241).

лишь оператор Лапласа. Дополнительной причиной такого выбора является то, что для оператора Лапласа получаются явные нетривиальные формулы асимптотики собственного значения. В том случае, когда граница щели вблизи концов совпадает с параболой, собственное значение разлагается в асимптотический ряд по целым степеням ε . В общем случае гладкой границы щели в асимптотике собственного значения присутствуют члены $\varepsilon^k \ln^j \varepsilon$, где $j \leq [(k-2)/6]$ (квадратные скобки означают целую часть), так что наибольший по величине логарифмический член — это $\varepsilon^8 \ln \varepsilon$. С другой стороны, все коэффициенты при $\varepsilon^{6m+2} \ln^m \varepsilon$, вообще говоря, не равны нулю. Заметим, что асимптотика решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона в рассматриваемой области не содержит степеней $\ln \varepsilon$ для любой формы щели [10], а в статье [9] показано, что для эллиптического оператора второго порядка асимптотика решения вне концов щели содержит, вообще говоря, члены вида $\varepsilon^k \ln^j \varepsilon$ при $j \leq [(k-2)/4]$.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная, односвязная область в $\mathbb{R}^2$, имеющая бесконечно дифференцируемую границу Γ , ω_0 — интервал $(0,1)$ на оси Ox_1 , $\bar{\omega}_0 \subset \Omega$, $\omega_\varepsilon = \{x : 0 < x_1 < 1, \varepsilon g_-(x_1) < x_2 < \varepsilon g_+(x_1)\}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, $g_\pm \in C^\infty(\omega_0)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g_\pm(t) = \lim_{t \rightarrow 1} g_\pm(t) = 0.$$

Обозначим $\Omega_\delta = \Omega \setminus \bar{\omega}_\delta$, $\Gamma_\delta = \partial\Omega_\delta$, $\delta \geq 0$. В введенных обозначениях предельную и возмущенную задачи на собственные значения можно записать в единой форме:

$$-\Delta\varphi_\delta = \lambda_\delta\varphi_\delta, \quad x \in \Omega_\delta, \quad \varphi_\delta = 0, \quad x \in \Gamma_\delta, \quad (1.1)$$

где $\delta = 0$ соответствует предельной задаче, а $\delta = \varepsilon > 0$ — возмущенной.

Вблизи концов отрезка будем предполагать границу щели ω_ε гладкой. Это означает, что около точек $(0,0)$ и $(1,0)$ уравнение границы имеет вид: $x_1 = G_-(x_2)$ и $x_1 = G_+(x_2)$, соответственно, где $G_\pm \in C^\infty$. Ясно, что

$$G_-(0) = G'_-(0) = G'_+(0) = 0, \quad G_+(0) = 1, \quad \pm G''_\pm(0) \leq 0.$$

Дополнительно предположим, что $G''_-(0)G''_+(0) \neq 0$. В этом случае функции $g_\pm$ имеют на концах интервала ω_0 следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} g_\pm(x_1) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^j g_j^- x_1^{j/2}, \quad x_1 \rightarrow 0, \\ g_\pm(x_1) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^j g_j^+ (1-x_1)^{j/2}, \quad x_1 \rightarrow 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $g_1^\pm = \sqrt{\mp 2/G''_\pm(0)}$, и следовательно, $g_1^\pm > 0$.

§ 2. Равномерные оценки решений возмущенной задачи

Решения как предельной, так и возмущенной краевых задач удобно рассматривать в классе обобщенных решений из пространств Соболева (см., например, [13]). Для области Q обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ – замыкание функций из $C_0^\infty(Q)$ по норме $W_2^1(Q)$, а через $(\cdot, \cdot)_Q$ – скалярное произведение в $L_2(Q)$. Под *решением краевой задачи*

$$-\Delta u_\delta = \lambda u_\delta + f_\delta, \quad x \in \Omega_\delta, \quad u_\delta = 0, \quad x \in \Gamma_\delta, \quad (2.1)$$

где $f_\delta \in L_2(\Omega_\delta)$, понимается элемент $u_\delta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_\delta)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$(\nabla u_\delta, \nabla v)_{\Omega_\delta} = (\lambda u_\delta + f_\delta, v)_{\Omega_\delta} \quad (2.2)$$

при любом $v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_\delta)$. Всюду далее функции из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_\varepsilon)$ считаются продолженными нулем в ω_ε . Именно в таком контексте понимаются очевидные включения $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_\mu) \subset \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_\nu) \subset \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega_\mu) \subset L_2(\Omega_\nu)$ для любых $0 \leq \nu < \mu$. Ясно также, что $L_2(\Omega_0) \subset L_2(\Omega)$. Обозначим через $\|\cdot\|_Q$ и $\|\cdot\|_{m,Q}$ нормы в $L_2(Q)$ и $W_2^m(Q)$, соответственно.

Пусть $\lambda_\delta^{(n)}$ – упорядоченные по возрастанию собственные значения (1.1) с учетом их кратности, а $\varphi_\delta^{(n)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции. Из вариационного принципа и теорем вложения вытекает

ЛЕММА 2.1. *Для любых $0 \leq \nu < \mu$ имеют место неравенство $0 < \lambda_\nu^{(n)} < \lambda_\mu^{(n)}$ и сходимость $\lambda_\varepsilon^{(n)} \rightarrow \lambda_0^{(n)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $\lambda_0^{(n)}$ – простое собственное значение, то $\varphi_\varepsilon^{(n)} \rightarrow \varphi_0^{(n)}$ в $L_2(\Omega)$.*

Всюду далее будем обозначать через λ_0 простое собственное значение предельной задачи, а через λ_ε – простое собственное значение возмущенной задачи, сходящееся к λ_0 . Аналогично, через φ_0 и φ_ε будем обозначать соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции.

ЛЕММА 2.2. *Пусть u_ε – решение (2.1) при $\lambda = \lambda_\varepsilon$ и $(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)_\Omega = 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C \|f_\varepsilon\|_\Omega, \quad (2.3)$$

где постоянная C не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что из (2.2) вытекает равномерная априорная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C (\|u_\varepsilon\|_\Omega + \|f_\varepsilon\|_\Omega). \quad (2.4)$$

Дальнейшее доказательство будем вести от противного. Допустим, существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что при $\varepsilon_n = \varepsilon$ имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega} \geq n \|f_\varepsilon\|_\Omega \quad (2.5)$$

для некоторых f_ε (для $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon \leq \delta_0$ равномерная оценка (2.3) вытекает из известных априорных оценок решений эллиптических уравнений в области с гладкой границей). Не ограничивая общности, будем считать, что $\|u_\varepsilon\|_\Omega = 1$. Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$\|u_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq T, \quad (2.6)$$

где T – некоторая фиксированная постоянная. Заметим, что из (2.5) и (2.6) следует сходимость f_ε к нулю в норме $L_2(\Omega)$. Из слабой компактности ограниченного множества в $W_2^1(\Omega)$ и его же компактности в $L_2(\Omega)$ вытекает, что существует подпоследовательность $\varepsilon_{n'} \rightarrow 0$, на которой функции u_ε сходятся к нетривиальному решению $u_0 \neq 0$ предельной задачи для $f_0 = 0$ и $\lambda = \lambda_0$. Причем, в силу ортогональности $(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)_\Omega = 0$ и леммы 2.1 имеет место равенство $(u_0, \varphi_0)_\Omega = 0$. Полученное противоречие доказывает оценку (2.3). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. *При λ , близких к λ_0 , для решения задачи (2.1) справедливы равномерные оценки*

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| |(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)_\Omega| \leq \|f_\varepsilon\|_\Omega, \quad (2.7)$$

$$\|u_\varepsilon - (\varphi_\varepsilon, u_\varepsilon)_\Omega \varphi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C \|f_\varepsilon\|_\Omega. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $v = \varphi_\varepsilon$ в (2.2) и учитывая равенство

$$(\nabla \varphi_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)_\Omega = \lambda_\varepsilon (\varphi_\varepsilon, u_\varepsilon)_\Omega,$$

получаем оценку (2.7). В свою очередь, применяя утверждение леммы 2.2 к функции $u_\varepsilon - (\varphi_\varepsilon, u_\varepsilon)_\Omega \varphi_\varepsilon$ и используя оценку (2.7), получаем оценку (2.8). Лемма доказана.

§3. Регулярная теория возмущений

Из леммы 2.1 следует, что собственная функция φ_ε сходится к φ_0 . Поэтому главный член асимптотики φ_ε равен φ_0 . Представляется естественным асимптотики φ_ε и λ_ε искать в следующем виде:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \varepsilon^2 \varphi_2(x) + \dots, \quad (3.1)$$

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в (1.1), получаем краевые задачи для коэффициентов φ_1 и φ_2 :

$$\begin{aligned} -(\Delta + \lambda_0)\varphi_1 &= \lambda_1 \varphi_0, & x \in \Omega_0, \\ \varphi_1 &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -g_\pm(x_1) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}, & x_1 \in \omega_0, \quad x_2 = \pm 0, \\ -(\Delta + \lambda_0)\varphi_2 &= \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_0, & x \in \Omega_0, \\ \varphi_2 &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\varphi_2 = -g_\pm(x_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} g_\pm^2(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2}, \quad x_1 \in \omega_0, \quad x_2 = \pm 0.$$

Пусть r, θ – полярные координаты. Обозначим через $\Psi_k(\theta)$ линейную комбинацию $\sin(j\theta/2)$ и $\cos(j\theta/2)$, где $0 \leq j \leq k$ и $j \equiv k \pmod{4}$. Из [9], [14] вытекает следующий упрощенный аналог лемм 1 и 2 работы [9].

ЛЕММА 3.1. Пусть функции $f \in W_2^1(\Omega_0) \cap C^\infty(\Omega_0)$ и $h_\pm \in C^\infty(\omega_0)$ имеют при $r \rightarrow 0$ и при $x_1 \rightarrow 0$ асимптотики

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{k/2} \Psi_k(\theta), \\ h_\pm(x_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\pm x_1)^{k/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

и аналогичные разложения при $(1 - x_1)^2 + x_2^2 \rightarrow 0$ и $x_1 \rightarrow 1$. Далее, пусть $u \in W_2^1(\Omega_0)$ – решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -(\Delta + \lambda)u &= f, & x \in \Omega_0, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \\ u &= h_\pm, & x_1 \in \omega_0, \quad x_2 = \pm 0. \end{aligned}$$

Тогда $u \in C^\infty(\Omega_0)$ также имеет асимптотики вида (3.5) в окрестности концов разреза ω_0 , причем, $\Psi_0 = b_0$.

Если $f = 0$ и $h_\pm = 0$, то суммирование в (3.5) начинается с $k = 1$ и $\Psi_1(\theta) = \alpha \sin(\theta/2)$.

Если λ не является собственным значением предельной задачи, то существует решение $u \in W_2^1(\Omega_0)$, удовлетворяющее всем выше приведенным утверждениям леммы.

Здесь и всюду далее предполагается, что асимптотические ряды по переменным x_1 и x_2 бесконечно дифференцируемы.

СЛЕДСТВИЕ. Собственная функция φ_0 имеет в окрестности концов разреза ω_0 разложения вида (3.5), где суммирование начинается с $k = 1$.

ЛЕММА 3.2. Существует функция $\varphi_1 \in W_2^1(\Omega_0) \cap C^\infty(\Omega_0)$, имеющая асимптотики (3.5) и являющаяся решением краевой задачи (3.3) при

$$\lambda_1 = \int_0^1 \left(g_+(x_1) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_0(x_1, +0) \right)^2 - g_-(x_1) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_0(x_1, -0) \right)^2 \right) dx_1. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия леммы 3.1 вытекает, что правые части в уравнении и в граничном условии на ω_0 в (3.3) удовлетворяют условию леммы 3.1. Следовательно, для любого λ , не являющегося собственным значением, существует решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -(\Delta + \lambda)u &= 0, & x \in \Omega_0, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \\ u &= -g_\pm \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}, & x_1 \in \omega_0, \quad x_2 = \pm 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющее всем утверждением леммы 3.1. Представляя решение задачи (3.3) в виде $\varphi_1 = u + w$, для функции w получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} -(\Delta + \lambda_0)w &= (\lambda_0 - \lambda)u + \lambda_1\varphi_0, & x \in \Omega_0, \\ w &= 0, & x \in \partial\Omega_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как правая часть уравнения в (3.7) принадлежит $L_2(\Omega)$, то необходимым и достаточным условием разрешимости (3.7) является ортогональность в $L_2(\Omega)$ правой части и φ_0 , которая достигается подходящим выбором постоянной λ_1 . По построению функция φ_1 удовлетворяет всем условиям леммы 3.1. Соотношение (3.6) легко получается интегрированием по частям левой части тождества

$$-(\Delta + \lambda_0)\varphi_1, \varphi_0)_{\Omega_0} = \lambda_1(\varphi_0, \varphi_0)_{\Omega} = \lambda_1.$$

Лемма доказана.

Так как функция φ_1 определена с точностью до слагаемого $\alpha\varphi_0$, то для определенности выберем постоянную α из условия ортогональности: $(\varphi_1, \varphi_0)_{\Omega} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Ниже, из построения (и обоснования) полных асимптотических разложений собственного значения и собственной функции будет следовать, что полученные выше коэффициенты φ_1 и λ_1 – верные. С формальной точки зрения, используя регулярную теорию возмущений, можно определить и коэффициенты φ_2 и λ_2 . Действительно, в силу уравнения второе слагаемое в граничном условии для φ_2 равно нулю, и следовательно, правые части в (3.4) удовлетворяют условиям леммы 3.1. Повторяя доказательство леммы 3.2, получаем существование функции $\varphi_2 = \tilde{\varphi} \in W_2^1(\Omega_0) \cap C^\infty(\Omega_0)$, имеющей асимптотику (3.5) и являющейся решением краевой задачи (3.4) при $\lambda_2 = \tilde{\lambda}$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} = \int_0^1 & \left(g_+(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_1(x_1, +0) \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_0(x_1, +0) \right. \\ & \left. - g_-(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_1(x_1, -0) \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_0(x_1, -0) \right) dx_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Однако, как это будет показано ниже, приведенные значения $\lambda_2 = \tilde{\lambda}$ и $\varphi_2 = \tilde{\varphi}$ не являются верными.

§ 4. Построение вторых членов асимптотик методом согласования асимптотических разложений

Для правильного определения λ_2 надо использовать внутреннее асимптотическое разложение в окрестности концов отрезка. Вид этого разложения определяется (в соответствии с методом согласования) из уже построенных φ_0 и φ_1 . В силу лемм 3.1 и 3.2 и формул (3.1) и (1.2) в начале координат справедливы асимптотики

$$\varphi_0(x) = d_- r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(r), \quad \varphi_1(x) = -\frac{1}{2} d_- g_1^- + O(r^{1/2}).$$

Такая же асимптотика (в соответствующей полярной системе координат и с заменой постоянных d_- и g_1^- на d_+ и g_1^+) имеет место и в окрестности точки $(1, 0)$.

В окрестности концов щели асимптотику решения будем искать в виде рядов по степеням ε , коэффициентами которых являются функции, зависящие от растянутых (внутренних) переменных $\xi_j = x_j(g_1^-)^{-2}\varepsilon^{-2}$, $j = 1, 2$, в окрестности левого конца и $\xi_1 = (1 - x_1)(g_1^+)^{-2}\varepsilon^{-2}$, $\xi_2 = x_2(g_1^+)^{-2}\varepsilon^{-2}$ в окрестности правого конца. Переписывая асимптотики φ_j на концах щели во внутренних переменных, получаем, что

$$\varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x) = \varepsilon d_{\pm} g_1^{\pm} \left(\rho^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.1)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты на плоскости $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Равенство (4.1) приводит к мысли, что в окрестности концов щели собственная функция должна во внутренних переменных иметь следующий вид:

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \varepsilon v_1^{\pm}(\xi) + O(\varepsilon^2). \quad (4.2)$$

Краевые задачи для $v_1^{\pm}$ получаются стандартным образом (см. [9], [10]). Подставляем (4.2) и (3.2) в (1.1) и переходим к внутренним переменным в уравнении и в граничных условиях, учитывая, что в окрестности левого конца уравнение щели имеет асимптотику

$$\xi_1 = \xi_2^2(1 + o(1)), \quad \varepsilon \xi_2 \rightarrow 0$$

и аналогичный вид в окрестности другого конца. Оставляя члены при наименьшей степени ε , получаем следующие краевые задачи:

$$\Delta v_1^{\pm} = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad v_1^{\pm} = 0, \quad \xi \in \partial\Pi, \quad (4.3)$$

где $\Pi = \{\xi : \xi_1 < \xi_2^2\}$.

В силу (4.1) (и идеологии метода согласования асимптотических разложений) решения (4.3) должны иметь асимптотики

$$v_1^{\pm}(\xi) = d_{\pm} g_1^{\pm} \left(\rho^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) + o(1), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Нетрудно выписать явный вид таких функций. Для этого введем комплексную переменную $y = \xi_1 + i\xi_2$ (здесь и далее i – мнимая единица). Легко видеть, что имеет место равенство

$$\left(y - \frac{1}{4} \right)^{1/2} \Big|_{\xi_1 = \xi_2^2} = \xi_2 + \frac{i}{2} \quad (4.5)$$

(разрез взят вдоль луча $(\frac{1}{4}, \infty)$ вещественной оси). Следовательно, функции

$$v_1^{\pm}(\xi) = d_{\pm} g_1^{\pm} \left(\operatorname{Im} \left(y - \frac{1}{4} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.6)$$

являются решениями задачи (4.3), имеющими асимптотики (4.4). Более того, из (4.6) следует, что

$$v_1^{\pm}(\xi) = d_{\pm} g_1^{\pm} \left(\rho^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \rho^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \right) + O(\rho^{-3/2}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Переписывая теперь асимптотики $\varepsilon v_1^\pm$ на бесконечности во внешних переменных x , получаем главные члены асимптотик на концах щели для коэффициента φ_2 ряда (3.1):

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{8}d_-(g_1^-)^2 r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(1) \quad (4.8)$$

— на левом конце и аналогичный вид на правом конце.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из асимптотики (4.8) следует, что φ_2 не может принадлежать (в случае достаточно общего положения $|d_+| + |d_-| \neq 0$) классу $W_2^1(\Omega_0)$. Именно по этой причине формально непротиворечивые регулярные построения вторых членов асимптотик, указанные в замечании 3.1, приводят к неверным значениям искомых величин.

Перейдем к построению правильных значений для φ_2 и λ_2 в разложениях (3.1) и (3.2). Для этого надо изменить $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\lambda}$, построенные в замечании 3.1, учитывая асимптотику (4.8). Другими словами, надо к функции $\tilde{\varphi}(x)$ добавить сингулярный член $\text{const } r^{-1/2} \sin(\theta/2)$ вблизи левого конца щели и аналогичный член вблизи правого конца. Однако этим нельзя ограничиться. Для того чтобы функция φ_2 продолжала оставаться решением задачи (3.4), надо добавить дополнительное слагаемое из класса $W_2^1(\Omega_0)$.

Обозначим через $(r_\pm, \theta_\pm)$ соответствующие полярные координаты в окрестности концов разреза ω_0 , а через $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, тождественно равную единице при $t < c$ и нулю при $t > 2c$, где $c < \frac{1}{2}$ — достаточно малое число такое, что замкнутые круги радиуса $2c$ с центрами в $(0, 0)$ и $(1, 0)$ лежат в Ω .

ЛЕММА 4.1. *Существуют функции*

$$\psi_\pm(x) = \chi(r_\pm) r_\pm^{-1/2} \sin \frac{\theta_\pm}{2} + \tilde{\psi}_\pm(x), \quad (4.9)$$

где $\tilde{\psi}_\pm \in W_2^1(\Omega_0)$, являющиеся решением краевой задачи

$$-(\Delta + \lambda_0)\psi_\pm = \lambda_\pm \varphi_0, \quad x \in \Omega_0, \quad \psi_\pm = 0, \quad x \in \partial\Omega_0, \quad (4.10)$$

при

$$\lambda_\pm = \pi d_\pm. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать $\tilde{\psi}_\pm$ в следующем виде:

$$\tilde{\psi}_\pm(x) = -\frac{\lambda_0}{2} \chi(r_\pm) r_\pm^{3/2} \sin \frac{\theta_\pm}{2} + \hat{\psi}_\pm(x).$$

Подставляя выражение (4.9) в (4.10), приходим к следующей задаче для $\hat{\psi}_\pm$:

$$-(\Delta + \lambda_0)\hat{\psi}_\pm = \lambda_\pm \varphi_0 + f_\pm, \quad x \in \Omega_0, \quad \hat{\psi}_\pm = 0, \quad x \in \partial\Omega_0, \quad (4.12)$$

где $f_\pm \in W_2^1(\Omega)$ имеют асимптотики (3.5). Достаточным (и необходимым) условием разрешимости (4.12) в $W_2^1(\Omega_0)$ является равенство $\lambda_\pm = -(f_\pm, \varphi_0)_\Omega$.

Осталось получить соотношения (4.11). Обозначим $B^\pm(t) = \Omega_0 \setminus S_\pm(t)$, где $S_\pm(t)$ – круг радиуса t с центром в соответствующем конце ω_0 . Так как функции $\tilde{\psi}_\pm$ удовлетворяют утверждениям леммы 3.1, то интегрируя по частям левые части тождеств

$$-((\Delta + \lambda_0)\psi_\pm, \varphi_0)_{B^\pm(t)} = \lambda_\pm(\varphi_0, \varphi_0)_{B^\pm(t)},$$

учитывая (4.9) и асимптотику $\varphi_0(x)$ и переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем соотношения (4.11). Лемма доказана.

В силу леммы 4.1 и построений, приведенных в замечании 3.1, функция

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{8}(d_+(g_1^+)^2\psi_+(x) + d_-(g_1^-)^2\psi_-(x)) + \tilde{\varphi}(x) \quad (4.13)$$

является решением краевой задачи (3.4) при

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{8}((d_+g_1^+)^2 + (d_-g_1^-)^2) + \tilde{\lambda}, \quad (4.14)$$

где постоянная $\tilde{\lambda}$ определяется равенством (3.8), и имеет на концах разреза требуемые асимптотики (4.8).

Таким образом, коэффициенты φ_2 и λ_2 рядов (3.1) и (3.2), а также главные члены $v_1^\pm$ внутренних разложений построены.

§ 5. Внутреннее разложение в случае параболических концов щели

Всюду в этом разделе предполагается, что граница щели в окрестности концов разреза имеет вид парабол. Будем искать асимптотику собственного значения и внутренние разложения в более развернутых, чем в (3.2) и в (4.2), видах:

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i, \quad (5.1)$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i^\pm(\xi). \quad (5.2)$$

Так как приводимые ниже рассуждения для коэффициентов внутренних разложений – одни и те же в окрестности обоих концов щели, то, во-первых, ограничимся рассмотрением разложения на левом конце, а, во-вторых, чтобы не загромождать текст индексами “ $\pm$ ”, будем их, по-возможности, опускать.

При наложенных на границу $\partial\omega_\varepsilon$ ограничениях ее уравнение в окрестности концов щели, записанное во внутренних переменных, имеет вид:

$$\xi_1 = \xi_2^2. \quad (5.3)$$

Подставляя (5.1)–(5.3) в (1.1), переходя к внутренним переменным и выписывая равенства при одинаковых степенях ε , получаем следующую рекуррентную систему краевых задач:

$$-\Delta v_n = \sum_{k=0}^{n-5} \lambda_i v_{n-k-4}, \quad \xi \in \Pi, \quad (5.4)$$

$$v_n = 0, \quad \xi \in \partial\Pi. \quad (5.5)$$

Пусть $z = \xi_1 - \frac{1}{4} + i\xi_2$.

ЛЕММА 5.1. *Для любых k и m , отличных от -1 , уравнение $\Delta v = \bar{z}^k z^m$ имеет решение вида $v = c\bar{z}^{k+1}z^{m+1}$.*

ЛЕММА 5.2. *Для любого целого $k \geq 0$ краевая задача*

$$\Delta v = 0, \quad \xi_1 < \xi_2^2, \quad v = \xi_2^k, \quad \xi_1 = \xi_2^2,$$

имеет решение вида

$$v(\xi) = \sum_{j=0}^{[k/2]} \alpha_j \operatorname{Re} z^{k/2-j}.$$

Справедливость этих двух лемм очевидным образом следует из равенства (4.5) и представления $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Существуют решения краевых задач*

$$\Delta X_m = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad X_m = 0, \quad \xi \in \partial\Pi,$$

которые могут быть представлены в виде:

$$X_m(\xi) = \operatorname{Im} z^{m/2} + \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} \alpha_j \operatorname{Re} z^{(m-1)/2-j}.$$

Отметим, что главный член асимптотики функции $X_m(\xi)$ на бесконечности имеет вид: $\rho^{m/2} \sin(m\theta/2)$.

В свою очередь, из утверждений лемм 5.1 и 5.2 вытекает

ЛЕММА 5.3. *Пусть $1 \leq n < \infty$, $1 \leq i \leq n$, а $\{a_i^{(n)}\}$ – произвольная последовательность действительных чисел. Тогда система краевых задач (5.4), (5.5) имеет систему решений, которая может быть представлена в виде*

$$\begin{aligned} v_n(\xi) &= \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} X_i(\xi) + \tilde{v}_n(\xi), \\ \tilde{v}_n(\xi) &= \sum_{k=1}^{[(n-1)/4]} \sum_{j=1}^{n-4k} |z|^{2k} (\alpha_{n,k,j} \operatorname{Im} z^{j/2} + \beta_{n,k,j} \operatorname{Re} z^{(j-1)/2}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \beta_{n,0,j} \operatorname{Re} z^{(j-1)/2}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где постоянные $\alpha_{n,k,j}$ и $\beta_{n,k,j}$ не зависят от $a_s^{(m)}$ при $m \geq n$.

Доказательство проводится по индукции. Для $n \leq 4$ уравнения (5.4) однородные, и согласно следствию леммы 5.2 существуют решения вида (5.6) с $\tilde{v}_n(\xi) \equiv 0$. Для $n \geq 5$ уравнения (5.4) неоднородные, и для построения их решений следует учесть, что

$$\Delta(|z|^{2k} \operatorname{Im} z^{j/2}) = 4 \operatorname{Im} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (\bar{z}^k z^{k+j/2}) = 2k(2k+j)|z|^{2k-2} \operatorname{Im} z^{j/2}$$

и аналогичное равенство справедливо для $|z|^{2k} \operatorname{Re} z^{j/2}$. Поэтому легко построить решение неоднородного уравнения (5.4) подобного вида. Для ликвидации возникшей невязки на параболе $\partial\Pi$ следует воспользоваться леммой 5.2. Лемма доказана.

§ 6. Внешнее разложение в случае параболических концов щели

Асимптотику собственной функции вне концов щели (внешнее разложение) будем искать в виде ряда

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j. \quad (6.1)$$

Заметим, что асимптотическое разложение (6.1) (так же, как и асимптотическое разложение (5.2) из предыдущего параграфа) соответствует собственной функции φ_ε с “нестрогой” нормировкой $\|\varphi_\varepsilon\|_\Omega = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Краевые задачи для коэффициентов рядов (5.1) получаются стандартной постановкой рядов (5.1) и (6.1) в (1.1) с последующим выписыванием равенств при одинаковых степенях ε и формальным переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате этой процедуры получаем следующую рекуррентную систему краевых задач:

$$-\Delta \varphi_n = \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_{n-j}, \quad x \in \Omega_0, \quad (6.2)$$

$$\varphi_n(x_1, \pm 0) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} (g_\pm(x_1))^j \frac{\partial^j \varphi_{n-j}}{\partial x_2^j}(x_1, \pm 0), \quad x_1 \in (0, 1). \quad (6.3)$$

Пусть j – любое полуцелое число, $H_j(x)$ – однородные функции порядка j из $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus l_+)$, где l_+ – полуось $x_2 = 0$, $x_1 \geq 0$. Множество рядов вида

$$H(x) = \sum_{j=-m}^{\infty} H_{j/2}(x) \quad (6.4)$$

обозначим через $\widetilde{\mathcal{H}}_m$. Слагаемые отрицательной степени однородности будем называть *сингулярной частью ряда*.

Аналогично, множество рядов вида

$$h(x) = \sum_{j=-m}^{\infty} \alpha_j x_1^{j/2}$$

обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовую последовательность

$$\left\{ b_j = \frac{1}{2\pi r^{j/2}} \int_0^{2\pi} H_{j/2}(x) \sin \frac{j\theta}{2} d\theta \right\}_{j=1}^{\infty}$$

будем называть *гармонической серией* ряда (6.4).

ЛЕММА 6.1. Пусть ряд $H \in \widetilde{\mathcal{H}}_0$ имеет нулевую гармоническую серию и является формальным асимптотическим решением при $r \rightarrow 0$ краевой задачи

$$(\Delta + \lambda_0)H = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus l_+, \quad H(x_1, \pm 0) = 0, \quad x_1 > 0.$$

Тогда $H = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует учесть, что члены ряда из $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ имеют вид $r^{j/2}\Phi_j(\theta)$, $j \geq 0$. После подстановки в уравнение получается обыкновенное дифференциальное уравнение для Φ_j . Из явного вида решений этих уравнений, краевых условий при $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ и из равенств нулю чисел b_j следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{H}}_m$, $h_{\pm} \in \widetilde{\mathcal{A}}_m$, ряды $H^{(1)}, H^{(2)} \in \widetilde{\mathcal{H}}_m$ являются формальными асимптотическими решениями при $r \rightarrow 0$ краевой задачи

$$(\Delta + \lambda_0)H = F, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus l_+, \quad H(x_1, \pm 0) = h_{\pm}(x_1), \quad x_1 > 0,$$

имеют совпадающие гармонические серии и $H^{(1)} - H^{(2)} \in \widetilde{\mathcal{H}}_0$.

Тогда $H^{(1)} = H^{(2)}$.

Обозначим через $\mathcal{H}_m$ подмножество функций из $C^{\infty}(\overline{\Omega}_0 \setminus \{t_+ \cup t_-\})$, где $t_{\pm}$ — концы разреза ω_0 , асимптотики которых в точках $t_{\pm}$ (записанные, соответственно, в системах координат $x_+ = x$ и $x_- = (1 - x_1, x_2)$) принадлежат классу $\widetilde{\mathcal{H}}_m$. Аналогично, через $\mathcal{A}_m$ обозначим подмножество функций из $C^{\infty}((0, 1))$, имеющих на концах интервала асимптотики из класса $\widetilde{\mathcal{A}}_m$.

Рассмотрим краевую задачу

$$(\Delta + \lambda_0)u = F + \lambda\varphi_0, \quad x \in \Omega_0, \quad u(x_1, \pm 0) = h_{\pm}(x_1), \quad x_1 \in (0, 1), \quad (6.5)$$

где $F \in \mathcal{H}_m$, $h_{\pm} \in \mathcal{A}_m$, $m \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 6.2. Пусть для любой пары последовательностей $\{b_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}$ и любого числа λ существует пара рядов $H_{\pm}(x_{\pm}; \{a_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}, \lambda)$ из класса $\widetilde{\mathcal{H}}_m$, обладающих следующими свойствами:

- а) $\{b_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}$ — гармоническая серия ряда $H_{\pm}(x_{\pm}; \{b_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}, \lambda)$;
- б) ряд $H_{\pm}(x_{\pm}; \{b_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}, \lambda)$ является асимптотическим решением задачи (6.5) при $x_{\pm} \rightarrow 0$;
- в) $H_{\pm}(x_{\pm}; \{\widehat{b}_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}, \lambda) - H_{\pm}(x_{\pm}; \{\widetilde{b}_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}, \lambda) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0$ для любых последовательностей $\{\widetilde{b}_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\widehat{b}_j^{\pm}\}_{j=1}^{\infty}$.

Тогда существуют постоянная λ и функция $u \in \mathcal{H}_m$ такие, что u является решением краевой задачи (6.5) и при $x_{\pm} \rightarrow 0$ имеет асимптотики, совпадающие с $H_{\pm}$ при некоторых значениях параметров $b_j^{\pm}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение доказывается при помощи рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве леммы 4.1. Решение краевой задачи (6.5) будем искать в виде

$$u(x) = u_N(x) = \chi(r_+)H_N^+(x_\pm) + \chi(r_-)H_N^-(x_\pm) + U_N(x), \quad (6.6)$$

где $r_\pm = |x_\pm|$, $H_N^\pm$ – частичные суммы (до степеней $r_\pm^N$ включительно) рядов $\hat{H}_\pm(x_\pm) = H_\pm(x; \{b_j^\pm = 0\}_{j=1}^\infty, 0)$. Подставляя (6.6) в (6.5), получаем краевую задачу для u_N

$$(\Delta + \lambda_0)U_N = F_N + \lambda\varphi_0, \quad x \in \Omega_0, \quad U_N(x_1, \pm 0) = h_N^\pm(x_1), \quad x_1 \in (0, 1). \quad (6.7)$$

Здесь функция $F_N \in C^{N-2}(\overline{\Omega}_0)$ (где разрез ω_0 понимается как двусторонний) имеет нули порядка $r_\pm^{N-2}$ на концах разреза, а функции $h_N^+, h_N^- \in C^{N-1}([0, 1])$ имеют нули порядка x_1^{N-1} и $(1 - x_1)^{N-1}$ на соответствующих концах интервала $(0, 1)$. Следовательно, существует постоянная $\lambda = \lambda(N)$, при которой краевая задача (6.7) разрешима в классе функций $W_2^1(\Omega_0)$. С другой стороны, подставляя $u_{N_1} - u_{N_2} \in W_2^1(\Omega_0)$ в (6.5), легко видеть, что, во-первых, λ не зависит от N , а во-вторых, функции u_N при разных значениях N равны друг другу с точностью до слагаемого, равного собственной функции. В силу произвола в выборе N , результатов работы [14] и леммы 3.1 отсюда следует, что существует решение $u \in \mathcal{H}_m$ краевой задачи (6.5) (при некоторой постоянной λ), имеющее на концах разреза асимптотики вида

$$u(x) = \tilde{H}_\pm(x_\pm), \quad x_\pm \rightarrow 0,$$

где $\tilde{H}_\pm$ отличается от $\hat{H}_\pm$ на слагаемое из $\mathcal{H}_0$.

Пусть $\{b_j^\pm\}$ – гармоническая серия ряда $\tilde{H}_\pm$. В силу следствия леммы 6.1 ряды $\tilde{H}_\pm(x_\pm)$ и $H_\pm(x_\pm; \{b_j^\pm\}_{j=1}^\infty, \lambda)$ совпадают. Лемма доказана.

§ 7. Согласование разложений в случае параболических концов щели

На формальных рядах $V(\xi; \varepsilon)$ вида:

$$V(\xi; \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon V_{i,j}(\xi)$$

определим операторы переразложения $\mathcal{M}^\pm$ следующим стандартным образом. Коэффициенты ряда V заменяем на их асимптотики на бесконечности и приходим к переменным $x_\pm = \varepsilon^2 g_1^{\pm 2} \xi$. Полученный двойной формальный ряд и назовем *значением* $\mathcal{M}^\pm(V(\xi; \varepsilon))$.

Обозначим через $v^\pm(\xi; \varepsilon)$ ряд (5.2), записанный во внутренних переменных левого и правого конца щели, соответственно. Из леммы 5.3 и определения операторов переразложения вытекает

ЛЕММА 7.1. Пусть $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ – произвольная последовательность действительных чисел и коэффициенты ряда $v^\pm$ удовлетворяют утверждениям

леммы 5.3 (при добавлении в ее формулировке индексов “ $\pm$ ”, соответствующих $\xi = x_{\pm}\varepsilon^{-2}(g_1^{\pm})^{-2}$). Тогда справедливо представление

$$\mathcal{M}^{\pm}(v^{\pm}(\xi; \varepsilon)) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_j^{\pm}(x). \quad (7.1)$$

Ряды $\Phi_n^{\pm} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{n-1}$ являются формальными асимптотическими решениями (при $x_{\pm} \rightarrow 0$) рекуррентной системы краевых задач (6.2), (6.3), где в правых частях уравнений и граничных условий функции φ_j заменены на ряды $\Phi_j^{\pm}$.

Гармоническая серия $\{b_i^{\pm(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ ряда $\Phi_n^{\pm}$ имеет вид: $b_i^{\pm(n)} = \frac{\pm}{a_i^{(n+i)}} g_1^{-i}$.

Ряды $\Phi_n^{\pm}$ не зависят от $\frac{\pm}{a_i^{(m+i)}}$ и λ_m при $m > n$, а их сингулярные части не зависят и от $\frac{\pm}{a_i^{(n+i)}}$ и λ_n .

Из утверждений лемм 5.3, 6.2 и 7.1 вытекает

ТЕОРЕМА 7.1. *Существуют ряды (5.1), (5.2) и (6.1) и последовательности $\{\frac{\pm}{a_i^{(n)}}\}$, $1 \leq i \leq n$, обладающие следующими свойствами:*

- а) $\varphi_n \in \mathcal{H}_{n-1}$ являются решениями (6.2), (6.3);
- б) ряды (5.2) удовлетворяют утверждениям леммы 5.3 (при $a_i^{(n)} = \frac{\pm}{a_i^{(n)}}$);
- в) $\mathcal{M}^{\pm}(v^{\pm}(\xi; \varepsilon)) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j^{\pm}(x)$ при $x_{\pm} \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты λ_1 , λ_2 и $v_1^{\pm}$ определяются равенствами (3.6), (4.14), (3.8) и (4.6).

Коэффициент φ_1 определен в лемме 3.2.

Коэффициент φ_2 имеет вид (4.13), где $\psi_{\pm}$ определены в лемме 4.1, а $\tilde{\varphi}$ – в замечании 3.1.

Справедливость последнего утверждения следует из построений, приведенных в третьем и четвертом параграфах, и следствия леммы 6.1.

Из теоремы 7.1 и ее следствия вытекает, что в случае параболических концов щели ряды (6.1) и (5.1) являются асимптотическим решением задачи (1.1) при $r_+ > \varepsilon$, $r_- > \varepsilon$, а ряды (5.2) и (5.1) являются асимптотическим решением задачи (1.1) при $r_{\pm} < 2\varepsilon$.

§ 8. Случай общего положения

В случае общего положения уравнение границы $\partial\omega_{\varepsilon}$ в окрестности концов разреза во внутренних переменных имеет вид:

$$\xi_1 = \xi_2^2 + \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i c_{i+3} \xi_2^{i+3}, \quad \varepsilon \xi_2 \rightarrow 0, \quad (8.1)$$

где на правом конце $s_3 = -2g_2^+$, на левом конце $s_3 = -2g_2^-$. Сначала попытаемся найти асимптотические разложения собственной функции и собственного значения, по-прежнему, в виде (5.1), (5.2), (6.1) (хотя, как будет показано ниже, правильное разложение этих величин носит более сложный характер). Ясно, что в

этом случае краевые задачи для коэффициентов ряда (6.1) и уравнения для коэффициентов ряда (5.2) сохраняют вид (6.2), (6.3) и (5.4), соответственно. Однако, подставляя (5.2) и (8.1) в граничные условия в (1.1) и переходя к внутренним переменным, для коэффициентов ряда (5.2) получаем уже неоднородные граничные условия

$$v_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} c_{n,i,j} \frac{\partial^{i-j} v_{n-i}}{\partial \xi_1^{i-j}} \xi_2^{3i-2j}, \quad \xi \in \partial\Pi, \quad (8.2)$$

где постоянные $c_{n,i,j}$ явно определяются через коэффициенты (8.1) или, что то же самое, через коэффициенты (1.2). В частности,

$$c_{k,1,0} = 2g_2^\pm, \quad c_{k,2,0} = -2(g_2^\pm)^2. \quad (8.3)$$

Коэффициенты ряда (5.2) будем вновь строить в виде (5.6). Из (8.2) следует, что однородные граничные условия для v_1 сохраняются и, следовательно, v_1 , по-прежнему, определяется равенством $v_1 = a_1^{(1)} X_1$. Однако, из (8.2) также следует, что граничное условие для второго коэффициента уже неоднородно и имеет вид:

$$v_2 = -\frac{1}{2} a_1^{(1)} c_{2,1,0} \xi_2^3 \operatorname{Im} z^{-1/2}, \quad \xi \in \partial\Pi.$$

Обозначим $Y_2(\xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} z^{1/2} + \frac{1}{8} \operatorname{Re} z^{-1/2}$. Учитывая, что $|z| = \xi_2^2 + \frac{1}{4}$ на $\partial\Pi$, легко видеть, что функция

$$\tilde{v}_2 = -\frac{1}{2} a_1^{(1)} c_{2,1,0} Y_2 \quad (8.4)$$

(а следовательно, и функция v_2) является решением (5.4), (8.2). При исследовании разрешимости краевых задач с подобными граничными условиями будет использоваться следующий, легко проверяемый, аналог леммы 5.2.

ЛЕММА 8.1. *Для любых целых положительных k и m краевые задачи*

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad \xi \in \Pi, & v &= \xi_2^k \operatorname{Im} z^{-m/2}, \quad \xi \in \partial\Pi, \\ \Delta w &= 0, \quad \xi \in \Pi, & w &= \xi_2^k \operatorname{Re} z^{-m/2}, \quad \xi \in \partial\Pi, \end{aligned}$$

имеют решения вида

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \alpha_{k,m,j} \operatorname{Re} z^{\frac{k-m-1}{2}-j} + \sum_{j=\max\{0;[(k-m)/2]+1\}}^{[k/2]} \beta_{k,m,j} \operatorname{Im} z^{\frac{k-m}{2}-j}, \\ w(\xi) &= \sum_{j=0}^{[k/2]} \gamma_{k,m,j} \operatorname{Re} z^{\frac{k-m}{2}-j} + \sum_{j=\max\{0;[(k-m+1)/2]\}}^{[(k-1)/2]} \delta_{k,m,j} \operatorname{Im} z^{\frac{k-m-1}{2}-j}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{3,1,1} = \frac{1}{8}$, $\gamma_{3,3,1} = -\frac{3}{4}$, $\alpha_{6,3,2} = \frac{5}{16}$.

Из (8.2) и леммы 8.1 (см. также (8.4)), в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{v}_3(\xi) &= b_2 \operatorname{Re} z + b_1 \operatorname{Re} z^{1/2} + b_0 + b_{-1} \operatorname{Re} z^{1/2} + a_1^{(1)} A \operatorname{Re} z^{-1} \\ &\quad + d_{-1} \operatorname{Im} z^{-1/2} + d_{-3} \operatorname{Im} z^{-3/2}, \\ A &= \frac{1}{128} (5c_{3,2,0} + 3c_{3,1,0} c_{2,1,0}). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Из определения v_1 и v_2 (см. (8.4)) и утверждений лемм 5.1, 5.2 и 8.1 следует, что при $n < 7$ краевые задачи (5.4), (8.2) для $\tilde{v}_n$ разрешимы в классе степенных функций. Однако при $n = 7$ правая часть в (5.4) в силу (8.5) содержит резонансный член вида:

$$-\Delta v_7 = \dots + \lambda_0 A a_1^{(1)} \operatorname{Re} z^{-1} + \dots, \quad (8.6)$$

где многоточием обозначены члены, содержащие степени z , отличные от -1 .

Следующие два утверждения являются легко проверяемыми аналогами лемм 5.1 и 5.2.

ЛЕММА 8.2. *Для любых k и m , отличных от -1 , и любых целых $n \geq 1$ уравнение $\Delta v = \bar{z}^k z^m \ln^n z$ имеет решение вида*

$$v(\xi) = \bar{z}^{k+1} z^{m+1} \sum_{j=0}^n \alpha_j \ln^j z.$$

Для любого целого $n \geq 0$ уравнение $\Delta v = z^{-1} \ln^n z$ имеет решение вида

$$v(\xi) = \frac{1}{4(n+1)} \bar{z} \ln^{n+1} z.$$

ЛЕММА 8.3. *Для любых целых положительных k и n краевые задачи*

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad \xi \in \Pi, & v &= \xi_2^k \operatorname{Re} \ln^n z, \quad \xi \in \partial\Pi, \\ \Delta w &= 0, \quad \xi \in \Pi, & w &= \xi_2^k \operatorname{Im} \ln^n z, \quad \xi \in \partial\Pi, \end{aligned}$$

имеют решения вида

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \sum_{j=0}^{[k/2]} \alpha_{k,j} \operatorname{Re}(z^{\frac{k}{2}-j} \ln^n z) + \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \beta_{k,j} \operatorname{Im}(z^{\frac{k-1}{2}-j} \ln^n z), \\ w(\xi) &= \sum_{j=0}^{[k/2]} \gamma_{k,j} \operatorname{Im}(z^{\frac{k}{2}-j} \ln^n z) + \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \delta_{k,j} \operatorname{Re}(z^{\frac{k-1}{2}-j} \ln^n z). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого целого $n \geq 0$ функция*

$$v(\xi) = \frac{1}{4(n+1)} (\operatorname{Re}((\bar{z} - z) \ln^{n+1} z) - 2 \operatorname{Im}(z^{1/2} \ln^{n+1} z) + \operatorname{Re} \ln^{n+1} z)$$

или, что то же самое,

$$v(\xi) = A_{n+1} (X_1(\xi) \operatorname{Re} \ln^{n+1} z + (\operatorname{Re} z^{1/2} - \xi_2) \operatorname{Im} \ln^{n+1} z), \quad A_m = -\frac{1}{2m},$$

является решением краевой задачи

$$\Delta v = \operatorname{Re}(z^{-1} \ln^n z), \quad \xi \in \Pi, \quad v = 0, \quad \xi \in \partial\Pi.$$

Из (8.6) и леммы 8.2 следует, что первая степень логарифма появляется при решении (5.4), (8.2) для v_7 . Из следствия леммы 8.3 вытекает, что логарифмические слагаемые в представлении функции $\tilde{v}_7$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_7(\xi) &= \cdots + \tilde{a}_7 \left(\operatorname{Im}(z^{1/2} \ln z) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \ln z \right) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{Re}((\bar{z} - z) \ln z) \right) + \cdots, \\ \tilde{a}_7 &= -\lambda_0 A_1 A a_1^{(1)},\end{aligned}\quad (8.7)$$

или (в другой форме записи)

$$\tilde{v}_7(\xi) = \cdots + \tilde{a}_7 X_1(\xi) \operatorname{Re} \ln z + \alpha (\operatorname{Re} z^{1/2} - \xi_2) \operatorname{Im} \ln z + \cdots, \quad (8.8)$$

где многоточием обозначены степенные члены.

Непосредственно проверяется следующий аналог лемм 8.1 и 8.3.

ЛЕММА 8.4. *Для любых целых положительных k , m и n краевые задачи*

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0, & \xi \in \Pi, & & v &= \xi_2^k \operatorname{Im}(z^{-m/2} \ln^n z), & \xi \in \partial\Pi, \\ \Delta w &= 0, & \xi \in \Pi, & & w &= \xi_2^k \operatorname{Re}(z^{-m/2} \ln^n z), & \xi \in \partial\Pi,\end{aligned}$$

имеют решения вида

$$\begin{aligned}v(\xi) &= \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \alpha_{k,m,j} \operatorname{Re}(z^{\frac{k-m-1}{2}-j} \ln^n z) + \sum_{j=0}^{[k/2]} \beta_{k,m,j} \operatorname{Im}(z^{\frac{k-m}{2}-j} \ln^n z), \\ w(\xi) &= \sum_{j=0}^{[k/2]} \gamma_{k,m,j} \operatorname{Re}(z^{\frac{k-m}{2}-j} \ln^n z) + \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \delta_{k,m,j} \operatorname{Im}(z^{\frac{k-m}{2}-j} \ln^n z),\end{aligned}$$

где постоянные $\alpha_{3,1,1}$, $\gamma_{3,3,1}$, $\alpha_{6,3,2}$ имеют те же значения, что и в лемме 8.1.

С учетом леммы 8.4 легко видеть, что для дальнейшего увеличения степеней логарифма первое слагаемое в (8.7) играет ту же роль, что и слагаемое $a_1^{(1)} \operatorname{Im} z^{1/2}$ (в определении v_1) для появления логарифма. Используя утверждения лемм 8.2–8.4, получаем следующую цепочку, отслеживающую нарастание

степеней логарифма у коэффициентов ряда (5.2):

$$\begin{aligned}
(8.7) \Rightarrow \tilde{v}_9(\xi) &= \dots + \tilde{a}_7 A \operatorname{Re}(z^{-1} \ln z) + \dots \\
\Rightarrow -\Delta v_{13} &= \dots + \lambda_0 \tilde{a}_7 A \operatorname{Re}(z^{-1} \ln z) + \dots \\
\Rightarrow \tilde{v}_{13}(\xi) &= \dots + \tilde{a}_{13} \left(\operatorname{Im}(z^{1/2} \ln^2 z) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \ln^2 z \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{Re}((\bar{z} - z) \ln^2 z) \right) + \dots, \\
\tilde{a}_{13} &= -\lambda_0 A A_2 \tilde{a}_7 \Rightarrow \dots \\
\Rightarrow \tilde{v}_{1+6n}(\xi) &= \dots + \tilde{a}_{1+6n} \left(\operatorname{Im}(z^{1/2} \ln^n z) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \ln^n z \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{Re}((\bar{z} - z) \ln^n z) \right) + \dots, \\
\tilde{a}_{1+6n} &= -\lambda_0 A A_n \tilde{a}_{6n-5} \\
\Rightarrow \tilde{v}_{3+6n}(\xi) &= \dots + \tilde{a}_{1+6n} A \operatorname{Re}(z^{-1} \ln^n z) + \dots \\
\Rightarrow -\Delta v_{1+6(n+1)} &= \dots + \lambda_0 \tilde{a}_{1+6n} A \operatorname{Re}(z^{-1} \ln^n z) + \dots \\
\Rightarrow \tilde{v}_{1+6(n+1)}(\xi) &= \dots + \tilde{a}_{1+6(n+1)} \left(\operatorname{Im}(z^{1/2} \ln^{n+1} z) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \ln^{n+1} z \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{Re}((\bar{z} - z) \ln^{n+1} z) \right) + \dots, \\
\tilde{a}_{1+6(n+1)} &= -\lambda_0 A A_{n+1} \tilde{a}_{1+6n}, \tag{8.9}
\end{aligned}$$

или в другой форме записи

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_{1+6(n+1)}(\xi) &= \dots + \tilde{a}_{1+(6n+1)} X_1(\xi) \operatorname{Re} \ln^{n+1} z \\
&\quad + \alpha (\operatorname{Re} z^{1/2} - \xi_2) \operatorname{Im} \ln^{n+1} z + \dots, \tag{8.10}
\end{aligned}$$

где многоточие обозначает слагаемые с меньшими степенями логарифма.

Из (8.9) и (8.7) следует, что

$$\tilde{a}_{1+6m} = (-\lambda_0 A)^m \prod_{j=1}^m A_j a_1^{(1)}. \tag{8.11}$$

Для рядов (5.1), (5.2) сформулируем аналог леммы 5.3, вытекающий из утверждений лемм 5.1, 5.2, 8.1–8.4.

ЛЕММА 8.5. *Пусть выполнены условия леммы 5.3. Тогда система краевых задач (5.4), (8.2) имеет систему решений, которые могут быть представле-*

ны в виде (5.6), где

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_n(\xi) = & \sum_{j=1}^n \beta_{n,0,k,j} \operatorname{Re} z^{j/2} \\
& + \sum_{k=1}^{[(n-1)/4]} \sum_{j=1}^{n-4k} |z|^{2k} (\alpha_{n,0,k,j} \operatorname{Im} z^{j/2} + \beta_{n,0,k,j} \operatorname{Re} z^{(j-1)/2}) \\
& + \sum_{k=0}^{[(n-1)/4]} \sum_{j=1}^{2n-3-8k} |z|^{2k} (\alpha_{n,0,k,-j} \operatorname{Im} z^{-j/2} + \beta_{n,0,k,-j} \operatorname{Re} z^{-j/2}) \\
& + \sum_{m=1}^{[(n-1)/6]} \sum_{k=0}^{[(n-6m-4k+3)/4]} \sum_{j=\min\{0; 3-2(n-6m-4k)\}}^{n-6m-4k-1} |z|^{2k} (\alpha_{n,m,k,j} \operatorname{Im}(z^{j/2} \ln^m z) \\
& \quad + \beta_{n,m,k,j} \operatorname{Re}(z^{j/2} \ln^m z)) \\
& + \sum_{m=1}^{[(n-1)/6]} \sum_{k=0}^{[(n-6m-4k+3)/4]} |z|^{2k} (\delta_{n,m,k} \operatorname{Re}(\bar{z} \ln^m z) + \gamma_{n,m,k} \operatorname{Im}(\bar{z} \ln^m z)), \tag{8.12}
\end{aligned}$$

а постоянные $\alpha_{n,i,k,j}$, $\beta_{n,i,k,j}$, $\gamma_{n,i,k}$ и $\delta_{n,i,k}$ не зависят от $a_s^{(m)}$ при $m \geq n$.

Для $\tilde{v}_{1+6m}$ справедливы представления (8.10), (8.11), где опущены слагаемые с меньшими степенями логарифма.

Перейдем к внешнему разложению. Множество рядов вида

$$H(x) = \sum_{j=-m}^{\infty} H_{j/2}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_j} \ln^i r P_{j/2}^{(i)}(x), \tag{8.13}$$

где $P_j(x)$ — однородные функции порядка j из $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus l_+)$, n_j — произвольные натуральные числа, будем, по-прежнему, обозначать через $\widetilde{\mathcal{H}}_m$. Аналогично, для множества рядов вида

$$h(x) = \sum_{j=-m}^{\infty} \alpha_j x_1^{j/2} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_j} \ln^i x_1 \beta_{j,i} x_1^j$$

оставим прежние обозначения $\widetilde{\mathcal{A}}_m$. Определения сингулярной части и гармонической серии ряда (8.13) — те же, что и для ряда (6.4). Определения $\mathcal{H}_m$ и $\mathcal{A}_m$ сохранены. Из новых определений множеств $\widetilde{\mathcal{H}}_m$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ вытекает

ЛЕММА 8.6. *В новых определениях множеств $\widetilde{\mathcal{H}}_m$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ остаются справедливыми все утверждения леммы 6.1, ее следствия и леммы 6.2.*

Прежде чем перейти к согласованию разложений, на суммах $V(\xi; \varepsilon)$ вида

$$V(\xi; \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon V_{i,j}(\xi)$$

определим оператор $\mathcal{M}_m^\pm$ следующим образом: оставим в ряду $\mathcal{M}^\pm(V(\xi; \varepsilon))$ только члены вида $\varepsilon^i \ln^j \varepsilon \Phi(x)$ при $j \leq m$. Этот формальный ряд определим как $\mathcal{M}_m^\pm(V(\xi; \varepsilon))$. Из леммы 8.5 и определения операторов переразложения вытекает аналог леммы 7.1.

ЛЕММА 8.7. Пусть $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность действительных чисел и ряд $v^{\pm}$ удовлетворяет утверждениям леммы 8.5 (с добавлением в ее формулировке индексов “ $\pm$ ”, соответствующих $\xi = x_{\pm}\varepsilon^{-2}(g_1^{\pm})^{-2}$). Тогда справедливы представления

$$\mathcal{M}_0^{\pm}(v^{\pm}(\xi; \varepsilon)) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_j^{\pm}(x) \quad (8.14)$$

(вместо представления (7.1)) и все остальные утверждения леммы 7.1.

Подчеркнем, что из (8.8) вытекает равенство

$$\mathcal{M}_1^{\pm}(v^{\pm}(\xi; \varepsilon)) = \mathcal{M}_0^{\pm}(v^{\pm}(\xi; \varepsilon)) - 2\varepsilon^7 \ln \varepsilon (g_1^{\pm})^{-1} \tilde{a}_7 r_{\pm}^{1/2} \sin \frac{\theta_{\pm}}{2} + O(\varepsilon^8 \ln \varepsilon), \quad (8.15)$$

и следовательно, из равенства (8.14) для построенных рядов не следует равенство (7.1), соответствующее полностью согласованным разложениям. Для устранения возникшей в (8.15) невязки приходится вводить во внутреннем разложении члены $\varepsilon^7 \ln \varepsilon v_{7,1}^{\pm}$, которые, в свою очередь, приводят к появлению степеней $\ln \varepsilon$ во внешнем разложении, следовательно (в силу условия разрешимости соответствующих краевых задач внешнего разложения), к появлению степеней $\ln \varepsilon$ и в асимптотике собственного значения. По этим причинам полные асимптотики собственного значения и собственной функции будем искать в виде:

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{[(i-2)/6]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon \lambda_{i,j}, \quad (8.16)$$

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{[(i-2)/6]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon \varphi_{i,j}(x), \quad x \in \Omega_0 \setminus S(\varepsilon), \quad (8.17)$$

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{[(i-1)/6]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon v_{i,j}^{\pm}(x_{\pm}(g_1^{\pm}\varepsilon)^{-2}), \quad x \in S_{\pm}(2\varepsilon), \quad (8.18)$$

где $S(t) = S_{-}(t) \cup S_{+}(t)$. (Напомним, что $S_{\pm}(t)$ – круг радиуса t с центром в соответствующем конце щели.)

Подставляя (8.16) и (8.17) в (1.1), получаем краевые задачи для коэффициентов внешнего разложения:

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi_{n,m} &= \sum_{j,i \geq 0}^n \lambda_{j,i} \varphi_{n-j,m-i}, \quad x \in \Omega_0, \\ \varphi_{n,m}(x_1, \pm 0) &= - \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} (g_{\pm}(x_1))^j \frac{\partial^j \varphi_{n-j,m}}{\partial x_2^j}(x_1, \pm 0), \quad x_1 \in (0, 1), \end{aligned} \quad (8.19)$$

где $\lambda_{0,0} = \lambda_0$, $\varphi_{0,0} = \varphi_0$, $\lambda_{1,0} = \lambda_1$, $\varphi_{1,0} = \varphi_1$.

Подставляя (8.16) и (8.18) в (1.1) и переходя к внутренним переменным, получаем краевые задачи для коэффициентов внутреннего разложения:

$$\begin{aligned} -\Delta v_{n,m}^{\pm} &= \sum_{i,j \geq 0} \lambda_{i,j} v_{n-i-4,m-j}, \quad \xi \in \Pi, \\ v_{n,m}^{\pm} &= - \sum_{i=1}^{n-6m-1} \sum_{j=0}^{i-1} c_{n,i,j} \frac{\partial^{i-j} v_{n-i,m}^{\pm}}{\partial \xi_1^{i-j}} \xi_2^{3i-2j}, \quad \xi \in \partial\Pi. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Полный аналог леммы 8.5 для рассматриваемого случая, являющийся также следствием лемм 5.1, 5.2 и 8.1–8.4, имеет следующий вид.

ЛЕММА 8.8. Пусть $0 \leq l < \infty$, $6l + 1 \leq n < \infty$, $\{a_i^{(n,l)}\}_{i=1}^{n-6l}$ – семейство произвольных последовательностей действительных чисел. Тогда система краевых задач (8.20) имеет систему решений, которые могут быть представлены в виде

$$v_{n,l}(\xi) = \sum_{i=1}^{n-6l} a_i^{(n,l)} X_i(\xi) + \tilde{v}_{n,l}(\xi),$$

где функции $\tilde{v}_{n+6l,l}$ представимы в виде (8.12) с коэффициентами, зависящими от l , но не зависящими от $a_m^{(s,t)}$ при $m \geq n + 6l$.

Справедливы представления:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{1+6(m+l),l}(\xi) &= \dots + \tilde{A}_{1+6(m+l),l} X_1(\xi) \operatorname{Re} \ln^m z \\ &\quad + 2\alpha(m,l)(\xi_2 - \operatorname{Re} z^{1/2}) \operatorname{Im} \ln^m z + \dots, \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\tilde{A}_{1+6(m+l),l} = (-\lambda_0 A)^m a_1^{(1+6l,l)} \prod_{j=1}^m A_j, \quad (8.22)$$

где в (8.21) опущены слагаемые с меньшими степенями логарифма.

В свою очередь, из лемм 4.1, 8.6–8.8 и соотношений (8.3), (8.5), (8.21) и (8.22) вытекает аналог теоремы 7.1 для общего случая.

ТЕОРЕМА 8.1. Существуют ряды (8.16)–(8.18) и семейство последовательностей $0 \leq l < \infty$, $6l + 1 \leq n < \infty$, $\{\tilde{a}_i^{\pm(n,l)}\}_{i=1}^{n-6l}$, обладающие следующими свойствами.

Справедливо равенство

$$\tilde{a}_1^{\pm(6m+1,m)} = - \sum_{j=0}^{m-1} (-2)^{m-j} \tilde{A}_{6m+1,j}^{\pm}, \quad (8.23)$$

где

$$\tilde{A}_{6m+1,j}^{\pm} = \frac{1}{(m-j)!} \left(-\frac{\lambda_0 (g_2^{\pm})^2}{128} \right)^{m-j} \tilde{a}_1^{\pm(6j+1,j)}, \quad \tilde{a}_1^{\pm(1,0)} = d_{\pm} g_1^{\pm}. \quad (8.24)$$

Функции $\varphi_{n,m} \in \mathcal{H}_{n-1-6m}$ являются решениями (8.19).

Ряды (8.18) удовлетворяют утверждениям леммы 8.8 (при $a_i^{(n,l)} = \frac{\pm}{a_i^{(n,l)}}$),

$$\mathcal{M}^\pm(v^\pm(\xi; \varepsilon)) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{[(i-2)/6]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon \varphi_{i,j}(x), \quad x_\pm \rightarrow 0,$$

где $v^\pm$ – ряды (8.18).

Коэффициенты $\lambda_{1,0} = \lambda_1$, $\lambda_{2,0} = \lambda_2$, $v_{1,0}^\pm = v_1^\pm$, $\varphi_{1,0} = \varphi_1$ и $\varphi_{2,0} = \varphi_2$ удовлетворяют утверждению следствия теоремы 7.1.

Коэффициенты ряда (8.16), содержащие m -ю степень $\ln \varepsilon$ при наименьшей степени ε , имеют вид:

$$\lambda_{6m+2,m} = \frac{\pi}{8} (d_+ g_1^+ a_1^{+(6m+1,m)} + d_- g_1^- a_1^{-(6m+1,m)}), \quad m > 1. \quad (8.25)$$

Из равенств (8.22)–(8.25) получаем явную формулу для членов ряда (8.16), отражающих нарастание степеней логарифма:

$$\begin{aligned} \lambda_{6m+2,m} &= \frac{\pi}{8} \left(-\frac{\lambda_0}{64} \right)^m c(m) ((g_2^+)^{2m} (d_+ g_1^+)^2 + (g_2^-)^{2m} (d_- g_1^-)^2), \\ c(m) &= - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(m-j)!} c(j), \quad c(0) = 1. \end{aligned} \quad (8.26)$$

В свою очередь, из (8.26) вытекает равенство

$$\lambda_{6m+2,m} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\lambda_0}{64} \right)^m ((g_2^+)^{2m} (d_+ g_1^+)^2 + (g_2^-)^{2m} (d_- g_1^-)^2), \quad m > 1. \quad (8.27)$$

§9. Обоснование асимптотик

Обозначим через $\lambda_{\varepsilon,N}$, $\varphi_{\varepsilon,N}(x)$ и $v_{\varepsilon,N}^\pm(x_\pm(\varepsilon g_1^\pm)^{-2})$ частичные суммы рядов (5.1), (6.1) и (5.2) в случае параболических концов щели и частичные суммы рядов (8.16)–(8.18) в случае общего положения. Далее обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon,N}(x) &= (1 - \chi(r_+ \varepsilon^{-1}))(1 - \chi(r_- \varepsilon^{-1})) \varphi_{\varepsilon,N}(x) \\ &\quad + \chi(r_+ \varepsilon^{-1}) v_{\varepsilon,N}^+(x_+ (\varepsilon g_1^+)^{-2}) + \chi(r_- \varepsilon^{-1}) v_{\varepsilon,N}^-(x_- (\varepsilon g_1^-)^{-2}). \end{aligned}$$

Из утверждений теорем 7.1 и 8.1 стандартным образом (см., например, [9]) следует

ЛЕММА 9.1. Пусть ряды (5.1), (6.1) и (5.2) удовлетворяют утверждениям теоремы 7.1, а ряды (8.16)–(8.18) удовлетворяют утверждениям теоремы 8.1. Тогда функция $\Phi_{\varepsilon,N}(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi_{\varepsilon,N} &= \lambda_{\varepsilon,N} \Phi_{\varepsilon,N} + f_{\varepsilon,N}, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ \Phi_{\varepsilon,N} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \Phi_{\varepsilon,N} = h_{\varepsilon,N}, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

где $\|f_{\varepsilon,N}\|_\Omega \leq C_N \varepsilon^M$, $h_{\varepsilon,N} = O(\varepsilon^M)$ в норме $C^1(\partial\omega_\varepsilon)$, а M растёт неограниченно вместе с N .

ТЕОРЕМА 9.1. Если концы щели имеют вид парабол, то асимптотика собственного значения имеет вид (5.1), а собственная функция имеет асимптотику (6.1) в $\Omega_\varepsilon \setminus S(\varepsilon)$ и асимптотики (5.2) в $S_\pm(2\varepsilon)$ в норме $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$. Для коэффициентов рядов (5.1), (5.2) и (6.1) справедливы утверждения теоремы 7.1 и ее следствия.

В случае общего положения асимптотика собственного значения имеет вид (8.16), а собственная функция имеет асимптотику (8.17) в $\Omega_\varepsilon \setminus S(\varepsilon)$ и асимптотики (8.18) в $S_\pm(2\varepsilon)$ в норме $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$. Для коэффициентов рядов (8.16)–(8.18) справедливы утверждения теоремы 8.1 и равенства (8.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tilde{\Phi}_{\varepsilon,N}$ — гармоническую в Ω_ε функцию, равную нулю на $\partial\Omega$ и равную $h_{\varepsilon,N}$ на $\partial\omega_\varepsilon$. В силу леммы 9.1 и априорных оценок гармонической функции и ее производных получаем, что

$$\|\tilde{\Phi}_{\varepsilon,N}\|_{1,\Omega_\varepsilon} = C_N \varepsilon^M. \quad (9.1)$$

Положим $\hat{\Phi}_{\varepsilon,N} = \Phi_{\varepsilon,N} - \tilde{\Phi}_{\varepsilon,N}$. В силу леммы 9.1 и соотношения (9.1) функция $\hat{\Phi}_{\varepsilon,N}$ является решением краевой задачи

$$-\Delta \hat{\Phi}_{\varepsilon,N} = \lambda_{\varepsilon,N} \hat{\Phi}_{\varepsilon,N} + F_{\varepsilon,N}, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \Phi_{\varepsilon,N} = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (9.2)$$

где

$$\|F_{\varepsilon,N}\|_\Omega \leq C_N \varepsilon^M. \quad (9.3)$$

С другой стороны, из построения и оценки (9.1) следует, что

$$\|\hat{\Phi}_{\varepsilon,N}\|_\Omega \rightarrow 1. \quad (9.4)$$

В силу произвольности выбора N из соотношений (9.1), (9.3) и (9.4) и утверждения леммы 2.3 следует справедливость всех утверждений доказываемой теоремы.

Список литературы

1. Самарский А. А. О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63. С. 631–634.
2. Ozawa S. Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian // Duke Math. J. 1981. V. 48. P. 767–778.
3. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №2. С. 347–371.
4. Гадильшин Р. Р. Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №4. С. 640–652.
5. Назаров С. А. Асимптотические разложения собственных чисел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.
6. Гадильшин Р. Р. Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №4. С. 42–55.
7. Jimbo S., Morita Y. Remarks on the behavior of certain eigenvalues in the singularly perturbed domain with several thin channels // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. P. 523–552.

8. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
9. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99. № 4. С. 514–537.
10. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
12. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1986.
13. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
14. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.

Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН;
Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: grr@imat.rb.ru, iam@eqmph.imm.intec.ru

Поступила в редакцию
26.05.1997