Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Онищик, О. В. Платонова, Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством. II, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 3, 103–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:11:56

УДК 515.177

А. Л. Онищик, О. В. Платонова

Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством. II

Продолжается изучение однородных и четно-однородных комплексных супермногообразий размерности $n \mid m$, редукцией которых является комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$, в предположении, что $m \leq n$. Мы классифицируем все нерасщепимые супермногообразия этого типа, ретракт которых допускает полную проективную группу в качестве группы автоморфизмов. Для однородных супермногообразий, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, мы вычисляем их когомологии со значениями в касательном пучке.

Библиография: 11 названий.

Введение

Эта работа является непосредственным продолжением части I (см. [1]). Мы сохраняем терминологию и обозначения части I и продолжаем нумерацию параграфов, теорем, формул и т. д., начатую в этой части.

Основным результатом части II является классификация нерасщепимых четно-однородных супермногообразий $(M, \mathcal{O})$ размерности $n \mid m$, где $M = \mathbb{CP}^n$, $n \geq 2$ и $n \geq m$, имеющих ретракт, четно однородный относительно $SL_{n+1}(\mathbb{C})$ (последнее условие автоматически выполнено, если n четно). В § 10 доказывается, что при сделанных предположениях $n = m$, причем $(M, \mathcal{O})$ изоморфно либо $\Pi Gr_{n+1 \mid n+1,1 \mid 1}$, либо некоторому супермногообразию S_k , $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$, размерности $2 \mid 2$, ретракт которого определяется представлением $\varphi = d^k + d^{-3-k}$. Оказывается, что среди этих супермногообразий однородными являются в точности $\Pi Gr_{n+1 \mid n+1,1 \mid 1}$ и S_{-1} . В § 11 вычисляются когомологии этих однородных супермногообразий со значениями в касательном пучке. Результаты двух указанных параграфов были частично анонсированы в [2], [3].

Отметим также, что в § 9, п. 3, построена серия нерасщепимых, четно-однородных относительно $Sp_{2r}(\mathbb{C})$ супермногообразий размерностей $2r - 1 \mid 2r - 2$, $r \geq 2$, ретракты которых однородны. Это некоторые подмногообразия коразмерности $0 \mid 1$ в $\Pi Gr_{2r \mid 2r,1 \mid 1}$. Полное решение нашей задачи в случае ретракта, $\bar{0}$ -однородного относительно $Sp_{2r}(\mathbb{C})$, в настоящее время еще не получено.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-01263).

§ 7. Функции перехода расщепимого 0-однородного супермногообразия

Настоящий параграф носит технический характер. Мы рассматриваем расщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O})$, где $M = \mathbb{CP}^n$, а $\mathcal{O} = \bigwedge \mathcal{E}$, причем $\mathcal{E}$ – пучок голоморфных сечений некоторого векторного расслоения $p: \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{CP}^n$, однородного относительно $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Наша задача – вычислить функции перехода для такого супермногообразия в терминах линейного представления, определяющего $\mathbf{E}$.

Как известно, локальную систему координат супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ над открытым множеством $U \subset \mathbb{CP}^n$ можно задать в виде $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m)$, где $x_1, \dots, x_n$ – локальные координаты многообразия $\mathbb{CP}^n$ в U (*четные координаты*), а $\xi_1, \dots, \xi_m$ – базис модуля голоморфных сечений расслоения $\mathbf{E}$ над U (*нечетные координаты*), в предположении, что $\mathbf{E}$ тривиально над U .

Точка $u \in \mathbb{CP}^n$ задается однородными координатами $(u_1 : \dots : u_{n+1})$. Рассмотрим покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=1, \dots, n+1}$ многообразия $\mathbb{CP}^n$ областями $U_i = \{u \in \mathbb{CP}^n \mid u_i \neq 0\}$. Тогда локальные (неоднородные) координаты $x_k^{(i)}$, $k = 1, \dots, n$, в области U_i можно определить следующим образом:

$$x_k^{(i)} = \begin{cases} u_k u_i^{-1} & \text{при } k < i, \\ u_{k+1} u_i^{-1} & \text{при } n \geq k \geq i. \end{cases} \quad (37)$$

При $i < j$ имеют место функции перехода, определенные в $U_i \cap U_j$:

$$x_k^{(j)} = \begin{cases} x_k^{(i)} (x_{j-1}^{(i)})^{-1} & \text{при } k < i, k \geq j, \\ (x_{j-1}^{(i)})^{-1} & \text{при } k = i, \\ x_{k-1}^{(i)} (x_{j-1}^{(i)})^{-1} & \text{при } i < k < j. \end{cases} \quad (38)$$

Поскольку $U_i \simeq \mathbb{C}^n$ (как комплексные многообразия), расслоение $\mathbf{E}$ тривиально над U_i . Иначе говоря, для любого i существует тривиализация расслоения $\mathbf{E}$ над U_i , т.е. изоморфизм векторных расслоений $k_i: U_i \times \mathbb{C}^m \rightarrow p^{-1}(U_i) \subset \mathbf{E}$ над U_i . Тогда в качестве базиса модуля сечений над U_i можно взять сечения

$$\xi_\gamma^{(i)}(x) = k_i(x, e_\gamma), \quad x \in U_i, \quad \gamma = 1, \dots, m.$$

Здесь $e_1, \dots, e_m$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^m$. Для любых $i \neq j$ справедливо равенство

$$k_j(x, z) = k_i(x, \psi_{ij}(x)z),$$

где $x \in \mathbb{CP}^n$, $z \in \mathbb{C}^m$, $\psi_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ – голоморфное отображение. Положим

$$\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_m^{(i)}).$$

Тогда в $U_i \cap U_j$ имеем

$$\xi^{(j)} = \xi^{(i)} \psi_{ij}.$$

Таким образом, для нахождения функций перехода достаточно вычислить отображения ψ_{ij} .

В силу наших предположений имеем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi$, где $\varphi: P \rightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ – голоморфное представление подгруппы $P \subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Это значит, что $\mathbf{E}$ ассоциировано с главным расслоением $\pi: \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{CP}^n$ группы $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ на смежные классы по подгруппе P . Следовательно, тривиализации и функции перехода для $\mathbf{E}$ можно построить по тем же объектам для этого главного расслоения.

Определим теперь тривиализацию $h_i: U_i \times P \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ главного расслоения над U_i . Для этого зададим голоморфное сечение $s: U_{n+1} \rightarrow \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ формулой

$$s(x_1 : \dots : x_n : 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и положим

$$h_{n+1}(x, h) = s(x)h, \quad x \in U_{n+1}, \quad h \in P.$$

Поскольку $\pi(g) = go$, $g \in \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, где $o = (0 : \dots : 0 : 1)$,

$$\pi(h_{n+1}(x, h)) = s(x)ho = s(x)o = x.$$

Значит, h_{n+1} – тривиализация над U_{n+1} .

Проективное преобразование, определенное матрицей

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

переводит область U_i в U_{i+1} для $i \leq n$, а область U_{n+1} в U_1 . Очевидно, $w^{n+1} = \mathrm{id}$. Используя w , определим тривиализацию $h_i: U_i \times P \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ для любого $i = 1, \dots, n+1$ формулой

$$h_i(x, h) = w^i h_{n+1}(w^{-i}(x), h) = w^i s(w^{-i}(x))h. \quad (39)$$

В области $U_i \cap U_j$ имеем

$$h_i(x, h) = h_i(x, z_{ij}(x)h), \quad x \in U_i \cap U_j, \quad h \in P, \quad (40)$$

где $z_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow P$ – функции перехода главного расслоения $\pi: \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Вычислим эти функции перехода.

Считая, что $i = n+1 > j$, из (39) и (40) получаем

$$h_j(x, o) = h_{n+1}(x, z_{n+1,j}(x)) = s(x)z_{n+1,j}(x).$$

Из (39) видим, что

$$h_j(x, o) = w^j s(w^{-j}(x)).$$

Из последних двух равенств следует, что

$$z_{n+1,j}(x) = s(x)^{-1} w^j s(w^{-j}(x)).$$

Явное вычисление показывает, что

$$z_{n+1,j}(x) = \begin{pmatrix} & -x_1 & & \\ 0_{j-1,n-j} & \vdots & E_{j-1} & 0 \\ & -x_{j-1} & & \\ 0 & -x_j & 0 & 0 \\ & -x_{j+1} & & \\ E_{n-j} & \vdots & 0_{n-j,j-1} & 0 \\ & -x_n & & \\ 0 & 1 & 0 & x_j^{-1} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где $x = (x_1 : \dots : x_n : 1)$, через $0_{p,q}$ обозначается нулевая матрица с p строками и q столбцами и через E_p , как обычно, — единичная матрица порядка p .

Из равенства $z_{n+1,i} z_{ij} = z_{n+1,j}$ можно найти все остальные z_{ij} :

$$z_{ij} = z_{n+1,i}^{-1} z_{n+1,j}. \quad (42)$$

Как видно из сказанного выше, функции перехода для расслоения $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi$ имеют вид

$$\psi_{ij} = \varphi(z_{ij}).$$

Таким образом, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Функции перехода для нечетных координат супермногообразия $(\mathbb{CP}^n, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$ имеют вид*

$$\xi^{(i)} = \varphi(z_{ij}) \xi^{(j)},$$

где $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_m^{(i)})$ — строка нечетных координат над U_i , и z_{ij} вычисляются по формулам (41), (42).

ПРИМЕР. Рассмотрим случай $n = 2$. Для простоты обозначим координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} x_p &= x_p^{(3)}, \quad y_p = x_p^{(2)}, \quad z_p = x_p^{(1)}, \\ \xi_p &= \xi_p^{(3)}, \quad \eta_p = \xi_p^{(2)}, \quad \zeta_p = \xi_p^{(1)}, \end{aligned} \quad p = 1, 2.$$

Матрицы z_{ij} имеют вид

$$z_{31} = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 0 \\ 1 & -x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad z_{32} = \begin{pmatrix} -x_1 & 1 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad z_{21} = \begin{pmatrix} -x_2^{-1} & 1 & 0 \\ -x_1 x_2^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1^{-1} x_2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\varphi = d^k + d^l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$. Используя (38) и предложение 4, нетрудно вычислить функции перехода расщепимого супермногообразия $(\mathbb{CP}^2, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$:

$$\begin{cases} y_1 = z_1^{-1}, \\ y_2 = z_1^{-1} z_2, \\ \eta_1 = z_1^k \zeta_1, \\ \eta_2 = z_1^l \zeta_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = z_2^{-1}, \\ x_2 = z_1 z_2^{-1}, \\ \xi_1 = z_2^k \zeta_1, \\ \xi_2 = z_2^l \zeta_2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 y_2^{-1}, \\ x_2 = y_2^{-1}, \\ \xi_1 = y_2^k \eta_1, \\ \xi_2 = y_2^l \eta_2. \end{cases} \quad (43)$$

При этом мы считаем, что $\xi_p, \eta_p, \zeta_p, p = 1, 2$, – базисные голоморфные сечения расслоений $\mathbf{E}_{d^k}$ и $\mathbf{E}_{d^l}$ над U_1, U_2, U_3 соответственно. Поэтому матрицы ψ_{ij} будут диагональными.

§ 8. Классификация нерасщепимых супермногообразий и подъем векторных полей

Пусть $(M, \mathcal{O})$ – некоторое супермногообразие, $\text{Aut}(M, \mathcal{O})$ – группа его автоморфизмов. Рассмотрим пучок $\text{Aut } \mathcal{O}$ автоморфизмов структурного пучка $\mathcal{O}$ (как пучка супералгебр). Для любого $F = (f, \varphi) \in \text{Aut}(M, \mathcal{O})$ отображение $\text{Int } F: a \mapsto \varphi a \varphi^{-1}$ есть автоморфизм пучка групп $\text{Aut } \mathcal{O}$, что приводит к действию Int группы $\text{Aut}(M, \mathcal{O})$ на $\text{Aut } \mathcal{O}$ автоморфизмами этого пучка. Очевидно, любой $a \in \text{Aut } \mathcal{O}$ отображает подпучок $\mathcal{J} = \mathcal{O}_{\bar{1}}$ на себя и поэтому сохраняет фильтрацию (2) пучка $\mathcal{O}$ и индуцирует некоторый росток автоморфизма соответствующего градуированного пучка $\text{gr } \mathcal{O}$. По определению a индуцирует на $\mathcal{F} = \mathcal{O}/\mathcal{J}$ тождественное преобразование.

Рассмотрим фильтрацию

$$\text{Aut } \mathcal{O} = \text{Aut}_{(0)} \mathcal{O} \supset \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O} \supset \text{Aut}_{(4)} \mathcal{O} \supset \dots,$$

где

$$\text{Aut}_{(2p)} \mathcal{O} = \{a \in \text{Aut } \mathcal{O} \mid a(u) - u \in \mathcal{J}^{2p} \text{ для всех } u \in \mathcal{O}\}.$$

Легко видеть, что $\text{Aut}_{(2p)} \mathcal{O}$ – подпучки нормальных подгрупп.

Пусть $\mathbf{E}$ – голоморфное векторное расслоение над комплексным многообразием M и пусть $\mathcal{E}$ – пучок голоморфных сечений расслоения $\mathbf{E}$. Тогда мы имеем расщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, где $\mathcal{O}_{\text{gr}} = \bigwedge \mathcal{E}$. Пусть $\text{Aut } \mathbf{E}$ – группа всех автоморфизмов векторного расслоения $\mathbf{E}$. Очевидно, любой автоморфизм расслоения $\mathbf{E}$ порождает некоторый автоморфизм супермногообразия $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, так что получается естественное вложение $\text{Aut } \mathbf{E} \subset \text{Aut}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Отсюда следует, что $\text{Aut } \mathbf{E}$ действует с помощью Int на пучке $\text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}$ и, значит, на множестве одномерных когомологий этого пучка.

Рассмотрим задачу классификации супермногообразий, имеющих заданный ретракт $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Решение этой задачи можно сформулировать в терминах 1-когомологий пучка $\text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}$. Ниже мы сформулируем несколько нужных нам результатов.

В [4] доказана

ТЕОРЕМА 11. Любому супермногообразию $(M, \mathcal{O})$, имеющему $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ в качестве ретракта, т.е. удовлетворяющему условию $(M, \text{gr } \mathcal{O}) \simeq (M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, отвечает элемент множества $H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$, причем расщепимому супермногообразию $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ соответствует единичный класс $e \in H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Это соответствие порождает биекцию множества классов изоморфных супермногообразий, удовлетворяющих упомянутому условию, на множество орбит действия Int группы $\text{Aut } \mathbf{E}$ на $H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$.

Классы когомологий мы будем задавать кошиклями Чеха на достаточно мелких открытых покрытиях $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ многообразия M . Опишем в этих терминах соответствие, о котором идет речь в теореме 11. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – такое супермногообразие, что $(M, \text{gr } \mathcal{O}) = (M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Мы можем выбрать открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ многообразия M таким образом, что над каждым U_i , $i \in I$, имеется изоморфизм $f_i: \mathcal{O}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{gr}}|_{U_i}$, индуцирующий тождественный изоморфизм $\mathbb{Z}$ -градуированных пучков. Полагая $g_{ij} = f_i f_j^{-1}$, получим 1-кошикл $g = (g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Его класс когомологий $\gamma \in H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$ не зависит от выбора изоморфизмов f_i . Это и есть класс когомологий, отвечающий супермногообразию $(M, \mathcal{O})$.

Поскольку отмеченная точка $e \in H^1(M, \text{Aut}_{(1)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$ неподвижна при действии группы $\text{Aut } \mathbf{E}$, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. Указанные ниже условия эквивалентны.

- (1) Любое супермногообразие, имеющее $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ в качестве ретракта, изоморфно $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$.
- (2) $H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}) = \{e\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Введенное выше покрытие $\mathfrak{U}$ можно выбрать так, чтобы $\mathbf{E}$ было тривиальным над U_i для любого $i \in I$. Тогда для любого $i \in I$ имеем изоморфизм $g_i: \mathcal{O}_{\text{gr}}|_{U_i} \rightarrow \bigwedge_{\mathcal{F}_n(x^{(i)})} (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_m^{(i)})|_{U_i}$, который вводит в U_i локальную систему координат $x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \xi_1^{(i)}, \dots, \xi_m^{(i)}$. Для любой пары i, j , такой что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, получаем изоморфизм $\varphi_{ij} = g_i g_j^{-1}: \bigwedge_{\mathcal{F}_n(x^{(j)})} (\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_m^{(j)})|_{U_j} \rightarrow \bigwedge_{\mathcal{F}_n(x^{(i)})} (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_m^{(i)})|_{U_i}$, который записывается функциями перехода супермногообразия $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Можно спросить, как записать функции перехода для $(M, \mathcal{O})$ при помощи соответствующего 1-кошикла g . Рассмотрим изоморфизмы $\psi_{ij} = g_i f_i f_j^{-1} g_j^{-1} = g_i g_{ij} g_j^{-1}$. Очевидно, $\psi_{ij} = (g_i g_{ij} g_i^{-1}) \varphi_{ij} = g_{ij}^{(i)} \varphi_{ij}$, где $g_{ij}^{(i)} = g_i g_{ij} g_i^{-1}$ – это автоморфизм пучка $\bigwedge_{\mathcal{F}_n(x^{(i)})} (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_m^{(i)})|_{(U_i \cap U_j)}$, полученный из g_{ij} переносом при помощи g_i , т.е. запись автоморфизма g_{ij} в координатах $x^{(i)}, \xi^{(i)}$. Значит, функции перехода супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ можно получить из функций перехода для $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, применяя к последним автоморфизм $g_{ij}^{(i)}$.

Описание множества $H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$ в ряде случаев сводится к вычислению когомологий касательного пучка $\mathcal{T}_{\text{gr}}$ супермногообразия $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Пучку автоморфизмов $\text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}$ соответствует пучок

$$\mathcal{T}_{\text{gr}}^{(2)} = (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{(2)} \cap (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{\bar{0}} = \bigoplus_{p \geq 1} (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{2p}$$

четных векторных полей, входящих в фильтр $(\mathcal{T}_{\text{gr}})^{(2)}$ из (5). Используя обычный экспоненциальный ряд, можно определить изоморфизм пучков множеств $\exp: \mathcal{T}_{\text{gr}}^{(2)} \rightarrow \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}$ [5]. Положим $\log = \exp^{-1}$. Рассмотрим отображение $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}} \rightarrow (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2$, переводящее росток $a \in \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}$ в 2-компоненту ростка $\log a \in (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{(2)}$. Легко проверяется, что λ_2 является гомоморфизмом пучков групп, причем имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Aut}_{(4)} \mathcal{O} \longrightarrow \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_2} (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2 \longrightarrow 0. \quad (44)$$

В частности, возникает гомоморфизм множеств с отмеченными точками $\lambda_2^*: H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}) \rightarrow H^1(M, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $H^1(M, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{2p}) = 0$ для всех $p > 1$, тогда отображение $\lambda_2^*: H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}) \rightarrow H^1(M, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2)$ является инъекцией.

Доказательство см. в [6, предложение 3.2].

Для вычисления фактора множества $H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$ по группе $\text{Aut } \mathbf{E}$ полезно следующее утверждение. Для любого $c \in \mathbb{C}^\times$ обозначим через A_c автоморфизм расслоения $\mathbf{E}$, определяемый умножением на скаляр c .

ЛЕММА 3. Имеем

$$\lambda_2^*(\text{Int } A_c) = c^2 \lambda_2^*, \quad c \in \mathbb{C}^\times.$$

Доказательство см. в [6, лемма 3.2].

Из предложения 5 и леммы 3 легко выводится следующая теорема (см. [6, предложение 3.3]).

ТЕОРЕМА 12. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} H^1(M, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{2p}) &= 0 \quad \text{для всех } p > 1, \\ H^1(M, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2) &= \mathbb{C}, \\ H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}) &\neq \{e\}. \end{aligned}$$

Тогда λ_2^* – биекция и $H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}}) / \text{Aut } \mathbf{E}$ – множество из двух элементов.

Пусть $(M, \mathcal{O})$ – супермногообразие, имеющее $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ своим ретрактом. Как мы видели в § 1, фильтрация (5) касательного пучка приводит к точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p+1)} \longrightarrow \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)} \xrightarrow{\sigma_p} \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})_p, \quad p \geq -1. \quad (45)$$

Будем говорить, что векторное поле $u \in \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})_p$ поднимается на $(M, \mathcal{O})$, если $u \in \text{Im } \sigma_p$. В этом случае можно считать, что $u = \sigma_p(\hat{u})$, где $\hat{u} \in \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{(p)}$ имеет ту же четность, что и p . Очевидно, множество векторных полей $u \in \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})_p$, поднимающихся на $(M, \mathcal{O})$, совпадает с естественным образом пространства

$\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_p$, определенного также в § 1 (часть I). Мы будем отождествлять его с $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_p$,

Выразим определенное нами свойство в когомологических терминах. Пусть $(M, \mathcal{O})$ определяется классом $\gamma \in H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Как мы видели выше, в некотором открытом покрытии $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ многообразия M класс γ определяется коциклом $g = (g_{ij})$, где $g_{ij} = f_i f_j^{-1}$, причем $(f_i)_{i \in I}$ – система изоморфизмов пучков супералгебр $f_i: \mathcal{O}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{gr}}|_{U_i}$ таких, что $f_i(\varphi) = \varphi + \mathcal{J}^{q+1} \in (\mathcal{O}_{\text{gr}})_q$, $\varphi \in \mathcal{J}^q$. Напомним, что пространство $H^*(M, \mathcal{T}_{\text{gr}})$ является биградуированной алгеброй относительно операции $[\cdot, \cdot]$, индуцированной скобкой Ли в пучке $\mathcal{T}_{\text{gr}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Векторное поле $v \in \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})_p$ поднимается на $(M, \mathcal{O})$ тогда и только тогда, когда существует такая 0-коцепь $(v_i) \in C^0(\mathfrak{U}, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{(p)})$, что*

$$\begin{aligned} v_i &\equiv v \bmod (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{(p+1)}(U_i), \\ g_{ij}v_j &= v_i g_{ij} \quad \text{в } U_i \cap U_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

В этом случае имеем

$$[\lambda_2^*(\gamma), v] = 0. \quad (46)$$

Доказательство см. в [6, предложение 3.7].

В заключение рассмотрим случай, когда нечетная размерность $m \leq 3$. Заметим, что случай $m = 1$ не представляет для нас интереса, так как все супермногообразия, нечетная размерность которых равна 1, расщепимы. Пусть, как и выше, $(M, \mathcal{O})$ – супермногообразие с ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, определенное классом $\gamma \in H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Предположим, что $m = 2$ или 3. Тогда*

- (1) *отображение $\lambda_2: \mathcal{A}ut_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}} \rightarrow (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2$ является изоморфизмом пучков групп;*
- (2) *пусть векторное поле $v \in \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})_p$ удовлетворяет (46); поле v поднимается на $(M, \mathcal{O})$, если $m = 2$ или если $m = 3$ и $p \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) непосредственно следует из (44), поскольку пучок $\mathcal{A}ut_{(4)} \mathcal{O}_{\text{gr}}$ тривиален.

Докажем (2). Пусть $\zeta = \lambda_2^*(\gamma)$. В подходящем покрытии $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ многообразия M классы ζ и γ определяются коциклами z и g , причем $g_{ij} = \exp z_{ij} = \text{id} + z_{ij}$. Если $[\zeta, v] = 0$, то существует такая коцепь $(u_i) \in C^0(\mathfrak{U}, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_{p+2})$, что $[z_{ij}, v] = u_i - u_j$ в $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Положим $v_i = v + u_i$. Из наших предположений следует, что $[z_{ij}, [z_{ij}, v_j]] = [z_{ij}, u_j] = 0$. Отсюда выводится, что

$$g_{ij}v_j g_{ij}^{-1} = (\exp \text{ad } z_{ij})(v_j) = v_j + [z_{ij}, v_j] = v + u_i = v_i$$

в $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. В силу предложения 6 v поднимается на $(M, \mathcal{O})$.

ЗАМЕЧАНИЯ. В случае $m = 2$ имеем $(\mathcal{T}_{\text{gr}})_2 \simeq \Theta \otimes \wedge^2 \mathcal{E}$, и утверждение (1) приводит к классификации нерасщепимых супермногообразий, данной в [7, гл. 4, § 2, предложение 9].

Утверждение (2) иным способом доказано в [8] (см. также [9, следствие 2 теоремы 1]).

§9. Примеры нерасщепимых $\bar{0}$ -однородных супермногообразий

1. Первым из наших примеров является Π -симметричный суперграссманиан $\Pi \text{Gr}_{n+1 | n+1, 1 | 1}$, построенный Ю. И. Маниным в [7, гл. 5, §6]. Опишем его в терминах локальных координат и функций перехода.

Рассмотрим покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=1, \dots, n+1}$ пространства $\mathbb{CP}^n$, определенное в §7. Области U_i служат координатными окрестностями и для супермногообразия $\Pi \text{Gr}_{n+1 | n+1, 1 | 1}$. Локальные координаты $x_k^{(i)}$ и $\xi_k^{(i)}$ в окрестности U_i записываются в виде матрицы:

$$C_i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} & \xi_1^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ x_{i-1}^{(i)} & \xi_{i-1}^{(i)} \\ 1 & 0 \\ x_i^{(i)} & \xi_i^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{(i)} & \xi_n^{(i)} \\ \xi_1^{(i)} & x_1^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ \xi_{i-1}^{(i)} & x_{i-1}^{(i)} \\ 0 & 1 \\ \xi_i^{(i)} & x_i^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ \xi_n^{(i)} & x_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где строки с номерами i и $i + n + 1$ образуют единичную матрицу. Переход к локальным координатам в окрестности U_j , где $i < j$, получается из равенства

$$C_j = C_i T_{ij},$$

где

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} x_{j-1}^{(i)} & \xi_{j-1}^{(i)} \\ \xi_{j-1}^{(i)} & x_{j-1}^{(i)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (x_{j-1}^{(i)})^{-1} & -(x_{j-1}^{(i)})^{-2} \xi_{j-1}^{(i)} \\ -(x_{j-1}^{(i)})^{-2} \xi_{j-1}^{(i)} & (x_{j-1}^{(i)})^{-1} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Вычисляя произведение $C_i T_{ij}$, получим следующие функции перехода для суперграссманиана $\Pi \text{Gr}_{n+1 | n+1, 1 | 1}$:

$$\begin{cases} x_k^{(j)} = x_k^{(i)} / x_{j-1}^{(i)} - (x_{j-1}^{(i)})^{-2} \xi_k^{(i)} \xi_{j-1}^{(i)}, & k < i, k \geq j, \\ x_i^{(j)} = 1 / x_{j-1}^{(i)}, \\ x_k^{(j)} = x_{k-1}^{(i)} / x_{j-1}^{(i)} - (x_{j-1}^{(i)})^{-2} \xi_k^{(i)} \xi_{j-1}^{(i)}, & i < k < j, \\ \xi_k^{(j)} = -x_k^{(i)} / (x_{j-1}^{(i)})^2 \xi_{j-1}^{(i)} + 1 / x_{j-1}^{(i)} \xi_k^{(i)}, & k < i, k \geq j, \\ \xi_i^{(j)} = -1 / (x_{j-1}^{(i)})^2 \xi_{j-1}^{(i)}, \\ \xi_k^{(j)} = 1 / x_j^{(i)} \xi_{k-1}^{(i)} - x_{k-1}^{(i)} / (x_{j-1}^{(i)})^2 \xi_{j-1}^{(i)}, & i < k < j. \end{cases} \quad (49)$$

Нетрудно понять, что функции перехода для ретракта супермногообразия $\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}$ будут иметь вид

$$\begin{cases} x_k^{(j)} = x_k^{(i)} / x_{j-1}^{(i)}, & k < i, k \geq j, \\ x_i^{(j)} = 1 / x_{j-1}^{(i)}, \\ x_k^{(j)} = x_{k-1}^{(i)} / x_{j-1}^{(i)}, & i < k < j, \\ \xi_k^{(j)} = -x_k^{(i)} / (x_{j-1}^{(i)})^2 \xi_{j-1}^{(i)} + 1 / x_{j-1}^{(i)} \xi_k^{(i)}, & k < i, k \geq j, \\ \xi_i^{(j)} = -1 / (x_{j-1}^{(i)})^2 \xi_{j-1}^{(i)}, \\ \xi_k^{(j)} = 1 / x_j^{(i)} \xi_{k-1}^{(i)} - x_{k-1}^{(i)} / (x_{j-1}^{(i)})^2 \xi_{j-1}^{(i)}, & i < k < j. \end{cases} \quad (50)$$

Отсюда следует, что этот ретракт изоморфен супермногообразию $(\mathbb{CP}^n, \Omega)$, где Ω — пучок ростков голоморфных форм на $\mathbb{CP}^n$. Действительно, локальные координаты в окрестности U_i для $(\mathbb{CP}^n, \Omega)$ можно выбрать в виде

$$x_k^{(i)}, \quad \xi_k^{(i)} = dx_k^{(i)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $x_k^{(i)}$ определяются формулами (37). Непосредственное вычисление показывает, что функции перехода для этих координат совпадают с (49) (см. также [6, предложение 5.3]).

Пусть $n \geq 2$. Известно, что супермногообразие $\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}$ нерасщепимо [6, теорема 5.1]. Далее, оно однородно, причем

$$\mathfrak{v}(\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}) \simeq \pi_{n+1|n+1} / \langle E_{n+1|n+1} \rangle,$$

где $\pi_{n+1|n+1}$ — подалгебра линейной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}_{n+1|n+1}(\mathbb{C})$, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}, \quad X, Y \in \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})$$

(см. [6, теорема 5.2]).

В силу теоремы 11 супермногообразию $\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}$ при $n \geq 2$ соответствует нетривиальный класс когомологий $\gamma \in H^1(M, \text{Aut}_{(2)} \Omega)$. Явный вид определяющего его коцикла нетрудно получить из формул (49). Найдем это выражение в простейшем случае $n = 2$.

Обозначим для краткости локальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} x_p &= x_p^{(3)}, \quad \xi_p = \xi_p^{(3)}, & p &= 1, 2, \\ y_p &= x_p^{(2)}, \quad \eta_p = \xi_p^{(2)}, & p &= 1, 2, \\ z_p &= x_p^{(1)}, \quad \zeta_p = \xi_p^{(1)}, & p &= 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда функции перехода (49) для суперграссманиана приобретут вид

$$\begin{cases} y_1 = z_1^{-1}, \\ y_2 = z_1^{-1} z_2 + z_1^{-2} \zeta_1 \zeta_2, \\ \eta_1 = -z_1^{-2} \zeta_1, \\ \eta_2 = -z_1^{-2} z_2 \zeta_1 + z_1^{-1} \zeta_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = z_2^{-1}, \\ x_2 = z_1 z_2^{-1} - z_2^{-2} \zeta_1 \zeta_2, \\ \xi_1 = -z_2^{-2} \zeta_2, \\ \xi_2 = z_2^{-1} \zeta_1 - z_1 z_2^{-2} \zeta_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 y_2^{-1} - y_2^{-2} \eta_1 \eta_2, \\ x_2 = y_2^{-1}, \\ \xi_1 = y_2^{-1} \eta_1 - y_1 y_2^{-2} \eta_2, \\ \xi_2 = -y_2^{-2} \eta_2. \end{cases} \quad (51)$$

Используя замечание из § 7, легко вывести отсюда, что класс когомологий γ определяется в покрытии $\mathfrak{U} = (U_1, U_2, U_3)$ следующим коциклом g :

$$\begin{aligned} g_{12} &= \text{id} + z_1^{-1} \zeta_1 \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ g_{13} &= \text{id} - z_2^{-1} \zeta_1 \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ g_{23} &= \text{id} - y_2^{-1} \eta_1 \eta_2 \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Очевидно, имеем

$$g_{ij} = \exp z_{ij} = \text{id} + z_{ij},$$

где $z = (z_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2)$, $\mathcal{T}_{\text{gr}} = \text{Der } \Omega$, — коцикл, определяющий класс $\zeta = \lambda_2^*(\gamma) \in H^1(\mathbb{CP}^2, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2)$ и заданный в нашем покрытии формулами

$$\begin{aligned} z_{12} &= z_1^{-1} \zeta_1 \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ z_{13} &= -z_2^{-1} \zeta_1 \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ z_{23} &= -y_2^{-1} \eta_1 \eta_2 \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned} \quad (53)$$

Имеем $\zeta \neq 0$, поскольку λ_2^* при $n = 2$ является изоморфизмом (см. предложение 7 (1)).

Отсюда мы выведем следующую лемму.

ЛЕММА 4.

- (1) Имеем $H^1(\mathbb{CP}^2, \Theta \otimes \mathcal{E}_{d-3}) \simeq \mathbb{C}$.
- (2) Обозначая через ω_i нигде не обращающиеся в 0 сечения пучка $\mathcal{E}_{d-3}$ над U_i , $i = 1, 2, 3$, мы можем задать коцикл $z \in Z^1(\mathfrak{U}, \Theta \otimes \mathcal{E}_{d-3})$, определяющий базисный класс $\zeta \in H^1(\mathbb{CP}^2, \Theta \otimes \mathcal{E}_{d-3})$, формулами

$$\begin{aligned} z_{12} &= z_1^{-1} \omega_1 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ z_{13} &= -z_2^{-1} \omega_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ z_{23} &= -y_2^{-1} \omega_2 \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned} \quad (54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\Theta \otimes \mathcal{E}_{d-3} \simeq \mathcal{E}_{\tau d-3} = \mathcal{E}_{\rho d-2}$. Утверждение (1) следует теперь из теоремы 6 части I. Его можно вывести также из того, что $\Theta \otimes \mathcal{E}_{d-3} = \Theta(-3)$ и что по теореме двойственности Серра $H^1(\mathbb{CP}^2, \Theta(-3)) \simeq H^1(\mathbb{CP}^2, \Omega^1)$.

Для доказательства утверждения (2) отождествим ретракт супермногообразия $\Pi \text{Gr}_{3|3,1|1} \subset (\mathbb{CP}^2, \Omega)$. В силу (7) имеем изоморфизм пучков $\text{Der}_2 \Omega \simeq \Theta \otimes \Omega^2$. Далее, $\Omega^2 \simeq \mathcal{E}_{\wedge^2 \tau^*} = \mathcal{E}_{d-3}$. Этот изоморфизм переводит сечения $\zeta_1 \zeta_2$, $\eta_1 \eta_2$,

$\xi_1 \xi_2$ пучка Ω^2 в $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно. Отсюда получается изоморфизм пучков $\text{Der}_2 \Omega \simeq \Theta \otimes \mathcal{E}_{d-3}$, при котором коцикл (53) переходит в (54). Поскольку коцикл (53) определяет ненулевой класс когомологий, утверждение (2) доказано.

2. Рассмотрим теперь $\bar{0}$ -однородное расщепимое супермногообразие $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, $\mathcal{O}_{\text{gr}} = \bigwedge \mathcal{E}_\varphi$, размерности $2 \mid 2$, определенное представлением $\varphi = d^k + d^l$ подгруппы $P \subset \text{SL}_3(\mathbb{C})$, где $k \geq l$, $k + l = -3$ (см. часть I, §4). Мы хотим построить нерасщепимое супермногообразие, имеющее $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ в качестве ретракта.

Введем локальные координаты нашего расщепимого супермногообразия в окрестностях U_i , $i = 1, 2, 3$, как в примере из §7. Тогда функции перехода будут иметь вид (43). Пусть $\mathcal{T}_{\text{gr}}$ – касательный пучок супермногообразия $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Как видно из (7), пучок $(\mathcal{T}_{\text{gr}})_2$ можно отождествить с пучком $\Theta \otimes \bigwedge^2 \mathcal{E}_\varphi \simeq \Theta \otimes \mathcal{E}_{d-3}$. Легко видеть, что при изоморфизме пучков $\bigwedge^2 \mathcal{E}_\varphi \rightarrow \mathcal{E}_{d-3}$ сечения $\zeta_1 \zeta_2, \eta_1 \eta_2, \xi_1 \xi_2$ переходят в $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно. По лемме 4 формулы (53) определяют коцикл $z \in Z^1(\mathfrak{U}, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2)$, представляющий базисный класс $\zeta \in H^1(\mathbb{CP}^2, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2) \simeq \mathbb{C}$. Поскольку $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}} \rightarrow (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2$ – изоморфизм пучков (см. предложение 7 (1)), получаем нетривиальный класс $\gamma \in H^1(\mathfrak{U}, \text{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\text{gr}})$, для которого $\lambda_2^*(\gamma) = \zeta$. Этот класс определяется коциклом g , заданным формулами (52).

По теореме 11 γ определяет некоторое нерасщепимое супермногообразие S_k , $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$, имеющее $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ в качестве ретракта. (Заметим кстати, что в силу теоремы 12 такое супермногообразие единственно.) Используя замечание из §7, можно вычислить функции перехода для супермногообразия S_k , зная коцикл g и функции перехода (43) для супермногообразия $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Это вычисление приводит к следующим функциям перехода:

$$\begin{cases} y_1 = z_1^{-1}, \\ y_2 = z_1^{-1} z_2 + z_1^{-2} \zeta_1 \zeta_2, \\ \eta_1 = z_1^k \zeta_1, \\ \eta_2 = z_1^l \zeta_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = z_2^{-1}, \\ x_2 = z_1 z_2^{-1} - z_2^{-2} \zeta_1 \zeta_2, \\ \xi_1 = z_2^k \zeta_1, \\ \xi_2 = z_2^l \zeta_2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 y_2^{-1} + y_2^{-2} \eta_1 \eta_2, \\ x_2 = y_2^{-1}, \\ \xi_1 = y_2^k \eta_1, \\ \xi_2 = y_2^l \eta_2. \end{cases} \quad (55)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Супермногообразия S_k , $k \geq -1$, являются $\bar{0}$ -однородными относительно естественного действия группы $\text{SL}_3(\mathbb{C})$. При этом единственным однородным из них является S_{-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, ретракт $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ каждого из супермногообразий S_k является $\bar{0}$ -однородным. Точнее, из однородности соответствующего расслоения $\mathbf{E}_\varphi$ относительно $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ вытекает существование гомоморфизма $\psi: \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})_{\bar{0}}$ такого, что $\beta\psi: \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^2)$ – изоморфизм, совпадающий с дифференциалом проективного действия группы $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ на $\mathbb{CP}^2$. Этот гомоморфизм индуцирует линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ в $H^*(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T}_{\text{gr}})$, действующее по формуле

$$\psi(x)(\delta) = [\psi(x), \delta], \quad x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}), \quad \delta \in H^*(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T}_{\text{gr}}).$$

Как видно из теоремы 8 (часть I), пространство $H^1(\mathbb{CP}^2, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2) \simeq \mathbb{C}$ является тривиальным $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ -модулем. Следовательно, класс $\zeta = \lambda_2^*(\gamma)$ удовлетворяет

условию (46) для всех $v = \psi(x)$, $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. В силу предложения 7 (2) все векторные поля $\psi(x)$, $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, поднимаются на S_k , т.е. $\psi(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})) \subset \tilde{\mathfrak{v}}_0$. В силу следствия из теоремы 1' (часть I) супермногообразие S_k является $\bar{0}$ -однородным.

Выясним теперь, какие из супермногообразий S_k однородны. В силу следствия из теоремы 1 (часть I) из однородности супермногообразия S_k следует однородность его ретракта. По теореме 5 (часть I) в этом случае $k \leq 0$, т.е. $k = -1$ или 0 .

Рассмотрим векторные поля степени -1 . В случае $k = -1$ в силу теоремы 10 (часть I) имеем $H^1(\mathbb{CP}^2, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_1) = 0$. Поэтому любое поле $v \in \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})_{-1}$ удовлетворяет условию (46). В силу предложения 7 (2) v поднимается на S_{-1} , т.е. σ_{-1} сюръективно. Следствие из теоремы 1 показывает, что S_{-1} однородно.

Наконец, изучим случай $k = 0$. Рассмотрим точную последовательность (7):

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{\varphi^*} \wedge^2 \varphi \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{T}_{\text{gr}})_1 \xrightarrow{\beta} \Theta \otimes \mathcal{E}_{\varphi} \longrightarrow 0.$$

Имеем $\varphi^* \wedge^2 \varphi = (1 + d^3)d^{-3} = d^3 + 1$. Из теоремы Ботта легко следует, что $H^p(\mathbb{CP}^2, \mathcal{E}_{\varphi^*} \wedge^2 \varphi) = 0$ для $p \geq 1$. Далее, $\Theta \otimes \mathcal{E}_{\varphi} \simeq \Theta \oplus (\Theta \otimes \mathcal{E}_{d^{-3}})$. Поскольку $H^1(\mathbb{CP}^2, \Theta) = 0$, из леммы 4 следует, что $H^1(\mathbb{CP}^2, \Theta \otimes \mathcal{E}_{\varphi}) \simeq \mathbb{C}$, причем базисный класс δ задается коциклом d вида

$$\begin{aligned} d_{12} &= x_1^{-1} \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ d_{13} &= -z_2^{-1} \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ d_{23} &= -y_2^{-1} \eta_2 \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

Пространство $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})_{-1}$ содержит векторные поля $\frac{\partial}{\partial \xi_p}$, $p = 1, 2$. Действительно, из (43) легко вывести, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} &= y_2^3 \frac{\partial}{\partial \eta_2} = z_2^3 \frac{\partial}{\partial \zeta_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, поля $\frac{\partial}{\partial \xi_p}$, $p = 1, 2$, голоморфно продолжаются на все $\mathbb{CP}^2$. Ясно, что значения этих двух полей порождают $T_o(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})_{\bar{1}}$, благодаря чему супермногообразие $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ является однородным. Покажем, что поле $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$ не поднимается на S_0 . Для этого заметим, что класс $\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \zeta \right]$ определяется коциклом

$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z \right]$, где $z = (z_{ij})$ задается формулами (51), причем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z \right]_{12} &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z_{12} \right] = z_1^{-1} \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z \right]_{13} &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z_{13} \right] = -z_2^{-1} \zeta_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z \right]_{23} &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z_{23} \right] = -y_2^{-1} \eta_2 \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, z \right] = d$, откуда $\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \zeta \right] = \delta \neq 0$. В силу предложения 6 наше утверждение доказано. Из (13) легко следует теперь, что $\text{ev}_{-1}: \mathfrak{v}(S_0)_{-1} \rightarrow T_o(S_0)_{\bar{1}}$ не сюръективно. Значит, S_0 не однородно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что вопрос об описании всех нерасщепимых супермногообразий вида $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O})$, нечетная размерность которых равна 2, рассматривается в [7, гл. 4, § 2]. Там утверждается, что такие супермногообразия существуют только при $n = 1$. Как видно из сказанного выше, это неверно.

3. В этом пункте для любого $r \geq 2$ будет построено нерасщепимое супермногообразие Y_r вида $(\mathbb{CP}^{2r-1}, \mathcal{O})$ размерности $2r - 1 \mid 2r - 2$, четно-однородное относительно $\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ (но не относительно $\text{SL}_{2r}(\mathbb{C})$). Мы определим его как некоторое подмногообразие суперграссманиана $\Pi \text{Gr}_{2r \mid 2r, 1 \mid 1}$.

В пространстве $\mathbb{C}^{2r}$ существует невырожденная кососимметрическая билинейная форма β . Мы можем считать, что ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E_r \\ -E_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$Z = \begin{pmatrix} u & \lambda \\ \lambda & u \end{pmatrix}$$

координатную матрицу, совпадающую с C_i (см. (47)) над областью $U_i \subset \mathbb{CP}^{2r-1}$, $i = 1, \dots, 2r$. Здесь

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{2r} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{2r} \end{pmatrix},$$

причем $u_i = 1$, $\lambda_i = 0$, а остальные элементы столбцов совпадают с $x_j^{(i)}$ и $\xi_j^{(i)}$. Зададим подмногообразие Y_r над U_i уравнением

$$\beta(u, \lambda) = \sum_{j=1}^r u_j \lambda_{r+j} - \sum_{j=1}^r u_{r+j} \lambda_j = 0. \quad (56)$$

Легко проверить, что это условие инвариантно относительно умножения справа на матрицу T_{ij} (см. (48)). Поэтому Y_r определено уравнением (56) глобально. Поскольку левая часть уравнения нечетна, имеем $\dim Y_r = 2r - 1 \mid 2r - 2$.

Записывая (56) в локальных координатах $x_j^{(i)}$, $\xi_j^{(i)}$ в U_i , легко заметить, что оно дает выражение одной из координат $\xi_k^{(i)}$ через $x_j^{(i)}$ и остальные $\xi_j^{(i)}$. Последние можно взять в качестве нечетных локальных координат для Y_r . Например, в координатах $x_j = x_j^{(2r)}$, $\xi_j = \xi_j^{(2r)}$ в U_{2r} уравнение (56) имеет вид

$$\xi_r = - \sum_{j=1}^{r-1} x_{r+j} \xi_j + \sum_{j=1}^{r-1} x_j \xi_{r+j}.$$

В дальнейшем мы будем использовать функции

$$x_1, \dots, x_{2r-1}, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \dots, \xi_{2r-1} \quad (57)$$

в качестве локальных координат супермногообразия Y_r в U_{2r} .

Рассмотрим $\mathbb{CP}^{2r-1}$ как однородное пространство подгруппы $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}_{2r}(\mathbb{C})$, используя обозначения §3 (часть I). В частности, будем обозначать через $P \subset \tilde{P}$ стабилизаторы точки $o = (0 : \dots : 0 : 1) \in U_{2r}$ в $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}_{2r}(\mathbb{C})$ соответственно. Как было отмечено в п. 1 этого параграфа, $\Pi \mathrm{Gr}_{2r|2r,1|1}$ допускает транзитивное действие супералгебры Ли $\pi_{2r|2r}(\mathbb{C})$. В частности, это супермногообразие $\bar{0}$ -однородно относительно $\mathrm{SL}_{2r}(\mathbb{C})$; действие этой группы задается в терминах координатных матриц Z формулой

$$(A, Z) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} Au & A\lambda \\ A\lambda & Au \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{SL}_{2r}(\mathbb{C}). \quad (58)$$

Очевидно, уравнение (56) инвариантно относительно всех $A \in \mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$. Отсюда получается действие группы $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ на Y_r , индуцирующее стандартное действие этой группы на $\mathbb{CP}^{2r-1}$. Таким образом, Y_r является $\bar{0}$ -однородным относительно $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$. Обозначим через $h \mapsto h^*$ дифференциал действия (58) группы $\mathrm{SL}_{2r}(\mathbb{C})$ на $\Pi \mathrm{Gr}_{2r|2r,1|1}$ и через ψ — дифференциал индуцированного действия группы $\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ на Y_r . Нам потребуется ограничение ψ на подалгебру $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$. При этом мы используем результаты §5 работы [6], где явно вычислено ограничение действия $h \mapsto h^*$ на подалгебру $\tilde{\mathfrak{p}}$. Все вычисления проводятся в локальных координатах в U_{2r} .

Найдем представление φ подгруппы P в слое E_o расслоения $\mathbf{E} \rightarrow \mathbb{CP}^{2r-1}$, связанного с супермногообразием Y_r . Пусть m_o — максимальный идеал локальной алгебры $\mathcal{O}_o$ супермногообразия $Y_r = (\mathbb{CP}^{2r-1}, \mathcal{O})$. Тогда E_o совпадает с нечетной частью пространства m_o/m_o^2 (см. §1). Обозначим через $\tilde{m}_o$ линейную оболочку ростков локальных координат (57) в точке o . Тогда $m_o = \tilde{m}_o \oplus m_o^2$, так что E_o отождествляется с $(\tilde{m}_o)_{\bar{1}} = \langle \xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \dots, \xi_{2r-1} \rangle$.

Напомним (см. §3), что редуктивная часть $\mathfrak{h}$ подалгебры $\mathfrak{p}$ состоит из матриц вида

$$h = \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ C & 0 & A^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix},$$

где $A \in \mathfrak{gl}_{2r-2}(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$, $B^\top = B$, $C^\top = C$, h_1 — левая верхняя клетка порядка $2r-1$ матрицы h . Обозначая через X и Ξ столбцы координат $x_1, \dots, x_{2r-1}$ и $\xi_1, \dots, \xi_{2r-1}$ супермногообразия $\Pi \mathrm{Gr}_{2r|2r,1|1}$, имеем (см. [6, §5]):

$$\begin{aligned} h^* x_i &= -(h_1 x)_i - z x_i, \\ h^* \xi_i &= -(h_1 \xi)_i - z \xi_i, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 2r-1.$$

Отсюда видно, что подпространства $\langle x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_{2r-1} \rangle$, $\langle x_r \rangle$ и $\langle \xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \dots, \xi_{2r-1} \rangle$ инвариантны относительно h^* , $h \in H$. Далее,

из тех же формул следует, что ростки координат x_i , $i = 1, \dots, 2r - 1$, ξ_j , $j = 1, \dots, r - 1, r + 1, \dots, 2r - 1$, являются весовыми векторами для ψ с весами $-\lambda_i - \lambda_r$, $-\lambda_j - \lambda_r$ соответственно. Поскольку $\lambda_{r+i} = -\lambda_i$, системы весов представления ψ имеют вид:

$$\begin{aligned} \pm\lambda_i - \lambda_r, \quad i = 1, \dots, r - 1, \quad \text{в } \langle x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_{2r-1} \rangle, \\ -\lambda_r \quad \text{в } \langle x_r \rangle, \\ \pm\lambda_i - \lambda_r, \quad i = 1, \dots, r - 1, \quad \text{в } (\tilde{m}_o)_{\bar{1}}. \end{aligned} \quad (59)$$

Отсюда следует, что (в обозначениях §3) $\varphi|H = \rho \otimes d^{-1}$. Поскольку это представление неприводимо, φ тривиально на N . Заметим, что в силу теоремы 7 ретракт супермногообразия Y_r является однородным супермногообразием.

Докажем теперь, что Y_r , $r \geq 2$, нерасщепимо. Для этого достаточно показать (ср. [6, доказательство теоремы 5.1]), что градуирующее дифференцирование ε пучка $\text{gr } \mathcal{O}$ не поднимается на Y_r . Рассмотрим гомоморфизм $\sigma_0: \mathfrak{v}(Y_r)_{(0)} \rightarrow \mathfrak{v}(M, \text{gr } \mathcal{O})_0$ из последовательности (45). Предположим, что $\varepsilon = \sigma_0(\delta)$, где $\delta \in \mathfrak{v}(Y_r)_{(0)}$. Мы можем считать, что $\delta \in \mathfrak{v}(Y_r)_{\bar{0}}$ и, в силу полной приводимости представления группы $\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ в $\mathfrak{v}(Y_r)$, что $\delta \in \mathfrak{v}(Y_r)_{\bar{0}}^{\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C})}$. Тогда δ определяет четное дифференцирование супералгебры $\mathcal{O}_o$ такое, что $[\delta, \psi(h)] = 0$ для всех $h \in \mathfrak{p}$. Очевидно, δ переводит в себя $(m_o)_{\bar{0}}$ и $(m_o)_{\bar{1}}$, а также каждое весовое подпространство представления ψ . Из (59) видно, что в m_o^2 не встречаются веса $\pm\lambda_i - \lambda_r$ подпространства $(\tilde{m}_o)_{\bar{1}}$. Значит, δ переводит в себя $(\tilde{m}_o)_{\bar{1}}$ и в силу леммы Шура $\delta\xi_i = c\xi_i$, $i = 1, \dots, r - 1, r + 1, \dots, 2r - 1$, где $c \in \mathbb{C}$. По той же причине $\delta x_i = c'x_i$, $i = 1, \dots, r - 1, r + 1, \dots, 2r - 1$, где $c' \in \mathbb{C}$. Но ε переводит четные координаты в 0, так что $\delta x_i \in m_o^2$. Значит, $\delta x_i = 0$, $i = 1, \dots, r - 1, r + 1, \dots, 2r - 1$. Рассмотрим теперь элемент $E_{2r,r+1} \in \mathfrak{n}$. Нетрудно проверить (см. [6, §5]), что $E_{2r,r+1}^*(x_1) = x_1 x_{r+1} + \xi_1 \xi_{r+1}$. Следовательно,

$$0 = [\delta, \psi(E_{2r,r+1})](x_1) = \delta(x_1 x_{r+1} + \xi_1 \xi_{r+1}) = 2c\xi_1 \xi_{r+1}.$$

Итак, $c = 0$, т.е. $\delta\xi_i = 0$, $i = 1, \dots, r - 1, r + 1, \dots, 2r - 1$. Но это противоречит тому, что ε оставляет инвариантными нечетные локальные координаты.

Из сказанного выше вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 13. *Супермногообразие Y_r , $r \geq 2$, является $\bar{0}$ -однородным относительно $\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C})$ и нерасщепимым. Его ретракт есть однородное супермногообразие, определяемое однородным расслоением $\mathbf{E}_{\rho \otimes d^{-1}}$.*

§10. Основная теорема классификации

Пусть $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O})$ — нерасщепимое супермногообразие, имеющее ретракт $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})$, $\bar{0}$ -однородный относительно $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Тогда расслоение $\mathbf{E} \rightarrow \mathbb{CP}^n$, связанное с $\mathcal{O}_{\text{gr}}$, является однородным относительно $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Следовательно, существует такой инъективный гомоморфизм $\psi: \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O})_0$, что

следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{End } \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0 & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n) \longrightarrow 0 \\
 & & \psi \uparrow & & & & \uparrow \\
 & & \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) & \xlongequal{\quad} & \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) & &
 \end{array}$$

где правая вертикальная стрелка – это изоморфизм, отвечающий проективному действию группы $SL_{n+1}(\mathbb{C})$ на $\mathbb{CP}^n$. Пусть $\mathfrak{s} = \psi(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})) \subset \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. Тогда $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ и $\beta: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n)$ – изоморфизм, откуда

$$\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}}) = \text{End } \mathbf{E} + \mathfrak{s}, \quad (\text{End } \mathbf{E}) \cap \mathfrak{s} = 0. \quad (60)$$

Будем теперь рассматривать подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0$, обладающие следующими свойствами:

- (1) $\beta(\mathfrak{a})$ – подалгебра в $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n)$, транзитивная на $\mathbb{CP}^n$;
- (2) $\mathfrak{a} \cap \text{End } \mathbf{E} = 0$.

Очевидно, $\beta: \mathfrak{a} \rightarrow \beta(\mathfrak{a})$ – изоморфизм, причем либо $\beta(\mathfrak{a}) = \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n)$, либо $n = 2r - 1$ нечетно и $\beta(\mathfrak{a}) \simeq \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$ – симплектическая подалгебра в $\mathfrak{sl}_{2r}(\mathbb{C})$. Значит, $\mathfrak{a}$ проста и изоморфна $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ или (при нечетном $n = 2r - 1$) $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$.

ЛЕММА 5. Пусть $\text{rk } \mathbf{E} = m \leq n$. Тогда любая подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0$, обладающая свойствами (1) и (2), сопряжена подалгебре $\mathfrak{s}$ или (при нечетном $n = 2r - 1$) ее подалгебре $\mathfrak{s}_1 = \psi(\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\beta(\mathfrak{a}) = \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n)$. Расширим $\mathfrak{s}$ до максимальной полупростой подалгебры $\tilde{\mathfrak{s}} \subset \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0$. Из (60) следует, что $\tilde{\mathfrak{s}} = (\tilde{\mathfrak{s}} \cap \text{End } \mathbf{E}) + \mathfrak{s}$. В силу теоремы Мальцева можно считать, что $\mathfrak{a} \subset \tilde{\mathfrak{s}}$. Тогда

$$\tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, \quad (61)$$

где $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{s}} \cap \text{End } \mathbf{E}$. Действительно, для любого $v \in \tilde{\mathfrak{s}}$ существует такой $v_0 \in \mathfrak{a}$, что $\beta(v_0) = \beta(v)$. Тогда $v = v_0 + (v - v_0)$, где $\beta(v - v_0) = 0$, т.е. $v - v_0 \in \text{End } \mathbf{E}$. Подалгебра $\mathfrak{b}$ является идеалом в $\tilde{\mathfrak{s}}$, причем $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a} = 0$. Поэтому

$$\tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}_0,$$

где $\mathfrak{b}_0$ – идеал в $\tilde{\mathfrak{s}}$. Очевидно, проектирование $\pi_0: \tilde{\mathfrak{s}} \rightarrow \mathfrak{b}_0$ параллельно $\mathfrak{b}$ отображает $\mathfrak{a}$ и $\tilde{\mathfrak{s}}$ на $\mathfrak{b}_0$.

Докажем, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} = \mathfrak{b}_0$. Если $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_0$, то проекция $\pi: \tilde{\mathfrak{s}} \rightarrow \mathfrak{b}$ параллельно $\mathfrak{b}_0$ изоморфно отображает $\mathfrak{a}$ в $\text{End } \mathbf{E}$. Таким образом, $\text{End } \mathbf{E}$ содержит подалгебру $\pi(\mathfrak{a}) \simeq \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$, которая линейно действует в каждом слое расслоения $\mathbf{E}$. Это дает линейное представление размерности $m \leq n$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ в каждом слое. Поскольку существует только нулевое представление такой размерности, получаем противоречие. Итак, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_0$. Аналогично $\mathfrak{s} = \mathfrak{b}_0$, т.е. $\mathfrak{a} = \mathfrak{s}$.

Случай, когда $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$, изучается аналогично, причем вместо $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0$ надо рассмотреть ее подалгебру $\beta^{-1}(\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C}))$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – нерасщепимое $\bar{0}$ -однородное супермногообразие размерности $n \mid m$, где $n \geq m$, имеющее ретракт, $\bar{0}$ -однородный относительно $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Тогда $n = m \geq 2$, причем $(M, \mathcal{O})$ изоморфно либо суперг-рассманиану $\Pi \mathrm{Gr}_{n+1 \mid n+1, 1 \mid 1}$, либо одному из супермногообразий S_k , $k \geq -1$, размерности $2 \mid 2$, описанных в §9, п. 2. Если $(M, \mathcal{O})$ однородно, то оно изоморфно либо $\Pi \mathrm{Gr}_{n+1 \mid n+1, 1 \mid 1}$, либо S_{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ – ретракт супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. В силу следствия из теоремы 1 (часть I) из 0 -однородности $(M, \mathcal{O})$ следует, что подалгебра $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O}) \subset \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ 0 -транзитивна на $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. В частности, $\beta(\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_0)$ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^n) \simeq \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ или ее подалгеброй $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$, $2r = n + 1$. По теореме Леви существует такая подалгебра $\mathfrak{a} \subset \tilde{\mathfrak{v}}_0$, что $\beta : \mathfrak{a} \rightarrow \beta(\tilde{\mathfrak{v}}_0)$ – изоморфизм. Подалгебра $\mathfrak{a}$ удовлетворяет условиям леммы 5 и, следовательно, сопряжена с $\mathfrak{s}$ или $\mathfrak{s}_1$.

Как известно (см. теорему 11), нерасщепимому супермногообразию $(M, \mathcal{O})$ отвечает некоторый элемент $\gamma \in H^1(\mathbb{CP}^n, \mathrm{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, $\gamma \neq e$. Пусть $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ – касательный пучок супермногообразия $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Согласно теореме 8 (часть I) $H^1(\mathbb{CP}^n, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p}) = 0$ для всех $p \geq 2$. Применяя предложение 5, видим, что отображение $\lambda_2^* : H^1(\mathbb{CP}^n, \mathrm{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\mathrm{gr}}) \rightarrow H^1(\mathbb{CP}^n, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)$ инъективно. В частности, $\zeta = \lambda_2^*(\gamma) \neq 0$. Согласно предложению 6 $[\zeta, v] = 0$ для всех $v \in \tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_0$. Поскольку $\tilde{\mathfrak{v}}(M, \mathcal{O})_0$ содержит подалгебру, сопряженную $\mathfrak{s}$ или $\mathfrak{s}_1$, то будем иметь $[\zeta, v] = 0$ для всех $v \in \mathfrak{s}$ или $v \in \mathfrak{s}_1$, если заменить класс γ его образом при некотором автоморфизме расслоения $\mathbf{E}$, определяющем пучок $\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$. Это означает, что $\zeta \in H^1(\mathbb{CP}^n, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})}$ или $\zeta \in H^1(\mathbb{CP}^n, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{C})}$, где $2r = n + 1$. Применяя снова теорему 8, видим, что $n = m$, причем представление φ , определяющее $\mathbf{E}$, имеет вид $\varphi = \rho^* d^{-1}$ или $\varphi = d^k + d^l$, $k \geq l$, $k + l = -3$. При этом $H^1(\mathbb{CP}^n, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2) \simeq \mathbb{C}$. В силу теоремы 12 существует лишь одно нерасщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O})$, имеющее ретракт $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. В первом случае $(M, \mathcal{O})$ обязано совпадать с $\Pi \mathrm{Gr}_{n+1 \mid n+1, 1 \mid 1}$, а во втором – с одним из супермногообразий S_k , $k \geq -1$, описанных в §9. При этом в силу предложения 8 супермногообразие S_k однородно только при $k = -1$. Теорема доказана.

§11. Когомологии касательного пучка нерасщепимых однородных супермногообразий

В этом параграфе мы вычислим группы когомологий $H^p(M, \mathcal{T})$ для нерасщепимых однородных супермногообразий $(M, \mathcal{O})$, которые были классифицированы в §10. При этом будет использоваться спектральная последовательность (E_r) , связывающая эти группы с соответствующими группами когомологий $H^p(M, \mathcal{T}_{\mathrm{gr}})$ ретракта супермногообразия $(M, \mathcal{O})$, которая была построена в [9]. Пусть $\gamma \in H^1(\mathbb{CP}^n, \mathrm{Aut}_{(2)} \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ – класс когомологий, соответствующий супермногообразию $(M, \mathcal{O})$ в силу теоремы 11. Нам потребуются следующие свойства спектральной последовательности (E_r) :

- (1) $E_2^{p,q} = H^{p+q}(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_p)$,
- (2) $d_2 = \mathrm{ad} \zeta$, где $\zeta = \lambda_2^*(\gamma) \in E_2^{2,-1}$,
- (3) $d_r(E_r^{p,q}) \subset E_r^{p+r, q-r+1}$,

- (4) $E_\infty^{p,q} = \text{gr}_p H^{p+q}(M, \mathcal{T})$, где справа стоит p -я компонента градуированной группы, ассоциированной с фильтрацией группы $H^{p+q}(M, \mathcal{T})$, которая индуцируется фильтрацией (5) пучка $\mathcal{T}$.

ТЕОРЕМА 15. *Когомологии касательного пучка супермногообразия $\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}$ при $n \geq 2$ имеют вид:*

$$\begin{aligned} H^0(M, \mathcal{T}) &\simeq \pi_{n+1|n+1} / \langle E_{n+1|n+1} \rangle \text{ (как супералгебры Ли)}, \\ H^{n-1}(M, \mathcal{T}) &\simeq \mathbb{C}, \\ H^p(M, \mathcal{T}) &= 0 \text{ (в остальных случаях)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы видели в §9, структурный пучок ретракта супермногообразия $\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}$ отождествляется с пучком голоморфных форм Ω на $\mathbb{CP}^n$. Используя теорему 9 (часть I), запишем слагаемые $E_2^{p,q} = H^{p+q}(\mathbb{CP}^n, \Omega^p)$ члена E_2 спектральной последовательности (E_r) в следующую таблицу:

$q \setminus p$	-1	0	1	2	...	$n-1$	n
1	$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$	0	0	0	...	0	0
0	0	$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) \oplus \langle \alpha^* \theta_1 \rangle$	$\langle \alpha^* \theta_2 \rangle$	$\langle \alpha^* \theta_3 \rangle$	...	$\langle \alpha^* \theta_n \rangle$	0
-1	0	0	$\langle l^* \theta_1 \rangle$	$\langle l^* \theta_2 \rangle$	...	$\langle l^* \theta_{n-1} \rangle$	$\langle l^* \theta_n \rangle$
-2	0	0	0	0	...	0	0

Используя [10, предложение 4], получаем

$$\begin{aligned} d_2(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})) &= 0, \\ d_2(\alpha^* \theta_p) &= [l^* \theta_2, \alpha^* \theta_p] = -2l^* \theta_{p+1}, \\ d_2(l^* \theta_p) &= [l^* \theta_2, l^* \theta_p] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $E_3 = H(E_2, d_2)$ изображается следующей таблицей:

$q \setminus p$	-1	0	1	2	...	$n-1$	n
1	$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$	0	0	0	...	0	0
0	0	$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$	0	0	...	$\langle \alpha^* \theta_n \rangle$	0
-1	0	0	$\langle l^* \theta_1 \rangle$	0	...	0	0
-2	0	0	0	0	...	0	0

Нетрудно заметить, что $d_3 = d_4 = \dots = 0$, а это означает, что $E_3 = E_\infty$. Отсюда легко следует, что

$$\begin{aligned} \dim H^0(M, \mathcal{T}) &= ((n+1)^2 - 1) | (n+1)^2, \\ \dim H^{n-1}(M, \mathcal{T}) &= 1, \\ \dim H^p(M, \mathcal{T}) &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

Как показано в [6, теорема 5.2], супералгебра $\text{Ли } \mathfrak{v}(\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}) = H^0(M, \mathcal{T})$ изоморфна $\pi_{n+1|n+1}/\langle E_{n+1,n+1} \rangle$. Доказательство основано на доказанной только что формуле для размерности и на том, что ядром естественного действия супералгебры $\text{Ли } \pi_{n+1|n+1}$ на $\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}$ является $\langle E_{n+1,n+1} \rangle$. Отсюда следует теорема.

СЛЕДСТВИЕ. *Супермногообразие $\Pi \text{Gr}_{n+1|n+1,1|1}$ жестко при всех $n \geq 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что равенство $H^1(M, \mathcal{T}) = 0$ достаточно для жесткости компактного супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ (см. [11]).

Вычислим теперь когомологии нерасщепимого однородного супермногообразия S_{-1} размерности $2|2$.

ТЕОРЕМА 16. *Для касательного пучка $\mathcal{T}$ супермногообразия S_{-1} имеем*

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T}_0) &\simeq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus (\mathbb{C}^3)^*, \\ H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T}_1) &\simeq \mathbb{C}^3 \oplus (\mathbb{C}^3)^* \oplus S^2(\mathbb{C}^3)^*, \\ H^1(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T}) &= H^2(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T}) = 0 \end{aligned}$$

как $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, используем спектральную последовательность (E_r) . Применяя теорему 10 (часть I), запишем слагаемые $E_2^{p,q}$ члена E_2 в следующую таблицу:

$q \setminus p$	-1	0	1	2
1	$(\mathbb{C}^3)^* \oplus S^2(\mathbb{C}^3)^*$	0	0	0
0	0	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}^3)^* \oplus \mathbb{C}^2$	0	0
-1	0	0	$\mathbb{C}^3$	$\mathbb{C}$
-2	0	0	0	0

Оператор d_2 может быть отличен от 0 только на $E_2^{0,0}$, причем

$$d_2: E_2^{0,0} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}^3)^* \oplus \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} = E_2^{2,-1}.$$

Для градуирующего дифференцирования $\varepsilon \in E_2^{0,0}$ пучка $\mathcal{O}_{\text{gr}}$ имеем, очевидно, $d_2\varepsilon = [\zeta, \varepsilon] = -2\zeta \neq 0$. Поэтому d_2 отображает $\mathbb{C}^2$ на $\mathbb{C} = E_2^{2,-1}$. Значит, E_3 имеет вид

$q \setminus p$	-1	0	1	2
1	$(\mathbb{C}^3)^* \oplus S^2(\mathbb{C}^3)^*$	0	0	0
0	0	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}^3)^* \oplus \mathbb{C}^2$	0	0
-1	0	0	$\mathbb{C}^3$	0
-2	0	0	0	0

Ясно, что $d_3 = d_4 = \dots = 0$, а это означает, что $E_3 = E_\infty$. Отсюда легко следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Супермногообразие S_{-1} жестко.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать, что супералгебра Ли $\mathfrak{v}(S_{-1}) = H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{T})$ имеет следующее строение:

$$\mathfrak{v}(S_{-1}) \simeq \mathfrak{pgl}_{3|1}(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^{3|6},$$

где $\mathfrak{pgl}_{3|1}(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_{3|1}(\mathbb{C}) / \langle E_{3|1} \rangle$, а $\mathbb{C}^{3|6}$ – коммутативный идеал. Приведем без доказательства явный вид этого изоморфизма.

Пусть E_{ij} , $1 \leq i, j \leq 4$, – базисные матрицы супералгебры Ли $\mathfrak{gl}_{3|1}(\mathbb{C})$. Тогда матрицы E_{ij} , $i \neq j$, $H_1 = E_{11} - E_{22}$, $H_2 = E_{22} - E_{33}$, $H_3 = E_{33} - E_{44}$ определяют базис в $\mathfrak{pgl}_{3|1}(\mathbb{C})$. Вложение $\mathfrak{pgl}_{3|1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{v}(S_{-1})$ задается формулами

$$\begin{aligned} E_{12} &\mapsto -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_{21} \mapsto -x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ E_{13} &\mapsto -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_{31} \mapsto x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 x_2 - \xi_1 \xi_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_1 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + x_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\ E_{23} &\mapsto -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_{32} \mapsto (x_1 x_2 + \xi_1 \xi_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + x_2 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\ H_1 &\mapsto -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad H_2 \mapsto -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\ H_3 &\mapsto x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\ E_{14} &\mapsto \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_{41} \mapsto \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\ E_{24} &\mapsto \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_{42} \mapsto -\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\ E_{34} &\mapsto -x_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad E_{43} \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi_2}. \end{aligned}$$

Коммутативный идеал $\mathbb{C}^{3|6}$ супералгебры Ли $\mathfrak{v}(S_{-1})$ содержит в качестве базиса следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} &\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad x_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad x_2 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \\ &\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\ &\xi_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad -x_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \end{aligned}$$

Список литературы

1. *Онищик А. Л., Платонова О. В.* Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством. I // Матем. сб. 1998. Т. 189. №2. С. 111–136.
2. *Платонова О. В.* Об однородных супермногообразиях размерности $2|2$ // УМН. 1995. Т. 50. №6. С. 205–206.
3. *Платонова О. В.* Об однородных супермногообразиях, связанных с комплексным проективным пространством // Акт. проблемы естеств. наук. Математика. Информатика: Ярославль, 1995. С. 46–47.
4. *Green P.* On holomorphic graded manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 85. P. 587–590.
5. *Rothstein M. J.* Deformations of complex supermanifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 95. P. 255–260.
6. *Onishchik A. L.* Non-split supermanifolds associated with the cotangent bundle // Université de Poitiers, Département de Math., Preprint №109, 1997.
7. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.
8. *Vinagina V. A., Onishchik A. L.* Homogeneous supermanifolds associated with the complex projective line // J. Math. Sci. 1996. V. 82. P. 3503–3527.
9. *Onishchik A. L.* A spectral sequence for the tangent sheaf cohomology of a supermanifold // Sophus Lie '94. Proceedings of Conference ISLC. Moscow, August 1994. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. P. 23–38.
10. *Onishchik A. L.* About derivations and vector-valued differential forms // Inst. Math. Ruhr-Universität Bochum. Bericht №181, 1995.
11. *Вайнтроб А. Ю.* Деформации комплексных суперпространств и когерентных пучков на них // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Новейшие достижения. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1988. С. 27–70.

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова

Поступила в редакцию
05.06.1997