Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Параметрические колебания сингулярно возмущенного телеграфного уравнения с маятниковой нелинейностью, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 3, 69–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:55:32

УДК 517.926

Ю. С. Колесов

Параметрические колебания сингулярно возмущенного телеграфного уравнения с маятниковой нелинейностью

Решение сформулированной в названии проблемы сводится к анализу вопроса о количестве и устойчивости состояний равновесия квазинормальной формы рассматриваемой краевой задачи. Выявляется механизм возникновения ее так называемых простых состояний равновесия. Показывается, что при уменьшении коэффициента упругости их количество растет, а устойчивы те из них, пространственная структура которых наиболее сложна.

Библиография: 5 названий.

С теорией нелинейного параметрического резонанса для обыкновенных дифференциальных уравнений можно познакомиться, например, по книге [1], результаты из которой распространены на некоторые классы гладких уравнений волнового типа в монографии [2]. Однако до сих пор не выявлено ни одного факта, специфичного для уравнений волнового типа, т.е. такого, который не аналогичен утверждениям, связанным с теорией параметрического резонанса в обыкновенных дифференциальных уравнениях.

В статье [3] отмечено, что исследование параметрического резонанса в сингулярно возмущенных волновых уравнениях имеет смысл хотя бы потому, что в рамках данного класса уравнений находимся в окрестности максимального вырождения, а значит, проще выявить динамические эффекты, отражающие специфику именно этих эволюционных уравнений. Но и на этом пути возникают значительные трудности, позволяющие понять отсутствие прогресса в данной тематике. Полагаем, что тем самым проясняется причина, по которой нелинейность в исследуемой ниже краевой задаче взята вполне конкретной. Для этого, однако, имелись и более глубокие соображения: при нелинейности маятникова типа динамика сложна, а поэтому можно было априори ожидать, что относительно простые факты удастся выявить аналитическими средствами.

§ 1. Постановка задачи

Итак, работать будем с уравнением

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + (1 + \varepsilon \alpha \cos 2\tau) \sin u = \varepsilon a^2 u_{xx}, \quad (1)$$

где ε – малый положительный параметр, $a > 0$ – постоянная, $\tau = (1 + \varepsilon \delta)t$, произвольного знака постоянные α и δ – характеристики параметрического воздействия. В дальнейшем считаем, что пространственная переменная x принадлежит единичному отрезку, т.е. $0 \leq x \leq 1$, в концах которого заданы условия непроницаемости

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-00549).

В нашем достаточно конкретном исследовании специфика этих граничных условий будет существенна, хотя в теоретическом отношении их специализация менее важна.

Как обычно, говоря об устойчивости периодических по времени колебаний краевой задачи (1), (2), считаем, что речь идет об этом их свойстве в метрике ее фазового пространства $\overset{\circ}{W}_2^2 \times W_2^1$, где $\overset{\circ}{W}_2^2, W_2^1$ – соболевские пространства функций, определенных на отрезке $0 \leq x \leq 1$, причем входящие в первое из них функции в его концах удовлетворяют граничным условиям (2). Напомним, что понятие фазового пространства позволяет практически без изменений переносить на различные классы операторных дифференциальных уравнений основные положения теории нелинейных колебаний.

Кратко скажем также о сути метода квазинормальных форм. Его идея проста: к краевой задаче (1), (2) применяем формализм нормализации Крылова–Боголюбова–Митропольского, а затем отбрасываем малые по ε слагаемые (но не по силе операторов). Разумно допущение, что полученная так главная часть формальной нормальной формы, называемая нами *квазинормальной*, отвечает за ряд динамических свойств много более сложно устроенной исходной краевой задачи (1), (2).

Техническое же оформление этой идеи в нашем случае таково. Решения краевой задачи (1), (2) ищем в виде асимптотического ряда

$$u = \varepsilon^{1/2} u_0(s, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(s, \tau, x) + \dots, \quad (3)$$

где невыписанные слагаемые имеют порядок $\varepsilon^{5/2}$, $s = \varepsilon\tau$, переменная τ введена раньше,

$$u_0(s, \tau, x) = \xi(s, x) \exp(i\tau) + \bar{\xi}(s, x) \exp(-i\tau),$$

функция $u_1(s, \tau, x)$ и остальные периодичны по τ с периодом 2π . Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при степенях $\varepsilon^{3/2}$, приходим к обыкновенному неоднородному линейному дифференциальному уравнению, в котором зависящая от s как от параметра неоднородность – сумма первых и третьих гармоник по τ . Чтобы при построении его решения избежать вековых слагаемых, в неоднородности нужно приравнять нулю коэффициенты при $\exp(i\tau)$ и $\exp(-i\tau)$. Получающиеся на этом пути равенства состоят из уравнения

$$\xi_s = -\frac{i}{2} a^2 \xi_{xx} - \left(\frac{1}{2} + i\delta \right) \xi + \frac{i}{4} \alpha \bar{\xi} - \frac{i}{4} \xi |\xi|^2 \quad (4)$$

и комплексно сопряженного уравнения для $\bar{\xi}$. Каждое из них, конечно, дополняется граничными условиями вида (2), т.е.

$$\xi_x|_{x=0} = \xi_x|_{x=1} = 0. \quad (5)$$

Относительно громоздко обосновываемое утверждение из [3] имеет хорошо запоминающуюся формулировку: если квазинормальная форма (4), (5) имеет экспоненциально устойчивое (дихотомичное) состояние равновесия, то тогда краевая задача (1), (2) имеет 2π -периодическое по τ экспоненциально устойчивое (дихотомичное) решение, асимптотика которого с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ получается из (3).

Приведенное утверждение сводит поставленный нами вопрос о количестве и устойчивости 2π -периодических по τ колебаний краевой задачи (1), (2) к конкретной проблеме – выявлению количества и устойчивости состояний равновесия у ее

квазинормальной формы (4), (5). Ниже при рассмотрении этой проблемы будем предполагать, что имеет место обычное в этой тематике ограничение

$$\frac{\alpha^2}{16} > \delta^2 + \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Его смысл тот же, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно, при выполнении неравенства (6) за счет параметрического воздействия неустойчиво нулевое решение краевой задачи (1), (2).

Итак, поставленная нами проблема связана с нелокальным анализом специальной системы нелинейных уравнений волнового типа (условно их можно объединить и назвать квазилинейным уравнением балочного типа). Такие задачи, вообще говоря, не поддаются строгому рассмотрению. Ниже изыскивается чуть ли не единственная возможность ее частичного решения. Говоря точнее, наше исследование хотя и приводит к результатам, не имеющим аналогов в конечномерном случае, однако остается еще очень много неясного в динамических свойствах квазинормальной формы (4), (5).

§ 2. Основное понятие и связанные с ним вспомогательные построения

Хотя основное понятие, которое мы сейчас введем, для дальнейшего очень существенно, однако одновременно оно и весьма специфично, в основном имея смысл лишь в конкретном случае краевой задачи (4), (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем состояние равновесия квазинормальной формы (4), (5) *простым*, если оно допускает представление

$$\xi(x) = \eta(x) \exp(i\varphi), \quad (7)$$

где φ – вещественная постоянная, η – вещественная функция.

Перейдем к описанию конструкций, непосредственно связанных с данным понятием.

Подставим (7) в (4) и разделим вещественные и мнимые части. Приходим к выводу, что

$$\sin 2\varphi = \frac{2}{\alpha}, \quad (8)$$

$$\alpha^2 \eta'' + \left(2\delta - \frac{1}{2}\alpha \cos 2\varphi\right) \eta + \frac{1}{2}\eta^3 = 0. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем штрих – дифференцирование по пространственной переменной. Для определенности предположим, что $\alpha > 0$. Из уравнения (8) тогда находятся

$$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{4} < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что

$$\cos 2\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}}, \quad \cos 2\varphi_2 = -\sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}}. \quad (11)$$

Из последующего рассмотрения второе равенство (11) исключим, так как при его выполнении строятся только дихотомичные простые состояния равновесия квазинормальной формы (4), (5). Обоснование, на котором задерживаться не будем, достаточно тривиально следует из предлагаемого ниже способа исследования случая, когда выполнено первое равенство (11). Учитывая его в (9), приходим к более интересной краевой задаче

$$a^2 \eta'' - \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} - 2\delta \right) \eta + \frac{1}{2} \eta^3 = 0, \quad (12)$$

$$\eta'|_{x=0} = \eta'|_{x=1} = 0. \quad (13)$$

Ее анализу предположим изложение одного подхода, являющегося для нас ключевым, к выявлению свойств устойчивости связанных с ней простых состояний равновесия квазинормальной формы (4), (5).

Линеаризуем квазинормальную форму на одном из ее состояний равновесия (7). Для отыскания точек спектра устойчивости λ получаем систему дифференциальных уравнений

$$-\frac{i}{2} a^2 v_1'' - \left(\frac{1}{2} + i\delta \right) v_1 + \frac{i}{4} \alpha v_2 - \frac{i}{4} [2|\xi(x)|^2 v_1 + \xi^2(x) v_2] = \lambda v_1, \quad (14)$$

$$\frac{i}{2} a^2 v_2'' - \left(\frac{1}{2} - i\delta \right) v_2 - \frac{i}{4} \alpha v_1 + \frac{i}{4} [\bar{\xi}^2(x) v_1 + 2|\xi(x)|^2 v_2] = \lambda v_2, \quad (15)$$

дополненную условиями непроницаемости в концах отрезка $0 \leq x \leq 1$. Имея в виду представление (7), выполним в (14), (15) замены

$$v_1 \rightarrow v_1 \exp(i\varphi), \quad v_2 \rightarrow v_2 \exp(-i\varphi),$$

где φ — это введенное ранее φ_1 . Попутно примем во внимание формулу (8) и первое равенство (11). Приходим к спектральной задаче

$$-\frac{i}{2} a^2 v_1'' - \left(\frac{1}{2} + i\delta \right) v_1 + \frac{1}{2} \left(1 + i\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} \right) v_2 - \frac{i}{4} \eta^2(x) (2v_1 + v_2) = \lambda v_1, \quad (16)$$

$$\frac{i}{2} a^2 v_2'' - \left(\frac{1}{2} - i\delta \right) v_2 + \frac{1}{2} \left(1 - i\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} \right) v_1 + \frac{i}{4} \eta^2(x) (v_1 + 2v_2) = \lambda v_2. \quad (17)$$

При условиях непроницаемости на концах единичного отрезка введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$Az = -a^2 z'' + \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} - 2\delta \right) z - \frac{3}{2} \eta^2(x) z, \quad (18)$$

$$Bz = -a^2 z'' - \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} + 2\delta \right) z - \frac{1}{2} \eta^2(x) z. \quad (19)$$

Последовательно вычитая и складывая уравнения (16) и (17), убеждаемся, что

$$Az_1 = -2i(\lambda + 1)z_2, \quad Bz_2 = -2i\lambda z_1, \quad (20)$$

где $z_1 = v_1 + v_2$, $z_2 = v_1 - v_2$.

В формулируемом ниже утверждении, непосредственно вытекающим из равенств (20), σ — произвольная точка спектра оператора AB (или оператора BA , спектр которого тот же).

ЛЕММА 1. При выполнении первого равенства (11) точки спектра устойчивости λ простого состояния равновесия расположены в левой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда

$$4 \operatorname{Re} \sigma > (\operatorname{Im} \sigma)^2. \quad (21)$$

§ 3. Подготовительные леммы

Одна из лежащих на поверхности причин, по которой выбраны граничные условия (2), состоят в следующем. При ограничении (6) в соответствии с (12), (13) квазинормальная форма (4), (5) имеет пространственно однородное состояние равновесия

$$\xi_0(x) = \rho_0 \exp(i\varphi_0), \quad (22)$$

где φ_0 равно введенному в предыдущем пункте φ_1 , а

$$\rho_0 = \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} - 2\delta \right)}. \quad (23)$$

ЛЕММА 2. Состояние равновесия (22) квазинормальной формы (4), (5) экспоненциально устойчиво в том и только том случае, если при $k = 1, 2, \dots$ положительна каждая из величин

$$(a^2 k^2 \pi^2 - \rho_0^2 - 4\delta)(a^2 k^2 \pi^2 - \rho_0^2). \quad (24)$$

Доказательство прямо следует из леммы 1.

Наш основной результат будет связан с предположением, что

$$\delta < 0, \quad (25)$$

когда в соответствии с леммой 2 пространственно однородное состояние равновесия в первый раз теряет устойчивость при

$$a^2 < \frac{\rho_0^2}{\pi^2}. \quad (26)$$

ЛЕММА 3. При ограничении (25) состояние равновесия (22) квазинормальной формы (4), (5) экспоненциально устойчиво в том и только том случае, если выполнено противоположное (26) строгое неравенство или если

$$\frac{\rho_0^2}{(k+1)^2 \pi^2} < a^2 < \frac{\rho_0^2 + 4\delta}{k^2 \pi^2}, \quad (27)$$

где $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство получается путем анализа знаков сомножителей в произведении (24).

Для наших целей существенно выяснить структуру окрестности пространственно однородного решения (23) краевой задачи (12), (13) при допущении, что

$$a^2 = \frac{\rho_0^2}{\pi^2} - \mu, \quad (28)$$

где μ — малый положительный параметр.

В следующих двух вспомогательных предложениях ограничение (25) не используется, но неравенство (6), естественно, считается выполненным.

ЛЕММА 4. При ограничении (28) в окрестности пространственно одно-родного решения (23) краевая задача (12), (13) имеет ровно два пространственно неоднородных решения с асимптотикой

$$\eta_{1,2}(x) = \rho_0 \mp \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \mu \cos \pi x + \mu h_1(x) + O(\mu^{3/2}), \quad (29)$$

где $h_1(x) = -\pi^2(3 - \cos 2\pi x)/6\rho_0$.

Для доказательства в уравнении (12) выполним замену $\eta = \rho_0 + h$ и учтем (28). Получаем

$$\left(\frac{\rho_0^2}{\pi^2} - \mu\right) h'' + \rho_0^2 h + \frac{3}{2}\rho_0 h^2 + \frac{1}{2}h^3 = 0. \quad (30)$$

В соответствии со стандартной теорией ветвления (например, см. [4]) все близкие к нулевому решения краевой задачи (30), (13) имеют вид

$$h(x) = \mu^{1/2} \beta \cos \pi x + \mu h_1(x) + O(\mu^{3/2}), \quad (31)$$

где постоянная β и функция $h_1(x)$ определяются при помощи метода неопределенных коэффициентов. Следуя ему, подставим (31) в (30) и сначала приравняем нулю сумму коэффициентов при степени μ . Убеждаемся, что

$$\frac{\rho_0^2}{\pi^2} h_1'' + \rho_0^2 h_1 + \frac{3}{4}\rho_0 \beta^2 (1 + \cos 2\pi x) = 0,$$

откуда выводим равенство

$$h_1(x) = -\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\rho_0} (3 - \cos 2\pi x). \quad (32)$$

Остается приравнять нулю сумму коэффициентов при $\mu^{3/2}$. На этом пути выходит линейное неоднородное уравнение, которое при граничных условиях непроницаемости разрешимо в том и только том случае, если

$$\beta^2 = \frac{2\pi^2}{3}. \quad (33)$$

Учитывая (33) в (32) и (31), приходим к формуле (29).

В (18) используем обозначение (23), а также учтем равенство (28) и формулу (29). Через $A(\mu)$ обозначим получающийся в итоге дифференциальный оператор.

ЛЕММА 5. Положительно близкое к нулю собственное число оператора $A(\mu)$.

Как и при доказательстве предыдущего утверждения, воспользуемся соответствующими положениями теории ветвления, согласно которым в рассматриваемой ситуации интересующая нас собственная функция разлагается в ряд по целым степеням малого параметра $\mu^{1/2}$, а в разложении ей соответствующего собственного числа участвуют только степени μ .

Обозначим через $z(x)$ и ν соответственно эти характеристики оператора $A(\mu)$. Согласно сказанному выше справедливы асимптотические представления

$$z(x) = \cos \pi x + \mu^{1/2} z_1(x) + \mu z_2(x) + O(\mu^{3/2}), \quad (34)$$

$$\nu = \mu \nu_1 + O(\mu^2). \quad (35)$$

С их учетом в левой и правой частях равенства

$$A(\mu)z(x) = \nu z(x) \quad (36)$$

сначала выделим и приравняем коэффициенты при $\mu^{1/2}$. Приходим к уравнению

$$-\frac{\rho_0^2}{\pi^2} z_1'' - \rho_0^2 z_1 \pm \rho_0 \pi \sqrt{\frac{3}{2}} (1 + \cos 2\pi x) = 0,$$

откуда выводим, что

$$z_1(x) = \pm \frac{\pi}{\rho_0} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\pi x \right). \quad (37)$$

Проводя в (36) аналогичную процедуру с коэффициентами при μ , получаем уравнение

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_0^2}{\pi^2} z_2'' - \rho_0^2 z_2 - \pi^2 \cos \pi x \pm 2\rho_0 \pi \sqrt{\frac{3}{2}} z_1(x) \cos \pi x \\ & - 3\rho_0 h_1(x) \cos \pi x - \pi^2 \cos^2 \pi x = \nu_1 \cos \pi x, \end{aligned} \quad (38)$$

где $h_1(x)$ — функция (32). В силу (33) и (37) уравнение (38) при условиях непроницаемости разрешимо в том и только том случае, если

$$\nu_1 = \frac{11\pi^2}{4}. \quad (39)$$

Выводом формулы (39) доказательство завершается.

Аналогичным образом, т.е. путем учета (28) и (29) в (19), вводится оператор $B(\mu)$.

ЛЕММА 6. *При ограничении (25) положительно близкое к нулю собственное число оператора $A(\mu)B(\mu)$.*

Технически проще провести обоснование сформулированного утверждения для оператора $B(\mu)A(\mu)$, у которого, напоминаем, те же собственные значения.

Учтем представления

$$A(\mu) = A_0 + \mu^{1/2}A_1 + \mu A_2, \quad B(\mu) = B_0 + \mu^{1/2}B_1 + \mu B_2, \quad (40)$$

в правых частях которых отброшены слагаемые более высокого порядка малости по μ , в равенстве

$$B(\mu)A(\mu)z(x) = \varkappa z(x), \quad (41)$$

аналогичном (36). Из (40) и (41) вытекает, что для отыскания $z_1(x)$ выходит прежнее уравнение. А для определения $z_2(x)$ получаем уравнение

$$A_0 z_2(x) + A_1 z_1(x) + A_2 \cos \pi x = \varkappa_1 B_0^{-1} \cos \pi x, \quad (42)$$

совпадающее с (38), но с иной правой частью. Отметим, что стоящая в правой части (42) величина $\varkappa_1$ — коэффициент при первом слагаемом в разложении $\varkappa$ из (41) по степеням μ . Из сопоставления (38) и (42) вытекает, что

$$\varkappa_1 = 11\pi^2(\rho_0^2 - 4\delta)/4. \quad (43)$$

Выводом формулы (43) завершается доказательство леммы.

В доказываемых ниже двух важных утверждениях снова не предполагается выполненным неравенство (25).

ЛЕММА 7. *При ограничениях (6) и (26) краевая задача (12), (13) имеет ровно два пространственно неоднородных положительных решения $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ соответственно с положительной и отрицательной производными на интервале $0 < x < 1$, переходящие друг в друга при замене x на $1 - x$.*

Интеграл уравнения (12) запишем в виде

$$a^2 \eta'^2 - \frac{1}{2} \rho_0^2 \eta^2 + \frac{1}{4} \eta^4 = -\frac{1}{4}(\rho_0^4 - \gamma^4), \quad (44)$$

считая, что

$$0 < \gamma^2 < \rho_0^2. \quad (45)$$

При условии (45) равенством (44) в фазовой плоскости (η, η') задаются замкнутые кривые, окружающие состояние равновесия $(\rho_0, 0)$ уравнения (12).

Имея в виду утверждение леммы, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$2a\eta' = \sqrt{\gamma^4 - (\eta^2 - \rho_0^2)^2}, \quad (46)$$

вытекающее из (44). Из (46) следует, что существование и количество решений типа $\eta_1(x)$ у краевой задачи (12), (13) сводится к вопросу о существовании и количестве решений у алгебраического уравнения

$$\Phi(\gamma^2) = 1/a, \quad (47)$$

где

$$\Phi(\gamma^2) = 2 \int_{\sqrt{\rho_0^2 - \gamma^2}}^{\sqrt{\rho_0^2 + \gamma^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{\gamma^4 - (\eta^2 - \rho_0^2)^2}}. \quad (48)$$

Выполним в интеграле (48) замену

$$\eta^2 = \rho_0^2 + \gamma^2 \sin \sigma.$$

После небольших преобразований убеждаемся, что

$$\Phi(\gamma^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\sigma}{\sqrt{\rho_0^2 - \gamma^2 \sin \sigma}} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\sigma}{\sqrt{\rho_0^2 + \gamma^2 \sin \sigma}}. \quad (49)$$

Из (45) и (49) следует, что функция (48) строго возрастает, а значит, уравнение (47) при каждом a , удовлетворяющим неравенству (26), однозначно разрешимо.

Чуть изменяя проделанные построения, делаем вывод о существовании и единственности решения типа $\eta_2(x)$. Остается заметить, что свойство симметрии, отмеченное в формулировке леммы, получается автоматически.

Итак, построенные в лемме 4 решения краевой задачи (12), (13) продолжены на все меньшие значения параметра a^2 . Отметим, что при $a \rightarrow 0$ они приобретают своеобразный и выраженный релаксационный характер. Однако, о чем скажем немного ниже, вероятнее всего данные решения не требуются при излишне малых значениях a^2 .

В (18) сменим знак и вместо $\eta(x)$ подставим $\eta_1(x)$ или $\eta_2(x)$ из леммы 7. Получающиеся в результате дифференциальные операторы обозначим соответственно через L_1 и L_2 . Очевидно, одинаковы их собственные значения, а собственные функции переходят друг в друга путем замены x на $1 - x$. По техническим причинам нам будет несколько удобнее работать с ними.

В силу (12)

$$L_1 \eta_1(x) = \eta_1^3(x), \quad (50)$$

а следовательно, положительно собственное число оператора L_1 , отвечающее положительной собственной функции.

ЛЕММА 8. *Отрицательны остальные собственные значения операторов L_1 и L_2 .*

При ограничении (28) данное предложение по-существу составляет содержание леммы 5. Из нее следует, что для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать невозможность следующей ситуации.

Обозначим через $v(x)$ гладкую функцию, удовлетворяющую условиям непроницаемости в концах отрезка $0 \leq x \leq 1$ и имеющую на нем одну перемену знака. Предположим, что при некотором значении параметра a^2 , удовлетворяющем неравенству (26), имеем

$$L_1 v(x) = 0, \quad (51)$$

т.е. равно нулю собственное число, ближайшее к положительному. Покажем, что приводит к противоречию данное допущение.

Из (12) следует, что

$$L_1 \eta_1'(x) = 0. \quad (52)$$

Из (52) и леммы 7 заключаем, что решения линейного дифференциального уравнения второго порядка $L_1 u = 0$ не осциллируют на интервале $0 < x < 1$. Поэтому при уменьшении a^2 не могут стать нулевыми другие собственные значения L_1 . Допущенная же возможность не противоречит общим положениям, а значит, опровержение равенства (51) должно выводиться из особенностей конкретного случая.

Впрочем, благодаря лемме 7 на интуитивном уровне сформулированное утверждение понятно: если при уменьшении a^2 собственное значение оператора L_1 переходит с отрицательной полуоси на положительную, тогда перестают быть, вообще говоря, изолированными решения $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ краевой задачи (12), (13). Это соображение подсказывает способ дальнейших действий.

С отрезка $0 \leq x \leq 1$ функции $\eta_1(x)$ и $v(x)$ продолжим по четности на отрезок $1 \leq x \leq 2$, а на всю числовую прямую распространим их по периодичности с периодом 2. Тем самым $v(x)$ превращается в 2-периодическое решение уравнения

$$L_1 u = 0 \quad (53)$$

с 2-периодическим коэффициентом перед u . Из (52) видно, что другим его 2-периодическим решением будет функция $\eta'_1(x)$.

Уравнение (12) запишем в виде системы в $\mathbb{R}^2$

$$\eta' = w, \quad (54)$$

$$w' = F(\eta, a), \quad (55)$$

где, конечно,

$$F(\eta, a) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\rho_0^2}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3 \right). \quad (56)$$

Пусть $\eta(x)$ и $w(x)$ – компоненты произвольного решения системы (54), (55). Через Π обозначим нелинейный оператор, который точке $(\eta(0), w(0))$ ставит в соответствие точку $(\eta(2), w(2))$. Рассмотрим результат его применения к отрезку небольшой длины, расположенному на полупрямой $w = 0, \eta > 0$, внутри которого находится точка $(\eta_1(0), 0)$. Согласно лемме 7 оператор Π такой отрезок преобразует в некоторый гладкий криволинейный отрезок, пересекающий исходный под ненулевым углом в точке $(\eta_1(0), 0)$.

Систему (54), (55) линеаризуем на 2-периодическом решении $\eta_1(x), \eta'_1(x)$. В соответствии с (56) выйдет 2-периодическая линейная система, эквивалентная уравнению (53). Через $U(x), U(0) = I$, обозначим ее фундаментальную матрицу. Очевидно,

$$U(x) = \begin{pmatrix} v(x)/v(0) & \eta'_1(x)/\eta''_1(0) \\ v'(x)/v(0) & \eta''_1(x)/\eta''_1(0) \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Из формулы (57) заключаем, что

$$U(2) = I. \quad (58)$$

Через $\Pi'_{1,0}$ обозначим якобиан преобразования Π в точке $(\eta_1(0), 0)$. Из (58) следует, что

$$\Pi'_{1,0} = I. \quad (59)$$

Равенство (59) приводит к выводу, что упоминавшийся выше криволинейный отрезок с касанием пересекает в точке $(\eta_1(0), 0)$ исходный линейный отрезок. Требуемое противоречие получено.

Для дальнейшего роль леммы 8 значительна: из нее практически непосредственно следует, что при анализе окрестности теряющих устойчивость состояний равновесия квазинормальной формы (4), (5), строящихся с помощью леммы 7, мы вынуждены выходить за рамки ее простых состояний равновесия.

§ 4. Результаты

Обозначим через B_1 и B_2 соответственно дифференциальные операторы, получающиеся из (19) путем замены $\eta(x)$ на $\eta_1(x)$ или $\eta_2(x)$. У них также одинаковые собственные числа, а собственные функции переходят друг в друга при замене x на $1 - x$. Если

$$a^2 > a_0^2, \quad (60)$$

где a_0^2 заведомо удовлетворяет неравенству (26), одно их собственное число отрицательно, а остальные положительны. Если же выполнено противоположное (60) неравенство, становится отрицательным (это и есть критерий выбора a_0^2) еще одно собственное число и т. д. Данные факты в особых пояснениях не нуждаются, они — следствие хорошо известных свойств линейных дифференциальных уравнений второго порядка [5].

Положим $A_1 = -L_1$, $A_2 = -L_2$ и остановимся на спектральных свойствах операторов $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$, у которых одинаковые собственные числа, а собственные функции переходят друг в друга отмеченным выше способом. Мыслимы две альтернативы.

Во-первых, при выполнении противоположного (60) неравенства у операторов $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ появляется отрицательное собственное число.

Во-вторых, при уменьшении a^2 одно из собственных значений операторов $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ становится кратным, затем комплексным и при прохождении a^2 через некоторое значение a_0^2 одно из неравенств (21) меняется на противоположное.

Еще раз подчеркнем, что отрицательное собственное число у операторов $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ может возникнуть только при прохождении через нуль одного из собственных значений операторов A_1 или B_1 . В соответствии с леммой 8 и сказанным выше с уменьшением a^2 через нуль проходит только собственное значение B_1 . Однако еще при больших a^2 , т. е. до появления нулевого собственного числа, может реализоваться вторая альтернатива, которая отнюдь не является чисто теоретической.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены неравенства (6), (25), (26) и (60), в последнем из которых a_0^2 введено с помощью одной из сформулированных выше альтернатив. Тогда квазинормальная форма (4), (5) имеет два простых экспоненциально устойчивых состояния равновесия вида (7), где $\eta(x)$ равно $\eta_1(x)$ или $\eta_2(x)$, а φ равно φ_1 .

Сделаем одно техническое замечание. Очевидно, уравнение (1) не меняется при замене τ на $\tau + \pi$. Поэтому отрицательным решением краевой задачи (12), (13), получающимся из положительных сменой знака, соответствуют (см. формулу (3)) те же 2π -периодические по τ колебания краевой задачи (1), (2).

Кратко остановимся на пока нерешенном вопросе о динамике квазинормальной формы, когда при уменьшении a^2 неравенство (60) меняется на противоположное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Состояние равновесия краевой задачи (4), (5) назовем *сложным*, если не равно постоянной отношение его вещественной и мнимой частей.

Из сказанного перед теоремой 1 вытекает, что при смене неравенства (60) на противоположное происходит дивергентная или колебательная потеря устойчивости каждого из рассматриваемых двух простых состояний равновесия квазинормальной формы (4), (5). Вероятно, в первом случае, что согласуется с леммой 8,

устойчивыми становятся некоторые ее сложные состояния равновесия, а во втором — циклы.

При

$$a^2 < \frac{\rho_0^2}{4\pi^2} \quad (61)$$

у краевой задачи (12), (13) появляются еще два пространственно неоднородных решения, получающиеся из $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ следующим образом.

При ограничении (61) решения $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ с прежними свойствами могут быть построены на половинном отрезке $0 \leq x \leq 1/2$. А на отрезок $1/2 \leq x \leq 1$ каждая из них продолжается по четности.

Существенно, что при этом сохраняются подходящие модификации лемм из § 3. Отметим также, что аналогично a_0^2 вводится величина a_1^2 .

Последнее обобщение. Пусть

$$a_k^2 < a^2 < \frac{\rho_0^2}{(k+1)^2\pi^2}, \quad (62)$$

где $k = 2, 3, \dots$. При выполнении правого неравенства (62) у краевой задачи (12), (13) появляются два еще более сложно устроенных по пространственной переменной решения. Параметр a_k^2 из левой части (62) вводится из соображений, аналогичных использованным при определении a_0^2 и a_1^2 .

ТЕОРЕМА 2. Пусть в условиях теоремы 1 вместо неравенств (26) и (60) выполнены соотношения (62). Тогда квазинормальная форма (4), (5) имеет два простых экспоненциально устойчивых состояния равновесия вида (7), где $\eta(x)$ получается путем симметричных продолжений с отрезка $0 \leq x \leq 1/(k+1)$ функций типа $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$.

Отметим, что из соображений симметрии

$$a_k^2 \geq \frac{a_0^2}{(k+1)^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак, при уменьшении коэффициента упругости a^2 с интервалами устойчивости (27) пространственно однородного состояния равновесия (22) соседствуют интервалы, когда устойчивы простые состояния равновесия, имеющие все более мелкочаистую структуру. Подчеркнем, что данное заключение не имеет аналогов в обыкновенных уравнениях.

Привлечем внимание к следующему вопросу. Именно, могут ли при некоторых $a^2 < a_0^2$ вновь становиться устойчивыми простые состояния равновесия квазинормальной формы (4), (5), построенные с помощью решений $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ краевой задачи (12), (13), о которых шла речь в лемме 7. Представляется, что ответ отрицателен. А причина такова: согласно лемме 8 при уменьшении a^2 слишком различными становятся спектральные свойства операторов A_1 , A_2 и B_1 , B_2 .

В заключение особо остановимся на роли неравенства (25), которая не акцентировалась на описательном уровне. Дело здесь в следующем: если выполнено противоположное (25) неравенство, при уменьшении a^2 от пространственно однородного состояния равновесия квазинормальной формы могут ответвляться только ее сложные состояния равновесия, а значит, анализ связан со значительно более трудоемкими вычислениями, причем затруднено его выполнение в объеме, аналогичном изложенному.

§ 5. Пояснение к одному из этапов в обосновании метода квазинормальных форм

Проведенная к настоящему времени апробация работы [3] показала, что одно техническое место в ней нуждается в пояснениях. Начнем с напоминания общих положений.

В [3] рассматривалось уравнение типа (1), но более общего вида, в частности, входящая в него нелинейность могла содержать квадратичные слагаемые. В этом случае асимптотический ряд (3) усложняется – в нем появляются слагаемые порядка ε , ε^2 и т.д. Первые его несколько слагаемых используются для построения приближенного периодического решения, на котором выполняется линеаризация рассматриваемого уравнения вида (1). Однако в отличие от уравнения (1) в более общем случае линеаризованное уравнение содержит слагаемые порядка $\varepsilon^{1/2}$, работа с которыми доставляет определенные трудности. При этом выявляется некоторая зависимость от выбора граничных условий, например, при граничных условиях (2) построения из [3] в пояснениях не нуждаются. Поэтому пусть имеют место граничные условия

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (63)$$

А в дополнительных разъяснениях нуждается предложенный в [3] способ избавления (в линеаризованном на приближенном периодическом решении уравнении) от слагаемых порядка $\varepsilon^{1/2}$ на высоких модах – собственных функций с большими параметрами. В соответствии со сказанным в [3] фактически проблема сводится к описанию способа выбора регулярного гармонически зависящего от τ решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + v - \varepsilon a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(\tau, x), \quad (64)$$

где

$$f(\tau, x) = [\cos(p+k)\pi x - \cos(p-k)\pi x] \exp[i(\omega_p + 1)\tau], \quad (65)$$

а $\omega_p = \sqrt{1 - \varepsilon a^2 p^2}$, при граничных условиях (63). Отметим, что целые числа p и k из (65) подчинены ограничениям

$$k \leq M\varepsilon^{-1/7}, \quad p \geq M\varepsilon^{-1/5}. \quad (66)$$

Здесь и в дальнейшем одной буквой M обозначаются некоторые не зависящие от ε положительные постоянные, которые будут встречаться в аналогичного типа неравенствах.

Стоящую в правой части (65) в квадратных скобках функцию переменного x разложим в ряд Фурье по базисной системе $\sqrt{2} \sin l\pi x$, $l = 1, 2, \dots$. Рассмотрим такие l , что

$$|p - l| \leq \frac{\gamma}{a\varepsilon^{1/2}}, \quad (67)$$

где положительная постоянная γ от выбора ε не зависит и $\gamma < 1/2$. Через $f_{yk}(\tau, x)$ обозначим такую часть $f(\tau, x)$, в которую при разложении по выбранной базисной системе функций входят только номера l , подчиненные неравенству (67). В уравнении (64) $f(\tau, x)$ заменим на $f_{yk}(\tau, x)$, а остаток вернем в линеаризованное уравнение. Внимательно посмотрим, что дает такой способ действий.

Коэффициенты Фурье функции $f(\tau, x)$ имеют вид

$$\frac{2k}{(p+l)^2 - k^2}, \quad \frac{2k}{(p-l)^2 - k^2}. \quad (68)$$

При

$$|p - l| > \frac{\gamma}{a\varepsilon^{1/2}} \quad (69)$$

ограничимся анализом малости второго выражения (68). Его знаменатель запишем в форме

$$(p - l)^2 - k^2 = [(p - l)^2 - k^2]^{2/7} \cdot [(p - l)^2 - k^2]^{5/7}. \quad (70)$$

Из (66) и (69) вытекает, что

$$[(p - l)^2 - k^2]^{5/7} \geq M\varepsilon^{-5/7}, \quad (71)$$

а значит,

$$\frac{2k}{[(p - l)^2 - k^2]^{5/7}} \leq M\varepsilon^{4/7}. \quad (72)$$

Первый множитель из правой части (70) обеспечивает хорошее затухание коэффициентов Фурье, а роль второго множителя такова. Остаток, который мы вернули в линеаризованное уравнение, войдет в его слагаемые, уже имеющие множитель $\varepsilon^{1/2}$. Отсюда и из (72) следует, что суммарный порядок малости будет $\varepsilon^{15/14}$, а значит, в соответствии с изложенным в [3] может считаться несущественным.

Вернемся к уравнению (64), в котором, напомним, $f(\tau, x)$ заменено на $f_{y_k}(\tau, x)$. Его решение строим в виде суммы соответствующих базисных функций с тем же зависящим от τ множителем, что и в правой части (65). В результате в знаменателях коэффициентов при базисных функциях появятся произведения

$$(\omega_p + \omega_l - 1) \cdot (\omega_p - \omega_l - 1).$$

Однако малых знаменателей не будет. Действительно, пусть для определенности $p > l$. Имеем

$$\omega_p - \omega_l = \frac{\varepsilon a^2(p - l)(p + l)}{\omega_p + \omega_l} \leq 2\gamma \sqrt{\frac{z}{1 + z}} \leq 2\gamma,$$

где $z = \varepsilon a^2 p^2$. Остается напомнить, что $2\gamma < 1$. На этом требуемое пояснение завершается. Мы сочли необходимым его провести не только из-за естественного стремления к чистоте теории, но и имея в виду возможное ее распространение на более сложные случаи, связанные, например, с проблемой обоснования метода квазинормальных форм для волновых уравнений в двумерных областях.

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. Митропольский Ю. А., Мосеев Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Вища школа, 1976.
3. Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
4. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
5. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию
21.03.1997