Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Кузьмин, Ю. С. Семенов, О гомологиях свободной нильпотентной группы класса 2, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 4, 49–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:38:50

УДК 512.54

Ю. В. Кузьмин, Ю. С. Семенов

О гомологиях свободной нильпотентной группы класса 2

Пусть G – свободная нильпотентная группа класса 2 и пусть $\mathcal{G}$ – свободное нильпотентное кольцо Ли класса 2 с тем же числом свободных образующих. Для группы G строится свободная резольвента, которая как градуированный $\mathbb{Z}G$ -модуль изоморфна $\mathbb{Z}G \otimes \Lambda(\mathcal{G})$, где $\mathbb{Z}G$ – групповое кольцо группы G , а $\Lambda(\mathcal{G})$ – внешняя алгебра кольца $\mathcal{G}$. Как следствие основной конструкции выводится изоморфизм целочисленных гомологий $H_n G \cong H_n \mathcal{G}$.

Библиография: 11 названий.

Введение

Пусть G – конечно порожденная абелева группа. Хорошо известно, как строится достаточно удобная свободная резольвента тривиального $\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathbb{Z}$. Все сводится к циклическим группам, поскольку в качестве резольвенты для прямого произведения можно взять тензорное произведение резольвент сомножителей. Отсюда, например, легко следует, что если G – свободная абелева группа, то ее внешняя алгебра над групповым кольцом $\mathbb{Z}G$, снабженная соответствующим дифференциалом, является резольвентой тривиального модуля $\mathbb{Z}$.

Картина резко меняется при переходе к нильпотентным группам. В общем случае кроме стандартной резольвенты ничего указать и нельзя. Причина понятна – нильпотентных групп слишком много и устроены они достаточно сложно. В такой ситуации естественно попытаться исследовать универсальный объект – общую точку задачи. В нашем случае – это свободная нильпотентная группа. Для разрешимых групп подобная точка зрения уже предлагалась в работах [1]–[4], где изучались, в частности, гомологии свободных разрешимых групп.

В этой статье мы изучаем гомологические свойства свободной нильпотентной группы класса 2. Основная идея состоит в использовании аналогии с кольцами Ли. Пусть G – нильпотентная группа. Будем предполагать, что факторы нижнего центрального ряда группы G – свободные абелевы группы. Как хорошо известно, на прямой сумме факторов нижнего центрального ряда можно ввести структуру градуированного кольца Ли, умножение в котором индуцируется коммутатором в группе. Обозначим это кольцо через $\mathcal{G}$. Учитывая тесную связь между группой G и кольцом $\mathcal{G}$, естественно поставить вопрос о том, как связаны их гомологические свойства. Нетрудно, например, доказать совпадение гомологических размерностей: обе они равны сумме рангов факторов нижнего центрального ряда. Известно также [5], что изоморфны гомологии с рациональными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00290).

Если G имеет класс 2, то изоморфны даже гомологии с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[1/(d+1)!]$, где d – ранг коммутанта [6]. Если G – свободная нильпотентная группа класса 2, то $\mathcal{G}$ – свободное нильпотентное кольцо класса 2. Мы доказываем, что имеет место изоморфизм целочисленных групп гомологий $H_n G \cong H_n \mathcal{G}$. Эта теорема получается как следствие основного результата – построения свободной резольвенты тривиального $\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathbb{Z}$, которая сходна с внешней алгеброй (отметим для сравнения и полноты картины, что в 1989 году И. Хюбшман предложил [7] некоторый общий способ построения резольвент для нильпотентных групп класса 2). Чтобы описать вкратце нашу конструкцию, начнем с кольца $\mathcal{G}$. Пусть $\Lambda = \Lambda(\mathcal{G})$ – внешняя алгебра аддитивной группы кольца $\mathcal{G}$. На Λ можно определить дифференциал ∂ , который на внешнем произведении элементов $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{G}$ действует по формуле

$$\partial(z_1 \wedge \dots \wedge z_n) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [z_i, z_j] \wedge z_1 \wedge \dots \wedge \widehat{z}_i \wedge \dots \wedge \widehat{z}_j \wedge \dots \wedge z_n \quad (0.1)$$

(как обычно “ $\wedge$ ” означает пропуск соответствующего элемента).

Мы строим некоторый подкомплекс в тривиализации стандартной резольвенты группы G , который как градуированный $\mathbb{Z}$ -модуль изоморфен алгебре Λ . Благодаря этому изоморфизму на Λ возникает еще один дифференциал d . Он естественно распадается в сумму

$$d = d_2 + d_3 + \dots + d_n,$$

где $d_2 = \partial$, а остальные слагаемые d_k дают в некотором смысле все более точное приближение к дифференциалу группового комплекса. Если в соответствии с (0.1) d_2 получается выделением двух элементов z_i и z_j и добавлением коммутатора $[z_i, z_j]$, то d_k определяется с помощью выделения k -элементных подмножеств и добавлением $k-1$ коммутатора. Мы доказываем, что дифференциал d можно поднять до некоторого дифференциала комплекса $\mathcal{R}(G) = \mathbb{Z}G \otimes \Lambda$, что превращает его в свободную резольвенту тривиального $\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathbb{Z}$. Это и есть наш основной результат. Затем мы строим цепное отображение комплекса (Λ, d) в комплекс (Λ, ∂) , которое индуцирует изоморфизм групп гомологий, откуда следует, что $H_n G \cong H_n \mathcal{G}$.

К настоящему времени группы $H_n \mathcal{G}$ вычислены лишь для случая, когда число свободных образующих r кольца $\mathcal{G}$ не превосходит 5. Как оказалось, в группах $H_n \mathcal{G}$ имеется 3-кручение [8]. Неизвестно, появляются ли элементы других конечных порядков при $r > 5$. С другой стороны, Шт. Зиггом [9] вычислены группы рациональных гомологий $H_n(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$.

Материал в статье расположен следующим образом. В первом параграфе мы даем точные формулировки основных результатов. Второй параграф посвящен доказательству ряда утверждений (большой частью технических) о стандартном комплексе произвольной группы. Мы вводим понятие коммутатора двух цепей и доказываем формулу для дифференцирования перетасовочного произведения, которая на наш взгляд представляет самостоятельный интерес. В третьем параграфе строится подкомплекс $K(G)$ стандартного комплекса свободной нильпотентной группы G класса 2, который затем (четвертый параграф) поднимается до конечной свободной резольвенты. В пятом параграфе доказывается изоморфизм групп целочисленных гомологий группы G и соответствующего ей коль-

ца Ли. В последнем параграфе доказано, что стабилизация спектральной последовательности Линдона–Хохшильда–Серра, ассоциированной с расширением $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G/G' \rightarrow 1$, происходит на третьем члене.

Авторы выражают признательность А. А. Клячко за полезные советы, касающиеся ориентации циклов.

§ 1. Формулировка основных результатов

1.1. Рассмотрим свободную нильпотентную группу $G = G(r)$ класса 2 с r свободными образующими $x_1, \dots, x_r$. Ее можно задать копредставлением

$$G = \langle x_i, c_{ij}, 1 \leq i < j \leq r \mid c_{ij} = [x_i, x_j], [x_k, c_{ij}] = [c_{ij}, c_{kl}] = 1 \rangle \quad (1.1)$$

(групповой коммутатор $[a, b]$ равен $aba^{-1}b^{-1}$).

Будем считать, что элементы $x_1, \dots, x_r$ упорядочены в соответствии с естественным порядком индексов, т.е. $x_1 < \dots < x_r$, а коммутаторы c_{ij} — лексикографически, т.е. $c_{ij} < c_{kl}$, если $j < l$ или $j = l, i < k$. Удобно также считать, что $c_{ij} < x_k$ для любых i, j, k . Пусть $\mathcal{G}$ — кольцо Ли, построенное по группе G , и $\Lambda(\mathcal{G})$ — его внешняя алгебра над $\mathbb{Z}$. Поскольку $\Lambda(\mathcal{G})$ изоморфна внешней алгебре свободной абелевой группы $G' \oplus G/G'$, то базу ее n -й однородной компоненты $\Lambda^n(\mathcal{G})$ образуют произведения вида

$$c_{i_1 j_1} \wedge \dots \wedge c_{i_q j_q} \wedge x_{k_1} \wedge \dots \wedge x_{k_p}, \quad p + q = n, \quad (1.2)$$

в которых множители упорядочены по возрастанию (точнее, вместо свободных порождающих x_k надо рассматривать их образы в G/G'). Такие же произведения являются свободными образующими $\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathcal{R}(G) = \mathbb{Z}G \otimes \Lambda(\mathcal{G})$. Мы покажем, что на $\mathcal{R}(G)$ можно определить некоторый дифференциал d , причем если комплекс $(\mathcal{R}(G), d)$ пополнить в размерности 0 естественным эпиморфизмом $\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$, то получится свободная резольвента тривиального модуля $\mathbb{Z}$.

Чтобы выписать явную формулу для дифференциала, введем некоторые дополнительные конструкции и обозначения.

1.2. Геометрическая интерпретация порождающих x_k и коммутаторов c_{ij} . Пусть $\Delta = \Delta(r)$ — стандартный симплекс с r вершинами, вложенный в $\mathbb{R}^r$ так, что k -й вершине соответствует точка $v_k(0, \dots, 1, 0, \dots)$ (1 стоит на k -м месте). Зафиксируем ориентацию ребра e_{ij} , соединяющего v_i и v_j , считая его началом вершину с меньшим индексом. Геометрически это вектор $e_{ij}(0, \dots, -1, 0, \dots, 1, 0, \dots)$. Удобно отождествить порождающие x_k с вершинами v_k , а коммутаторы c_{ij} , $i < j$, с ориентированными ребрами e_{ij} . В частности, множества вершин и ребер становятся упорядоченными. В дальнейшем указанное соответствие будет систематически использоваться.

1.3. Максимальные деревья и их четность. Пусть T — максимальное дерево в 1-остове $\Delta^1(r)$ симплекса $\Delta(r)$. Очевидно, что T имеет ровно r вершин и $r - 1$ ребро. Пусть $e_1(T), \dots, e_{r-1}(T)$ — векторы, соответствующие ориентированным ребрам дерева T , выписанным в порядке возрастания. Легко видеть, что они образуют базис пространства, состоящего из векторов с нулевой суммой координат. Если добавить к векторам $e_i(T)$ еще один вектор $e_0(1, \dots, 1)$, то получится

базис всего пространства $\mathbb{R}^r$. Пусть δ – определитель, составленный из координат векторов $e_0, e_1(T), \dots, e_{r-1}(T)$. Четностью $\varepsilon(T)$ дерева T назовем 0 или 1, если число δ , соответственно, положительно или отрицательно. Таким образом, по определению $(-1)^{\varepsilon(T)}$ совпадает со знаком δ .

Пусть теперь $V = \{v_{s_1}, \dots, v_{s_k}\}$ – упорядоченное подмножество вершин симплекса $\Delta(r)$, т.е. $s_1 < \dots < s_k$. Рассмотрим грань $\Gamma(V) \subseteq \Delta(r)$, порожденную множеством V . Как симплицияльные множества $\Gamma(V)$ и $\Delta(k)$ изоморфны: вершине $v_{s_j} \in \Gamma(V)$ соответствует вершина $v_j \in \Delta(k)$. Максимальному дереву $T \subseteq \Gamma^1(V)$ соответствует дерево $T' \subseteq \Delta^1(k)$. По определению будем считать, что $\varepsilon(T) = \varepsilon(T')$. Условимся также, что $\max(V)$ обозначает множество всех максимальных деревьев $T \subseteq \Gamma^1(V)$.

1.4. Метка дерева. Пусть, как и раньше, T – максимальное дерево в $\Gamma^1(V)$. Добавление к T еще одного ребра определяет в $\Gamma^1(V)$ некоторый цикл Z . Зафиксируем на нем ориентацию в соответствии с направлением, которое указывает старшее ребро (напомним, что все ребра в $\Gamma^1(V)$ ориентированы и упорядочены). Если e – произвольное ребро цикла Z , то оно также определяет на Z некоторую ориентацию. Назовем ребро e *положительным относительно Z* , если эта ориентация совпадает с той, которую мы выбрали.

Определим теперь *коммутаторную метку $u(T)$ дерева T* . Пусть для каждого ребра e $c(e)$ – соответствующий ему коммутатор. Положим

$$u(T) = \prod_e c(e),$$

где произведение берется по всем ребрам $e \in \Gamma^1(V) \setminus T$, которые положительны относительно возникающих при их добавлении циклов.

ПРИМЕР. Пусть $V = \{v_1 \dots v_k\}$ и T – звездное дерево с ребрами $e_{1i}, i = 2, \dots, k$. Тогда все дополнительные ребра положительны относительно соответствующих циклов. Поэтому $u(T) = \prod_{1 < i < j \leq k} c_{ij}$ – произведение коммутаторов, взятое по всем дополнительным ребрам. Напротив, если T – простая цепь с ребрами $e_{i, i+1}, i = 1, \dots, k-1$, то ни одно дополнительное ребро не является положительным и $u(T) = 1$.

1.5. Четность разбиения. Пусть V – упорядоченное множество. Предположим, что V представлено в виде дизъюнктного объединения своих подмножеств $V_1, \dots, V_h$, которые к тому же расположены в фиксированном порядке. Такому разбиению соответствует перетасовка множества V , т.е. его перестановка, в которой сначала стоят элементы из V_1 в возрастающем порядке, затем элементы из V_2 и т.д. Четность этой перетасовки будем также называть *четностью разбиения* $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_h$ и обозначать $\varepsilon(V_1, \dots, V_h)$. В частности, любое подмножество $W \subseteq V$ определяет разбиение $V = W \sqcup (V \setminus W)$. Его четность будем для краткости обозначать просто $\varepsilon(W)$. Как обычно, $|W|$ будет обозначать число элементов множества W .

1.6. Сформулируем теперь основной результат. Будем использовать обозначения, введенные ранее. Кроме того, для любого множества вершин V симплекса $\Delta(r)$ обозначим через $X(V)$ внешнее произведение элементов x_k , соответствующих вершинам $v_k \in V$, взятым в порядке возрастания. Аналогично, для любого

множества E ориентированных ребер обозначим через $C(E)$ упорядоченное внешнее произведение соответствующих коммутаторов. В частности, для любого дерева $T \subseteq \Delta^1(r)$ определено произведение $C(T)$. Отметим, что в этих обозначениях образующие (1.2) $\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathcal{R}(G)$ запишутся в виде

$$C(E) \wedge X(V), \quad E = \{e_{i_1 j_1}, \dots, e_{i_q j_q}\}, \quad V = \{v_{k_1}, \dots, v_{k_p}\}. \quad (1.3)$$

Пусть, наконец, для любого множества вершин V $x(V)$ – инверсное произведение элементов x_k , соответствующих вершинам $v_k \in V$, взятым в порядке убывания. Подчеркнем, что речь идет об умножении в группе, т.е. $x(V) \in G$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{Z}G$ -гомоморфизм $d: \mathcal{R}(G) \rightarrow \mathcal{R}(G)$ задан на свободных образующих (1.3) формулой

$$\begin{aligned} d(C(E) \wedge X(V)) = & - \sum_{s=1}^q (-1)^{s-1} (c_{i_s j_s} - 1) \otimes C(E \setminus e_{i_s j_s}) \wedge X(V) \\ & + \sum_{t=1}^p (-1)^{q+t-1} (x_{k_t} - 1) \otimes C(E) \wedge X(V \setminus v_{k_t}) \\ & + \sum_{\substack{W \subseteq V, |W| \geq 2 \\ T \in \max(W)}} (-1)^{q+\varepsilon(W)+\varepsilon(T)} x(W) u(T) \otimes C(E) \wedge C(T) \wedge X(V \setminus W), \end{aligned}$$

где в последней группе слагаемых суммирование происходит по всем подмножествам $W \subseteq V$, содержащим не менее двух элементов, и по всем максимальным деревьям $T \in \max(W)$. Тогда $d^2 = 0$ и соответствующий пополненный комплекс $\mathcal{R}(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ с дифференциалом d является свободной резольвентой тривиального $\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathbb{Z}$.

Отметим, что эта резольвента является минимальной в том смысле, что ее длина равна гомологической размерности h группы G , т.е. равна $r + \binom{r}{2} = \binom{r+1}{2}$. Число свободных образующих однородной компоненты степени n равно $\binom{h}{n}$. Думая резольвенту $\mathcal{R}(G)$ тензорно на $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}G$, мы получим комплекс $\Lambda(\mathcal{G})$, дифференциал которого также обозначим через d . В $\Lambda(\mathcal{G})$

$$d(C(E) \wedge X(V)) = \sum_{\substack{W \subseteq V, |W| \geq 2 \\ T \in \max(W)}} (-1)^\mu C(E) \wedge C(T) \wedge X(V \setminus W),$$

где $\mu = |E| + \varepsilon(W) + \varepsilon(T)$. Естественно представить d в виде

$$d = d_2 + d_3 + \dots + d_r,$$

где $d_2(C(E) \wedge X(V))$ – это те слагаемые в выписанной сумме, которые соответствуют 2-элементным подмножествам W , d_3 – те, которые соответствуют 3-элементным подмножествам, и т. д. Для d_2 получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} d_2(C(E) \wedge x_{k_1} \wedge \dots \wedge x_{k_p}) \\ = \sum_{i < j} (-1)^{|E|+i+j-1} C(E) \wedge [x_{k_i}, x_{k_j}] \wedge x_{k_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{k_i} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{k_j} \wedge \dots \wedge x_{k_p}, \end{aligned}$$

что совпадает с дифференциалом ∂ комплекса $(\Lambda(\mathcal{G}), \partial)$, с помощью которого вычисляются целочисленные гомологии кольца $\mathcal{G}$. Оказывается, что несмотря на дополнительные слагаемые d_k , $k > 2$, комплексы $(\Lambda(\mathcal{G}), d)$ и $(\Lambda(\mathcal{G}), \partial)$ изоморфны.

ТЕОРЕМА 2. *Существует автоморфизм F градуированного $\mathbb{Z}$ -модуля $\Lambda(\mathcal{G})$, являющийся цепным отображением комплекса $(\Lambda(\mathcal{G}), \partial)$ в комплекс $(\Lambda(\mathcal{G}), d)$.*

Отсюда в качестве следствия получается

ТЕОРЕМА 3. *Для любого $n \geq 0$ справедливо следующее: $H_n G \cong H_n \mathcal{G}$.*

Разумеется изоморфны и группы целочисленных когомологий, так как по формуле универсальных коэффициентов они выражаются через гомологии.

Рассмотрим расширение

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G/G' \rightarrow 1. \quad (1.4)$$

По нему можно построить спектральную последовательность Линдона–Хохшильда–Серра, сходящуюся к целочисленным гомологиям группы G

$$E_{pq}^2 = H_p(G/G') \otimes H_q(G') \cong \Lambda^p(G/G') \otimes \Lambda^q(G').$$

Дифференциал d_{pq}^2 совпадает с умножением на 2-коцикл, задающий расширение (1.4), откуда можно вывести, что

$$\begin{aligned} d_{pq}^2(x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p} \otimes c_{i_1 j_1} \wedge \cdots \wedge c_{i_q j_q}) \\ = \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [x_{k_i}, x_{k_j}] \wedge x_{k_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{k_i} \cdots \wedge \widehat{x}_{k_j} \cdots \wedge x_{k_p} \otimes c_{i_1 j_1} \wedge \cdots \wedge c_{i_q j_q}. \end{aligned}$$

Это означает, что d_{pq}^2 совпадает с дифференциалом комплекса, с помощью которого вычисляются группы $H_n \mathcal{G}$. Из этого наблюдения и теоремы 3 мы выводим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *В спектральной последовательности расширения (1.4) дифференциалы d_{pq}^3 тривиальны, т.е. спектральная последовательность стабилизируется в члене E^3 . Более того, соответствующая фильтрация на $H_n G$ расщепляется и $H_n G \cong \bigoplus_{p+q=n} E_{pq}^3$.*

§ 2. Коммутаторы в стандартном групповом комплексе

2.1. Рассмотрим произвольную группу G . Стандартный (нормализованный) комплекс $C(G)$ определяется следующим образом: при $n \geq 1$ группа n -мерных цепей $C_n(G)$ — это свободный $\mathbb{Z}$ -модуль с базисом, состоящим из всевозможных строк $(g_1, g_2, \dots, g_n)$, где $g_i \in G \setminus \{1\}$; $C_0(G)$ порождается пустой строкой $()$, т.е. $C_0(G) \cong \mathbb{Z}$.

Дифференциал $d: C_n(G) \rightarrow C_{n-1}(G)$ действует на базисных элементах по правилу

$$d(g_1, \dots, g_n) = (g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n (g_1, \dots, g_{n-1}).$$

Группы гомологий комплекса

$$\cdots \xrightarrow{d} C_n(G) \xrightarrow{d} C_{n-1}(G) \xrightarrow{d} \cdots$$

изоморфны группам гомологий $H_n(G, \mathbb{Z}) = H_n G$.

Хорошо известно, что градуированный модуль $C(G) = \bigoplus_{n \geq 0} C_n(G)$ можно превратить в градуированную коммутативную ассоциативную алгебру с единицей с помощью перетасовочного умножения. Напомним, как оно определяется. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$. Рассмотрим упорядоченное множество индексов $N = \{1, \dots, k+m\}$. Если $J = \{i_1, \dots, i_k\}$ — подмножество мощности k в N , то J -перетасовка — это строка

$$(x, y)_J = (y_1, \dots, x_1, \dots, x_k, \dots, y_m)$$

(x_p стоит на i_p -м месте, порядок x_i и y_j по отдельности такой же, как в исходных строках). Обозначим $\tilde{J} = \sum_{p=1}^k (i_p - p)$ — четность перетасовки $(x, y)_J$. Тогда перетасовочное произведение x и y определяется равенством

$$x * y = \sum_J (-1)^{\tilde{J}} (x, y)_J,$$

в котором J пробегает все подмножества мощности k в N .

По линейности перетасовочное произведение можно распространить на весь комплекс $C(G)$. Например, для любых $g_i \in G$

$$(g_1) * (g_2) * \dots * (g_k) = \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} (g_{\pi(1)}, \dots, g_{\pi(k)}),$$

где π пробегает симметрическую группу S_k , $\tilde{\pi}$ — четность π .

2.2. Умножение и дифференциал в $C(G)$. Для однородного элемента $u \in C_n(G)$ положим $\tilde{u} = n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Коммутатором элементов $x \in C_k(G)$, $y \in C_m(G)$ называется элемент $[x, y] \in C_{k+m-1}(G)$ такой, что*

$$[x, y] = d(x * y) - dx * y - (-1)^{\tilde{x}} x * dy.$$

Другими словами, $[x, y]$ — это поправка к “формуле Лейбница” в алгебре $C(G)$ с дифференциалом d .

Чтобы получить явную формулу для коммутатора, введем следующие обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k) \in C_k(G)$. Для любого j , $1 \leq j \leq k-1$, положим $L_j(x) = (x_1, \dots, x_j)$, $R_j(x) = (x_{j+1}, \dots, x_k)$. Кроме того, по определению $L_0(x) = () = R_k(x)$, $L_k(x) = x = R_0(x)$. Для двух строк $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ определим операцию *конкатенации (приписывания)*: $x \circ y = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$. По линейности конкатенация продолжается на $C(G)$. Отметим, что $x = L_j(x) \circ R_j(x)$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$. Тогда $[x, y]$ имеет вид:*

$$\sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^m (-1)^{p+q(k-p)} (L_{p-1}(x) * L_{q-1}(y)) \circ ((x_p y_q) - (y_q x_p)) \circ (R_p(x) * R_q(y)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $d(x * y) = \sum_J (-1)^{\tilde{J}} d(x, y)_J$. Дифференциал произвольной перетасовки

$$d(x, y)_J = d(y_1, \dots, x_1, \dots, x_k, \dots, y_m),$$

где $J = \{i_1, \dots, i_k\}$, равен сумме слагаемых, каждое из которых может быть отнесено к одному из следующих четырех типов.

- 1) Тип (xx) . Сюда относятся слагаемые вида $(-1)^t(y_1, \dots, x_p x_{p+1}, \dots, y_m)$, а также слагаемые, в которых отсутствуют либо x_1 , либо x_k .
- 2) Тип (yy) . Сюда относятся слагаемые вида $(-1)^s(y_1, \dots, y_q y_{q+1}, \dots, y_m)$, а также слагаемые, в которых отсутствует либо y_1 , либо y_m .
- 3) Тип (xy) . К нему относятся слагаемые вида $(-1)^a(y_1, \dots, x_p y_q, \dots, y_m)$.
- 4) Тип (yx) . К нему относятся слагаемые вида $(-1)^b(y_1, \dots, y_q x_p, \dots, y_m)$.

Покажем, что сумма всех слагаемых типа (xx) равна $dx * y$. Рассмотрим, например,

$$(-1)^{\tilde{J}}(y_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, y_m).$$

В данном случае $J = \{i_1, \dots, i_p, i_p + 1, \dots, i_k\}$. Дифференцирование дает слагаемое $(-1)^t(y_1, \dots, x_p x_{p+1}, \dots, y_m)$, где

$$t = i_p + \sum_{j=1}^k (i_j - j) \equiv p + \sum_{j=1}^p (i_j - j) + \sum_{j=p+2}^k (i_j - j) \pmod{2}.$$

С другой стороны, в $dx * y$ имеется соответствующее слагаемое

$$(-1)^s(y_1, \dots, x_p x_{p+1}, \dots, y_m), \text{ где}$$

$$s = p + \sum_{j=1}^p (i_j - j) + \sum_{j=p+2}^k (i_j - 1 - (j - 1)) \equiv t \pmod{2}.$$

Аналогично рассматриваются слагаемые типа (xx) , в которых отсутствует либо x_1 , либо x_k . Точно так же все слагаемые типа (yy) в сумме дают $(-1)^{\tilde{x}} x * dy$. Отсюда можно сделать вывод, что $[x, y]$ в точности равен сумме всех слагаемых типа (xy) и (yx) .

Исследуем слагаемое типа (xy)

$$(-1)^a(y_1, \dots, x_p y_q, \dots, y_m)$$

при фиксированных p, q . Очевидно, что $x_p y_q$ стоит на $(p + q - 1)$ -м месте в строке; начало строки есть некоторая перетасовка $L_{p-1}(x)$ и $L_{q-1}(y)$, конец строки также есть некоторая перетасовка $R_p(x)$ и $R_q(y)$. Таким образом, можно записать, что

$$\begin{aligned} & (-1)^a(y_1, \dots, x_p y_q, \dots, y_m) \\ &= (-1)^a(L_{p-1}(x), L_{q-1}(y))_{J_1} \circ (x_p y_q) \circ (R_p(x), R_{q-1}(y))_{J_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \{i_1, \dots, i_{p-1}\} \subset \{1, \dots, p + q - 2\}, \\ J_2 &= \{i_{p+1}, \dots, i_k\} \subset \{p + q + 1, \dots, k + m\}, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} a &= p + q - 1 + \sum_{j=1}^{p-1} (i_j - j) + p + q - 1 - p + \sum_{j=p+1}^k (i_j - j) \\ &= p + \tilde{J}_1 + \sum_{j=p+1}^k (i_j - j - q) + q(p - k) = p + q(k - p) + \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что сумма всех слагаемых вида

$$(-1)^a (y_1, \dots, x_p y_q, \dots, y_m)$$

при фиксированных p, q (они соответствуют всевозможным парам J_1, J_2) равна

$$\begin{aligned} \sum_{J_1, J_2} (-1)^{p+q(k-p)+\tilde{J}_1+\tilde{J}_2} (L_{p-1}(x), L_{q-1}(y))_{J_1} \circ (x_p y_q) \circ (R_p(x), R_q(y))_{J_2} \\ = (-1)^{p+q(k-p)} (L_{p-1}(x) * L_{q-1}(y)) \circ (x_p y_q) \circ (R_p(x) * R_q(y)). \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются слагаемые типа (yx) . Суммируя теперь по всем p от 1 до k и по всем q от 1 до m , получим утверждение леммы.

Отметим очевидные следствия леммы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если все x_i из $(x_1, \dots, x_k)$ коммутируют со всеми y_j из $(y_1, \dots, y_m)$, то

$$[x, y] = 0, \quad d(x * y) = dx * y + (-1)^{\tilde{x}} x * dy.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть c лежит в центре группы G . Тогда для любого $y \in C(G)$ справедливо следующее: $d((c) * y) = -(c) * dy$.

В дальнейших параграфах появятся элементы комплекса $C(G)$ специального вида, а именно, конкатенации $(g) \circ ((c_1) * \dots * (c_k))$, $g, c_i \in G$. Такие элементы мы для краткости будем обозначать $(g; c_1 * \dots * c_k)$. Отметим, что

$$(g; c_1 * \dots * c_k) = \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} (g, c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(k)}).$$

Следующие две леммы описывают свойства этих элементов.

ЛЕММА 2.2. Если все c_i , $i = 1, \dots, k + m$, попарно коммутируют и коммутируют с $g, h \in G$, то

$$\begin{aligned} [(g; c_1 * \dots * c_k), (h; c_{k+1} * \dots * c_{k+m})] \\ = (-1)^{k+1} ((gh; c_1 * \dots * c_{k+m}) - (hg; c_1 * \dots * c_{k+m})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi \in S_k$, $\sigma \in S_m$ – некоторые перестановки. По лемме 2.1 и условию леммы 2.2

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tilde{\pi}+\tilde{\sigma}}[(g, c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(k)}), (h, c_{k+\sigma(1)}, \dots, c_{k+\sigma(m)})] \\ &= (-1)^{k+1+\tilde{\pi}+\tilde{\sigma}}((gh) - (hg)) \circ ((c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(k)}) * (c_{k+\sigma(1)}, \dots, c_{k+\sigma(m)})). \end{aligned}$$

Суммируя по всем $\pi \in S_k$, $\sigma \in S_m$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2.3. Пусть все $c_i \in G$ попарно коммутируют. Тогда

$$\begin{aligned} d(g; c_1 * \dots * c_k) &= (c_1) * \dots * (c_k) \\ &+ \sum_{p=1}^k (-1)^{p-1} ((g; c_1 * \dots * \widehat{c_p} \dots * c_k) - (gc_p; c_1 * \dots * \widehat{c_p} \dots * c_k)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} d(g; c_1 * \dots * c_k) &= \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} d(g; c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(k)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} (c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(k)}) \\ &\quad - \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} (gc_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(k)}) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} (g, c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(k-1)}) \end{aligned}$$

(все остальные слагаемые взаимно уничтожаются ввиду попарной перестановочности c_i в G). При этом

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} (c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(k)}) &= (c_1) * \dots * (c_k), \\ \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}} (gc_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(k)}) &= \sum_{p=1}^k \sum_{\pi: \pi(1)=p} (-1)^{\tilde{\pi}} (gc_p, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(k)}) \\ &= \sum_{p=1}^k (-1)^{p-1} (gc_p; c_1 * \dots * \widehat{c_p} \dots * c_k), \\ \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\tilde{\pi}+k+1} (g, \dots, c_{\pi(k-1)}) &= \sum_{p=1}^k \sum_{\pi: \pi(k)=p} (-1)^{\tilde{\pi}+k+1} (g, \dots, c_{\pi(k-1)}) \\ &= \sum_{p=1}^k (-1)^{p-1} (g; c_1 * \dots * \widehat{c_p} \dots * c_k). \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

2.3. Формула дифференцирования. Начнем со вспомогательных лемм. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k) \in C_k(G)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in C_m(G)$. Выберем произвольные $u = (u_1, \dots, u_t)$, $v = (v_1, \dots, v_q)$, $(f) \in C_1(G)$, зафиксируем некоторые числа s от 1 до k , n от 0 до m и рассмотрим всевозможные подмножества $J = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, k+m\}$ такие, что $i_s = s+n$.

ЛЕММА 2.4. *Имеет место формула:*

$$\begin{aligned} \sum_{J: i_s = s+n} (-1)^{\tilde{J}} (u * L_{s+n-1}((x, y)_J)) \circ (f) \circ (v * R_{s+n}((x, y)_J)) \\ = (-1)^{n(k-s+1)} (u * L_{s-1}(x) * L_n(y)) \circ (f) \circ (v * R_s(x) * L_n(y)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $i_s = s+n$ фиксировано, то x_s стоит на $(s+n)$ -м месте и $L_{s+n-1}((x, y)_J)$ есть некоторая перетасовка $(L_{s-1}(x), L_n(y))_{J_1}$, где $J_1 = \{i_1, \dots, i_{s-1}\} \subset \{1, \dots, s+n-1\}$. Аналогично, $R_{s+n}((x, y)_J)$ есть $(R_s(x), R_n(y))_{J_2}$, где $J_2 = \{i_{s+1}, \dots, i_k\} \subset \{s+n+1, \dots, k+m\}$. При этом

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \sum_{p=1}^k (i_p - p) = \sum_{p=1}^{s-1} (i_p - p) + s + n - s + \sum_{p=s+1}^k (i_p - p) \\ &= n + \tilde{J}_1 + \sum_{p=s+1}^k (i_p - p - n) + n(k-s) = n(k-s+1) + \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, левая часть (2.1) равна

$$\begin{aligned} \sum_{J_1, J_2} (-1)^{\tilde{J}} (u * (L_{s-1}(x), L_n(y))_{J_1}) \circ (f) \circ (v * (R_s(x), R_n(y))_{J_2}) \\ = (-1)^{n(k-s+1)} (u * L_{s-1}(x) * L_n(y)) \circ (f) \circ (v * R_s(x) * R_n(y)), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2.5. Пусть $b = (b_1, \dots, b_t) \in C_t(G)$, $z = (z_1, \dots, z_q) \in C_q(G)$. Тогда

$$b * z = \sum_{n=0}^q (-1)^{n(t-j+1)} (L_{j-1}(b) * L_n(z)) \circ (b_j) \circ (R_j(b) * R_n(z))$$

для любого j от 1 до t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J = \{i_1, \dots, i_t\} \subset \{1, \dots, t+q\}$. Тогда

$$b * z = \sum_J (-1)^{\tilde{J}} (b, z)_J = \sum_{n=0}^q \sum_{J: i_j = j+n} (-1)^{\tilde{J}} (b, z)_J.$$

При заданном n на $(j+n)$ -м месте в перетасовке $(b, z)_J$ стоит b_j . Поэтому для таких J

$$(b, z)_J = (L_{j-1}(b), L_n(z))_{J_1} \circ (b_j) \circ (R_j(b), R_n(z))_{J_2},$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \{i_1, \dots, i_{j-1}\} \subset \{1, \dots, j+n-1\}, \\ J_2 &= \{i_{j+1}, \dots, i_t\} \subset \{j+n+1, \dots, t+q\}. \end{aligned}$$

При этом можно проверить, что

$$\tilde{J} = n(t-j+1) + \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b * z &= \sum_{n=0}^q \sum_{J_1, J_2} (-1)^{n(t-j+1) + \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2} (L_{j-1}(b), L_n(z))_{J_1} \circ (b_j) \circ (R_j(b), R_n(z))_{J_2} \\ &= \sum_{n=0}^q (-1)^{n(t-j+1)} (L_{j-1}(b) * L_n(z)) \circ (b_j) \circ (R_j(b) * R_n(z)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Леммы 2.4 и 2.5 будут нами использованы для доказательства следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $a = (a_1, \dots, a_t) \in C_t(G)$, $x = (x_1, \dots, x_k) \in C_k(G)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in C_m(G)$. Тогда

$$[a, x * y] = [a, x] * y + (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} [a, y] * x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = \{1, \dots, k+m\}$, $J = \{i_1, \dots, i_k\} \subset N$, $N \setminus J = \{j_1, \dots, j_m\}$. Тогда в силу леммы 2.1

$$[a, x * y] = \sum_J (-1)^{\tilde{J}} [a, (x, y)_J] = \sum_J (-1)^{\tilde{J}} (S_a(x, J) + S_a(y, J)),$$

где

$$\begin{aligned} S_a(x, J) &= \sum_{l=1}^t \sum_{s=1}^k (-1)^{l+i_s(t-l)} (L_{l-1}(a) * L_{i_s-1}((x, y)_J)) \circ ((a_l x_s) - (x_s a_l)) \\ &\quad \circ (R_l(a) * R_{i_s}((x, y)_J)), \\ S_a(y, J) &= \sum_{l=1}^t \sum_{s=1}^m (-1)^{l+j_s(t-l)} (L_{l-1}(a) * L_{j_s-1}((x, y)_J)) \circ ((a_l y_s) - (y_s a_l)) \\ &\quad \circ (R_l(a) * R_{j_s}((x, y)_J)). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\sum_J (-1)^{\tilde{J}} S_a(x, J) = [a, x] * y.$$

С одной стороны, по лемме 2.4

$$\begin{aligned} \sum_J (-1)^{\tilde{J}} S_a(x, J) &= \sum_{n=0}^m \sum_{J: i_s=s+n} (-1)^{\tilde{J}} S_a(x, J) \\ &= \sum_{l=1}^t \sum_{s=1}^k \sum_{n=0}^m (-1)^e (L_{l-1}(a) * L_{s-1}(x) * L_n(y)) \\ &\quad \circ ((a_l x_s) - (x_s a_l)) \circ (R_l(a) * R_s(x) * R_n(y)), \end{aligned}$$

где $e = l + s(t-l) + n(t-l+k-s+1)$. С другой стороны,

$$[a, x] = \sum_{l=1}^t \sum_{s=1}^k (-1)^{l+s(t-l)} (L_{l-1}(a) * L_{s-1}(x)) \circ ((a_l x_s) - (x_s a_l)) \circ (R_l(a) * R_s(x)).$$

Из леммы 2.5 следует, что

$$\begin{aligned} [a, x] * y &= \sum_{l=1}^t \sum_{s=1}^k \sum_{n=0}^m (-1)^f (L_{l-1}(a) * L_{s-1}(x) * L_n(y)) \\ &\quad \circ ((a_l x_s) - (x_s a_l)) \circ (R_l(a) * R_s(x) * R_n(y)), \end{aligned}$$

где $f = l + s(t-l) + n(k+t-(l+s-2)+1) \equiv e \pmod{2}$, т.е. обе тройные суммы равны. Аналогично можно показать, что

$$\sum_J (-1)^{\tilde{J}} S_a(y, J) = (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} [a, y] * x.$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $z \in C_t(G)$. Рассмотрим отображение $ad(z): x \rightarrow [z, x]$ степени $\tilde{z}-1$. Тогда $ad(z)$ является дифференцированием алгебры $C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По линейности из предложения 2.1 получаем, что

$$[z, x * y] = [z, x] * y + (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} [z, y] * x$$

для любых однородных элементов $x, y, z \in C(G)$. Кроме того,

$$[z, y] * x = (-1)^{(\tilde{z}+\tilde{y}-1)\tilde{x}} x * [z, y].$$

Отсюда получаем, что $ad(z)(x * y) = (ad(z)x) * y + (-1)^{(\tilde{z}-1)\tilde{x}} x * (ad(z)y)$, т.е. $ad(z)$ является дифференцированием степени $\tilde{z}-1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. В $C(G)$ выполнены следующие коммутаторные тождества, в которых x, y, z предполагаются однородными:

- 1) $[x, y] = (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} [y, x]$;
- 2) $d[x, y] = -[dx, y] - (-1)^{\tilde{x}} [x, dy]$;
- 3) $(-1)^{\tilde{x}\tilde{z}} [[x, y], z] + (-1)^{\tilde{y}\tilde{x}} [[y, z], x] + (-1)^{\tilde{z}\tilde{y}} [[z, x], y] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $[x, y] = d(x * y) - dx * y - (-1)^{\tilde{x}} x * dy$, то первые два тождества вытекают из коммутативности перетасовочного умножения в $C(G)$ и равенства $d^2 = 0$. Третье тождество получается в результате непосредственного дифференцирования равенства

$$[z, x * y] = [z, x] * y + (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} [z, y] * x$$

с использованием тождеств 1) и 2).

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для однородных $z_1, \dots, z_n \in C(G)$ верно равенство

$$[a, z_1 * \dots * z_n] = \sum_{p=1}^n (-1)^{\sigma_p \tilde{z}_p} [a, z_p] * z_1 * \dots * \widehat{z_p} * \dots * z_n,$$

где $\sigma_p = \tilde{z}_1 + \dots + \tilde{z}_{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . При $n = 2$ формула верна в силу предложения 2.1. Пусть эта формула справедлива при некотором $n \geq 2$. Тогда из предложения 2.1 следует равенство

$$[a, z_1 * \dots * z_{n+1}] = [a, z_1 * \dots * z_n] * z_{n+1} + (-1)^{\sigma_n \tilde{z}_{n+1}} [a, z_{n+1}] * z_1 * \dots * z_n,$$

что доказывает справедливость формулы для $(n + 1)$ сомножителей.

Докажем теперь основное утверждение этого параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. В алгебре $C(G)$ произвольной группы G имеет место следующая формула для дифференцирования перетасовочного произведения h однородных сомножителей:

$$\begin{aligned} d(z_1 * \dots * z_h) &= \sum_{1 \leq p \leq h} (-1)^{\sigma_p} z_1 * \dots * dz_p * \dots * z_h \\ &\quad + \sum_{1 \leq t < q \leq h} (-1)^{\varepsilon_{tq}} [z_t, z_q] * z_1 * \dots * \widehat{z_t} * \dots * \widehat{z_q} * \dots * z_h, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\sigma_p = \tilde{z}_1 + \dots + \tilde{z}_{p-1}$, $\varepsilon_{tq} = \sigma_t \tilde{z}_t + \sigma_q \tilde{z}_q + \tilde{z}_t \tilde{z}_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $h = 2$ формула (2.2) дает

$$d(z_1 * z_2) = dz_1 * z_2 + (-1)^{\tilde{z}_1} z_1 * dz_2 + [z_1, z_2].$$

Рассмотрим $d(z_1 * \dots * z_{h+1})$, предполагая, что формула верна при некотором $h \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} d(z_1 * \dots * z_{h+1}) &= d(z_1 * \dots * z_h) * z_{h+1} \\ &\quad + (-1)^{\sigma_{h+1}} z_1 * \dots * z_h * dz_{h+1} + [z_1 * \dots * z_h, z_{h+1}]. \end{aligned}$$

По следствиям 2.4 и 2.5

$$\begin{aligned} [z_1 * \dots * z_h, z_{h+1}] &= (-1)^{\sigma_{h+1} \tilde{z}_{h+1}} [z_{h+1}, z_1 * \dots * z_h] \\ &= \sum_{1 \leq p \leq h} (-1)^{\varepsilon_{p, h+1}} [z_p, z_{h+1}] * z_1 * \dots * \widehat{z_p} * \dots * z_h. \end{aligned}$$

Таким образом, по индукции формула доказана для произвольного целого $h \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим градуированную ассоциативную коммутативную алгебру $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ над некоторым ассоциативным коммутативным кольцом K с 1. Если задан дифференциал $d: A \rightarrow A$ степени (-1) , то для однородных $x, y \in A$ определим коммутатор $[x, y]$ равенством $[x, y] = d(xy) - (dx)y - (-1)^{\tilde{x}}x(dy)$.

Пусть в алгебре A с дифференциалом d для всех однородных $x, y, z \in A$ выполнено равенство

$$[x, yz] = [x, y]z + (-1)^{\tilde{y}\tilde{z}}[x, z]y. \quad (2.3)$$

Можно показать, что для такой пары (A, d) справедливы формула дифференцирования произведения из предложения 2.2 и тождества из следствия 2.4. Примером алгебры со свойством (2.3) является, очевидно, алгебра $(C(G), d)$ для произвольной группы G . Другой известный пример – это внешняя алгебра $\Lambda(\mathcal{L})$ произвольной алгебры Ли $\mathcal{L}$ над кольцом K , дифференциал в которой задается на разложимых элементах формулой

$$\partial(z_1 \wedge \cdots \wedge z_n) = \sum_{1 \leq s < t \leq n} (-1)^{s+t-1} [z_s, z_t] \wedge z_1 \wedge \cdots \widehat{z_s} \cdots \widehat{z_t} \cdots \wedge z_n,$$

где $z_i \in \mathcal{L}$, а $[z_s, z_t]$ – лиевский коммутатор в $\mathcal{L}$ (путаницы между двумя коммутаторами от элементов $x, y \in \Lambda^1(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ не возникает, поскольку значения обоих совпадают).

Доказательство можно провести по схеме этого параграфа, но нам этот факт не понадобится.

§3. Комплекс $K(G)$

3.1. Пусть $r \geq 2$ – натуральное число. Рассмотрим свободную нильпотентную группу $G = G(r)$ класса 2 с r свободными порождающими $x_1, \dots, x_r$. Мы будем пользоваться копредставлением этой группы, определенным в п. 1.1, а также теми понятиями, которые были введены в первом параграфе (геометрической интерпретацией образующих, четностью дерева и т. д.). Кроме того, будем использовать следующие обозначения: если $v = v_k$ – вершина симплекса Δ , а $e = e_{ij}$ – его ребро, то $x(v) = x_k$, $c(e) = c_{ij}$.

3.2. Элементы $c(V)$ и $w(V)$. Рассмотрим максимальное дерево T в Δ^1 . Зафиксируем в определенном порядке векторы $e_1(T), \dots, e_{r-1}(T)$, соответствующие ориентированным ребрам T , а также произвольный вектор $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$. Обозначим через $(a, e_1(T), \dots, e_{r-1}(T))$ $(r \times r)$ -матрицу, строки которой составлены из координат соответствующих векторов.

ЛЕММА 3.1. *Справедлива формула*

$$\det(a, e_1(T), \dots, e_{r-1}(T)) = \pm(a_1 + \cdots + a_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a_1 + \cdots + a_r = 0$, то a линейно выражается через $e_1(T), \dots, e_{r-1}(T)$, и определитель равен 0. В противном случае все r векторов образуют базис $\mathbb{R}^r$. При необходимости меняя местами $e_k(T)$ и $e_j(T)$, мы можем считать, что порядок $e_1(T), \dots, e_{r-1}(T)$ совпадает с порядком соответствующих им коммутаторов. В частности, $e_{r-1}(T) = e_{ir} = (0, \dots, -1, 0, \dots, 1)$ – старшее

ребро в дереве T . Прибавим к i -му столбцу определителя r -й и разложим по последней строке. Получим равенство

$$\det(a, e_1(T), \dots, e_{r-1}(T)) = \det(a', e_1(T'), \dots, e_{r-2}(T')),$$

где $a' = (a_1, \dots, a_i + a_r, \dots, a_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$, а T' – некоторое максимальное дерево с $r-1$ вершиной в $\Delta^1(r-1)$. Поскольку утверждение леммы при $r=2$ очевидно, то ее можно считать доказанной по индукции.

Для подмножества $V \subseteq \Delta^0$ определим элементы $c(V) \in C_{k-1}(G)$ следующим образом. Пусть $\max(V)$ – множество всех максимальных деревьев T в $\Gamma^1(V)$. Тогда

$$c(V) = \sum_{T \in \max(V)} (-1)^{\varepsilon(T)} (c_1(T)) * \dots * (c_{k-1}(T)) = \sum_{T \in \max(V)} (-1)^{\varepsilon(T)} C(T),$$

где $c_i(T) \in G$ – коммутатор, соответствующий ребру $e_i(T)$ дерева T (напомним, что ребра в дереве T берутся в порядке возрастания). Но четность дерева можно подсчитать и при любом другом порядке ребер, поменяв местами соответствующие строки в определителе, подсчитывающем эту четность. Это никак не повлияет на $c(V)$, ведь при перестановке местами двух строк определителя и перестановке соответствующих этим ребрам коммутаторов в перетасовочном произведении знаки меняются одновременно. Поэтому элемент

$$(-1)^{\varepsilon(T)} C(T) = (-1)^{\varepsilon(T)} (c_1(T)) * \dots * (c_{k-1}(T)) \in C_{k-1}(G)$$

зависит только от дерева T .

ПРИМЕР. Если $|V| \leq 1$, то $c(V) = 0$, а для $V = \{v_i, v_j\}$ – $c(V) = (c_{ij})$. В случае, когда $V = \{v_i, v_j, v_k\}$, $c(V) = (c_{ij}) * (c_{ik}) + (c_{ij}) * (c_{jk}) + (c_{ik}) * (c_{jk})$. Вообще, если $|V| = k \geq 1$, то число максимальных деревьев в множестве $\max(V)$ равно k^{k-2} (*формула Кэли*).

Перейдем теперь к построению элементов $w(V) \in C_k(G)$, из которых при помощи перетасовочного произведения будет сконструирован конечный базис (над $\mathbb{Z}$) некоторого подкомплекса $K(G) \subset C(G)$. По определению считаем $w(\emptyset) = () \in C_0(G)$. При $|V| \geq 1$ положим

$$w(V) = \sum_{T \in \max(V)} (-1)^{\varepsilon(T)} (x(V)u(T); c_1(T) * \dots * c_{k-1}(T)),$$

где $x(V) = x_{s_k} \dots x_{s_1}$ – инверсное произведение образующих, соответствующих упорядоченному подмножеству $V = \{v_{s_1}, \dots, v_{s_k}\}$, а $u(T)$ – коммутаторная метка дерева T , определенная в п. 1.4. Например,

$$w(v_i) = (x_i), \quad w(\{v_i, v_j\}) = (x_j x_i, c_{ij}),$$

$$w(\{v_i, v_j, v_k\}) = (x_k x_j x_i; c_{ij} * c_{jk}) + (x_k x_j x_i c_{jk}; c_{ij} * c_{ik}) + (x_k x_j x_i c_{ij}; c_{ik} * c_{jk}).$$

Основным свойством элементов $w(V)$ является то, что они удовлетворяют следующему “дифференциальному” уравнению:

$$dw(V) = c(V) + \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} (-1)^{\varepsilon(V_1, V_2)} [w(V_1), w(V_2)], \quad (3.1)$$

где сумма берется по всем разбиениям $V = V_1 \sqcup V_2$ на два непустых подмножества, а $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор, определенный в п. 2.2. Доказательство этого свойства мы отложим до п. 3.4.

3.3. Аддитивный базис комплекса $K(G)$. Для некоторого множества $V \subseteq \{v_1, \dots, v_r\}$ рассмотрим элемент

$$X(V) = (-1)^{|V|} \sum_{V=V_1 \sqcup \dots \sqcup V_h} (-1)^{h+\varepsilon(V_1, \dots, V_h)} w(V_1) * \dots * w(V_h), \quad (3.2)$$

где сумма берется по всем разбиениям множества V на непересекающиеся подмножества $V_1, \dots, V_h$. Порядок $V_1, \dots, V_h$ в разбиении может быть произвольным, но перетасовочное произведение должно быть согласовано с этим порядком. При перестановке местами V_i и V_j четность разбиения меняется на $|V_i||V_j| \pmod{2}$, перестановка множителей $w(V_i)$ и $w(V_j)$ меняет четность на ту же величину, так что само слагаемое оказывается не зависящим от порядка подмножеств в разбиении. Отметим, что если $|V| = k$, то число слагаемых в сумме равно числу Белла $B(k)$. В частности, $B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5, \dots$

ЛЕММА 3.2. Для элементов $X(V) \in C_{|V|}(G)$ выполнено следующее равенство:

$$dX(V) = \sum_{P \subseteq V} (-1)^{\varepsilon(P, V \setminus P) + |P| - 1} c(P) * X(V \setminus P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для дифференцирования $X(V)$ используем формулу (2.2) и равенство (3.1). Получим, что $dX(V) = S_1 + S_2 + S_3$, где первое слагаемое равно

$$\sum_{V=V_1 \sqcup \dots \sqcup V_h} (-1)^{|V|+h+\varepsilon(V_1, \dots, V_h)} \sum_{p=1}^h (-1)^{\sigma_p} w(V_1) * \dots * c(V_p) * \dots * w(V_h),$$

$\sigma_p = |V_1| + \dots + |V_{p-1}|$, второе –

$$\sum_{V=V_1 \sqcup \dots \sqcup V_h} \sum_{p=1}^h \sum_{V_p=V'_p \sqcup V''_p} (-1)^f w(V_1) * \dots * [w(V'_p), w(V''_p)] * \dots * w(V_h),$$

$f = |V| + h + \varepsilon(V_1, \dots, V_h) + \sigma_p + \varepsilon(V'_p, V''_p)$, и наконец, третье –

$$\sum_{V=V_1 \sqcup \dots \sqcup V_h} \sum_{1 \leq t < q \leq h} (-1)^m [w(V_t), w(V_q)] * w(V_1) \dots \widehat{w(V_t)} \dots \widehat{w(V_q)} \dots w(V_h),$$

$m = |V| + h + \varepsilon(V_1, \dots, V_h) + \sigma_t |V_t| + \sigma_q |V_q| + |V_t| |V_q|$.

Покажем сначала, что $S_2 + S_3 = 0$ (фактически уравнение (3.1) как раз и обеспечивает это равенство). Для этого во второй сумме рассмотрим слагаемое

$$(-1)^f w(V_1) * \dots * [w(V'_p), w(V''_p)] * \dots * w(V_h).$$

В сумме S_3 ему соответствует слагаемое

$$(-1)^m [w(V'_p), w(V''_p)] * w(V_1) \dots \widehat{w(V'_p)} \dots \widehat{w(V''_p)} \dots w(V_h)$$

из разбиения $\bar{V} = V_1 \sqcup \dots \sqcup V'_p \sqcup V''_p \sqcup \dots \sqcup V_h$. При этом

$$\begin{aligned} m &= |V| + h + 1 + \varepsilon(V_1, \dots, V'_p, V''_p, \dots, V_h) + |V'_p| \sigma_p + |V''_p| (\sigma_p + |V'_p|) + |V'_p| |V''_p| \\ &\equiv |V| + h + 1 + \varepsilon(V_1, \dots, V_p, \dots, V_h) + \varepsilon(V'_p, V''_p) + (|V'_p| + |V''_p|) \sigma_p \\ &\equiv 1 + f + \sigma_p (|V_p| - 1) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, все слагаемые в S_2 и S_3 попарно сокращаются, т.е. $dX(V) = S_1$. Для получения окончательной формулы рассмотрим все разбиения, которые содержат некоторое непустое фиксированное подмножество $P \subseteq V$. Можно считать, что $P = V_1$. Тогда

$$S_1 = \sum_{P \subseteq V} \sum_{V \setminus P = V_2 \sqcup \dots \sqcup V_h} (-1)^l c(P) * w(V_2) * \dots * w(V_h),$$

где $l = |V| + h + 1 + \varepsilon(P, V_2, \dots, V_h)$. Внутренняя сумма дает

$$(-1)^{|P| - 1 + \varepsilon(P, V \setminus P)} c(P) * X(V \setminus P),$$

поскольку

$$\begin{aligned} &|V| + h + 1 + \varepsilon(P, V_2, \dots, V_h) \\ &\equiv |P| - 1 + \varepsilon(P, V \setminus P) + \varepsilon(V_2, \dots, V_h) + h - 1 + |V| - |P| \pmod{2}. \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Пусть $\Delta^1 = \Delta^1(r)$ – упорядоченное множество ориентированных ребер симплекса Δ , т.е. $\Delta^1 = \{e_{ij}, 1 \leq i < j \leq r\}$. Если $E = \{e_{i_1 j_1}, \dots, e_{i_q j_q}\}$, то положим

$$C(E) = (c_{i_1 j_1}) * \dots * (c_{i_q j_q}).$$

В частности, $C(\emptyset) = ()$. Для всевозможных $E \subseteq \Delta^1$, $V \subseteq \Delta^0$ рассмотрим элементы $C(E) * X(V)$. По следствию 2.2 и лемме 3.2

$$d(C(E) * X(V)) = (-1)^{|E|} C(E) * dX(V)$$

можно представить в виде линейной комбинации определенных элементов $C(E') * X(V')$, т.е. линейные комбинации элементов вида $C(E) * X(V)$ составляют некоторый *подкомплекс* $K(G)$ в групповом комплексе $C(G)$.

Покажем, что элементы $C(E) * X(V)$ образуют базис в $K(G)$. Запишем $C(E) * X(V)$ в виде

$$(c_{i_1 j_1}) * \dots * (c_{i_q j_q}) * (x_{s_1}) * \dots * (x_{s_k}) + \dots, \quad (3.3)$$

где многоточие означает слагаемые, отвечающие разбиениям V на подмножества, среди которых хотя бы одно имеет не менее двух элементов. Очевидно, что первые слагаемые в сумме (3.3) линейно независимы для разных пар (E, V) , и следовательно, $C(E) * X(V)$ тоже линейно независимы.

Пусть $\mathcal{G} = G(r)$ – свободное нильпотентное кольцо Ли класса 2 с r свободными порождающими:

$$\mathcal{G} = \langle \bar{x}_i, \bar{c}_{ij}, 1 \leq i < j \leq r \mid \bar{c}_{ij} = [\bar{x}_i, \bar{x}_j], [\bar{c}_{ij}, \bar{x}_k] = [\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{kl}] = 0 \rangle.$$

Для $\bar{x}_i$ и $\bar{c}_{ij}$ можно использовать ту же самую геометрическую интерпретацию, что и в групповом случае. Рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda(\mathcal{G})$. Пусть $E = \{e_{i_1 j_1}, \dots, e_{i_q j_q}\} \subseteq \Delta^1$, $V = \{v_{s_1}, \dots, v_{s_k}\} \subseteq \Delta^0$ – те же подмножества, что и выше. Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{X}(V) &= \bar{x}_{s_1} \wedge \dots \wedge \bar{x}_{s_k} \in \Lambda^k(G), \quad \bar{C}(E) = \bar{c}_{i_1 j_1} \wedge \dots \wedge \bar{c}_{i_q j_q} \in \Lambda^q(G), \\ \bar{X}(\emptyset) &= \bar{C}(\emptyset) = 1 \in \Lambda^0(G) = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.3. *Как градуированный $\mathbb{Z}$ -модуль $K(G)$ изоморфен внешней алгебре $\Lambda(\mathcal{G})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Базис алгебры $\Lambda(\mathcal{G})$ образуют элементы вида $\overline{C}(E) \wedge \overline{X}(V)$. Поэтому изоморфизм $f: K(G) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\mathcal{G})$ можно задать соответствием

$$C(E) * X(V) \rightarrow (-1)^{|E|} \overline{C}(E) \wedge \overline{X}(V).$$

Отождествив при помощи изоморфизма f градуированные $\mathbb{Z}$ -модули $K(G)$ и $\Lambda(\mathcal{G})$, мы получим комплекс $(\Lambda(\mathcal{G}), d)$ (дифференциал, по-прежнему, обозначается той же буквой). Из равенства

$$d(C(E)) * X(V) = (-1)^{|E|} C(E) * dX(V)$$

и леммы 3.2. можно заключить, что дифференциал d определяется следующими свойствами:

- 1) $d\overline{C}(E) \wedge \overline{X}(V) = (-1)^{|E|} \overline{C}(E) \wedge d\overline{X}(V)$;
- 2) $d\overline{X}(V) = \sum_{P \subseteq V} (-1)^{\varepsilon(P, V \setminus P)} \overline{c}(P) \wedge \overline{X}(V \setminus P)$, где

$$\overline{c}(P) = \sum_{T \in \max(P)} (-1)^{\varepsilon(T)} \overline{c}_1(T) \wedge \cdots \wedge \overline{c}_{k-1}(T), \quad k = |P|.$$

В частности, дифференциал d можно представить в виде суммы $d_2 + d_3 + \cdots + d_r$, в которой

$$d_k \overline{X}(V) = \sum_{P \subseteq V, |P|=k} (-1)^{\varepsilon(P, V \setminus P)} \overline{c}(P) \wedge \overline{X}(V \setminus P)$$

(d_k удовлетворяет и первому свойству дифференциала d .)

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что выполнены следующие соотношения между d_k : $d_k^2 = 0$ и $d_i d_j + d_j d_i = 0$ для всех i, j, k от 2 до r .

3.4. Коммутаторные метки деревьев.

3.4.1. Покажем, что элементы $w(V)$ удовлетворяют уравнению (3.1). Подставим выражения для $w(V)$, $w(V_1)$ и $w(V_2)$ в (3.1) и затем применим леммы 2.2, 2.3. Получим уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_T \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^{\varepsilon(T)+p-1} (x(V)u(T); c_1(T) * \cdots * \widehat{c_p(T)} * \cdots * c_{k-1}(T)) \\ & - \sum_T \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^{\varepsilon(T)+p-1} (x(V)u(T)c_p(T); c_1(T) * \cdots * \widehat{c_p(T)} * \cdots * c_{k-1}(T)) \\ & = \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} \sum_{T_1, T_2} (-1)^\mu (x(V_1)x(V_2)u(T_1)u(T_2); c_1(T_1) * \cdots * c_1(T_2) * \cdots) \\ & - \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} \sum_{T_1, T_2} (-1)^\mu (x(V_2)x(V_1)u(T_1)u(T_2); c_1(T_1) * \cdots * c_1(T_2) * \cdots). \quad (3.4) \end{aligned}$$

В этом равенстве $\mu = \varepsilon(T_1) + \varepsilon(T_2) + \varepsilon(V_1, V_2) + |V_1|$, T пробегает множество $\max(V)$, T_1 и $T_2 - \max(V_1)$ и $\max(V_2)$, соответственно.

Чтобы упростить равенство (3.4), рассмотрим более подробно левую и правую части. Двойную сумму слева можно интерпретировать следующим образом: мы берем дерево T и последовательно удаляем из него по одному ребру. При удалении одного ребра дерево T распадается на два поддеревья T_1 и T_2 , вершины которых образуют разбиение $V = V_1 \sqcup V_2$. Именно эти два поддерева и фигурируют в правой части. Зафиксируем разбиение $V = V_1 \sqcup V_2$ (для определенности будем считать, что наибольший элемент из V лежит в V_2), и пусть $T_1 \in \max(V_1)$, $T_2 \in \max(V_2)$. Другими словами, фиксирован элемент суммы в правой части (3.4). Какие деревья T из левой части дают при удалении ребра дерева T_1 и T_2 ? Очевидно те, которые получаются из T_1 и T_2 добавлением ребра, одна вершина которого лежит в T_1 , другая – в T_2 . Обозначим множество таких ребер $\mathcal{E}(T_1, T_2)$. При этом $|\mathcal{E}(T_1, T_2)| = |V_1||V_2| = t$. Для нас будет важно, что $\mathcal{E}(T_1, T_2)$ состоит из ребер двух типов: выходящих из T_1 (их множество обозначим $\mathcal{E}_+(T_1, T_2)$) и выходящих из T_2 (соответственно, $\mathcal{E}_-(T_1, T_2)$), т.е. $\mathcal{E}(T_1, T_2) = \mathcal{E}_+(T_1, T_2) \sqcup \mathcal{E}_-(T_1, T_2)$. Обозначим $T_1 \#_e T_2$ дерево T , которое получается добавлением к T_1, T_2 ребра e . Предположим, что для любой пары T_1, T_2 выполняется равенство (μ – то же, что и в (3.4))

$$\begin{aligned} & \sum_{T=T_1 \#_e T_2} (-1)^{\varepsilon(T)} \left((x(V)u(T); c_2(T) * \dots * c_{k-1}(T)) \right. \\ & \quad \left. - (x(V)u(T)c(e); c_2(T) * \dots * c_{k-1}(T)) \right) \\ &= (-1)^\mu \left((x(V_2)x(V_1)u(T_1)u(T_2); c_1(T_1) * \dots * c_1(T_2) * \dots) \right. \\ & \quad \left. - (x(V_2)x(V_1)u(T_1)u(T_2); c_1(T_1) * \dots * c_1(T_2) * \dots) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В левой части (3.5) суммирование производится по всем ребрам $e \in \mathcal{E}(T_1, T_2)$. При этом мы считаем, что $c_1(T) = c(e)$, т.е. ребро e удаляется первым. Ясно, что при суммировании равенств типа (3.5) по всем парам T_1, T_2 получается в точности равенство (3.4). Поэтому достаточно доказать справедливость (3.5) для произвольной пары деревьев T_1, T_2 . Сделаем еще одно упрощение. В (3.5) все перестановочные произведения коммутаторов одинаковы с точностью до перестановки множителей. Мы будем считать, что в каждом слагаемом из левой части порядок коммутаторов такой же, как в правой. В соответствии с этим подсчитывается и четность $\varepsilon(T)$. Кроме того, рассмотрим инверсные произведения. Пользуясь соотношениями в группе G , легко получить, что

$$x(V_1)x(V_2) = x(V) \prod_{e \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)} c(e), \quad x(V_2)x(V_1) = x(V) \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e).$$

Если показать, что в групповом кольце $\mathbb{Z}G$

$$\begin{aligned} & \sum_{T=T_1 \#_e T_2} (-1)^{\varepsilon(T) + \varepsilon(T_1) + \varepsilon(T_2) + \varepsilon(V_1, V_2) + |V_1|} (u(T) - u(T)c(e)) \\ &= u(T_1)u(T_2) \prod_{e \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)} c(e) - u(T_1)u(T_2) \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e), \end{aligned} \quad (3.6)$$

причем в левой части происходит сокращение всех слагаемых, кроме двух, то равенство (3.5) будет установлено.

ЛЕММА 3.4. В левой части (3.6)

$$(-1)^{\varepsilon(T)+\varepsilon(T_1)+\varepsilon(T_2)+\varepsilon(V_1,V_2)+|V_1|} = \pm 1,$$

причем “−1” получается тогда и только тогда, когда $e \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $V = \{v_1, \dots, v_k\}$. Пусть $e = e_{ij}$, $i < j$. Если $V_1 = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$, $V_2 = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_q}\}$, $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$ (т.е. ребро e идет из T_1 в T_2), $a_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ (1 стоит на i -м месте), то по лемме 3.1

$$\det(a_i, e_{ij}, e_1(T_1), \dots, e_1(T_2), \dots) = (-1)^{\varepsilon(T)}.$$

С другой стороны, $(-1)^{\varepsilon(T)} = \det(a_i, a_i + e_{ij}, e_1(T_1), \dots, e_1(T_2), \dots)$. Используя теорему Лапласа о разложении определителя по выделенным столбцам с номерами $i_1, \dots, i_p$ (в этих столбцах имеется только один ненулевой минор) получим, что

$$(-1)^{\varepsilon(T)} = (-1)^{\varepsilon(T_1)+\varepsilon(T_2)+\varepsilon(V_1,V_2)+p-1}, \quad \text{если } v_i \in V_1, \quad v_j \in V_2.$$

Второй случай разбирается аналогично.

Лемма 3.4 позволяет переписать уравнение (3.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}(T_1, T_2)} (-1)^{\tilde{e}} (u(T_1 \#_e T_2) - u(T_1 \#_e T_2) c(e)) \\ = u(T_1) u(T_2) \prod_{e \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)} c(e) - u(T_1) u(T_2) \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e), \end{aligned}$$

где $\tilde{e} = 1$, если $e \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)$, и $\tilde{e} = 0$, если $e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)$.

Отметим, что в силу определения $u(T)$ любую метку $u(T_1 \#_e T_2)$ можно представить как произведение $u(T_1) u(T_2) y(e)$, где $y(e)$ состоит из произведения коммутаторов, соответствующих только ребрам из $\mathcal{E}(T_1, T_2)$, т.е. $u(T_1 \#_e T_2)$ всегда “делится” на $u(T_1) u(T_2)$. Сократив последнее равенство на $u(T_1) u(T_2)$, получим

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(T_1, T_2)} (-1)^{\tilde{e}} (y(e) - y(e) c(e)) = \prod_{e \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)} c(e) - \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e). \quad (3.7)$$

3.4.2. Упорядочение множества $\mathcal{E}(T_1, T_2)$. Пусть $e, f \in \mathcal{E}(T_1, T_2)$ и $Z = Z(e, f)$ – цикл, который получается присоединением к T_1, T_2 ребер e, f . Скажем, что $e \prec f$, если при положительном обходе Z после прохождения ребра e мы оказываемся в дереве T_2 . Если это не так, то будем говорить, что $e \succ f$.

Покажем, что введенное отношение действительно является отношением порядка на множестве $\mathcal{E}(T_1, T_2)$, т.е. если $e \prec f$, $f \prec h$, то и $e \prec h$. Предположим, что $h \prec e$. Рассмотрим объединение всех ребер из $Z(e, f)$, $Z(f, h)$, $Z(h, e)$. Это – некоторый граф $\Phi = \Phi(e, f, h)$, все вершины которого, кроме двух степени 3, имеют степень 2, причем граф Φ остается связным при удалении произвольного ребра. Любое ребро b графа Φ входит ровно в два из вышеуказанных трех циклов. Если $e \prec f$, $f \prec h$, $h \prec e$, то при последовательном положительном обходе всех трех циклов ребро b будет проходиться ровно два раза: один раз в соответствии с ориентацией ребра b , другой раз – в противоположном направлении. Пусть b – старшее

ребро в графе Φ (относительно порядка всех ребер симплекса Δ). Очевидно, что b – старшее ребро в обоих циклах, которым оно принадлежит. Поскольку положительный обход цикла всегда происходит в направлении старшего ребра цикла, то мы получаем противоречие со сделанным предположением, т.е. $e \prec h$.

Таким образом, можно упорядочить все ребра из $\mathcal{E}(T_1, T_2)$. Выпишем их в порядке возрастания: $e_1 \prec \dots \prec e_t$. Обозначим

$$y_-(e) = \prod_{\substack{f \succ e \\ f \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)}} c(f),$$

$$y_+(e) = \prod_{\substack{f \prec e \\ f \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)}} c(f).$$

В левой части равенства (3.7) $y(e) = y_-(e)y_+(e)$. Действительно, если ребро e фиксировано (скажем, $e \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)$), то $c(f)$ входит в метку $y(e)$ в двух случаях – а именно, если $f \succ e$, $f \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)$ или $f \prec e$, $f \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)$ (в этих случаях ребро f положительно ориентировано относительно возникающего цикла $Z = Z(e, f)$). Полученное разложение $y(e)$ будем называть *полярным*.

Доказательство того факта, что метки $y(e)$ удовлетворяют (3.7), вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3.5. *Пусть*

$$S(p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{\tilde{e}_i} (y(e_i) - y(e_i)c(e_i)), \quad p = 1, \dots, t.$$

Тогда если $e_p \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)$, то

$$S(p) = - \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e) + y(e_p)c(e_p),$$

а если $e_p \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)$, то

$$S(p) = - \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e) + y(e_p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по p . При $p = 1$ утверждение непосредственно следует из равенства $y(e_1) = y_-(e_1)$. Пусть уже доказано, что

$$S(p) = - \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e) + y(e_p)c(e_p)$$

(для определенности рассмотрим случай $e_p \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)$, оставшийся случай рассматривается аналогично). Если $e_{p+1} \in \mathcal{E}_+(T_1, T_2)$, то

$$S(p+1) = - \prod_{e \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)} c(e) + y(e_p)c(e_p) - y(e_{p+1}) + y(e_{p+1})c(e_{p+1}).$$

Из полярного разложения $y(e)$ легко вытекает, что $y(e_p)c(e_p) = y(e_{p+1})$, т.е. шаг индукции сделан. Аналогично исследуется случай, когда $e_{p+1} \in \mathcal{E}_-(T_1, T_2)$. Лемма доказана.

При $p = t$ во всех случаях получается равенство (3.7), т.е. существование подкомплекса $K(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метки $u(T)$ можно определить не единственным образом (например, если задать положительную ориентацию циклов в направлении *младшего* ребра), из чего следует существование нескольких подкомплексов вида $K(G)$. Однако, все они будут изоморфны.

§ 4. Конечная резольвента

В этом параграфе будет завершено доказательство теоремы 1. Конструкции предыдущего параграфа будут использованы нами для построения конечной резольвенты тривиального модуля $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}G$ для свободной нильпотентной группы G класса 2.

4.1. Сначала рассмотрим произвольную группу G . Стандартная свободная резольвента тривиального модуля $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}G$ — это комплекс левых $\mathbb{Z}G$ -модулей:

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbb{Z}G \otimes C_n(G) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}G \otimes C_{n-1}(G) \xrightarrow{d} \cdots,$$

где дифференциал d является G -гомоморфизмом и действует на базисных элементах $1 \otimes (g_1, \dots, g_n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d(1 \otimes (g_1, \dots, g_n)) &= g_1 \otimes (g_2, \dots, g_n) \\ &+ \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p 1 \otimes (g_1, \dots, g_p g_{p+1}, \dots, g_n) + (-1)^n 1 \otimes (g_1, \dots, g_{n-1}). \end{aligned}$$

Можно также записать, что

$$d(1 \otimes (g_1, \dots, g_n)) = \delta(1 \otimes (g_1, \dots, g_n)) + 1 \otimes d(g_1, \dots, g_n),$$

где $\delta(1 \otimes (g_1, \dots, g_n)) = (g_1 - 1) \otimes (g_2, \dots, g_n)$, а в правой части d — это дифференциал в стандартном комплексе $C(G)$.

Пусть теперь $G = G(r)$ — свободная нильпотентная группа класса 2. Покажем, что градуированный $\mathbb{Z}G$ -подмодуль $\mathbb{Z}G \otimes K(G) \subset \mathbb{Z}G \otimes C(G)$ является *подкомплексом относительно d* . Предварительно докажем следующие леммы.

ЛЕММА 4.1. Пусть $u_p = (u_{p1}, \dots, u_{pn_p}) \in C_{n_p}(G)$, $p = 1, \dots, h$. Тогда

$$\delta(1 \otimes u_1 * \cdots * u_h) = \sum_{p=1}^h (-1)^{\sigma_p} (u_{p1} - 1) \otimes u_1 * \cdots * R_1(u_p) * \cdots * u_h,$$

где $R_1(u_p) = (u_{p2}, \dots, u_{pn_p})$, $\sigma_p = \tilde{u}_1 + \cdots + \tilde{u}_{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению перетасовочного произведения первыми элементами любой строки, входящей в слагаемое в развернутое выражение для $u_1 * \cdots * u_h$, могут быть только $u_{11}, \dots, u_{h1}$. Сумма всех слагаемых, у которых на первом месте стоит u_{p1} , равна, как показывает несложный подсчет,

$$U_p = (-1)^{\sigma_p} (u_{p1}) \circ (u_1 * \cdots * R_1(u_p) * \cdots * u_h).$$

Применяя δ к $1 \otimes U_p$ и затем суммируя по всем p , получим требуемую формулу.

ЛЕММА 4.2. Пусть $E = \{e_1, \dots, e_q\} \subseteq \Delta^1$, $V \subseteq \Delta^0$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta(1 \otimes C(E) * X(V)) &= \sum_{i=1}^q (-1)^{i-1} (c(e_i) - 1) \otimes C(E \setminus e_i) * X(V) \\ &\quad + \sum_{P \subseteq V} \sum_{T \in \max(V)} (-1)^\mu (x(P)u(T) - 1) \otimes C(E) * C(T) * X(V \setminus P), \end{aligned}$$

$$\mu = |E| + \varepsilon(P, V \setminus P) + |P| - 1 + \varepsilon(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$1 \otimes C(E) * X(V) = \sum_{V=V_1 \sqcup \dots \sqcup V_h} (-1)^\lambda 1 \otimes (c(e_1)) * \dots * w(V_1) * \dots * w(V_h),$$

$\lambda = |V| + h + \varepsilon(V_1, \dots, V_h)$, можно применить лемму 4.1. Сумма тех слагаемых из $\delta(1 \otimes C(E) * X(V))$, которая получается при действии δ на коммутаторную часть $1 \otimes C(E) * X(V)$, равна

$$\sum_{i=1}^q (-1)^{i-1} (c(e_i) - 1) \otimes C(E \setminus e_i) * X(V).$$

Чтобы подсчитать оставшуюся сумму, воспользуемся приемом, который уже применялся при доказательстве леммы 3.2. Пусть $P \subseteq V$ фиксировано. Считая, что $P = V_1$, $|P| = k$, рассмотрим те слагаемые, которые получаются при применении оператора R_1 из леммы 4.1 к каждому слагаемому в

$$\sum_{T \in \max(P)} (-1)^{\varepsilon(T)} (x(P)u(T); c_1(T) * \dots * c_{k-1}(T)) = w(P).$$

В результате эта часть суммы оказывается равной

$$\sum_{T \in \max(P)} (-1)^{|E| + \varepsilon(P, V \setminus P) + |P| - 1 + \varepsilon(T)} (x(P)u(T) - 1) \otimes C(E) * C(T) * X(V \setminus P).$$

Суммирование по всем $P \subseteq V$ дает окончательный ответ.

Из лемм 3.2 и 4.2 непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Градуированный подмодуль $\mathbb{Z}G \otimes K(G)$ является подкомплексом в $\mathbb{Z}G \otimes C(G)$, причем ограничение дифференциала d на $\mathbb{Z}G \otimes K(G)$ равно сумме $d_0 + d_1 + d_{\geq 2}$, где действие каждого слагаемого определяется следующим образом ($E = \{e_1, \dots, e_q\}$, $V = \{v_{s_1}, \dots, v_{s_p}\}$):

- 1) $d_0(1 \otimes C(E) * X(V)) = \sum_{i=1}^q (-1)^{i-1} (c(e_i) - 1) \otimes C(E \setminus e_i) * X(V)$;
 - 2) $d_1(1 \otimes C(E) * X(V)) = \sum_{j=1}^p (-1)^{|E| + j - 1} (x(v_j) - 1) \otimes C(E) * X(V \setminus v_j)$;
 - 3) $d_{\geq 2}(1 \otimes C(E) * X(V)) = \sum_{\substack{P \subseteq V, |P| \geq 2 \\ T \in \max(P)}} (-1)^\mu x(P)u(T) \otimes C(E) * C(T) * X(V \setminus P),$
- $$\mu = |E| + \varepsilon(P, V \setminus P) + |P| - 1 + \varepsilon(T).$$

4.2. Положим $R_n(G) = \mathbb{Z}G \otimes K_n(G)$. Это – свободный $\mathbb{Z}G$ -модуль с базисом, состоящим из элементов вида $1 \otimes C(E) * X(V)$, $|E| + |V| = n$. Покажем, что последовательность

$$\dots \xrightarrow{d} R_n(G) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} R_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

является точной (ε – аугментация, т.е. $\varepsilon(g \otimes ()) = 1 \ \forall g \in G$).

Установим сначала точность в нулевом члене (очевидно, аугментация является эпиморфизмом). Для любого $g \in G$ справедливо следующее:

$$d(g \otimes (x_i)) = g(x_i - 1) \otimes (), \quad d(g \otimes (c_{ij})) = g(c_{ij} - 1) \otimes ().$$

Отсюда следует, что $\text{Im}\{d: R_1(G) \rightarrow R_0(G)\} = \Delta \otimes () = \text{Ker}\{\varepsilon\}$ (здесь Δ обозначает фундаментальный идеал $\mathbb{Z}G$).

Чтобы доказать точность последовательности (4.1) при $n > 0$, рассмотрим следующую конечную возрастающую фильтрацию на $R(G) = \mathbb{Z}G \otimes K(G)$. Положим

$$F_p R_n(G) = \bigoplus_{\substack{|E|+|V|=n \\ |V| \leq p}} \mathbb{Z}G \otimes C(E) * X(V).$$

Из предложения 3.1 следует, что дифференциал d сохраняет эту фильтрацию. Пусть $\{\mathcal{E}_{pq}^t, d_{pq}^t\}$ – спектральная последовательность, ассоциированная с данной фильтрацией и сходящаяся к $H_{p+q}R(G)$.

Шаг 1. Рассмотрим нулевой член этой спектральной последовательности:

$$\mathcal{E}_{pq}^0 = F_p R_{p+q}(G) / F_{p-1} R_{p+q}(G) \cong \bigoplus_{|E|=q, |V|=p} \mathbb{Z}G \otimes C(E) * X(V),$$

а $d_{pq}^0: \mathcal{E}_{pq}^0 \rightarrow \mathcal{E}_{p,q-1}^0$ – это G -гомоморфизм такой, что

$$d_{pq}^0(1 \otimes C(E) * X(V)) = \sum_{i=1}^q (-1)^{i-1} (c(e_i) - 1) \otimes C(E \setminus e_i) * X(V).$$

Для фиксированного V положим

$$\mathcal{E}_q^0(V) = \bigoplus_{|E|=q} \mathbb{Z}G \otimes C(E) * X(V).$$

Ясно, что $\mathcal{E}^0$ является прямой суммой по всем V “вертикальных” комплексов $\mathcal{E}^0(V)$:

$$\dots \xrightarrow{d_{p,q+1}^0} \mathcal{E}_q^0(V) \xrightarrow{d_{pq}^0} \mathcal{E}_{q-1}^0(V) \xrightarrow{d_{p,q-1}^0} \dots, \quad p = |V|,$$

каждый из которых изоморфен $\mathcal{E}^0(\emptyset)$. Исследуем подробно $\mathcal{E}^0(\emptyset)$. Пусть $K = Z(G)$ – центр группы G и $\overline{G} = G/K$. Подгруппа K является свободной абелевой группой с базисом $\{c(e), e \in \Delta^1\}$. Хорошо известно, что комплекс свободных левых $\mathbb{Z}K$ -модулей

$$\dots \xrightarrow{d_{q+1}^{(K)}} R_q(K) \xrightarrow{d_q^{(K)}} R_{q-1}(K) \xrightarrow{d_{q-1}^{(K)}} \dots, \quad R_q(K) = \bigoplus_{|E|=q} \mathbb{Z}K \otimes C(E),$$

есть свободная резольвента $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}K$ ($d_q(K)$ — это K -гомоморфизм, действующий на элементах $1 \otimes C(E) \in R_q(K)$ так же, как и d_{0q}^0 на элементах $1 \otimes C(E) \in \mathcal{E}_q(\emptyset)$). Нетрудно видеть, что $\mathcal{E}^0(\emptyset) \cong \mathbb{Z}G \otimes_K R(K)$ (изоморфизм комплексов левых $\mathbb{Z}G$ -модулей), т.е. $\mathcal{E}^0(\emptyset)$ получается из $R(K)$ индуцированием. Так как $\mathbb{Z}G$ — свободный правый $\mathbb{Z}K$ -модуль, то комплекс $\mathcal{E}^0(\emptyset)$ ацикличен в положительных размерностях. Отсюда вытекает, что при $q > 0$ $\mathcal{E}_{pq}^1 \cong \text{Ker}\{d_{pq}^0\} / \text{Im}\{d_{p,q+1}^0\} = 0$. При $q = 0$

$$\mathcal{E}_{p0}^1 \cong \bigoplus_{|V|=p} \text{Coker}\{d_{p1}^0: \mathcal{E}_1^0(V) \rightarrow \mathcal{E}_0^0(V)\}.$$

Поскольку

$$d_{p1}^0(w \otimes c(e) * X(V)) = w(c(e) - 1) \otimes X(V), \quad w \in \mathbb{Z}G,$$

то коядро этого гомоморфизма изоморфно $\mathbb{Z}\overline{G} \otimes X(V)$ (ядро естественного эпиморфизма $\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}\overline{G}$ порождается как левый идеал элементами $c(e) - 1$, $e \in \Delta^1$). В результате получаем, что $\mathcal{E}_{p0}^1 \cong \bigoplus_{|V|=p} \mathbb{Z}\overline{G} \otimes X(V)$, причем $\mathcal{E}_{p0}^1$ можно считать левым $\mathbb{Z}\overline{G}$ -модулем в силу тривиальности действия K .

Шаг 2. Покажем, что $(\mathcal{E}_{*,0}^1, d_{*,0}^1)$ является свободной резольвентой $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}\overline{G}$. Для этого вычислим $d_{p0}^1: \mathcal{E}_{p0}^1 \rightarrow \mathcal{E}_{p-1,0}^1$. Исходный дифференциал d , индуцирующий d_{pq}^1 , представляется в виде суммы $d_0 + d_1 + d_{\geq 2}$, где $d_{\geq 2}$ уменьшает фильтрационную степень не менее чем на 2 единицы. Из этого можно заключить, что

$$d_{p0}^1(1 \otimes X(V)) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} (\overline{x}(v_j) - 1) \otimes X(V \setminus v_j)$$

(здесь $\overline{x}(v_j)$ — это образ $x(v_j)$ при эпиморфизме $G \rightarrow \overline{G}$). Поскольку $\overline{G}$ — свободная абелева группа с порождающими $\overline{x}_j$, $j \in \Delta^0$, а d_{p0}^1 — $\overline{G}$ -гомоморфизм по модулю $\text{Im}\{d_{p1}^0\}$, то комплекс $(\mathcal{E}_{*,0}^1, d_{*,0}^1)$ действительно оказывается свободной резольвентой $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}\overline{G}$. Таким образом, спектральная последовательность $\{\mathcal{E}_{pq}^t, d_{pq}^t\}$ вырождается на втором члене и $\mathcal{E}_{pq}^2 = 0$, если $p + q > 0$. Отсюда следует ацикличность комплекса (4.1) в положительных размерностях.

Используя явный вид изоморфизма комплексов $(K(G), d) \cong (\Lambda(\mathcal{G}), d)$ из леммы 3.3, мы получаем изоморфизм резольвент $(R(G), d) \cong (\mathcal{R}(G), d)$ (резольвента $\mathcal{R}(G)$ была определена в п. 1.1). Таким образом, теорема 1 нами полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Группы гомологий H_*G изоморфны соответствующим группам гомологий комплекса $(\Lambda(\mathcal{G}), d)$.

§5. Изоморфизм H_nG и $H_n\mathcal{G}$

В этом параграфе будет дано доказательство теорем 2 и 3.

5.1. Пусть $G = G(r)$ — свободная нильпотентная группа класса 2 с r свободными порождающими, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(r)$ — соответствующее кольцо Ли. В следствии 4.1 был установлен изоморфизм целочисленных групп гомологий H_nG и n -х групп гомологий комплекса $(\Lambda(\mathcal{G}), d)$, определенного в конце п. 3.3. Для дальнейшего изложения

группа G (вернее, ее копредставление) больше не понадобится в явном виде, поэтому мы упростим обозначения, полагая, что $\mathcal{G}$ задается копредставлением

$$\mathcal{G} = \langle x_i, c_{ij}, 1 \leq i < j \leq r \mid c_{ij} = [x_i, x_j], [c_{ij}, x_k] = [c_{ij}, c_{kl}] = 0 \rangle$$

(черту больше не пишем). Стандартный способ определения группгомологий $H_n \mathcal{G}$ с коэффициентами в тривиальном $\mathcal{G}$ -модуле $\mathbb{Z}$ заключается в следующем. Рассматривается комплекс $(\Lambda(\mathcal{G}), \partial)$:

$$\dots \xrightarrow{\partial} \Lambda^n(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \Lambda^0(\mathcal{G}) \longrightarrow 0,$$

в котором

$$\partial(z_1 \wedge \dots \wedge z_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} [z_i, z_j] \wedge z_1 \wedge \dots \wedge \widehat{z_i} \wedge \dots \wedge \widehat{z_j} \wedge \dots \wedge z_n.$$

Как уже отмечалось ранее, базис в $\Lambda^n(\mathcal{G})$ составляют элементы вида $C(E) \wedge X(V)$, где $E \subseteq \Delta^1$, $V \subseteq \Delta^0$, $|E| + |V| = n$. Действие ∂ на базисных элементах определяется, следовательно, двумя свойствами:

- 1) $\partial C(E) \wedge X(V) = (-1)^{|E|} C(E) \wedge \partial X(V)$;
- 2) $\partial X(V) = \sum_{L \subseteq V, |L|=2} (-1)^{\varepsilon(L, V \setminus L)} c(L) \wedge X(V \setminus L)$, т.е. $\partial = d_2$ в обозначениях п. 3.3, $\bar{d} = d_2 + d_3 + \dots + d_r$.

Целью этого параграфа является установление изоморфизма между комплексами $(\Lambda(\mathcal{G}), \partial)$ и $(\Lambda(\mathcal{G}), d)$. Достаточно указать автоморфизм $F: \Lambda(\mathcal{G}) \longrightarrow \Lambda(\mathcal{G})$ градуированного $\mathbb{Z}$ -модуля $\Lambda(\mathcal{G})$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & \Lambda^n(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\partial} & \Lambda^{n-1}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ & & \downarrow F & & \downarrow F & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^n(\mathcal{G}) & \xrightarrow{d} & \Lambda^{n-1}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

Отметим, что $\Lambda(\mathcal{G})$ является в действительности *биградуированной алгеброй*:

$$\Lambda(\mathcal{G}) = \bigoplus_{q,p \geq 0} \Lambda^{q,p}(\mathcal{G}),$$

где базис $\Lambda^{q,p}(\mathcal{G})$ составляют элементы $C(E) \wedge X(V)$, $|E| = q$, $|V| = p$. Очевидно, что дифференциал d_k из разложения $d = d_2 + \dots + d_r$ принадлежит группе $\text{Homgr}^{k-1, -k}(\Lambda(\mathcal{G}), \Lambda(\mathcal{G}))$.

Будем искать F в виде $F = 1 + f_1 + \dots + f_r$, где 1 означает тождественное отображение, а $f_k \in \text{Homgr}^{k, -k}(\Lambda(\mathcal{G}), \Lambda(\mathcal{G}))$, т.е. f_k при действии на любой базисный элемент $\Lambda(\mathcal{G})$ должен уменьшать число свободных порождающих на k и на столько же увеличивать число коммутаторов. Поскольку $(f_1 + \dots + f_r)^{r+1} = 0$, любое такое отображение F является *автоморфизмом* градуированного модуля $\Lambda(\mathcal{G})$.

Чтобы решить уравнение $dF = F\partial$, подставим в него выражения для d , ∂ и F . Получим

$$(d_2 + \dots + d_r)(1 + f_1 + \dots + f_r) = (1 + f_1 + \dots + f_r)d_2.$$

Другими словами, эндоморфизмы типа $(0, q, p)$ (типа $(1, q, p)$) являются четными (нечетными) и полностью определяются своими значениями на $\Lambda^{q,p}(\mathcal{G})$. В дальнейшем мы будем ссылаться на это свойство как на *принцип локализации*.

Связь между эндоморфизмами этих двух типов устанавливается в следующей лемме.

ЛЕММА 5.1. *Если f – эндоморфизм типа $(0, q, p)$, то $-Df = fd_2 - d_2f$ является эндоморфизмом типа $(1, q-1, p+2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $Df \in \text{Homgr}^{p+1, -(p+2)}(\Lambda(\mathcal{G}), \Lambda(\mathcal{G}))$. Если $s < q-1$ или $t < p+2$, то $(d_2f - fd_2)(\Lambda^{s,t}(\mathcal{G})) = 0$, что проверяется непосредственно. Покажем, что свойство 3) также выполнено.

С одной стороны,

$$\begin{aligned} d_2f(C(E) \wedge X(V)) \\ = \sum_{\substack{B \subseteq E \\ |B|=q}} \sum_{\substack{P \subseteq V \\ |P|=p}} \sum_{\substack{L \subseteq V \setminus P \\ |L|=2}} (-1)^{\mu_1} C(E \setminus B) \wedge c(L) \wedge f(C(B) \wedge X(P)) \wedge X(V \setminus P \setminus L), \end{aligned}$$

$$\mu_1 = \varepsilon(E \setminus B, B) + \varepsilon(P, V \setminus P) + \varepsilon(L, V \setminus P \setminus L) + |E| + q.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} fd_2(C(E) \wedge X(V)) \\ = \sum_{\substack{L \subseteq V \\ |L|=2}} (-1)^{|E|+\varepsilon(L, V \setminus L)} f(C(E) \wedge c(L) \wedge X(V \setminus L)) \\ = \sum_{\substack{B \subseteq E \\ |B|=q}} \sum_{\substack{L \subseteq V \\ |L|=2}} \sum_{\substack{P \subseteq V \setminus L \\ |P|=p}} (-1)^{\mu_2} C(E \setminus B) \wedge c(L) \wedge f(C(B) \wedge X(P)) \wedge X(V \setminus P \setminus L) \\ + \sum_{\substack{Q \subseteq E \\ |Q|=q-1}} \sum_{\substack{L \subseteq V \\ |L|=2}} \sum_{\substack{P \subseteq V \setminus L \\ |P|=p}} (-1)^{\lambda} C(E \setminus Q) \wedge f(C(Q) \wedge c(L) \wedge X(P)) \wedge X(V \setminus P \setminus L). \end{aligned}$$

В последнем равенстве

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \varepsilon(E \setminus B, B) + \varepsilon(L, V \setminus L) + \varepsilon(P, V \setminus L \setminus P) + |E| + q, \\ \lambda &= \varepsilon(E \setminus Q, Q) + \varepsilon(L, V \setminus L) + \varepsilon(P, V \setminus P \setminus L) + |E|. \end{aligned}$$

Подсчет показывает, что μ_1 и μ_2 имеют одинаковую четность, следовательно, $Df(C(E) \wedge X(V))$ равняется последней тройной сумме, которая, в свою очередь, равна, как несложно убедиться,

$$\sum_{\substack{Q \subseteq E \\ |Q|=q-1}} \sum_{\substack{R \subseteq V \\ |R|=p+2}} (-1)^{\tau+|E|-q} C(E \setminus Q) \wedge fd_2(C(Q) \wedge X(R)) \wedge X(V \setminus R),$$

где $\tau = \varepsilon(E \setminus Q, Q) + \varepsilon(R, V \setminus R)$, $R = P \sqcup L$. По свойству 2) эндоморфизма типа $(0, q, p)$ $d_2f(C(Q) \wedge X(R)) = 0$. Поэтому для $-Df$ действительно выполнено свойство 3) эндоморфизма типа $(1, q-1, p+2)$. Лемма доказана.

$\nu_i = p - t_i + \varepsilon(R, V \setminus R)$. При этом если некоторое $q_i = 1$, то в правой части вычеркивается как $q_i - 1 = 0$, так и нижнее t_i .

Отметим, что слагаемые, из которых состоит f_p , параметризуются всеми диаграммами Юнга, состоящими из p клеток (имеющими q_1 строк длины $t_1, \dots, q_n$ строк длины t_n).

Выделение именно последнего коммутатора при индуктивном определении эндоморфизмов $f = f_{(t_1, \dots, t_n)}^{(q_1, \dots, q_n)}$ носит весьма условный характер (аналогично разложению определителя по последней строке). На самом деле f обладает следующим свойством:

$$f(c_1 \wedge \dots \wedge c_q \wedge X(V)) = (-1)^{\tilde{\pi}} f(c_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge c_{\pi(q)} \wedge X(V)),$$

где π – перестановка из S_q . По индукции и принципу локализации можно свести проверку к случаю $q = 2$. Пусть $f = f_{(s,t)}^{(1,1)}$, $s > t$, или $f = f_{(s)}^{(2)}$. Рассмотрим первый случай. Тогда

$$\begin{aligned} f_{(s,t)}^{(1,1)}(c_1 \wedge c_2 \wedge X(V)) &= \sum_{\substack{R \subset V \\ |R|=s}} \left((-1)^{t+\varepsilon(R, V \setminus R)} f_s^1(c_1 \wedge X(R)) \wedge f_t^1(c_2 \wedge X(V \setminus R)) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{s+\varepsilon(V \setminus R, R)} f_t^1(c_1 \wedge X(V \setminus R)) \wedge f_s^1(c_2 \wedge X(R)) \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f_{(s,t)}^{(1,1)}(c_2 \wedge c_1 \wedge X(V)) &= \sum_{\substack{R \subset V \\ |R|=s}} \left((-1)^{t+\varepsilon(R, V \setminus R)} f_s^1(c_2 \wedge X(R)) \wedge f_t^1(c_1 \wedge X(V \setminus R)) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{s+\varepsilon(V \setminus R, R)} f_t^1(c_2 \wedge X(V \setminus R)) \wedge f_s^1(c_1 \wedge X(R)) \right). \end{aligned}$$

При этом

$$\varepsilon(V \setminus R, R) + s + (1+s)(1+t) \equiv \varepsilon(R, V \setminus R) + t + 1 \pmod{2},$$

т.е. вышеуказанные суммы отличаются только знаком.

Аналогично,

$$\begin{aligned} f_{(s)}^{(2)}(c_1 \wedge c_2 \wedge X(V)) &= \sum_{\substack{R \subset V \\ |R|=s}} (-1)^{\varepsilon(R, V \setminus R) + s} f_s^1(c_1 \wedge X(R)) \wedge f_s^1(c_2 \wedge X(V \setminus R)) \\ &= -f_{(s)}^{(2)}(c_2 \wedge c_1 \wedge X(V)). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.2. В $\text{Homgr}(\Lambda(\mathcal{G}), \Lambda(\mathcal{G}))$ имеет место равенство

$$-Df_{(t_1, \dots, t_n)}^{(q_1, \dots, q_n)} = \sum_{i=1}^n d_{t_i+2} f_{(t_1, \dots, t_i-1, \dots, t_n)}^{(q_1, \dots, q_i-1, \dots, q_n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно показать, используя схему доказательства леммы 5.1, что $d_k f$ является эндоморфизмом типа $(1, q, p + k)$, если f имеет тип $(0, q, p)$. Поэтому как левая, так и правая часть доказываемого равенства имеют тип $(1, q - 1, p + 2)$. В соответствии с принципом локализации достаточно проверить равенство этих двух эндоморфизмов, ограничив их на $\Lambda^{q-1, p+2}(\mathcal{G})$.

Пусть $C(E) \wedge X(V)$ – базисный элемент в $\Lambda^{q-1, p+2}(\mathcal{G})$. Обозначим через f эндоморфизм $f_{(t_1, \dots, t_n)}^{(q_1, \dots, q_n)}$, через $f^{(i)}$ – эндоморфизм $f_{(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)}^{(q_1, \dots, q_{i-1}, \dots, q_n)}$. С одной стороны,

$$\begin{aligned}
-Df(C(E) \wedge X(V)) &= f d_2(C(E) \wedge X(V)) \\
&= \sum_{\substack{L \subset V \\ |L|=2}} (-1)^{|E|+\varepsilon(L, V \setminus L)} f(C(E) \wedge c(L) \wedge X(V \setminus L)) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{L \subset V \\ |L|=2}} \sum_{\substack{R \subset V \setminus L \\ |R|=p-t_i}} (-1)^{\lambda_i} f^{(i)}(C(E) \wedge X(R)) \wedge f_{(t_i)}^{(1)}(c(L) \wedge X(V \setminus R \setminus L)) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{R \subset V \\ |R|=p-t_i}} (-1)^{\mu_i} f^{(i)}(C(E) \wedge X(R)) \wedge f_{(t_i)}^{(1)} d_2 X(V \setminus R) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{R \subset V \\ |R|=p-t_i}} (-1)^{\mu_i} f^{(i)}(C(E) \wedge X(R)) \wedge d_{t_i+2} X(V \setminus R),
\end{aligned}$$

где $\lambda_i = |E| + p - t_i + \varepsilon(L, V \setminus L) + \varepsilon(R, V \setminus L \setminus R)$, $\mu_i = |E| + p - t_i + \varepsilon(R, V \setminus R)$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n d_{t_i+2} f^{(i)}(C(E) \wedge X(V)) \\
&= \sum_{i=1}^n d_{t_i+2} \sum_{\substack{R \subset V \\ |R|=p-t_i}} (-1)^{\varepsilon_i} f^{(i)}(C(E) \wedge X(R)) \wedge X(V \setminus R) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{R \subset V \\ |R|=p-t_i}} (-1)^{\mu_i} f^{(i)}(C(E) \wedge X(R)) \wedge d_{t_i+2} X(V \setminus R),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon(R, V \setminus R)$, а μ_i – то же, что и выше. Лемма доказана.

Если подставить выражение для f_p в правую часть p -го уравнения системы (5.1), воспользоваться леммой 5.2 и собрать в левой части все слагаемые с фиксированным множителем d_k , $k = 3, \dots, p + 2$, то получится как раз равенство

$$-Df_p = d_{p+2} + d_{p+1} f_1 + \dots + d_3 f_{p-1}.$$

Таким образом, теорема 2, а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Предположим, что в расширении

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1 \quad (6.1)$$

группа A – свободная абелева. Тогда, как известно [10], [11], дифференциалы d_{pq}^2 спектральной последовательности расширения (6.1) можно представить в виде $d_{pq}^2 = f_{pq} + \delta_{pq}^2$, где

$$f_{pq}: H_p(Q, \Lambda^q(A)) \rightarrow H_{p-2}(Q, \Lambda^{q+1}(A))$$

– умножение на 2-коцикл, задающий расширение (6.1), а δ_{pq}^2 – дифференциал спектральной последовательности расщепляющегося расширения Q с помощью A , в котором Q действует на A так же, как в (6.1). Если расширение (6.1) к тому же центрально, то, очевидно, второе слагаемое тривиально и $d_{pq}^2 = f_{pq}$. Пусть $B(Q)$ – стандартная резольвента группы Q . Тогда $H_p(Q, \Lambda^q(A))$ вычисляется с помощью комплекса

$$\Lambda^q(A) \otimes_Q B(Q). \quad (6.2)$$

Если $f: Q \times Q \rightarrow A$ – 2-коцикл, задающий расширение, то, как известно, умножение на f , т.е. гомоморфизм f_{pq} , индуцируется отображением

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_q \otimes (y_1, \dots, y_p) \rightarrow a_1 \wedge \cdots \wedge a_q \wedge f(y_1, y_2) \otimes (y_3, \dots, y_p). \quad (6.3)$$

Применим это к случаю, когда G – свободная нильпотентная группа класса 2. В качестве системы представителей группы G/G' можно взять инверсные произведения $x_{k_1}^{m_1} \cdots x_{k_n}^{m_n} \in G$, $k_1 > \cdots > k_n$. Тогда для соответствующей системы факторов

$$f(x_i, x_j) = 0 \text{ при } i > j, \quad f(x_i, x_j) = [x_i, x_j] \text{ при } i < j. \quad (6.4)$$

В комплексе (6.2) элементы группы $E_{pq}^2 = \Lambda^q(G') \otimes \Lambda^p(G/G')$ представляются циклами

$$c_{i_1 j_1} \wedge \cdots \wedge c_{i_q j_q} \otimes \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} (x_{\sigma(k_1)}, \dots, x_{\sigma(k_p)})$$

(суммирование происходит по всем подстановкам на множестве из p элементов). Учитывая (6.4), применим к этим элементам отображение (6.3). В результате получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} c_{i_1 j_1} \wedge \cdots \wedge c_{i_q j_q} \wedge [x_{k_i}, x_{k_j}] \\ & \otimes \sum_{\sigma \in S_{p-2}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} (x_{k_1}, \dots, \widehat{x}_{k_i}, \dots, \widehat{x}_{k_j}, \dots, x_{k_p}). \end{aligned}$$

Мы видим, что f_{pq} действует на указанные циклы точно так же, как действует на соответствующие циклы дифференциал ∂ комплекса $\Lambda(\mathcal{G})$.

Аналогично доказывается, что в спектральной последовательности, построенной для кольца Ли $\mathcal{G}$, d_{pq}^2 тоже вычисляется как дифференциал комплекса $\Lambda(\mathcal{G})$.

Но гомологии этого комплекса изоморфны группам $H_n \mathcal{G}$, следовательно, на членах E_{pq}^3 должна происходить стабилизация. Более того, так как

$$\Lambda^n(\mathcal{G}) = \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^q(\mathcal{G}') \otimes \Lambda^p(\mathcal{G}/\mathcal{G}'),$$

то $H_n \mathcal{G}$ распадается в прямую сумму

$$H_n \mathcal{G} = \bigoplus_{p+q=n} E_{pq}^3.$$

Теперь вспомним, что для группы G члены E_{pq}^2 и дифференциалы d_{pq}^2 устроены так же, как для кольца $\mathcal{G}$, поэтому одинаковы и члены E_{pq}^3 . По теореме 3 имеет место изоморфизм $H_n G \cong H_n \mathcal{G}$, откуда следует, что в спектральной последовательности группы G на членах E_{pq}^3 происходит стабилизация, а соответствующая фильтрация расщепляется.

Список литературы

1. *Kuzmin Yu. V.* Homology theory of free abelianized extensions // Comm. Algebra. 1988. V. 16. P. 2447–2533.
2. *Кузьмин Ю. В.* О некоторых свойствах свободных абелевых расширений // Матем. сб. 1989. Т. 180. №6. С. 850–862.
3. *Ковач Л. Г., Кузьмин Ю. В., Штер Р.* Гомология свободных абелевых расширений // Матем. сб. 1991. Т. 182. №4. С. 526–542.
4. *Кузьмин Ю. В.* О гомологиях свободной разрешимой группы // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №6. С. 56–65.
5. *Кузьмин Ю. В.* О связи между когомологиями групп и алгебр Ли // УМН. 1982. Т. 37. №4. С. 161–162.
6. *Lambe L. A., Priddy S. B.* Cohomology of nilmanifolds and torsion free nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 273. P. 39–55.
7. *Huebschmann J.* Perturbation theory and free resolutions for nilpotent groups of class 2 // J. Algebra. 1989. V. 126. №2. P. 348–399.
8. *Lambe L. A.* Cohomology of principal G-bundles over a torus when $H^*(BG; R)$ is polynomial // Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A. 1986. V. 38. P. 247–264.
9. *Sigg St.* Laplacian and homology of free 2-step nilpotent Lie algebras // J. Algebra. 1996. V. 185. №1. P. 144–161.
10. *André M.* Le d_2 de la suite spectrale en cohomologie des groupes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1965. V. 260. P. 2669–2671.
11. *Кузьмин Ю. В.* О дифференциалах спектральной последовательности группового расширения // Матем. сб. 1987. Т. 133. №1. С. 49–63.

Московский государственный
университет путей сообщения

Поступила в редакцию
17.07.1997