Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литлвуда,
Матем. сб., 1998, том 189, номер 3, 83–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:18:15

УДК 517.51

Е. Д. Нурсултанов

Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литлвуда

В работе исследуются свойства суммируемости тригонометрических рядов Фурье в L_p пространствах. Получены неравенства, которые в некотором смысле являются обратными к неравенствам Харди–Литлвуда.

Библиография: 10 названий.

Хорошо известна теорема Харди–Литлвуда.

Пусть $p \geq 2$, последовательность чисел $a = \{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ такова, что для ее невозрастающей перестановки $a^* = \{a_k^*\}_{k=1}^\infty$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} a_k^{*p}, \quad (1)$$

тогда ряд $\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{imx}$ сходится к некоторой функции f в пространстве $L_p[0, 2\pi]$ и верно неравенство

$$\|f\|_{L_p}^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} a_k^{*p} = C \|a\|_{l_{p'p}}^p. \quad (2)$$

И если $p \geq 2$, f – из пространства Лоренца $L_{p'p}[0, 2\pi)$, то последовательность ее коэффициентов Фурье принадлежит l_p , и имеет место неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^p \leq \int_0^{2\pi} t^{p-2} f^{*p}(t) dt, \quad (3)$$

здесь f^* – невозрастающая перестановка f .

Данное утверждение в некотором смысле является альтернативой равенству Персеваля в пространстве L_p . Так, если рассматривать функции с монотонными коэффициентами [1] либо квазимонотонными коэффициентами [2], то неравенство (2) обращается, т.е. для функции f с монотонными либо квазимонотонными коэффициентами сходимость ряда (1) эквивалентна $f \in L_p$. В многомерном случае для рядов вида $\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} \exp(i \sum_{i=1}^n k_i x_i)$ с коэффициентами $a_{k_1, \dots, k_n}$, монотонными по каждому переменному индексу k_j , обращение неравенства (2) доказано М. И. Дьяченко [3], [4].

В то же время, в общем случае из принадлежности функции f пространству L_p , $p > 2$, вообще говоря, не следует сходимость ряда (1). Возникает вопрос: какие условия являются необходимыми для принадлежности функции f пространству L_p , т.е. – проблема получения нижних оценок для $\|f\|_{L_p}$ через ряды вида (1).

Этой и аналогичной задаче, связанной с обращением соотношения (3), посвящена данная работа. В частности, из теоремы 4 следует, что если $p \geq 2$, $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ и $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{imx}$, имеет место неравенство

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \cdots k_n^{p-2} \bar{a}_{k_1, \dots, k_n}^p \leq c_p \|f\|_{L_p}^p,$$

здесь

$$\bar{a}_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(k_1 + 1) \cdots (k_n + 1)} \left| \sum_{\substack{|m_j| \leq k_j \\ m \in \mathbb{Z}^n}} a_m \right|.$$

Заметим теперь, что если последовательность $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ удовлетворяет условию

$$|a_m| \leq c \frac{1}{|Q_m|} \left| \sum_{k \in Q_m} a_k \right|,$$

$$Q_m = \{k \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq k_j \text{ sign } m_j \leq |m_j|, j = 1, 2, \dots, n\},$$

которое назовем условием обобщенной монотонности в $\mathbb{Z}^n$, то из упомянутого предложения следует, что для функции f с обобщенно монотонными коэффициентами $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ имеет место обращение неравенства Харди–Литлвуда:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} m_1^{p-2} \cdots m_n^{p-2} |a_m|^p \leq c \|f\|_p^p.$$

Условие обобщенной монотонности является более слабым, чем монотонность [1], [4] и квазимонотонность [2].

В случае $1 < p < 2$ Ф. Мориц [5] доказал, что для кратных рядов с монотонными коэффициентами ($\Delta a_{m_1, \dots, m_n} \geq 0$) неравенство Харди–Литлвуда обращается. Если же коэффициенты рядов монотонны по каждому индексу, то, как показал М. И. Дьяченко [6], для таких рядов верхняя оценка в форме Харди–Литлвуда не имеет места.

В первых двух параграфах строится аппарат исследования, вводятся “сетевые пространства”, изучаются их интерполяционные свойства. Полученные интерполяционные теоремы используются в доказательстве основных результатов.

Автор выражает благодарность О. В. Бесову за внимание к работе и полезные советы.

§ 1. Сетевые пространства

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана n -мерная мера Лебега μ , M – фиксированное семейство множеств конечной меры из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем M будем называть “сетью”. Для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на каждом e из M , определим функцию

$$\bar{f}(t, M) = \sup_{\substack{e \in M \\ |e| > t}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) d\mu \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем $e \in M$, мера которых $|e| \stackrel{\text{def}}{=} \mu e > t$, $t \in (0, \infty)$. В случае $\sup\{|e| : e \in M\} = \alpha < \infty$ и $t > \alpha$ положим $\bar{f}(t, M) = 0$. Функция $\bar{f}(t, M)$ называется *средней функцией* для f по сети M .

Через $N_{p,q}(M)$, $0 < p, q \leq \infty$, обозначим множество функций f , для которых при $q < \infty$

$$\|f|N_{p,q}(M)\| = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} \bar{f}(t, M))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

и при $q = \infty$

$$\|f|N_{p,\infty}(M)\| = \sup_{t>0} t^{1/p} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сетевое пространство $N_{pq}(M)$ является квазинормированным пространством (при $q \geq 1$ – нормированным) как факторпространство по ядру $\{f : \int_e f(x) dx = 0, e \in M\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пространства $N_{pq}(M)$, вообще говоря, не являются симметричными пространствами.

ПРИМЕР 1. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$, $1 < p, q < \infty$. Функция $f(x) = (-1)^{[x]}$ ($[x]$ – целая часть x) принадлежит $N_{p,q}(M)$, но $|f| \notin N_{p,q}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пространства $N_{pq}(M)$ в некоторой степени чувствительны к распределению осцилляций, особенностей функций.

ПРИМЕР 2. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$, $f_\Omega(x)$ – характеристическая функция множества $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, a_k + 1]$. Последовательность $\{a_k\}$ задает распределение осцилляций функции $f_\Omega(x)$. Если $a_k = b + (k \ln^{1/q} k)^{p'}$, то $f_\Omega \in N_{pq+\varepsilon}(M)$ для любого $\varepsilon > 0$, но $f_\Omega \notin N_{pq}(M)$.

Отметим некоторые свойства пространств N_{pq} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$, M – множество всех компактов из области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$N_{pq}(M) = L_{pq}(\Omega),$$

т.е. N_{pq} совпадает с пространством Лоренца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [7], что норма функции f в пространстве $L_{pq}(\Omega)$ эквивалентна величине

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{|\Omega|} (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \quad \text{при } 1 < p < \infty, \quad q < \infty; \\ & \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) \quad \text{при } 1 < p \leq \infty, \quad q = \infty, \end{aligned}$$

где

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \sup_{|e|=t} \frac{1}{|e|} \int_e |f(x)| dx.$$

Таким образом, доказываемое утверждение будет следовать из оценок

$$\bar{f}(t, M) \leq f^{**}(t) \leq 4\bar{f}(t/3, M), \quad (3')$$

справедливость которых покажем.

Пусть $t \in (0, \infty)$, тогда для произвольного компакта $e \in M$, мера которого равна t , и для функции $f(x)$ определим множества

$$\omega_1 = \{x \in e : f(x) \geq 0\} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \{x \in e : f(x) < 0\}.$$

Тогда

$$\int_e |f(x)| dx = \int_{\omega_1} f(x) dx - \int_{\omega_2} f(x) dx \leq 2 \max \left\{ \left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right|, \left| \int_{\omega_2} f(x) dx \right| \right\}.$$

Для определенности будем считать, что

$$\left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right| \geq \left| \int_{\omega_2} f(x) dx \right|.$$

Возможны два случая: 1) $|\omega_1| \geq \frac{1}{2}|\omega_2|$; 2) $|\omega_1| < \frac{1}{2}|\omega_2|$.

В первом случае

$$\begin{aligned} |\omega_1| &\geq \frac{1}{2}|\omega_2| \geq \frac{|e|}{3} = \frac{t}{3}, \\ \frac{1}{|e|} \int_e |f(x)| dx &\leq 2 \frac{1}{|e|} \left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right| \leq 2 \frac{1}{|\omega_1|} \left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right| \leq 2 \bar{f}\left(\frac{t}{3}, M\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Во втором случае $|\omega_1| < \frac{1}{2}|\omega_2|$, т.е. $|\omega_2| > \frac{2|e|}{3} = \frac{2}{3}t$. Тогда найдутся такие ω_2^1 и ω_2^2 из M , что $|\omega_2^1 \cap \omega_2^2| = 0$, $\omega_2^1 \cup \omega_2^2 = \bar{\omega}_2$, $|\omega_2^i| = \frac{|\omega_2|}{2} > \frac{t}{3}$.

Учитывая знакоопределенность функции f на ω_2 , получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right| &\geq \left| \int_{\omega_2} f(x) dx \right| = \left| \int_{\omega_2^1} f(x) dx \right| + \left| \int_{\omega_2^2} f(x) dx \right| \\ &\geq 2 \min \left(\left| \int_{\omega_2^1} f(x) dx \right|, \left| \int_{\omega_2^2} f(x) dx \right| \right) = 2 \left| \int_{\omega_2^{i_0}} f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_2^{i_0}$ — компакт, где достигается минимум.

Пусть теперь $\omega = \omega_1 \cup \omega_2^{i_0}$, тогда $|\omega| > \frac{|e|}{3}$ и

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} f(x) dx \right| &= \left| \int_{\omega_1} f(x) dx + \int_{\omega_2^{i_0}} f(x) dx \right| \\ &\geq \left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right| - \left| \int_{\omega_2^{i_0}} f(x) dx \right| \geq \frac{1}{2} \left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|e|} \int_e |f(x)| dx \leq 2 \frac{1}{|e|} \left| \int_{\omega_1} f(x) dx \right| \leq 4 \frac{1}{|\omega|} \left| \int_{\omega} f(x) dx \right| \leq 4 \bar{f}\left(\frac{t}{3}, M\right),$$

что вместе с (4) завершает доказательство правого неравенства (3'). Покажем левую оценку (3').

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, M) &= \sup_{|e| \geq t} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) dx \right| \leq \sup_{|e| \geq t} \frac{1}{|e|} \int_e |f(x)| dx \\ &= \sup_{|e| \geq t} \frac{1}{|e|} \int_0^{|e|} f^*(s) ds = \sup_{|e| \geq t} \frac{1}{|e|} \left(\int_0^t f^*(s) ds + \int_t^{|e|} f^*(s) ds \right) \\ &\leq \sup_{|e| \geq t} \frac{1}{|e|} \left(\int_0^t f^*(s) ds + (|e| - t) \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\ &= \sup_{|e|=t} \frac{1}{|e|} \int_e |f(x)| dx = f^{**}(t). \end{aligned}$$

- УТВЕРЖДЕНИЕ 2. а) Если $M_1 \subset M_2$, то $N_{pq}(M_2) \hookrightarrow N_{pq}(M_1)$.
 б) При $1 \leq q \leq q_1$ $N_{pq}(M) \hookrightarrow N_{pq_1}(M)$.
 в) Если M – сеть такая, что $\sup_{e \in M} |e| = \alpha < \infty$, то при $0 < p < p_1 \leq \infty$, $0 < q, q_1 \leq \infty$ верно $N_{p_1 q_1}(M) \hookrightarrow N_{pq}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Непосредственно следует из определения сетевых пространств.

б) Пусть $1 \leq q < q_1 < \infty$. Используя монотонность $\bar{f}(t, M)$ и обобщенное неравенство Минковского, при $\varepsilon > 0$ получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{N_{pq_1}(M)} &= \left(\int_0^\infty (t^{1/p} \bar{f}(t))^{q_1} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1} \\ &\leq c_1 \left(\int_0^\infty t^{-\varepsilon q_1} \left(\int_0^t (s^{1/p+\varepsilon} \bar{f}(s))^q \frac{ds}{s} \right)^{q_1/q} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1} \\ &\leq c_1 \left(\int_0^\infty (s^{1/p+\varepsilon} \bar{f}(s))^q \left(\int_s^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon q_1}} \right)^{q/q_1} \frac{ds}{s} \right)^{1/q} = c \|f\|_{N_{pq}(M)}. \end{aligned}$$

Здесь константы c и c_1 зависят только от параметров p, q, ε .

В случае $q_1 = \infty$

$$\|f\|_{p\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} \bar{f}(t) \leq \sup_{t>0} \left(\frac{q}{p} \int_0^t s^{q/p-1} \bar{f}(s)^q ds \right)^{1/q} = c \|f\|_{N_{pq}(M)}.$$

в) Учитывая свойство б), достаточно показать, что $N_{p_1\infty}(M) \hookrightarrow N_{pq}(M)$. Поскольку $\bar{f}(t) = 0$ при $t > \alpha = \sup_{e \in M} |e|$, то

$$\begin{aligned} \|f\|_{N_{pq}(M)} &= \left(\int_0^\infty (t^{1/p} \bar{f}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \left(\int_0^\alpha (t^{1/p} \bar{f}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq \sup_{t>0} t^{1/p_1} \bar{f}(t) \left(\int_0^\alpha t^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})q} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = c \|f\|_{N_{p_1\infty}(M)}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Определим теперь сетевые пространства последовательностей $\mathbf{n}_{pq}(M)$. Пусть S – множество всех конечных наборов индексов из $\mathbb{Z}^n$. Для фиксированного множества $M \subset S$ определим пространство $\mathbf{n}_{pq}(M)$ ($0 < p, q \leq \infty$) как множество последовательностей $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ с квазинормой при $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$

$$\|a\|_{\mathbf{n}_{pq}(M)} = \left(\sum_{k=1}^\infty k^{\frac{q}{p}-1} (\bar{a}_k(M))^q \right)^{1/q},$$

и при $q = \infty$, $0 < p \leq \infty$

$$\|a\|_{\mathbf{n}_{pq}(M)} = \sup_{1 \leq k < \infty} k^{1/p} \bar{a}_k(M),$$

где

$$\bar{a}_k(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{e \in M \\ |e| > k}} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{m \in e} a_m \right|;$$

здесь $|e|$ – количество индексов в e .

Для введенного пространства верны все аналогичные утверждения, приведенные для пространств N_{pq} .

§ 2. Интерполяционные свойства сетевых пространств

Пусть (A_0, A_1) – совместимая пара банаховых пространств [8].

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \quad a \in A_0 + A_1,$$

– функционал Петре.

При $1 \leq q < \infty, 0 < \theta < 1$

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, a) < \infty \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 < \infty, 1 \leq q \leq \infty, 0 < \theta < 1, M$ – произвольная сеть в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$(N_{p_0 q_0}(M), N_{p_1 q_1}(M))_{\theta q} \hookrightarrow N_{pq}(M),$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу вложений $N_{p_i q_i} \hookrightarrow N_{p_i \infty}, i = 0, 1$, достаточно показать отношение $(N_{p_0 \infty}(M), N_{p_1 \infty}(M))_{\theta q} \hookrightarrow N_{pq}(M)$.

Пусть $t \in (0, \infty), f = f_0 + f_1, f_0 \in N_{p_0 \infty}$ и $f_1 \in N_{p_1 \infty}$. Очевидно,

$$\bar{f}(t, M) \leq \bar{f}_0(t, M) + \bar{f}_1(t, M)$$

и тогда, если обозначить $v(t) = t^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$, то

$$\begin{aligned} \sup_{v \geq s > 0} s^{1/p_0} \bar{f}(s) &\leq \sup_{s > 0} s^{1/p_0} \bar{f}_0(s, M) + \sup_{v > s} s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1}} \bar{f}_1(s, M) \\ &\leq \sup_{s > 0} s^{1/p_0} \bar{f}_0(s, M) + t \sup_{s > 0} s^{1/p_1} \bar{f}_1(s, M). \end{aligned}$$

Учитывая произвольность представления $f = f_0 + f_1$, имеем

$$\sup_{v \geq s > 0} s^{1/p_0} \bar{f}(s) \leq K(f, t; N_{p_0 \infty}, N_{p_1 \infty}).$$

Поэтому при $1 \leq q \leq \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (t^{-\theta} K(f, t))^q \frac{dt}{t} &\geq \int_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v \geq s > 0} s^{1/p_0} \bar{f}(s, M) \right)^q \frac{dt}{t} \\ &= \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right) \int_0^\infty \left(t^{-\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \sup_{t \geq s > 0} s^{1/p_0} \bar{f}(s, M) \right)^q \frac{dt}{t} \\ &\geq \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right) \int_0^\infty \left(t^{\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}} \bar{f}(t, M) \right)^q \frac{dt}{t} \\ &= \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right) \|f\|_{N_{pq}(M)}^q. \end{aligned}$$

В качестве следствия сформулируем интерполяционную теорему.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, M – произвольная сеть в $\mathbb{R}^n$. Если полуаддитивный оператор T такой, что

$$\begin{aligned} T: A_0 &\rightarrow N_{p_0\infty} \quad \text{с нормой } D_0, \\ T: A_1 &\rightarrow N_{p_1\infty} \quad \text{с нормой } D_1, \end{aligned}$$

тогда $T: \bar{A}_{\theta q} \rightarrow N_{pq}$, где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$, причем $\|T\| \leq cD_0^{1-\theta}D_1^\theta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Аналогичные интерполяционные свойства имеют место и для дискретных сетевых пространств $n_{pq}(M)$.

$$\text{Пусть } \dot{N}_{p\infty}(M) = \left\{ f : \sup_{\substack{e \in M \\ |e| > 0}} \frac{1}{|e|^{1/p'}} \left| \int_e f(x) dx \right| < \infty \right\}.$$

Очевидно, что $\dot{N}_{p\infty}(M) \hookrightarrow N_{p\infty}(M)$.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, (A_0, A_1) – совместимая пара банаховых пространств. Если полуаддитивный оператор

$$\begin{aligned} T: A_0 &\rightarrow \dot{N}_{p_0\infty}(M) \quad \text{с нормой } D_0, \\ T: A_1 &\rightarrow \dot{N}_{p_1\infty}(M) \quad \text{с нормой } D_1, \end{aligned}$$

то

$$T: A_{\theta\infty} \rightarrow \dot{N}_{p\infty}(M)$$

с нормой $\|T\| \leq D_0^{1-\theta}D_1^\theta$, где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что

$$(\dot{N}_{p_0\infty}, \dot{N}_{p_1\infty})_{\theta\infty} \hookrightarrow \dot{N}_{p\infty},$$

которое доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

§3. Необходимые условия принадлежности $\hat{f}$ пространству Лоренца l_{pq} при $p > 2$

В данном параграфе изучаются оценки в некотором смысле обратные к неравенству (3). М. И. Дьяченко в [9] показал для кусочно-монотонных функций обращение неравенства (3).

Пусть $f \in L_1(\mathbb{T}^n)$, где $\mathbb{T}^n$ – n -мерный тор,

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

– коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $kx = \sum_{i=1}^n k_i x_i$. Будем писать $x \leq y$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$), если $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$. Множество $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x^0 \leq x \leq x^1\}$ называется *отрезком (параллелепипедом)* в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Q – отрезок в $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}^n$, $d \in \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$. Множество вида

$$Q_m^d = \bigcup_{0 \leq k \leq m} (Q + kd)$$

назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{R}^n$.

Множество всех гармонических отрезков из $\mathbb{R}^n$, лежащих в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, назовем гармонической сетью в Ω . Гармоническая сеть содержит все отрезки, так как всякий отрезок является гармоническим отрезком.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $2 < p < \infty$, M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{T}^n$, M_1 – множество всех компактов в $\mathbb{T}^n$, $f \in N_{p'q}(M_1)$. Тогда имеет место оценка

$$c_0 \|f \mid N_{p'q}(M_0)\| \leq \|\hat{f} \mid l_{pq}\| \leq c_1 \|f \mid N_{p'q}(M_1)\| \quad (5)$$

и, в частности,

$$c_0 \int_0^\infty t^{p-2} \bar{f}^p(t, M_0) dt \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|^p \leq c_1 \int_0^\infty t^{p-2} \bar{f}^p(t, M_1) dt,$$

где константы c_1 и c_2 зависят только от параметра p и размерности n .

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

ЛЕММА 2. Пусть дана последовательность чисел $\{1/mr^{1/q}\}_{r=1}^M$, где $1 < q < +\infty$, тогда невозрастающая перестановка этой последовательности оценивается покоординатно последовательностью $\{c_q/n^{1/q}\}_{n=1}^\infty$, где c_q зависит только от q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$. При фиксированном m , $1 \leq m \leq M$, количество элементов $1/mr^{1/q}$, не меньших числа $1/n^{1/q}$, равно $[n/m^q]$ ($[x]$ – целая часть числа x). Тогда количество элементов вида $1/r^{1/q}m$, не меньших $1/n^{1/q}$, будет равно

$$\left[\frac{n}{1^q} \right] + \left[\frac{n}{2^q} \right] + \dots + \left[\frac{n}{m^q} \right] \leq n \cdot \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^q} \leq 2q \cdot n.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $p \geq 2$, M_0 – гармоническая сеть в $T = [0, 2\pi)$. Тогда

$$\|f \mid \dot{N}_{p'\infty}(M)\| \leq C \|\hat{f}\|_{l_p}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – гармонический отрезок в $\mathbb{T}$. Тогда найдется отрезок Δ из $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, $d \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$ такой, что $Q = \bigcup_{m=0}^k (\Delta + dm)$, где $|\Delta| < d$, $dk \leq 2\pi$. Следовательно, для $f(x) = \sum_r a_r e^{irx}$ имеем¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \int_Q f(t) dt \right| &= \frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \int_Q \sum_r a_r e^{irx} dx \right| \\ &\leq \sum_{r \neq 0} |a_r| \frac{1}{k^{1/p} |\Delta|^{1/p}} \left| \sum_{m=0}^k \int_\Delta e^{ir(x+dm)} dx \right| + |a_0| 2\pi \\ &\leq \sum_{r \neq 0} |a_r| \frac{1}{k^{1/p} |\Delta|^{1/p}} \frac{|e^{idkr} - 1| |e^{i|\Delta|r} - 1|}{|e^{ird} - 1| r} + |a_0| 2\pi. \end{aligned}$$

¹ Для корректности последующих рассуждений можно считать, что $a_r = 0$ при $|r| \gg 1$.

Покажем теперь, что невозрастающая перестановка последовательности $\{b_r\}$, где

$$b_r = b_r(x, y, k) = \frac{1}{(kx)^{1/p}} \left| \frac{(e^{irk y} - 1)(e^{ir x} - 1)}{(e^{iry} - 1)r} \right|,$$

$0 < x < y$, $ky \leq 2\pi$, $k \in \mathbb{N}$, не превосходит $\{c_p/r^{1/p'}\}_{r=1}^\infty$, где c_p зависит только от p . Заметим, что достаточно рассмотреть последовательность $\{b_r\}_{r=1}^\infty$. Разобьем $\{b_r\}_{r=1}^\infty$ на три последовательности:

$$\{b_r\}_{r=1}^\infty = \{b_r\}_{1 \leq r \leq \frac{\pi}{2y}} \cup \{b_r\}_{\frac{\pi}{2y} \leq r \leq \frac{\pi}{2x}} \cup \{b_r\}_{r > \frac{\pi}{2x}}.$$

При $r \leq \pi/2y$

$$\begin{aligned} b_r &\leq \frac{1}{r^{1/p'}} \left| \frac{(e^{irk y} - 1)(e^{ir x} - 1)}{(e^{iry} - 1)(rkx)^{1/p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{r^{1/p'}} \frac{\pi r x \min\{rky, 2\}}{2(kxr)^{1/p} r y} = \frac{\pi}{2r^{1/p'}} \frac{x^{1/p'} \min\{rky, 2\}}{k^{1/p} r^{1/p} y}. \end{aligned}$$

Если $\min\{rky, 2\} = 2 \leq rky$, то

$$b_r \leq \frac{\pi}{2r^{1/p'}} \frac{2x^{1/p'}}{(rky)^{1/p} y^{1/p'}} \leq \frac{\pi}{2r^{1/p'}} \frac{2}{2^{1/p}} = \frac{\pi}{2^{1/p}} \frac{1}{r^{1/p'}} = \frac{C_p}{r^{1/p'}}.$$

Если же $\min\{rky, 2\} = rky < 2$, то

$$b_r \leq \frac{\pi}{2r^{1/p'}} \frac{x^{1/p'} rky}{k^{1/p} r^{1/p} y} \leq \frac{\pi}{2r^{1/p'}} (rkx)^{1/p'} < \frac{\pi}{2^{1/p}} \frac{1}{r^{1/p'}} = \frac{C_p}{r^{1/p'}}.$$

Рассмотрим теперь $\{b_r\}_{r > \frac{\pi}{2x}}$, тогда

$$b_r \leq \frac{2|e^{irk y} - 1|}{(xk)^{1/p} r |e^{iry} - 1|} \leq \frac{2|e^{irk y} - 1|}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/p} k^{1/p} r^{1/p'} |e^{iry} - 1|}. \quad (7)$$

Данная вектор-функция имеет особенности в точках $ry = 2\pi l$, $l \in \mathbb{N}$. Поэтому выделим подпоследовательности

$$\{b_r\}_{\{r > \frac{\pi}{2k}\} \cap \bigcup_{i=1}^\infty \{\frac{2\pi l}{y} \leq r \leq \frac{2\pi l + \frac{\pi}{2}}{y}\}}, \quad (8)$$

$$\{b_r\}_{\{r > \frac{\pi}{2k}\} \cap \bigcup_{i=1}^\infty \{\frac{2\pi l - \frac{\pi}{2}}{y} \leq r \leq \frac{2\pi l}{y}\}}. \quad (9)$$

Оставшаяся часть последовательности $\{b_r\}_{r > \frac{\pi}{2k}}$ оценивается через последовательность $\{c/r^{1/p'}\}_{r=1}^\infty$. Покажем, что невозрастающая перестановка последовательности (8) оценивается через невозрастающую перестановку последовательности вида $\{4^{1/p}/ml^{1/p'}\}_{l=1}^\infty$.

Пусть $\frac{2\pi l}{y} \leq r \leq \frac{2\pi l + \frac{\pi}{2}}{y}$. Тогда учитывая (7), оценку

$$\frac{|e^{irk y} - 1|}{|e^{iry} - 1|} \leq \min\left\{k, \frac{1}{|2\pi l - ry|}\right\},$$

а также то, что $ky \leq 2\pi$, получим, что $\{b_r\}_{\frac{2\pi l}{y} \leq r \leq \frac{2\pi l + \frac{\pi}{2}}{y}}$ оценивается через последовательность с элементами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^{1/p} \left(\frac{2\pi l}{y}\right)^{1/p'}} \left\{ \min\left\{k, \frac{1}{y}\right\}, \min\left\{k, \frac{1}{2y}\right\}, \min\left\{k, \frac{1}{3y}\right\}, \dots, \min\left\{k, \frac{1}{\frac{\pi}{2y}}\right\} \right\} \\ & \leq \frac{2\pi}{k^{1/p} \left(\frac{2\pi l}{y}\right)^{1/p'}} \left\{ \frac{1}{y}, \frac{1}{2y}, \dots, \frac{1}{\left[\frac{\pi}{2y}\right]y} \right\} \leq \frac{(2\pi)^{1/p}}{(ky)^{1/p} l^{1/p'}} \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{\left[\frac{\pi}{2y}\right]} \right\} \\ & \leq \frac{(2\pi)^{1/p}}{\left[\frac{\pi}{2}\right]^{1/p} l^{1/p'}} \left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m=1}^{\left[\frac{\pi}{2y}\right]} = \left\{ \frac{4^{1/p}}{l^{1/p'} m} \right\}_{m=1}^{\left[\frac{\pi}{2y}\right]}, \end{aligned}$$

где $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность (8) покоординатно мажорируется последовательностью $\{4^{1/p} / l^{1/p'} m\}_{l=1}^{\left[\frac{\pi}{2y}\right]}_{m=1}^{\left[\frac{\pi}{2y}\right]}$. Тогда по лемме 2 невозрастающая перестановка (8) оценивается через $\{c_p / r^{1/p'}\}_{r=1}^{\infty}$. Подпоследовательность (9) оценивается аналогично (8).

И, наконец, рассмотрим $\{b_r\}_{\frac{\pi}{2y} < r \leq \frac{\pi}{2x}}$.

$$b_r \leq \frac{rx|e^{irk y} - 1|}{(kx)^{1/p} r|e^{iry} - 1|} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/p'}}{k^{1/p}} \frac{|e^{irk y} - 1|}{r^{1/p'} |e^{iry} - 1|}.$$

Невозрастающая перестановка последовательности, стоящей в правой части неравенства, не превосходит невозрастающую перестановку последовательности

$$\left\{ \frac{C}{r^{1/p'} m} \right\}_{r=1}^{\infty}_{m=1}^k.$$

Из леммы 2 следует, что ее невозрастающая перестановка оценивается через $\{c_p / r^{1/p'}\}_{r=1}^{\infty}$.

Таким образом, используя неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} a_r b_r \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_r^* b_r^*$, получим

$$\frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \int_Q f(t) dt \right| \leq c \sum_{r=1}^{\infty} a_r^* r^{\frac{1}{p}-1} = c \|a\|_{l_{p1}}.$$

Следовательно, отображение $Ta \rightarrow f = \sum a_r e^{irx}$ ограничено из l_{p1} в $\dot{N}_{p'\infty}$, $1 < p < \infty$, а тогда по лемме 1 и в силу интерполяционных свойств пространств Лоренца

$$T: l_p \rightarrow \dot{N}_{p'\infty}(M_0).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Учитывая равенство $N_{pq}(M_1) = L_{pq}(\mathbb{T}^n)$, правое неравенство соотношения (5) следует из теоремы Харди–Литлвуда.

Для доказательства левого неравенства соотношения (5) докажем неравенство (6) в многомерном случае. Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ неравенство (6) следует из леммы 3. Предположим теперь, что (6) верно для размерности $n - 1$. Покажем, что оно верно для n .

Пусть Q – произвольный гармонический отрезок в $\mathbb{T}^n$. Тогда из определения гармонического отрезка, следует, что найдутся гармонические отрезки Q^1 из $\mathbb{T}$ и Q^2 из $\mathbb{T}^{n-1}$ такие, что $Q = Q^1 \times Q^2$. Если $f \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r e^{irx}$, то функции

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} f(x_1, y) dy$$

будет соответствовать ряд Фурье

$$\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} d_{r_1} e^{ir_1 x_1},$$

где

$$d_{r_1} = \frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} a_{r_1, r} e^{iry} dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \int_Q f(x) dx \right| &= \frac{1}{|Q^1|^{1/p}} \left| \int_{Q^1} \frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} f(x_1, y) dy dx_1 \right| \\ &= \frac{1}{|Q'|^{1/p}} \left| \int_{Q'} \varphi(x_1) dx_1 \right| \leq C \|d\|_{l_p} = C \left(\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} d_{r_1}^p \right)^{1/p} \\ &= C \left(\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} a_{r_1, r} e^{iry} dy \right)^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

но в силу предположения индукции для произвольного целого r_1

$$\frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \left| \int_{Q^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} a_{r_1, r} e^{iry} dy \right| \leq c_p \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} |a_{r_1, r}|^p \right)^{1/p},$$

откуда имеем

$$\frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \int_Q f(x) dx \right| \leq c_p \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}^n} |a_r|^p \right)^{1/p},$$

следовательно, $T: l_p \rightarrow \dot{N}_{p', \infty}(M_0)$, $1 < p < \infty$, и тем более $T: l_p \rightarrow N_{p', \infty}(M_0)$. Используя следствие 1, приходим к нужному результату. Теорема доказана.

Пусть M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{T}^n$. Будем говорить, что f имеет доминирующие гармонические осцилляции, если

$$\sup_{t>0} f^*(t)/\bar{f}(t, M_0) < \infty.$$

Множество всех таких функции f обозначим через Λ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < p < 2$, $f \in \Lambda$. Тогда для того чтобы $f \in L_{pq}(\mathbb{T}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы $\hat{f} \in l_{p'q}$.

§ 4. Необходимые условия принадлежности функции f пространству $L_{pq}(\mathbb{T}^n)$ при $p > 2$

Всякую конечную арифметическую прогрессию в $\mathbb{Z}$ назовем гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}$. Множество вида $Q = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, где B_i — гармонические отрезки в $\mathbb{Z}$, назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}^n$. Множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{Z}^n$ называется *гармонической сетью* в $\mathbb{Z}^n$.

Пусть $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}_0^n$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество вида

$$Q_r^d = \{(m_1 + k_1 d_1, \dots, m_n + k_n d_n) \in \mathbb{Z}^n : k_i = 0, 1, \dots, r_i\}$$

назовем *гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}^n$ с плотностью $d = (d_1, \dots, d_n)$* .

Обозначим через M^d множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{Z}$ с плотностью d .

Введем пространство V_∞^d как множество всех измеримых функций f из $L_1(\mathbb{T})$ таких, что

$$\|f\|_{V_\infty^d} = \sup_{Q \in M^d} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \sum_{k \in Q} e^{ikx} dx \right| = \sup_{Q \in M^d} \left| \sum_{k \in Q} \hat{f}(k) \right| < \infty.$$

ЛЕММА 4. Пусть $n = 1$, $0 < \theta < 1$, $1/p = (1 - \theta)/2$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$L_{pq}(\mathbb{T}) \hookrightarrow (L_{21}, V_\infty^d)_{\theta q},$$

причем

$$\|f\|_{(L_{21}, V_\infty^d)_{\theta q}} \leq c \|f\|_{L_{pq}},$$

где c не зависит от f и $d \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d — плотность сети M^d , $0 < \tau < 2\pi$. Введем множество

$$A_\tau = \bigcup_{k=0}^{d-1} \left\{ x \in \mathbb{T} : \frac{2\pi k}{d} - \frac{\tau}{2d} \leq x \leq \frac{2\pi k}{d} + \frac{\tau}{2d} \right\}.$$

Мера $|A_\tau| \leq \tau$.

Для функции f определим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in (\mathbb{T} \setminus A_\tau) \text{ и } x \in \{x : |f(x)| < f^*(\tau)\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_0(x) = f(x) - f_1(x).$$

Тогда функционал Петре оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} K(t, f; L_{21}, V_\infty^d) &\leq \int_0^{2\tau} f_0^*(s) s^{-1/2} ds + t \int_{\mathbb{T} \setminus A_\tau} |f_1(x)| \left| \frac{e^{ir dx} - 1}{e^{id x} - 1} \right| dx \\ &\leq \int_0^{2\tau} s^{-1/2} f^*(s) ds + t \int_{\mathbb{T}} |f_1(x)| \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left| \frac{e^{ir dx} - 1}{e^{id x} - 1} \right| & \text{при } x \in \mathbb{T} \setminus A_\tau, \\ 0 & \text{при } x \in A_\tau. \end{cases}$$

Воспользуемся неравенством

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \leq \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt.$$

При этом, учитывая, что $\varphi^*(s) \leq 4/(\tau + s)$, получим

$$K(t, f) \leq 2c \left(\int_0^{2\tau} s^{-1/2} f^*(s) ds + t \int_{\tau}^{2\pi} f^*(s) \frac{ds}{s} \right).$$

Следовательно, взяв $\tau = t^2$ и последовательно проведя замены t на $t^{1/2}$ во внешних интегралах и s на st во внутренних, имеем

$$\begin{aligned} \|f \mid (L_{21} V_{\infty}^d)_{\theta q}\| &= \left(\int_0^{\infty} (t^{-\theta} K(t, f))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq 2c \left(\left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^{t^2} t^{-\theta} f^*(s) s^{-1/2} ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^{\infty} \left(t^{1-\theta} \int_{t^2}^{2\pi} f^*(s) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right) \\ &\leq 2c \left(\left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^1 t^{(1-\theta)/2} f^*(st) s^{1/2} \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^{\infty} \left(t^{(1-\theta)/2} \int_1^{2\pi} f^*(st) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right) \\ &\leq 2c \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\infty} \left(t^{(1-\theta)/2} f^*(st) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} s^{1/2} \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \left(t^{(1-\theta)/2} f^*(st) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \frac{ds}{s} \right) \\ &= |st \rightarrow t| \\ &= 2c \left(\int_0^1 s^{\frac{\theta}{2}-1} ds \|f \mid L_{pq}\| + \int_1^{\infty} s^{-3/2+\theta/2} ds \|f \mid L_{pq}\| \right) \\ &= c_1 \|f \mid L_{pq}\|, \end{aligned}$$

где c_1 зависит только от параметра θ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p > 2$, M_1 – множество всех компактов в $\mathbb{Z}^n$, M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{Z}^n$, $f = \sum_k a_k e^{ikx}$. Тогда

$$c_0 \|a \mid n_{p'q}(M_0)\| \leq \|f \mid L_{pq}(\mathbb{T}^n)\| \leq c_1 \|a \mid n_{p'q}(M_1)\|. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство (10) с учетом соотношения $n_{p'q}(M_1) = l_{p'q}$ следует из неравенства Харди–Литлвуда (при $p \geq 2$, $\|f\|_{L_{pq}(\mathbb{T}^n)} \leq c \|a\|_{l_{p'q}}$). Левое неравенство, как и в теореме 2, будем доказывать индуктивно. Пусть $n = 1$.

Заметим сначала, что для фиксированного $d \in \mathbb{N}$ и соответствующей сети M^d

$$\|a \mid n_{22}(M_d)\| \leq \|a\|_{l_2} = \|f \mid L_2\| \leq \|f \mid L_{21}\|$$

и

$$\|a \mid n_{1\infty}(M^d)\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{Q \in M^d \\ Q \geq k}} \left| \sum_{m \in Q} a_m \right| = \sup_{Q \in M^d} \left| \sum_{m \in Q} a_m \right| = \|f\|_{V_\infty^d}.$$

Таким образом, интерполируя эти неравенства (с учетом утверждения леммы 4), для отображения $T: f \rightarrow \{a_k\}$ получим

$$T: L_{p\infty} \rightarrow n_{p'\infty}(M^d), \quad 2 < p < \infty,$$

и верно неравенство

$$\|a \mid n_{p'\infty}(M^d)\| \leq c \|f \mid L_{p\infty}\|,$$

где c не зависит от d и f . Тогда, учитывая, что c не зависит от d , имеем

$$\|a \mid n_{p'\infty}(M_0)\| = \sup_{d \in \mathbb{N}} \|a \mid n_{p'\infty}(M^d)\| \leq c \|f \mid L_{p\infty}\|.$$

Далее, повторно применяя интерполяционную теорему, получим левое неравенство при $n = 1$. Завершаем доказательство так же, как и в теореме 2.

Будем говорить, что последовательность $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ имеет доминирующие гармонические осцилляции, если $\sup_{k \in \mathbb{N}} a_k^* / \bar{a}_k(M_0) < \infty$, где M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{Z}^n$. Множество функции f , коэффициенты Фурье которых имеют доминирующие гармонические осцилляции, обозначим через λ . Множество λ в одномерном случае содержит функции с монотонными [1] и квазимонотонными коэффициентами [2].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $2 < p < \infty$, $f \in \lambda$. Тогда для того чтобы $f \in L_{pq}(\mathbb{T}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы $\hat{f} \in l_{p'q}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $1 < p < 2$, для последовательности комплексных чисел $\{a_m\}_{m=1}^\infty$ имеет место соотношение

$$B = \left(\sum_{m=1}^\infty m^{2p-2} |a_m - a_{m+1}|^p \right)^{1/p} + \sup_{m>0} m^{1/p'} |a_m| < \infty.$$

Тогда $\sum_{m=1}^\infty a_m e^{imx}$ является рядом Фурье некоторой функции f на L_p и верно неравенство

$$\|f\|_{L_p} \leq cB,$$

где c зависит только от параметра p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – произвольная функция из $L_{p'}(-\pi, \pi]$ с рядом Фурье $\sum \hat{g}(m) e^{imx}$. Тогда, применяя неравенство Абеля, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) g(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-N}^N a_m e^{imx} g(x) dx = \sum_{m=1}^N a_m \hat{g}(m) \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} m(a_m - a_{m+1}) \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{g}(k) + a^N \sum_{m=1}^N \hat{g}(m). \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и теоремой 2

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)g(x) dx \\ & \leq \left(\sum_{m=1}^{N-1} m^{2p-2} |a_m - a_{m+1}|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{N-1} m^{p'-2} \left(\frac{1}{m} \left| \sum_{k=1}^m \hat{g}(k) \right| \right)^{p'} \right)^{1/p'} \\ & \quad + \sup_{m>0} m^{1/p'} |a_m| \| \hat{g} \|_{n_{p\infty}(M_0)} \\ & \leq C \left[\left(\sum_{m=1}^{N-1} m^{2p-2} |a_m - a_{m+1}|^p \right)^{1/p} + \sup_{m>0} m^{1/p} |a_m| \right], \\ & \quad \|g\|_{n_{pp'}(M_0)} \leq cB \|g\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого N

$$\left\| \sum_{m=1}^N a_m e^{imx} \right\|_p = \sup_{g \neq 0} \frac{\left| \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)g(x) dx \right|}{\|g\|_{p'}} \leq cB.$$

Откуда по критерию сходимости частичных сумм следует искомое утверждение.

§ 5. Необходимые условия принадлежности функции f пространству $L_p(\mathbb{T}^n)$ при $p > 2$

ЛЕММА 5. Пусть Q — гармонический отрезок в $\mathbb{Z}$, тогда невозрастающая перестановка $\varphi^*(t)$ функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \sum_{k \in Q} e^{ikx} \right|$$

не превосходит $C_p/t^{1/p'}$, где C_p зависит лишь от параметра p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = \{md\}_{m=0}^{M-1}$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{M^{1/p}} \frac{|e^{iMdx} - 1|}{|e^{idx} - 1|}.$$

Тогда для функции распределения имеем:

$$\begin{aligned} m(\varphi, \tau) &= \mu \left\{ x \in [0, 2\pi) : \varphi(x) \geq \tau \right\} = 2d\mu \left\{ x \in \left[0, \frac{\pi}{d}\right) : \varphi(x) \geq \tau \right\} \\ &\leq 2d\mu \left\{ x \in \left[0, \frac{\pi}{d}\right) : \frac{1}{M^{1/p}} \min \left(M, \frac{1}{dx} \right) \geq \tau \right\}. \end{aligned}$$

Если $\tau > M^{1/p'}$, то

$$m(\varphi, \tau) = 0 \leq 2m(x^{-1/p'}, \tau).$$

Если же $\tau < M^{1/p'}$, то

$$\begin{aligned} m(\varphi, \tau) &\leq 2d \left(\frac{1}{dM} + \mu \left\{ x \in \left[\frac{1}{dM}, \frac{\pi}{d} \right) : \frac{1}{(dx)^{1/p'}} \geq \tau \right\} \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{M} + \mu \left\{ x \in \left[\frac{1}{M}, \pi \right) : \frac{1}{x^{1/p'}} \geq \tau \right\} \right) \leq 2m(x^{-1/p'}, \tau). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $M_1, \dots, M_n$ – сети в $\mathbb{Z}$, $M = M_1 \times \dots \times M_n = \{e = e_1 \times \dots \times e_n : e_j \in M_j, j = 1, \dots, n\}$ – сеть в $\mathbb{Z}^n$, $\vec{1} \leq \vec{p} < \vec{\infty}$, $1 \leq q \leq \infty$. Через $n_{\vec{p}q}(M)$ обозначим множество всех последовательностей $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ таких, что

$$\left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{\frac{q}{p_1}-1} \dots k_n^{\frac{q}{p_n}-1} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}^q(M) \right)^{1/q} < \infty,$$

где $\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(M) = \sup_{\substack{e \in M \\ |e_j| > k_j}} \frac{1}{|e|} |\sum_{k \in e} \hat{f}(k)|$. Это пространство назовем *анизотропным сетевым* пространством.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $2 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{imx}$, M – гармоническая сеть в $\mathbb{Z}^n$. Тогда

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}^p(M) < C \|f\|_p^p,$$

т.е. $\hat{f} \in n_{\vec{p}p}(M)$, где $\vec{p} = (p' \dots p')$, $p' = p/(p-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем проводить для случая $n = 2$. Пусть $e = e_1 \times e_2$ – гармонический отрезок в $\mathbb{Z}^2$. Используя лемму 5, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|e_1|^{1/p_1}} \frac{1}{|e_2|^{1/p_2}} \left| \sum_{k_1 \in e_1} \sum_{k_2 \in e_2} a_{k_1 k_2} \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)| \frac{1}{|e_1|^{1/p_1}} \left| \sum_{k_1 \in e_1} e^{ik_1 x_1} \frac{1}{|e_2|^{1/p_2}} \sum_{k_2 \in e_2} e^{ik_2 x_2} \right| dx_1 dx_2 \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f^{*1}(t_1 x_2) t_1^{\frac{1}{p_1}-1} dt_1 \right)_{t_2}^{*2} t_2^{\frac{1}{p_2}-1} dt_2. \end{aligned}$$

Здесь $f^{*1}(t_1, x_2)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x_1, x_2)$ при фиксированном x_2 , а $\left(\int_0^{2\pi} f^{*1}(t_1 x_2) t_1^{\frac{1}{p_1}-1} dt_1 \right)_{t_2}^{*2}$ – невозрастающая перестановка функции $\int_0^{2\pi} f^{*1}(t_1 x_2) t_1^{\frac{1}{p_1}-1} dt_1$ по переменной x_2 , вычисленная в точке t_2 . Следовательно, при $p' = (p_1, p_2)$

$$\|\hat{f}\|_{n_{\vec{p}\infty}} \leq 2 \left\| \|f\|_{L_{p_1 1}} \right\|_{L_{p_2 1}}. \quad (11)$$

Пусть $p_0 < p < p_1$, $t_1, t_2 \in (0, \infty)$, $v_i = t_i^{\frac{p_0 p_1}{p_0 - p_1}}$, $i = 1, 2$, $a = \{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^2}$ – произвольный элемент $n_{\vec{p}'p}(M)$. Тогда для представления $a = a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{11}$, где

$a_{00} \in n_{p'_0, p'_0, \infty}(M)$, $a_{10} \in n_{p'_1, p'_0, \infty}(M)$, $a_{01} \in n_{p'_0, p'_1, \infty}(M)$, $a_{11} \in n_{p'_1, p'_1, \infty}(M)$,
имеем

$$\begin{aligned}
 & \sup_{m_1 \geq v_1 > 0} \sup_{m_2 \geq v_2 > 0} m_1^{1/p'_0} m_2^{1/p'_0} \sup_{|e_i| \geq m_i} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a_{r_1 r_2} \right| \\
 & \leq \sup_{m_1 \geq v_1 > 0} \sup_{m_2 \geq v_2 > 0} m_1^{1/p'_0} m_2^{1/p'_0} \sup_{|e_i| \geq m_i} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a_{r_1 r_2}^{00} \right| \\
 & \quad + t_1^{-1} \sup_{m_1 \geq v_1 > 0} \sup_{m_2 \geq v_2 > 0} m_1^{1/p'_1} m_2^{1/p'_0} \sup_{|e_i| \geq m_i} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a_{r_1 r_2}^{10} \right| \\
 & \quad + t_2^{-1} \sup_{m_1 \geq v_1 > 0} \sup_{m_2 \geq v_2 > 0} m_1^{1/p'_0} m_2^{1/p'_1} \sup_{|e_i| \geq m_i} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a_{r_1 r_2}^{01} \right| \\
 & \quad + t_1^{-1} t_2^{-1} \sup_{m_1 \geq v_1 > 0} \sup_{m_2 \geq v_2 > 0} m_1^{1/p'_1} m_2^{1/p'_1} \sup_{|e_i| \geq m_i} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a_{r_1 r_2}^{11} \right| \\
 & \leq (\|a_{00}\|_{n_{p'_0, p'_0, \infty}} + t_1^{-1} \|a_{10}\|_{n_{p'_1, p'_0, \infty}} + t_2^{-1} \|a_{01}\|_{n_{p'_0, p'_1, \infty}} + t_1^{-1} t_2^{-1} \|a_{11}\|_{n_{p'_1, p'_1, \infty}}).
 \end{aligned}$$

Учитывая произвольность представления $a = a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{11}$, получим

$$\begin{aligned}
 & \sup_{m_i \geq v_i > 0} m_1^{1/p'_0} m_2^{1/p'_0} \sup_{|e_i| \geq m_i} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{r \in e_1 \times e_2} a_r \right| \leq K(t_1^{-1}, t_2^{-1}, a) \\
 & = \inf_{a = a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{11}} (\|a_{00}\|_{p'_0 p'_0, \infty} + t_1^{-1} \|a_{10}\|_{p'_1 p'_0, \infty} \\
 & \quad + t_2^{-1} \|a_{01}\|_{p'_0 p'_1, \infty} + t_1^{-1} t_2^{-1} \|a_{11}\|_{p'_1 p'_1, \infty}). \tag{12}
 \end{aligned}$$

Функция $K(t_1, t_2, a)$ – обобщение функционала Петре [10].

Далее, используя монотонность $\bar{a}_k$ по каждому индексу, $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$ и доказанное неравенство (12), получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2} k_2^{p-2} \left(\sup_{|e_i| \geq k_i} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{r \in e} a_r \right| \right)^p \\
 & = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (k_1^{1/p'} k_2^{1/p'} \bar{a}_{k_1 k_2})^p \frac{1}{k_1} \frac{1}{k_2} \\
 & \leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \left[(k_1 k_2)^{-\theta(1/p'_0 - 1/p'_1)} \sup_{m_i \geq k_i} m_1^{1/p'_0} m_2^{1/p'_0} \bar{a}_{m_1 m_2} \right]^p \frac{1}{k_1} \frac{1}{k_2} \\
 & \leq c_1 \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \left((t_1 t_2)^{-\theta(1/p'_0 - 1/p'_1)} \sup_{m_i \geq t_i} m_1^{1/p'_0} m_2^{1/p'_0} \bar{a}_{m_1 m_2} \right)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\
 & = c_2 \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \left((t_1 t_2)^{\theta} \sup_{m_i \geq t_i} m_1^{1/p'_0} m_2^{1/p'_0} \bar{a}_{m_1 m_2} \right)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\
 & \leq c_2 \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} ((t_1 t_2)^{\theta} K(t_1^{-1}, t_2^{-1}, a))^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\
 & = c_2 \int_0^1 \int_0^1 ((t_1 t_2)^{-\theta} K(t_1, t_2, a))^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2},
 \end{aligned}$$

где $v_i = t_i^{\frac{p_0 p_1}{p_0 - p_1}}$. Воспользуемся теперь неравенством (11):

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (k_1 k_2)^{p-2} \bar{a}_{k_1 k_2}^p \\ & \leq c_3 \int_0^1 \int_0^1 \left[(t_1 t_2)^{-\theta} \inf_{f=f_{00}+f_{10}+f_{01}+f_{11}} \left(\|f_{00}\|_{p_{01}} \|f_{10}\|_{p_{11}} + t_1 \|f_{10}\|_{p_{11}} \|f_{01}\|_{p_{01}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + t_2 \|f_{01}\|_{p_{01}} \|f_{11}\|_{p_{11}} + t_1 t_2 \|f_{11}\|_{p_{11}} \|f_{01}\|_{p_{01}} \right) \right]^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2}. \end{aligned}$$

Пусть $w_1 = t_1^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$, $w_2 = t_2^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$. Введем обозначение:

$$g_0(x_1 x_2) = \begin{cases} f(x_1 x_2) & \text{при } |f(x_1, x_2)| > f^{*1}(w_1, x_2), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $f^{*1}(w_1, x_2)$ невозрастающая перестановка функции $f(x_1, x_2)$, взятая по первой переменной при фиксированном x_2 . Пусть $g_1(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - g_0(x_1, x_2)$. В свою очередь, каждую функцию g_0 и g_1 представим в виде

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= f_{10}(x_1, x_2) + f_{11}(x_1, x_2), \\ g_0(x_1, x_2) &= f_{00}(x_1, x_2) + f_{01}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_{00}(x_1, x_2) &= \begin{cases} g_0(x_1, x_2) & \text{при } \|g_0(\cdot, x_2)\|_{p_{01}} > (\|g_0(\cdot, x_2)\|_{p_{01}})^{*2}(w_2), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ f_{10}(x_1, x_2) &= \begin{cases} g_1(x_1, x_2) & \text{при } \|g_1(\cdot, x_2)\|_{p_{11}} > (\|g_1(\cdot, x_2)\|_{p_{11}})^{*2}(w_2), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда, считая, что $f(x_1, x_2)$ вне $[0, 2\pi]^2$ равна нулю, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (k_1 k_2)^{p-2} \bar{a}_{k_1 k_2}^p \leq c \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [(t_1 t_2)^{-\theta} K(t_1 t_2; f)]^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\ & \leq c_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [(t_1 t_2)^{-\theta(1/p_0 - 1/p_1)} K(t_1^{1/p_0 - 1/p_1}, t_2^{1/p_0 - 1/p_1}; f)]^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\ & \leq c_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(t_1 t_2)^{-\theta(1/p_0 - 1/p_1)} \left(\int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} f^{*1}(s_1, x_2) (s_1 s_2)^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)^{*2} \frac{ds_2}{s_2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + t_1^{1/p_0 - 1/p_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{t_2} f^{*1}(s_1, x_2) (s_2 - t_2)^{1/p_1 - 1} s_1^{1/p_0 - 1} ds_1 \right)^{*2} ds_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + t_2^{1/p_0 - 1/p_1} \int_0^{t_1} \left(\int_{t_2}^{t_1} f^{*1}(s_1, x_2) s_2^{1/p_0 - 1} (s_1 - t_1)^{1/p_1 - 1} ds_1 \right)^{*2} ds_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (t_1 t_2)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_2}^{t_1} f^{*1}(s_1, x_2) (s_1 - t_1)^{1/p_1} (s_2 - t_2)^{1/p_1} \frac{ds_1}{s_1} \right)^{*2} \frac{ds_2}{s_2} \right) \right]^p \\ & \quad \times \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2}. \end{aligned}$$

Здесь выражение $\left(\int_0^{t_2} f^{*1}(s_1, x_2)(s_1 s_2)^{1/p_0-1} ds_1\right)_{s_2}^{*2}$ –невозрастающая перестановка по переменной x_2 функции $F(x_2) = \int_0^{t_2} f^{*1}(s_1, x_2)s_1^{1/p_0-1} ds$, вычисленная в точке s_2 и умноженная на s_2^{1/p_0-1} . Аналогично определяются и другие подобные выражения.

Оценим каждое слагаемое

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(t_1 t_2)^{-\theta(1/p_0-1/p_1)} \int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} f^{*1}(s_1, x_2)(s_1 s_2)^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)_{s_2}^{*2} \frac{ds_2}{s_2} \right]^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 f^{*1}(s_1 t_1, x_2)(s_1 s_2)^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)_{s_2 t_2}^{*2} \frac{ds_2}{s_2} \right]^p dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Минковского и сделав замену $s_2 t_2$ на t_2 , первое слагаемое оцениваем через

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 s_2^{1/p_0-1/p} \frac{ds_2}{s_2} \right)^p \int_0^{2\pi} \left(\left(\int_0^1 f^{*1}(s_1 t_1, x_2)s_1^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)_{t_2}^{*2} \right)^p dt_1 dt_2 \\ &= c \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 f^{*1}(s_1 t_1, x_2)s_1^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)^p dt_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

Также применяя неравенство Минковского и соответствующие замены, получим оценку через величину $\|f\|_{L_p}$.

Второе слагаемое:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(t_1 t_2)^{\theta(1/p_1-1/p_0)} t_1^{1/p_0-1/p_1} \right. \\ & \quad \times \left. \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{t_2} f^{*1}(s_1 x_2)(s_1 - t_1)^{1/p_1} s_2^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)_{s_2}^{*2} \frac{ds_2}{s_2} \right]^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\ & \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(t_1 t_2)^{-\theta(1/p_0-1/p_1)} t_1^{1/p_0-1/p_1} \right. \\ & \quad \times \left. \int_0^1 \left(\int_1^\infty f^{*1}(s_1 t_1, x_2)(s_1 - 1)^{1/p_1} t_1^{1/p_1} (s_2 t_2)^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)_{s_2 t_2}^{*2} \frac{ds_2}{s_2} \right]^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\ & \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\int_1^\infty f^{*1}(s_1 t_1, x_2)(s_1 - 1)^{1/p_1} t_1^{1/p_1} (s_2)^{1/p_0} \frac{ds_1}{s_1} \right)_{s_2 t_2}^{*2} \frac{ds_2}{s_2} \right]^p dt_1 dt_2 \\ & \leq \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 s_2^{1/p_0-1/p} \frac{ds_2}{s_2} \right]^p \int_0^{2\pi} \left(\int_1^\infty f^{*1}(s_1 t_1, x_2)(s_1 - 1)^{1/p_1} \frac{ds_1}{s_1} \right)_{(t_2)}^{*2p} dt_2 dt_1 \\ & \leq C \int_0^{2\pi} \left(\int_1^\infty (s_1 - 1)^{1/p_1-1/p} \frac{ds_1}{s_1} \left(\int_0^{2\pi} |f^{*1}(t_1, x_2)|^p dt_1 \right)^{1/p} \right)^p dx_2 = c_1 \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Третье и четвертое слагаемые оцениваются аналогично. Теорема доказана.

Последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ будем называть обобщенно монотонной в $\mathbb{Z}^n$, если для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ выполняется неравенство

$$|a_m| \leq c \frac{1}{|Q_m|} \left| \sum_{k \in Q_m} a_k \right|, \quad Q_m = \{k \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq k_j \text{ sign } m_j \leq |m|\}.$$

Условие обобщенной монотонности является более слабым, чем монотонность и квазимонотонность.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $2 \leq p < \infty$, $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ikx}$, где $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ — обобщенно монотонна в $\mathbb{Z}^n$. Тогда для того чтобы $f \in L_p$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \cdots k_n^{p-2} \hat{f}^p(k_1, \dots, k_n) < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 6 (обобщение теоремы Харди). Пусть $2 \leq p < \infty$, $\{I_m = I_1^m \times \cdots \times I_n^m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ — произвольная последовательность гармонических отрезков таких, что $|I_j^m| = |m_j|$, $j = 1, \dots, n$. Если функция $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$, $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) e^{imx}$ — ее ряд Фурье, $b_m = \frac{1}{|I_m|} \sum_{k \in I_m} \hat{f}(k)$, то ряд

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} b_m e^{imx}$$

сходится в $L_p(\mathbb{T}^n)$ и верно неравенство

$$\left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} b_m e^{imx} \right\|_{L_p} \leq c_{p,n} \|f\|_{L_p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится с помощью последовательного применения неравенства Харди–Литлвуда и теоремы 4

$$\begin{aligned} \left\| \sum b_m e^{imx} \right\|_{L_p}^p &\leq c_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |m_1|^{p-2} \cdots |m_n|^{p-2} |b_m|^p \\ &\leq c_2 \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1 \cdots k_n)^{p-2} \hat{a}_k^p(M_0) \leq c_3 \|f\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. Кокилашвили В. М. О приближении периодических функций // Труды Тбилисского матем. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
3. Дьяченко М. И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). №1. С. 55–72.
4. Djachenko M. I. Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients // Anal. Math. 1990. V. 16. №3. P. 173–190.
5. Moricz F. On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. №2. P. 417–425.
6. Дьяченко М. И. Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // Матем. сб. 1993. Т. 184. №3. С. 3–20.
7. Hunt R. A. On $L(p, q)$ spaces // Enseign. Math., II. 1966. V. 12. P. 249–276.
8. Берг Й., Лефстрем Й. Введение // Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1960.
9. Дьяченко М. И. Кусочно-монотонные функции многих переменных и теорема Харди–Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №6. С. 1156–1170.
10. Cobus F., Peetre J. Interpolation compact operators: The multidimensional case // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 63. №2. P. 371–400.