Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Радзиевский, Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 4, 83–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:59:31

УДК 517.43+517.5

Г. В. Радзиевский

Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени

Пусть линейный оператор A действует в комплексном банаховом пространстве X , имеет область определения $\mathfrak{D}(A)$ и непустое резольвентное множество. Элемент $g \in \mathfrak{D}_\infty(A) := \bigcap_{j=0,1,\dots} \mathfrak{D}(A^j)$ называется *вектором степени не выше $\zeta (> 0)$ относительно A* , если $\|A^j g\|_X \leq c(g)\zeta^j$, $j = 0, 1, \dots$. Множество векторов степени не выше ζ обозначается через $\mathfrak{E}_\zeta(A)$ и определяется величина $E_\zeta(f, A)_X = \inf_{g \in \mathfrak{E}_\zeta(A)} \|f - g\|_X$, которая в работе оценена сверху через K -функционал $K(\zeta^{-r}, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) = \inf_{g \in \mathfrak{D}(A^r)} (\|f - g\|_X + \zeta^{-r} \|A^r f\|_X)$ (прямая теорема). Установлена оценка сверху этого K -функционала через $E_\zeta(f, A)_X$ и $\|f\|_X$ (обратная теорема). Полученные в работе оценки позволили в терминах $E_\zeta(f, A)_X$ дать необходимые и достаточные условия справедливости следующих утверждений: 1) $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$; 2) ряд $e^{zA} f := \sum_{r=0}^\infty (z^r A^r f)/(r!)$ сходится в некотором круге; 3) ряд $e^{zA} f$ сходится во всей комплексной плоскости. Через $E_\zeta(f, A)_X$ вычислен порядок роста и указан тип целой функции $e^{zA} f$.

Библиография: 25 названий.

§1. Введение. Формулировка основных результатов

Во всей работе A – линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве X , а I – тождественный оператор в X , причем $A^0 := I$. Область определения и ядро оператора A обозначаются, соответственно, через $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{Z}(A)$, $\rho(A)$ – резольвентное множество A и $R(\lambda; A) := (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, – резольвента A . Везде далее предполагается, что $\rho(A)$ – непустое множество. Это требование обеспечивает не только замкнутость A , но и замкнутость операторов $A^2, A^3, \dots$ [1, определение VII.9.6 и теорема VII.9.7]. Оговоримся также, что всюду плотность области определения A нигде не предполагается.

Запись $[X, Y]$ означает множество ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , $[X] := [X, X]$, а запись $Y \hookrightarrow X$ – вложение Y в X . Нормы векторов и операторов обозначаются через $\|\cdot\|$ и снабжаются индексами, обозначающими соответствующие нормированные пространства.

Как обычно, $\mathbb{Z}, \mathbb{P}$ и $\mathbb{N}$ – это, соответственно, множества целых, целых неотрицательных и целых положительных (натуральных) чисел.

Пусть $\mathfrak{D}_\infty(A) := \bigcap_{j \in \mathbb{P}} \mathfrak{D}(A^j)$. Элемент $g \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ называется *вектором степени не выше $\zeta > 0$ относительно оператора A* , если существует такая положительная постоянная $c(g)$, что $\|A^j g\|_X \leq c(g)\zeta^j$, $j \in \mathbb{P}$. Линейное многообразие

векторов степени не выше ζ относительно оператора A обозначается через $\mathfrak{G}_\zeta(A)$, причем $\mathfrak{G}_0(A) := \mathfrak{Z}(A)$. Очевидно, что $\mathfrak{G}_\zeta(A) \subseteq \mathfrak{G}_\xi(A)$ для всех $0 \leq \zeta \leq \xi$.

Если оператор A имеет мероморфную резольвенту, т.е. весь спектр A состоит лишь из изолированных собственных значений $\lambda_k(A)$ и $\lambda_k(A)$ являются полюсами $R(\lambda; A)$, то описание многообразия $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ дает следующее утверждение, установленное в [2, лемма 1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть оператор A имеет мероморфную резольвенту. Если $\zeta \geq 0$ и $\zeta < |\lambda_k(A)|$ для всех k , то $\mathfrak{G}_\zeta(A) = \{0\}$. Если же $\zeta \geq |\lambda_s(A)|$ для некоторого s , то $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ совпадает с линейной оболочкой всех собственных и присоединенных векторов A , отвечающих собственным значениям $\lambda_k(A)$ таким, что $|\lambda_k(A)| < \zeta$, и тех собственных векторов A , модули собственных значений которых совпадают с ζ .*

Введем пространство $X(A, I)$, состоящее из элементов $x \in \mathfrak{D}(A)$ с нормой $\|x\|_{X(A, I)} := \|Ax\|_X + \|x\|_X$. В силу замкнутости оператора A пространство $X(A, I)$ замкнуто. Далее будем предполагать, что банахово пространство Y удовлетворяет условию $X(A, I) \hookrightarrow Y$. Это условие обеспечивает, в частности, справедливость включений $\mathfrak{G}_\zeta(A) \subseteq Y$, $\zeta \geq 0$. Поэтому определены величины

$$E_\zeta(f, A)_Y := \inf_{g \in \mathfrak{G}_\zeta(A)} \|f - g\|_Y, \quad \zeta \geq 0, \quad f \in Y, \quad (1.1)$$

т.е. наилучшие приближения индивидуального элемента $f \in Y$ по норме пространства Y посредством векторов степени не выше ζ относительно оператора A . Введем также

$$E^{[r]}(f, A)_Y := \inf_{g \in \mathfrak{Z}(A^r)} \|f - g\|_Y, \quad r \in \mathbb{P}, \quad f \in Y. \quad (1.2)$$

Очевидно, что $E^{[0]}(f, A)_Y = \|f\|_Y$, а так как $\mathfrak{G}_0(A) = \mathfrak{Z}(A)$, то $E_0(f, A)_Y = E^{[1]}(f, A)_Y$. Кроме того, для каждого вектора $f \in Y$ справедливы следующие свойства:

- a) $E_\zeta(f, A)_Y$ и $E^{[r]}(f, A)_Y$ не возрастают, соответственно, по $\zeta \geq 0$ и $r \in \mathbb{P}$;
- b) $E_\zeta(f, A)_Y \leq E^{[r]}(f, A)_Y$ для всех $\zeta > 0$ и $r \in \mathbb{P}$;
- c) $E_\zeta(f, A)_Y$ и $E^{[r]}(f, A)_Y$ — полунормы относительно $f \in Y$.

При $r \in \mathbb{N}$ введем K -функционалы

$$K(\delta, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) := \inf_{g \in \mathfrak{D}(A^r)} (\|f - g\|_X + \delta \|A^r g\|_X), \quad \delta \geq 0, \quad f \in X. \quad (1.3)$$

Цель данной работы — получение оценки сверху наилучших приближений $E_\zeta(f, A)_X$ через K -функционалы (1.3) (прямые теоремы или неравенства Джексона), а также оценка сверху этих K -функционалов через наилучшие приближения $E_\zeta(f, A)_X$ и $E^{[r]}(f, A)_X$ (обратные теоремы или неравенства Бернштейна). Кроме того, при определенных условиях на $E_\zeta(f, A)_X$ в работе показана справедливость включений $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и $A^j f \in Y$. В этом же случае установлены оценки сверху величин $E_\zeta(A^j f, A)_Y$ и $E^{[l-j]}(A^j f, A)_Y$, $l \geq j$, через наилучшие приближения $E_\zeta(f, A)_X$ и $E^{[l]}(f, A)_X$. Полученные в этих теоремах

оценки таковы, что из них уже достаточно просто в терминах $E_\zeta(f, A)_X$ выводятся необходимые и достаточные условия в следующих утверждениях:

- 1) $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$;
- 2) ряд

$$e^{zA}f := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r A^r f}{r!} \quad (1.4)$$

сходится в некотором круге или во всей комплексной плоскости (т.е. в терминологии работ [3], [4] вектор f , соответственно, аналитический или целый).

Кроме того, в терминах $E_\zeta(f, A)_X$ вычислен порядок роста и указан тип целой функции $e^{zA}f$.

Эти результаты, установленные в § 5, непосредственно примыкают к исследованиям С. Н. Бернштейна [5], [6], в которых получены аналогичные результаты в случаях приближения функции f посредством тригонометрических полиномов или посредством целых функций конечного экспоненциального типа.

Для формулировки основных результатов работы понадобятся следующие обозначения: $\ln^+ a := \max\{\ln a; 0\}$, $a > 0$; $\mathcal{T}(\zeta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \zeta\}$ — окружность радиуса $\zeta > 0$. Также потребуем, чтобы $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta$, что означает, что $R(\zeta e^{i\theta}; A)$ определена (а значит, и непрерывна) почти для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Кроме того, далее часто будет использоваться следующее предположение относительно резольвенты оператора A .

УСЛОВИЕ (ζ) . *Существует такая монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} < \infty, \quad \text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть оператор A удовлетворяет условию (ζ) и*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+(\zeta_m \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|_{[X]}) d\theta < \infty. \quad (1.5)$$

Тогда найдется такая постоянная $c \geq 1$, что для всех $f \in X$ и $r \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$E_\zeta(f, A)_X \leq c^r K(\zeta^{-r}, f; X, \mathfrak{D}(A^r)), \quad \zeta \geq \zeta_1, \quad (1.6)$$

$$K(\zeta^{-r}, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) \leq \left(\frac{c}{\zeta}\right)^r \left(E^{[r]}(f, A)_X + \int_0^\zeta \xi^{r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi\right), \quad \zeta > 0. \quad (1.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Утверждение (1.6) теоремы 1.1 фактически содержится в оценке (3) работы [2] (см. доказательство теоремы 4.1 данной работы). В частности, из оценки (3) работы [2] следует, что если (1.5) выполнено при всех $\zeta_m > 0$, то утверждение (1.6) справедливо при всех $\zeta > 0$.

Оценку (1.6) будем называть *прямой теоремой* или *неравенством Джексона*, а оценку (1.7) — *обратной теоремой* или *неравенством Бернштейна*. Смысл этих названий будет ясен из дальнейшего.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.1, а число $\gamma > 0$. Тогда для каждого натурального $r > \gamma$ справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned} K(\delta^r, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) &= O(\delta^\gamma), \delta \rightarrow 0+ \Leftrightarrow E_\zeta(f, A)_X = O(\zeta^{-\gamma}), \zeta \rightarrow +\infty; \\ K(\delta^r, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) &= o(\delta^\gamma), \delta \rightarrow 0+ \Leftrightarrow E_\zeta(f, A)_X = o(\zeta^{-\gamma}), \zeta \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Утверждения следствия 1.1 непосредственно вытекают из оценок (1.6) и (1.7).

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда существует такая постоянная $c \geq 1$, что для всех $0 < \delta \leq 1$, $f \in X$ и $j, r \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$K(\delta^r, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) \leq c^{j+r} \delta^r \left(E^{[r]}(f, A)_X + \int_\delta^1 \frac{K(t^j, f; X, \mathfrak{D}(A^j))}{t^{r+1}} dt \right). \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений (1.2) и (1.3) наилучших приближений $E^{[r]}(f, A)_X$ и K -функционала имеем

$$K(\delta^r, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) \leq E^{[r]}(f, A)_X, \quad \delta \geq 0, f \in X. \quad (1.9)$$

Если теперь в интеграле, находящемся в правой части оценки (1.7), сделать замены $\zeta = \delta^{-1}$ и $\xi = t^{-1}$ и воспользоваться неравенством $E_\xi(f, A)_X \leq E^{[r]}(f, A)_X$, то получим

$$\begin{aligned} K(\delta^r, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) &\leq c^r \delta^r \left(E^{[r]}(f, A)_X \right. \\ &\quad \left. + \int_\delta^{\zeta_1^{-1}} \frac{E_{1/t}(f, A)_X}{t^{r+1}} dt + E^{[r]}(f, A)_X \int_{\zeta_1^{-1}}^\infty \frac{dt}{t^{r+1}} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Согласно оценке (1.6) $E_{1/t}(f, A)_X \leq c^j K(t^j, f; X, \mathfrak{D}(A^j))$, $0 < t \leq \zeta_1^{-1}$. Отсюда и из (1.10) с учетом (1.9) вытекает (1.8) для всех $0 < \delta \leq 1$. Заметим, что константа c может не совпадать с константой из (1.6), (1.7).

Оценку (1.8) будем называть *неравенством Маршо для K -функционалов* (1.3). Смысл этого названия будет ясен из дальнейшего.

Сделаем теперь пояснения к теореме 1.1 и к ее следствиям. Для этого введем необходимые функциональные пространства. Пусть $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Тогда через $AC[a, b]$ и $L_p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначаются, соответственно, множества абсолютно непрерывных и измеримых на $[a, b]$ функций, для которых

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p[a, b]} &:= \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \quad f \in L_p[a, b], \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L_\infty[a, b]} &:= \operatorname{ess\,sup}_{a \leq t \leq b} |f(t)| < \infty, \quad f \in L_\infty[a, b]. \end{aligned}$$

Если Q — некоторая вещественная полуось или вся ось, то через $L_p^{\text{loc}}(Q)$ обозначается такое множество функций f , заданных на Q , что для каждого конечного

отрезка $[\alpha, \beta] \subset Q$ сужение функции f на $[\alpha, \beta]$ принадлежит $L_p[\alpha, \beta]$. Аналогично определяются множества функций $AC^{loc}(Q)$.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а $r \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} W_p^r[a, b] &:= \{f : f^{(l-1)} \in AC^{loc}[a, b], l = 1, \dots, r; f, f^{(r)} \in L_p[a, b]\}, \\ W_p^0[a, b] &:= L_p[a, b]. \end{aligned}$$

Запись $\sim W_p^r[a, b]$ обозначает множество функций, совпадающих с функциями из $W_p^r[a, b]$ почти всюду, причем если $f, g \in \sim W_p^r[a, b]$, то равенство $f = g$ означает, что $f(t) = g(t)$ почти при всех $t \in [a, b]$, а $f^{(r)}$ определяется так: $f^{(r)} = v^{(r)}$ для $f = v, v \in W_p^r[a, b]$. Введенное разграничение пространств $W_p^r[a, b]$ и $\sim W_p^r[a, b]$ оказывается важным для корректного определения оператора дифференцирования, связанного с краевой задачей, и для формулировок теорем вложения в случае функциональных пространств.

Если $a = 0$ и $b = 2\pi$, то используются сокращенные обозначения:

$$L_p := L_p[0, 2\pi], \quad W_p^r := W_p^r[0, 2\pi], \quad \|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p}.$$

Определим подмножества $W_p^r(\mathbb{T})$ множества W_p^r следующим образом:

$$\begin{aligned} W_p^r(\mathbb{T}) &:= \{f \in W_p^r : f^{(l-1)}(0) = f^{(l-1)}(2\pi), l = 1, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}, \\ W_p^0(\mathbb{T}) &:= L_p. \end{aligned}$$

Введем оператор дифференцирования

$$D_{\mathbb{T}}x = -ix', \quad x \in \mathfrak{D}(D_{\mathbb{T}}) := \sim W_p^1(\mathbb{T}), \quad (1.11)$$

действующий в пространстве L_p .

Резольвента оператора $D_{\mathbb{T}}$ имеет вид:

$$(R(\lambda; D_{\mathbb{T}})f)(t) = i \int_0^t e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau - \frac{i2e^{i\lambda t}}{\sin \pi \lambda} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(\pi-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (1.12)$$

Тем самым, $R(\lambda; D_{\mathbb{T}})$ мероморфна. Собственные значения $\lambda_k(D_{\mathbb{T}}) = k, k \in \mathbb{Z}$, и им отвечают собственные функции $e^{ik(\cdot)}$, а присоединенных функций нет. Поэтому согласно предложению 1.1 множество $\mathfrak{G}_{\zeta}(D_{\mathbb{T}})$ совпадает с совокупностью тригонометрических полиномов степени не выше $\zeta \geq 0$. Очевидно, что $\mathfrak{Z}(D_{\mathbb{T}})$ совпадает с множеством функций, принимающих почти всюду одно и то же значение, и $\mathfrak{Z}(D_{\mathbb{T}}^r) = \mathfrak{Z}(D_{\mathbb{T}}), r \in \mathbb{N}$. Тем самым, $E_{\zeta}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p}$ — это наилучшее приближение в метрике L_p функции f посредством тригонометрических полиномов степени не выше $\zeta \geq 0$ и $E^{[r]}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p} = E_0(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p}, r \in \mathbb{N}$.

Из (1.11) следует, что $D_{\mathbb{T}}^r(f) = (-i)^r f^{(r)}, f \in \mathfrak{D}(D_{\mathbb{T}}^r) = \sim W_p^r(\mathbb{T})$. Поэтому K -функционал (1.3) для оператора $A = D_{\mathbb{T}}$, действующего в пространстве $X = L_p$, запишется в виде:

$$\begin{aligned} K(\delta, f; L_p, \mathfrak{D}(D_{\mathbb{T}}^r)) &= \inf_{g \in \sim W_p^r(\mathbb{T})} (\|f - g\|_p + \delta \|g^{(r)}\|_p) \\ &= \inf_{g \in W_p^r(\mathbb{T})} (\|f - g\|_p + \delta \|g^{(r)}\|_p) \\ &=: K(\delta, f; L_p, W_p^r(\mathbb{T})). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для оценок этого K -функционала введем r -й модуль гладкости функции $f \in L_p$, определенный по ее периодическому продолжению

$$f_{\mathbb{T}}(t) = f(t + 2\pi k), \quad -2\pi k \leq t < -2\pi(k-1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

равенством

$$\omega_{\mathbb{T}}^{[r]}(\delta, f)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^r f_{\mathbb{T}}\|_p, \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p,$$

где

$$(\Delta_h^r f_{\mathbb{T}})(t) := \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} f_{\mathbb{T}}(t - hs).$$

Справедливы неравенства

$$2^{-r} \omega_{\mathbb{T}}^{[r]}(\delta, f)_p \leq K(\delta^r, f; L_p, W_p^r(\mathbb{T})) \leq (2r)^r \omega_{\mathbb{T}}^{[r]}\left(\frac{\delta}{r}, f\right)_p, \quad \delta > 0. \quad (1.14)$$

(Эти, в общем-то известные, неравенства (см., например, обзор [7, §6]) будут пояснены в замечании 2.2.)

Поскольку $|\sin \pi \lambda| \geq c_1 \exp(\pi |\operatorname{Im} \lambda|)$, $\lambda \in \mathcal{T}(m-1/2)$, $m \in \mathbb{N}$, то из равенства (1.12), неравенства Юнга для свертки двух функций и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; D_{\mathbb{T}})\|_{[L_p, L_q]} &\leq c |\operatorname{Im} \lambda|^{-1+1/p-1/q}, \\ \lambda &\in \mathcal{T}\left(m - \frac{1}{2}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из этой оценки при $p = q$ следует, что оператор $A = D_{\mathbb{T}}$, действующий в пространстве $X = L_p$, удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Отсюда с учетом того, что $E_{\zeta}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p}$ совпадают с наилучшими приближениями в метрике L_p функции f посредством тригонометрических полиномов степени не выше ζ , а $E^{[r]}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p} = E_0(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p}$, $r \in \mathbb{N}$, и из соотношений (1.13), (1.14), заключаем, что оценки (1.6) и (1.7) совпадают, соответственно, с обобщенными неравенствами Джексона [8] и Бернштейна, установленными С. Б. Стечкиным [9, теоремы 1 и 8], А. Ф. и М. Ф. Тиманами [10, теорема 4]. В этом же случае (т.е. для оператора $A = D_{\mathbb{T}}$) утверждения следствия 1.1 при $\gamma < 1$ и $r = 1$ — это хорошо известные необходимые и достаточные условия принадлежности функции f соответствующим классам Липшица, выраженные через наилучшие приближения f посредством тригонометрических полиномов, а оценка (1.8) ввиду соотношений (1.13) и (1.14) совпадает с неравенством Маршо для модулей гладкости $\omega_{\mathbb{T}}^{[r]}(\delta, f)_p$ (см., например, [11, п. 3.3.3]; более точные и подробные исторические ссылки о приведенных здесь утверждениях можно найти в монографиях [11, гл. 5, 6], [12, замечания к гл. 5] и в обзоре [13]).

Перейдем к формулировке теоремы вложения, а затем поясним ее, как и теорему 1.1, на примере оператора $A = D_{\mathbb{T}}$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть оператор A удовлетворяет условию (ζ) и для некоторого $\gamma \geq 0$ и банахова пространства Y , для которого $X(A, I) \hookrightarrow Y$, выполнено требование

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ (\zeta_m^{1-\gamma} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|_{[X, Y]}) d\theta < \infty. \quad (1.16)$$

Считаем также, что это требование выполнено и в случае $Y = X$. Тогда найдется такая постоянная $c \geq 1$, что как только для вектора $f \in X$ при некотором $j \in \mathbb{P}$ выполнено условие

$$\int_1^\infty \xi^{j+\gamma-1} E_\xi(f, A)_X d\xi < \infty, \quad (1.17)$$

то $f \in \mathfrak{D}(A^j)$, $A^j f \in Y$ и

$$E_\zeta(A^j f, A)_Y \leq c^j \left((\zeta + 1)^{j+\gamma} E_\zeta(f, A)_X + \int_{\max\{1, \zeta\}}^\infty \xi^{j+\gamma-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \right), \quad \zeta > 0, \quad (1.18)$$

$$E^{[l-j]}(A^j f, A)_Y \leq c^j \left(E^{[l]}(f, A)_X + \int_1^\infty \xi^{j+\gamma-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \right), \quad l = j, j+1, \dots \quad (1.19)$$

В случае $j = 0$ утверждение теоремы справедливо без предположения о выполнении требования (1.16) для пространства $Y = X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Наилучшие приближения $E_\zeta(f, A)_Y$ и $E^{[r]}(f, A)_Y$, заданные формулами (1.1) и (1.2), определены для каждого вектора $f \in Y$, как только $\bigcup_{\zeta > 0} \mathfrak{G}_\zeta(A) \subseteq Y$. Такое включение всегда справедливо, когда $X(A, I) \hookrightarrow Y$. Однако для придания смысла требованию (1.16) предположение $X(A, I) \hookrightarrow Y$ уже существенно. Действительно, из тождества $AR(\lambda; A) = I + \lambda R(\lambda; A)$, $\lambda \in \rho(A)$, получаем, что $R(\lambda; A)$, рассмотренная как оператор из X в $X(A, I)$, определена и голоморфна при $\lambda \in \rho(A)$. Если $X(A, I) \hookrightarrow Y$, то этим же свойством обладает $R(\lambda; A)$, рассмотренная уже как оператор из X в Y . Поэтому, когда оператор A удовлетворяет условию (ζ) и $X(A, I) \hookrightarrow Y$, то $\|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|_{[X, Y]}$ определена и непрерывна почти для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. А значит, требование (1.16) имеет смысл.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Пусть $X(A, I) \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$. Тогда очевидно, что если выполнено требование (1.16), то это же требование выполнено и при $Y = X$. Тем не менее в конкретных случаях предположение, что $X(A, I) \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$, не всегда оправдано. Например, рассмотрим, как и в п. 2.2, оператор дифференцирования D на всей оси и пусть $X = L_p(\mathbb{R})$, а $Y = L_q(\mathbb{R})$, $q \geq p$. Тогда $X(D, I) = \sim W_p^1(\mathbb{R})$, а в силу теоремы вложения $\sim W_p^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R})$, т.е. $X(D, I) \hookrightarrow Y$. Для оператора D (см. лемму 2.5) выполнено требование (1.16) с $\gamma = 1/p - 1/q$ и в случае, если $Y = X$. Но пространство $Y = L_q(\mathbb{R})$ не вложено в пространство $X = L_p(\mathbb{R})$ ни при каком $q \neq p$.

Отметим теперь, что когда выполнены условия теоремы 1.1, то тогда выполнены и условия теоремы 1.2 с $Y = X$ и $\gamma = 0$. Поэтому из теоремы 1.2 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда найдется такая постоянная $c \geq 1$, что как только для вектора $f \in X$ при некотором $j \in \mathbb{P}$ справедливо требование (1.17) с $\gamma = 0$, то $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и для вектора $A^j f$ справедливы оценки (1.18), (1.19) с $Y = X$ и $\gamma = 0$, а также для всех $r \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$K(\zeta^{-r}, A^j f; X, \mathfrak{D}(A^r)) \leq c^{j+r} \left(\zeta^{-r} E^{[j+r]}(f, A)_X + \frac{1}{\zeta^r} \int_0^\zeta (\xi + 1)^{j+r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi + \int_\zeta^\infty \xi^{j-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \right), \quad \zeta > 0. \quad (1.20)$$

Действительно, исходя из сказанного ранее, достаточно установить лишь оценку (1.20). При $0 < \zeta \leq 1$ эта оценка вытекает из оценки (1.9), если считать в ней вектор f равным $A^j f$, и из оценки (1.19), если считать в ней $l = j + r$, $\gamma = 0$, $Y = X$. Поэтому установим (1.20) в предположении, что $\zeta > 1$. Тогда, подставляя в (1.7) с вектором f , равным $A^j f$, оценки (1.18) и (1.19) при $l = j + r$, $\gamma = 0$, $Y = X$, получаем

$$K(\zeta^{-r}, A^j f; X, \mathfrak{D}(A^r)) \leq c^{j+r} \zeta^{-r} \left(E^{[j+r]}(f, A)_X + \int_1^\infty \xi^{j-1} E_\xi(f, A)_X d\xi + \int_0^\zeta \xi^{r-1} (\xi + 1)^j E_\xi(f, A)_X d\xi + \int_0^\zeta \xi^{r-1} \left(\int_{\max\{1; \xi\}}^\infty t^{j-1} E_t(f, A)_X dt \right) d\xi \right). \quad (1.21)$$

Но так как $\zeta > 1$, то

$$\int_1^\infty \xi^{j-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \leq \int_0^\zeta (\xi + 1)^{j+r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi + \zeta^r \int_\zeta^\infty \xi^{j-1} E_\xi(f, A)_X d\xi$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^\zeta \xi^{r-1} \left(\int_{\max\{1; \xi\}}^\infty t^{j-1} E_t(f, A)_X dt \right) d\xi \\ & \leq \int_0^\zeta \xi^{r-1} \int_\xi^\infty t^{j-1} E_t(f, A)_X dt d\xi \\ & = \frac{1}{r} \int_0^\zeta \xi^{j+r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi + \frac{\zeta^r}{r} \int_\zeta^\infty \xi^{j-1} E_\xi(f, A)_X d\xi, \end{aligned}$$

откуда с учетом (1.21) вытекает (1.20).

Сделаем пояснения к теореме 1.2 и к ее следствию. В случае $X = Y = L_\infty$ и $A = D_{\mathbb{T}}$ утверждение теоремы 1.2, что $f \in \mathfrak{D}(A^j)$, получено Бернштейном [5, работа 3], а оценки (1.18) и (1.20) ввиду соотношений (1.13) и (1.14) – это, соответственно, следствие 10.1 и теорема 11 работы Стечкина [9]. Аналогично, в случае $X = Y = L_p$, $1 \leq p < \infty$, и $A = D_{\mathbb{T}}$ утверждение теоремы 1.2 и ее следствия можно найти в [11, п. 6.1.3]. Пусть теперь $1 \leq p < q \leq \infty$, $X = L_p$,

$Y = L_q$, а $A = D_{\mathbb{T}}$. Тогда из оценки (1.15) следует, что условия теоремы 1.2 выполнены с $\gamma = 1/p - 1/q$. Поэтому согласно теореме 1.2 справедливо следующее утверждение: *если для функции $f \in L_p$ выполнено требование (1.17) с $E_{\xi}(f, A)_X = E_{\xi}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p}$, $j = 0$ и $\gamma = 1/p - 1/q$, то $f \in L_q$ и справедлива оценка (1.18) с $E_{\zeta}(A^0 f, A)_Y = E_{\zeta}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_q}$* . Это утверждение совпадает с теоремой 2 работы А. А. Конюшкова [14] (в этой работе сообщается, что такое же утверждение независимо установил и Стечкин).

Отметим, что упомянутые здесь результаты Стечкина, Конюшкова, Тиманов, относящиеся к теоремам вложения, имели богатую предисторию и впоследствии были существенно усилены П. Л. Ульяновым в [15], [16] (см. также обзор [13]), получившего, в частности, неусиливаемые условия принадлежности функции f из L_p пространству L_q , $1 \leq p < q < \infty$, в терминах наилучших приближений f в метрике L_p посредством тригонометрической системы, т.е. в терминах $E_{\zeta}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p}$.

Поясним теперь запись сформулированных здесь утверждений. В тригонометрической аппроксимации утверждения типа (1.7), (1.18), (1.19), (1.20) или условие типа (1.17) записываются в равносильном виде посредством сумм. И это вполне естественно, так как спектр оператора $D_{\mathbb{T}}$ состоит из собственных значений $\lambda_k(D_{\mathbb{T}}) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, и поэтому $E_{\zeta}(f, D_{\mathbb{T}})_{L_p}$ — постоянная функция на каждом из интервалов $(l, l+1)$, $l \in \mathbb{R}$. Если же оператор A имеет мероморфную резольвенту, а $\lambda_k(A)$ — его собственные значения и $|\lambda_k(A)| \nearrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то согласно предложению 1.1 $E_{\zeta}(f, A)_Y$ также будет постоянной функцией на каждом из интервалов $(|\lambda_k(A)|, |\lambda_{k+1}(A)|)$. Но поскольку поведение $|\lambda_k(A)|$ может быть произвольным, то соответствующая запись в виде сумм окажется либо более громоздкой (если записать через $E_{|\lambda_k(A)|}(f, A)_Y$), либо менее естественной (если записать через $E_k(f, A)_Y$). Последнее замечание особенно относится к случаю непрерывного спектра оператора A .

Данная работа состоит из пяти параграфов. В §2 получены приложения сформулированных в §1 результатов к смешанной тригонометрически-полиномиальной системе функций, частным случаем которой является тригонометрическая система. В этом же параграфе дан вывод некоторых известных ранее результатов, относящихся к аппроксимации функций, заданных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$. В основном эти результаты приведены для того, чтобы установленные в процессе их доказательства свойства оператора дифференцирования, заданного на всей оси, использовать для пояснения полученных в §3 и §5 утверждений. Третий параграф работы посвящен доказательству теоремы 3.1, являющейся аналогом двух неравенств: неравенства Бернштейна об оценке нормы производной ограниченной на вещественной оси целой функции конечного экспоненциального типа и неравенства Никольского об оценке норм таких функций в пространствах с различными метриками. А именно, в теореме 3.1, в частности, получены оценки сверху $\|Ag\|_X$ и $\|g\|_Y$ через $\|g\|_X$ в предположении, что оператор A удовлетворяет требованию (1.5) или (1.16), а вектор $g \in \mathfrak{G}_{\zeta_m}(A)$, $m \in \mathbb{N}$. На основании теоремы 3.1 в §4 доказаны некоторые уточнения теорем 1.1 и 1.2. Отметим, что в оценках (1.6)–(1.8), (1.18)–(1.20) постоянная s , вообще говоря, принимает различные значения. Однако, если во всех утверждениях этого параграфа считать A одним и тем же оператором, то всегда постоянную s в оценках (1.6)–(1.8), (1.18)–(1.20) можно считать одной и той же (более подробно зависимость s оговорена в замеча-

ниях 4.2 и 4.3). То, что константа в правых частях неравенств (1.6) и (1.19) растет как c^r и c^j , сыграло решающую роль при выяснении необходимых и достаточных условий принадлежности вектора f множеству $\mathfrak{D}_\infty(A)$, а также при исследовании свойств вектор-функции $e^{zA}f$, заданной рядом (1.4). Выводу такого рода результатов и посвящен § 5.

Автор выражает глубокую благодарность Е. И. Жукиной за ценные консультации по теоремам вложения, которые существенно повлияли на результаты данной работы.

§ 2. Примеры

2.1. Тригонометрически-полиномиальная система функций. Для некоторого фиксированного натурального числа n рассмотрим систему функций $\{x_{j,k}\}$, $j = 0, \dots, n-1$, $k \in \mathbb{Z}$, каждая из которых представима в виде

$$x_{j,k}(t) = \frac{(it)^j}{j!} e^{iknt}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Введем величины

$$\mathcal{E}_m(f)_{p,n} = \inf_{c_{j,k} \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^m c_{j,k} x_{j,k} \right\|_p, \quad f \in L_p, \quad m \in \mathbb{P}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{E}^{[r]}(f)_{p,n} = \inf_{c_j \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{j=0}^{r-1} c_j x_{j,0} \right\|_p, \quad f \in L_p, \quad r = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{E}^{[0]}(f)_{p,n} = \|f\|_p, \quad \mathcal{E}^{[r]}(f)_{p,n} = \mathcal{E}^{[n]}(f)_{p,n}, \quad f \in L_p, \quad r > n. \quad (2.4)$$

Для каждой функции f , заданной на отрезке $[0, 2\pi]$, определим ее продолжение f_n на полуось $t < 0$ формулами

$$f_n(t) = \binom{k+n-1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j n}{j+k} \binom{n-1}{j} f\left(t + \frac{2\pi}{n}(j+k)\right), \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{-2\pi}{n}\right) k \leq t < \left(\frac{-2\pi}{n}\right) (k-1), \quad k \in \mathbb{N},$$

считая при этом $f_n(t) = f(t)$ при $0 \leq t \leq 2\pi$.

При $r \in \mathbb{N}$ введем соответствующие этому продолжению модули гладкости порядка r функции f равенствами

$$\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^r f_n\|_p, \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p,$$

и положим $\omega_n^{[0]}(\delta, f)_p := \|f\|_p$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существует такая постоянная $c \geq 1$, что для всех $f \in L_p$ и $r \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$\mathcal{E}_{m-1}(f)_{p,n} \leq (cr)^r \omega_n^{[r]}\left(\frac{1}{m}, f\right)_p, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.6)$$

$$\omega_n^{[r]}\left(\frac{1}{m}, f\right)_p \leq \left(\frac{c}{m}\right)^r \left(\mathcal{E}^{[r]}(f)_{p,n} + \sum_{s=1}^m s^{r-1} \mathcal{E}_s(f)_{p,n} \right), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть число $\gamma > 0$. Тогда для каждого натурального $r > \gamma$ справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned}\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p &= O(\delta^\gamma), \quad \delta \rightarrow 0+ \iff \mathcal{E}_m(f)_{p,n} = O(m^{-\gamma}), \quad m \rightarrow \infty; \\ \omega_n^{[r]}(\delta, f)_p &= o(\delta^\gamma), \quad \delta \rightarrow 0+ \iff \mathcal{E}_m(f)_{p,n} = o(m^{-\gamma}), \quad m \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Для формулировки теоремы вложения, связанной с системой (2.1), понадобится линейный функционал U , который задан на $C := C[0, 2\pi]$ (множестве непрерывных на $[0, 2\pi]$ функций) формулой

$$U(f) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad f \in C.$$

По этому функционалу U определим подмножества $W_{p,n}^r$ множества W_p^r следующим образом:

$$\begin{aligned}W_{p,n}^r &= \{f \in W_p^r : U(f^{(l-1)}) = 0, l = 1, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}, \\ W_{p,n}^0 &= L_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.\end{aligned}\tag{2.8}$$

ТЕОРЕМА 2.2. Существует такая постоянная $c \geq 1$, что как только для функции $f \in L_p$ при некотором $j \in \mathbb{P}$ и $1 \leq p \leq q \leq \infty$ выполнено условие

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{E}_s(f)_{p,n} < \infty,\tag{2.9}$$

то $f \in \sim W_{q,n}^j$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m-1}(f^{(j)})_{q,n} &\leq c^j \left(m^{j+1/p-1/q} \mathcal{E}_{m-1}(f)_{p,n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=m}^{\infty} s^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{E}_s(f)_{p,n} \right), \quad m \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{[l-j]}(f^{(j)})_{q,n} &\leq c^j \left(\mathcal{E}^{[l]}(f)_{p,n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} s^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{E}_s(f)_{p,n} \right), \quad l = j, j+1, \dots,\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\omega_n^{[r]} \left(\frac{1}{m}, f^{(j)} \right)_q &\leq c^{j+r} \left(\frac{1}{m^r} \mathcal{E}^{[j+r]}(f)_{p,n} \right. \\ &\quad + \frac{1}{m^r} \sum_{s=1}^m s^{j+r-1+1/p-1/q} \mathcal{E}_s(f)_{p,n} \\ &\quad \left. + \sum_{s=m+1}^{\infty} s^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{E}_s(f)_{p,n} \right), \quad m, r \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Отметим, что сформулированные в §1 утверждения относительно аппроксимации посредством тригонометрической системы функций вытекают из теорем 2.1 и 2.2, если положить в них $n = 1$.

Другое, более важное, замечание относится к случаю $q = \infty$ в теореме 2.2. В этом случае из первого утверждения теоремы 2.2 следует лишь, что $f \in \sim W_{\infty, n}^j$, т.е. исходя из определения множества $\sim W_{\infty, n}^j$, найдется такая функция f_0 , равная f почти всюду на $[0, 2\pi]$, которая принадлежит уже $W_{\infty, n}^j$. Значит, $f_0^{(l)}$ — абсолютно непрерывны и $U(f_0^{(l)}) = 0$ при всех $l < j$, а $f_0^{(j)} \in L_\infty$. Но ввиду условия (2.9) и оценки (2.10) $\mathcal{E}_m(f_0^{(j)})_{\infty, n} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. А это уже означает, что $f_0^{(j)}$ можно считать непрерывной и $U(f_0^{(j)}) = 0$.

Теоремы 2.1 и 2.2 будут получены из теорем 1.1 и 1.2 на основании следующих далее свойств продолжения f_n функции f на полуось $t < 0$ и определенного по этому продолжению модуля гладкости $\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p$.

ЛЕММА 2.1. Пусть функция f задана на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда для того чтобы функция f_n , заданная на полуоси $t \leq 2\pi$, удовлетворяла функциональному уравнению

$$U(f_n(\cdot - h)) := \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} f_n\left(\frac{2\pi l}{n} - h\right) \equiv 0, \quad h > 0, \quad (2.13)$$

и условию

$$f_n(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2.14)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f_n(t)$ при $t < 0$ определялась по функции f согласно формуле (2.5). При этом, f_n непрерывна на полуоси $t \leq 2\pi$ (принадлежит $W_p^{r, \text{loc}}(-\infty, 2\pi]$ при некотором $r \in \mathbb{P}$ и $1 \leq p \leq \infty$) тогда и только тогда, когда $f \in C$ и $U(f) = 0$ (соответственно, когда $f \in W_{p, n}^r$).

Для каждой функции $f \in L_p$ справедливы оценки

$$\|f_n(\cdot - h)\|_p \leq 2^{ns} \|f\|_p, \quad 0 \leq h \leq \frac{2\pi s}{n}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2.15)$$

$$\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p \leq (2^{ns} + 1)^{r-j} \omega_n^{[j]}(\delta, f)_p, \quad 0 \leq \delta \leq \frac{2\pi s}{n}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2.16)$$

где $j = 0, \dots, r$, а для натурального l

$$\omega_n^{[r]}(l\delta, f)_p \leq (2^{lns} - 1)^r \omega_n^{[r]}(\delta, f)_p, \quad 0 \leq \delta \leq \frac{2\pi s}{n}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2.17)$$

$$\omega_n^{[r]}(\delta, g)_p \leq 2^{n^2 r} \delta^r \|g^{(r)}\|_p, \quad 0 \leq \delta \leq 2\pi, \quad g \in W_{p, n}^r. \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость первого утверждения леммы. Зададим продолжение функции f с основного отрезка $[0, 2\pi]$ на полуинтервал $[-2\pi/n, 0)$ равенствами

$$f_n(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ f_n(t) = - \sum_{l=1}^n (-1)^l \binom{n}{l} f\left(\frac{2\pi l}{n} + t\right), \quad -\frac{2\pi}{n} \leq t < 0. \quad (2.19)$$

Понятно, что определенная таким образом функция f_n удовлетворяет уравнению (2.13) при $0 < h \leq 2\pi/n$. Обратно, если функция f_n удовлетворяет уравнению (2.13) при $0 < h \leq 2\pi/n$, то из условия (2.14) следует, что $f_n(t)$ имеет вид (2.19). Тем самым показано существование и единственность требуемого продолжения f_n функции f с основного отрезка $[0, 2\pi]$ на полуинтервал $[-2\pi/n, 0)$. Применяя теперь процедуру продолжения (2.19) к функции f , равной $f_n(\cdot - 2\pi/n)$, находим требуемое продолжение f на полуинтервал $[-4\pi/n, 0)$. Продолжая указанный процесс счетное число раз, получаем утверждение леммы о существовании и о единственности решения f_n функционального уравнения (2.13) при условии (2.14).

Отметим сразу же, что из определения (2.19) продолжения f_n следует, что если $f \in C$ и $U(f) = 0$, то f_n непрерывна на $[-2\pi/n, 2\pi]$ и, как уже отмечалось, $U(f(\cdot - 2\pi/n)) = 0$. Поэтому, учитывая правило построения $f_n(t)$ при $t < 0$, имеем: f_n непрерывна на полуоси $t \leq 2\pi$, когда $f \in C$ и $U(f) = 0$. Обратно, если f_n непрерывна на полуоси $t \leq 2\pi$, то поскольку она удовлетворяет уравнению (2.13) при всех $h > 0$, то она удовлетворяет этому уравнению и при $h = 0$, т.е. $U(f_n) = U(f) = 0$. Аналогично показывается, что $f_n \in W_p^{r, \text{loc}}(-\infty, 2\pi]$ тогда и только тогда, когда $f \in W_p^r$ при тех же p и r .

Покажем теперь, что функция f_n на полуоси $t < 0$ задается формулами (2.5). Из приведенного правила построения f_n следует, что найдутся такие постоянные $a_{j,k}$, для которых

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,k} f\left(t + \frac{2\pi}{n}(j+k)\right), \quad (2.20)$$

$$\left(-\frac{2\pi}{n}\right)k \leq t < \left(-\frac{2\pi}{n}\right)(k-1), \quad k = -n+1, -n+2, \dots,$$

причем в силу единственности f_n постоянные $a_{j,k}$ не зависят от f . Подставляя равенства (2.20) в функциональное уравнение (2.13) и учитывая произвольность f , получаем следующие соотношения для коэффициентов $a_{j,k}$:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{n}{l} a_{j, k-l} = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда согласно правилу решения рекуррентных соотношений (см., например, [17, гл. VI]) выводим формулу для $a_{j,k}$:

$$a_{j,k} = c_{j,0} + c_{j,1}k + \dots + c_{j,n-1}k^{n-1}, \quad k = -n+1, -n+2, \dots \quad (2.21)$$

(при каждом $j = 0, \dots, n-1$), где $c_{j,k}$ — некоторые, пока еще неопределенные, коэффициенты. Но так как $f_n(t) = f(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, а функция f произвольна, то в (2.20) числа $a_{j,k} = \delta_{j,-k}$, $k = 0, -1, \dots, -n+1$ (где $j = 0, \dots, n-1$, а $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера). Учитывая условия $a_{j,k} = \delta_{j,-k}$, $k = 0, -1, \dots, -n+1$, из (2.21) получаем

$$a_{j,k} = \frac{(-1)^j}{j+k} \frac{k(k+1) \cdot \dots \cdot (k+n-1)}{j!(n-j-1)!} = \frac{(-1)^j n}{j+k} \binom{k+n-1}{n} \binom{n-1}{j}.$$

Подставляя эти выражения в равенства (2.20), приходим к (2.5).

Установим теперь оценки (2.15)–(2.18).

Из правила (2.19) построения f_n следует, что $\|f_n\|_{L_p[-2\pi/n, 0]} \leq (2^n - 1)\|f\|_p$, поэтому $\|f_n(\cdot - h)\|_p \leq 2^n \|f\|_p$ при $0 \leq h \leq 2\pi/n$. Оценивая точно так же норму функции $f_n(\cdot - h)$ через норму функции $f_n(\cdot - h + 2\pi/n)$ последовательно при $2\pi j/n \leq h \leq 2\pi(j+1)/n$, $j \in \mathbb{N}$, приходим к (2.15).

Для доказательства оценок (2.16) и (2.17) введем оператор $T_n(h)$, действующий в пространстве L_p по правилу

$$(T_n(h)f)(t) = f_n(t - h), \quad h \geq 0.$$

Очевидно, что

$$T_n(0) = I, \quad T_n(h_1 + h_2) = T_n(h_1)T_n(h_2), \quad h_1, h_2 \geq 0, \quad (2.22)$$

а согласно оценке (2.15)

$$\|T_n(h)\|_{[L_p]} \leq 2^{ns}, \quad 0 \leq h \leq \frac{2\pi s}{n}, \quad s \in \mathbb{P}. \quad (2.23)$$

Так как

$$\begin{aligned} \omega_n^{[r]}(\delta, f)_p &= \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|(I - T_n(h))^r f\|_p \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq h \leq \delta} \|(I - T_n(h))^{r-j}\|_{[L_p]} \right) \left(\sup_{0 \leq h \leq \delta} \|(I - T_n(h))^j f\|_p \right), \end{aligned}$$

то из неравенства (2.23) следует оценка (2.16).

Из (2.22) имеем

$$I - T_n(hl) = I - T_n(h)^l = (I + T_n(h) + \dots + T_n(h)^{l-1})(I - T_n(h)),$$

а из (2.23) следует, что

$$\|I + T_n(h) + \dots + T_n(h)^{l-1}\|_{[L_p]} \leq 2^{lns} - 1, \quad 0 \leq h \leq \frac{2\pi s}{n}, \quad s \in \mathbb{N},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \omega_n^{[r]}(l\delta, f)_p &= \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|(I - T_n(hl))^r f\|_p \\ &\leq (2^{lns} - 1)^r \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|(I - T_n(h))^r f\|_p, \quad 0 \leq \delta \leq \frac{2\pi s}{n}, \quad s \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

что и доказывает оценку (2.17).

Пусть функция $g \in W_{p,n}^r$. Тогда, как было показано ранее, $g_n^{(r)} \in L_p^{loc}(-\infty, 2\pi]$. Следовательно,

$$(\Delta_h^r g_n)(t) = h^r \int_{[0,1]^r} g_n^{(r)}(t - h(\tau_1 + \dots + \tau_r)) d\tau_1 \dots d\tau_r,$$

где $h \geq 0$, а через $\int_{[0,1]^r}$ обозначен r -кратный интеграл по r -мерному кубу со стороной $[0, 1]$. Тем самым,

$$\|\Delta_h^r g_n\|_p \leq h^r \sup_{0 \leq \xi \leq 2\pi r} \|g_n^{(r)}(\cdot - \xi)\|_p, \quad 0 \leq h \leq 2\pi.$$

Отсюда и из оценки (2.15), в которой полагаем функцию $f = g^{(r)}$ (а значит, $f_n = g_n^{(r)}$) и число $s = nr$, получаем (2.18).

При выводе теорем 2.1 и 2.2 используется следующий K -функционал:

$$K_n^{[r]}(\delta, f)_p = \inf_{g \in W_{p,n}^r} (\|f - g\|_p + \delta \|g^{(r)}\|_p), \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p. \quad (2.24)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$, а функция $f \in L_p$. Тогда

$$(2^{n^2} + 1)^{-r} \omega_n^{[r]}(\delta, f)_p \leq K_n^{[r]}(\delta^r, f)_p \leq (2r)^r \omega_n^{[r]}(\delta, f)_p, \quad 0 < \delta \leq 2\pi. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p$ является полунормой относительно функции f , то пользуясь оценкой (2.16) при $j = 0$ и $s = n$, а также оценкой (2.18), заключаем, что для произвольной функции $g \in W_{p,n}^r$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \omega_n^{[r]}(\delta, f)_p &\leq \omega_n^{[r]}(\delta, f - g)_p + \omega_n^{[r]}(\delta, g)_p \\ &\leq (2^{n^2} + 1)^r \|f - g\|_p + 2^{n^2 r} \delta^r \|g^{(r)}\|_p, \quad 0 \leq \delta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения (2.24) K -функционала следует первая оценка в (2.25).

Пусть $\delta > 0$, а функция f_n построена по функции f согласно формуле (2.5). Зададим модифицированное преобразование Стеклова

$$(S_{\delta,r} f_n)(t) = \int_{[0,1]^r} \sum_{u=1}^r (-1)^{u+1} \binom{r}{u} f_n \left(t - \frac{\delta u}{r} (\tau_1 + \dots + \tau_r) \right) d\tau_1 \dots d\tau_r. \quad (2.26)$$

Отсюда, из определения r -й разности и из неравенства Минковского получаем

$$\begin{aligned} \|f - S_{\delta,r} f_n\|_p &\leq \int_{[0,1]^r} \|\Delta_{\frac{\delta}{r}(\tau_1 + \dots + \tau_r)}^r f_n\|_p d\tau_1 \dots d\tau_r \\ &\leq \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^r f_n\|_p = \omega_n^{[r]}(\delta, f)_p, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из определения (2.26) функции $S_{\delta,r} f_n$ следуют следующие правила дифференцирования:

$$\begin{aligned} (S_{\delta,r} f_n)^{(j)}(t) &= \left(\frac{r}{\delta} \right)^j \int_{[0,1]^{r-j}} \sum_{u=1}^r (-1)^{u+1} \binom{r}{u} \frac{1}{u^j} (\Delta_{\frac{\delta u}{r}}^j f_n) \\ &\quad \times \left(t - \frac{\delta u}{r} (\tau_{j+1} + \dots + \tau_r) \right) d\tau_{j+1} \dots d\tau_r, \quad j = 0, \dots, r-1, \\ (S_{\delta,r} f_n)^{(r)}(t) &= \left(\frac{r}{\delta} \right)^r \sum_{u=1}^r (-1)^{u+1} \binom{r}{u} \frac{1}{u^r} (\Delta_{\frac{\delta u}{r}}^r f_n)(t), \end{aligned} \quad (2.28)$$

тем самым,

$$\|(S_{\delta,r}f_n)^{(r)}\|_p \leq \left(\frac{r}{\delta}\right)^r (2^r - 1)\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p, \quad \delta > 0. \quad (2.29)$$

Функция f_n построена по функции f согласно правилу (2.5), поэтому, исходя из первого утверждения леммы 2.1, она удовлетворяет функциональному уравнению (2.13). Отсюда и из равенств (2.28) заключаем, что $S_{\delta,r}f_n \in W_p^r$ и $U((S_{\delta,r}f_n)^{(l-1)}) = 0$ для $l = 1, \dots, r$, т.е. $S_{\delta,r}f_n \in W_{p,n}^r$, а значит,

$$K_n^{[r]}(\delta^r, f)_p \leq \|f - S_{\delta,r}f_n\|_p + \delta^r \|(S_{\delta,r}f_n)^{(r)}\|_p.$$

Подставляя в правую часть этого неравенства оценки (2.27) и (2.29), получаем второе неравенство в (2.25).

Дальнейший вывод теорем 2.1 и 2.2 основан на изучении оператора D_n , действующего в каждом из пространств L_p по правилу

$$D_n x = -ix', \quad x \in \mathfrak{D}(D_n) := \sim W_{p,n}^1. \quad (2.30)$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тогда резольвента $R(\lambda; D_n)$ оператора D_n допускает оценку

$$\|R(\lambda; D_n)\|_{[L_p, L_q]} \leq c |\operatorname{Im} \lambda|^{-1+1/p-1/q}, \quad \lambda \in \mathcal{T}\left(mn - \frac{n}{2}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.31)$$

и

$$E_\zeta(f, D_n)_{L_p} = \mathcal{E}_m(f)_{p,n}, \quad mn < \zeta < (m+1)n, \quad m \in \mathbb{P}, \quad (2.32)$$

$$E^{[r]}(f, D_n)_{L_p} = \mathcal{E}^{[r]}(f)_{p,n}, \quad r \in \mathbb{P}. \quad (2.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общее решение уравнения $-ix' - \lambda x = f$ имеет вид:

$$x(t) = i \int_0^t e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau + ce^{i\lambda t}, \quad (2.34)$$

где c — произвольная постоянная. Для того чтобы функция x была бы еще и решением уравнения $D_n x - \lambda x = f$, необходимо и достаточно, чтобы $x \in \mathfrak{D}(D_n)$, т.е. чтобы $U(x) = 0$. Следовательно,

$$i \sum_{l=1}^n (-1)^l \binom{n}{l} \int_0^{2\pi l/n} e^{i\lambda(2\pi l/n - \tau)} f(\tau) d\tau + c(1 - e^{i2\pi\lambda/n})^n = 0.$$

Находя из этого равенства постоянную c и подставляя ее в (2.34), получаем

$$\begin{aligned} (R(\lambda; D_n)f)(t) &= i \int_0^t e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &- \frac{ie^{i\lambda t}}{(1 - e^{i2\pi\lambda/n})^n} \sum_{l=1}^n (-1)^l \binom{n}{l} \int_0^{2\pi l/n} e^{i\lambda(2\pi l/n - \tau)} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Так как $\|e^{-\eta(\cdot)}\|_{L_\nu[0,\infty)} \leq \eta^{-1/\nu}$, $\eta > 0$, то из неравенств Юнга и Гёльдера выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{(\cdot)} e^{i\lambda(\cdot-\tau)} f(\tau) d\tau \right\|_q &\leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1+1/p-1/q} \|f\|_p, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ \left| \int_0^{2\pi l/n} e^{i\lambda(2\pi l/n-\tau)} f(\tau) d\tau \right| &\leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1+1/p} \|f\|_p, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|R(\lambda; D_n)\|_{[L_p, L_q]} \leq \frac{2^n}{|1 - e^{i2\pi\lambda/n}|^n} |\operatorname{Im} \lambda|^{-1+1/p-1/q}, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0.$$

Но $|1 - e^{i2\pi\lambda/n}| \geq c_1$ при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ и $\lambda \in \mathcal{T}(mn - n/2)$, $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует требуемая оценка (2.31) в случае $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$.

Если же $\operatorname{Im} \lambda < 0$, то записав общее решение x уравнения $-ix' - \lambda x = f$ в виде

$$x(t) = -i \int_t^{2\pi} e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau + ce^{i\lambda t},$$

приходим, как и раньше, к представлению

$$\begin{aligned} (R(\lambda; D_n f))(t) &= -i \int_t^{2\pi} e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &+ \frac{ie^{i\lambda(t-2\pi)}}{(e^{-i2\pi\lambda/n} - 1)^n} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{n}{l} \int_{2\pi l/n}^{2\pi} e^{i\lambda(2\pi l/n-\tau)} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Далее, повторяя те же самые выкладки, что и в уже рассмотренном случае $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, получаем (2.31) в случае $\operatorname{Im} \lambda < 0$.

Цепочка функций $x_{0,k}, \dots, x_{n-1,k}$, заданных формулами (2.1), является цепочкой собственной и присоединенных к ней функций оператора D_n , отвечающей собственному значению $\lambda_k(D_n) = kn$, $k \in \mathbb{Z}$, а из представления (2.35) резольвенты оператора D_n следует ее мероморфность. Применяя теперь к оператору $A = D_n$ предложение 1.1 и учитывая определение (2.2) величин $\mathcal{E}_m(f)_{p,n}$, получаем равенства (2.32). Равенства (2.33) вытекают из определений (2.3) и (2.4) величин $\mathcal{E}^{[r]}(f)_{p,n}$ и из того факта, что ядро оператора D_n^r совпадает с линейной оболочкой функций $x_{j,0}$ при $j \leq r-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2.1 и 2.2. Из равенств (2.32) заключаем, что для произвольного $\beta \in \mathbb{R}$ найдутся такие положительные постоянные c' и c'' , для которых

$$c' s^\beta \mathcal{E}_s(f)_{p,n} \leq \int_{sn}^{(s+1)n} \xi^\beta E_\xi(f, D_n)_{L_p} d\xi \leq c'' s^\beta \mathcal{E}_s(f)_{p,n}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (2.36)$$

Очевидно также, что при $\beta > -1$

$$\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} \mathcal{E}_0(f)_{p,n} = \int_0^n \xi^\beta E_\xi(f, D_n)_{L_p} d\xi. \quad (2.37)$$

Учитывая определения (2.8), (2.24) и (2.30) множеств $W_{p,n}^r$, K -функционала $K_n^{[r]}(\delta, f)_p$ и оператора D_n , получаем равенство

$$K(\delta, f; L_p, \mathfrak{D}(D_n^r)) = K_n^{[r]}(\delta, f)_p, \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p. \quad (2.38)$$

Отметим теперь, что из оценки (2.31) при $p = q$ следует выполнение условия (1.5) для оператора $A = D_n$, действующего в пространстве $X = L_p$. Полагая в утверждении (1.6) теоремы 1.1 $\zeta = (m - 1/2)n$, $A = D_n$, учитывая равенства (2.32) и (2.38), вторую из оценок в (2.25) и пользуясь неубываемостью $\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p$ по δ , приходим к утверждению (2.6).

Для получения утверждения (2.7) необходимо в неравенстве (1.7) положить $\zeta = mn$, $A = D_n$ и учесть последовательно соотношения (2.38), (2.25), (2.33), (2.36) и (2.37). При этом следует также воспользоваться оценкой

$$\omega_n^{[r]} \left(\frac{1}{m}, f \right)_p \leq 2^{n^2 r} \omega_n^{[r]} \left(\frac{1}{mn}, f \right)_p, \quad m \in \mathbb{N},$$

вытекающей из (2.17).

Аналогично, из оценки (2.31) следует, что оператор $A = D_n$ удовлетворяет требованиям теоремы 1.2 с пространствами $X = L_p$, $Y = L_q$ и с числом $\gamma = 1/p - 1/q$. Согласно оценкам (2.36) требования (1.17) и (2.9) для оператора $A = D_n$ равносильны. Повторяя теперь те же самые рассуждения, что и при выводе теоремы 2.1 из теоремы 1.1, из неравенств (1.18) и (1.19) получаем, соответственно, оценки (2.10) и (2.11). Оценка (2.12) выводится из оценок (2.7), (2.10) и (2.11) точно так же, как оценка (1.20) выводится из (1.7), (1.18) и (1.19) (лишь интегралы заменяются суммами).

Неравенство (2.16) дает оценку сверху модулей гладкости $\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p$ высшего порядка через модули гладкости $\omega_n^{[j]}(\delta, f)_p$ низшего порядка, т.е. при $j < r$. Следующая теорема (аналог неравенства Маршо) устанавливает оценки сверху модулей гладкости низшего порядка через модули гладкости высшего порядка.

ТЕОРЕМА 2.3. *Для произвольного целого $j \geq 2$ найдется такая постоянная $c_j > 0$, что для всех $r = 1, \dots, j-1$ и функций $f \in L_p$ выполнено неравенство*

$$\omega_n^{[r]}(\delta, f)_p \leq c_j \delta^r \left(\mathcal{E}^{[r]}(f)_{p,n} + \int_\delta^1 \frac{\omega_n^{[j]}(t, f)_p}{t^{r+1}} dt \right), \quad 0 < \delta \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор $A = D_n$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то для него справедлива оценка (1.8). Полагая в (1.8) оператор $A = D_n$, пространство $X = L_p$ и учитывая последовательно соотношения (2.38), (2.33) и (2.25), приходим к утверждению теоремы 2.3.

2.2. О приближении функций в пространствах Лебега на всей оси.

В данном пункте из теорем 1.1 и 1.2 будут выведены, в основном, известные результаты относительно аппроксимации функций, заданных на всей оси, посредством целых функций конечного экспоненциального типа.

Введем необходимые обозначения. Для каждого $\zeta \geq 0$ и $1 \leq p \leq \infty$ определим множество $\mathfrak{G}_{\zeta,p}$, состоящее из целых функций g , допускающих оценку $|g(z)| \leq c(g) \exp(\zeta|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, с некоторой положительной постоянной $c(g)$ и сужение которых на $\mathbb{R}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. Очевидно, что в случае $p < \infty$ множество $\mathfrak{G}_{0,p}$ состоит лишь из функций, тождественно равных нулю, а $\mathfrak{G}_{0,\infty}$ — множество функций, принимающих одно и то же значение.

Определим наилучшие приближения

$$\mathcal{A}_{\zeta}(f)_p = \inf_{g \in \mathfrak{G}_{\zeta,p}} \|f - g\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad \zeta \geq 0, \quad f \in L_p(\mathbb{R}),$$

и модули гладкости

$$\omega^{[r]}(\delta, f; L_p(\mathbb{R})) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^r f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p(\mathbb{R}).$$

ТЕОРЕМА 2.4. *Существует такая постоянная $c \geq 1$, что для всех $\zeta > 0$, $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $r \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$\mathcal{A}_{\zeta}(f)_p \leq (cr)^r \omega^{[r]} \left(\frac{1}{\zeta^r}, f; L_p(\mathbb{R}) \right), \quad (2.39)$$

$$\omega^{[r]} \left(\frac{1}{\zeta}, f; L_p(\mathbb{R}) \right) \leq \left(\frac{c}{\zeta} \right)^r \left(\mathcal{A}_0(f)_p + \int_0^{\zeta} \xi^{r-1} \mathcal{A}_{\xi}(f)_p d\xi \right). \quad (2.40)$$

ТЕОРЕМА 2.5. *Существует такая постоянная $c \geq 1$, что как только для функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ при некотором $j \in \mathbb{P}$ и $1 \leq p \leq q \leq \infty$ выполнено условие*

$$\int_1^{\infty} \xi^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{A}_{\xi}(f)_p d\xi < \infty,$$

то $f \in \sim W_q^j(\mathbb{R})$ и

$$\begin{aligned} A_{\zeta}(f^{(j)})_q &\leq c^j \left((\zeta + 1)^{j+1/p-1/q} \mathcal{A}_{\zeta}(f)_p \right. \\ &\quad \left. + \int_{\max\{1;\zeta\}}^{\infty} \xi^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{A}_{\xi}(f)_p d\xi \right), \quad \zeta \geq 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \omega^{[r]} \left(\frac{1}{\zeta}, f^{(j)}; L_q(\mathbb{R}) \right) &\leq c^{j+r} \left(\frac{1}{\zeta^r} A_0(f)_p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\zeta^r} \int_0^{\zeta} (\xi + 1)^{j+r-1+1/p-1/q} \mathcal{A}_{\xi}(f)_p d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\zeta}^{\infty} \xi^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{A}_{\xi}(f)_p d\xi \right), \quad r \in \mathbb{N}, \quad \zeta > 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\|f^{(j)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq c^j \left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} + \int_1^{\infty} \xi^{j-1+1/p-1/q} \mathcal{A}_{\xi}(f)_p d\xi \right). \quad (2.43)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. На важность аппроксимации индивидуальной функции в равномерной метрике посредством целых функций конечного экспоненциального типа ζ впервые обратил внимание Бернштейн (см. работу 82 в [6] и следующую за ней большую серию статей). В дальнейшем эти исследования Бернштейна получили существенное развитие в работах Н. И. Ахиезера, С. М. Никольского, Тиманов и др. (см., например, [11, гл. 5, 6] и обзор [13]). Отметим, что ранее, как правило, аппроксимирующие множества $\mathfrak{G}_{\zeta,p}$ описывались иначе. А именно, рассматривалась совокупность $\mathfrak{M}_{\zeta,p}$ всех целых функций g , удовлетворяющих условиям, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon, g) > 0$, что $|g(z)| \leq c(\varepsilon, g) \exp((\zeta + \varepsilon)|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, и сужение g на вещественную ось принадлежит $L_p(\mathbb{R})$ [12, § 3.1]. Следовательно, $\mathfrak{G}_{\zeta,p} \subseteq \mathfrak{M}_{\zeta,p}$. Покажем, что в действительности $\mathfrak{G}_{\zeta,p} = \mathfrak{M}_{\zeta,p}$, $\zeta \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Для этого достаточно показать включение $\mathfrak{M}_{\zeta,p} \subseteq \mathfrak{G}_{\zeta,p}$, которое выведем из следующего свойства функций $g \in \mathfrak{M}_{\zeta,p}$: сужение g на вещественную ось является равномерно ограниченной функцией [12, п. 3.2.5] и

$$|g(z)| \leq \|g\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \exp(\zeta |\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.44)$$

Действительно, применяя к функции g_ε , заданной равенством

$$g_\varepsilon(z) = g(z) \exp(i(\zeta + \varepsilon)z), \quad \varepsilon > 0,$$

теорему Фрагмена–Линделёфа (см., например, [18, гл. 6, п. 3.3]), получаем, что

$$|g_\varepsilon(z)| \leq \|g\|_{L_\infty(\mathbb{R})}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ выводится оценка (2.44) для $\operatorname{Im} z \geq 0$. Аналогично выводится (2.44) и для $\operatorname{Im} z < 0$.

Равенство $\mathfrak{G}_{\zeta,p} = \mathfrak{M}_{\zeta,p}$ показывает, что введенные здесь величины $\mathcal{A}_\zeta(f)_p$ совпадают с величинами $A_\zeta(f)_{L_p}$ из монографии [11], и поэтому теоремы 2.4 и 2.5 являются незначительными уточнениями утверждений из [11, пп. 5.1.3, 6.1.4, 6.4.4]. Эти уточнения относятся лишь к зависимости постоянных в неравенствах (2.39)–(2.43) от параметров j и r . Однако эта зависимость, как уже отмечалось в § 1, играет существенную роль при исследовании зависимости аналитических свойств функции от скорости убывания ее наилучших приближений.

Теоремы 2.4 и 2.5 будут выведены из теорем 1.1 и 1.2 на основании следующих двух простых лемм.

ЛЕММА 2.4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$, а K -функционал задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} K(\delta, f; L_p(\mathbb{R}), W_p^r(\mathbb{R})) &:= \inf_{g \in W_p^r(\mathbb{R})} (\|f - g\|_{L_p(\mathbb{R})} + \delta \|g^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{R})}), \\ \delta &\geq 0, \quad f \in L_p(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2^{-r} \omega^{[r]}(\delta, f; L_p(\mathbb{R})) &\leq K(\delta^r, f; L_p(\mathbb{R}), W_p^r(\mathbb{R})) \\ &\leq (2r)^r \omega^{[r]}\left(\frac{\delta}{r}, f; L_p(\mathbb{R})\right), \quad \delta > 0, \quad f \in L_p(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из свойств модуля гладкости (см., например, [11, п. 3.3] или [12, §4.2]), получаем, что для функций $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $g \in W_p^r(\mathbb{R})$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\omega^{[r]}(\delta, f; L_p(\mathbb{R})) &\leq \omega^{[r]}(\delta, f - g; L_p(\mathbb{R})) + \omega^{[r]}(\delta, g; L_p(\mathbb{R})) \\ &\leq 2^r \|f - g\|_{L_p(\mathbb{R})} + \delta^r \|g^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

из которых в силу произвольности $g \in W_p^r(\mathbb{R})$ следует первое неравенство в (2.46).

Для доказательства второго неравенства в (2.46) положим в формуле (2.26) функцию f_n равной f . Тогда из равенств (2.28) следует, что $S_{\delta,r}f \in W_p^r(\mathbb{R})$, а значит,

$$K(\delta^r, f; L_p(\mathbb{R}), W_p^r(\mathbb{R})) \leq \|f - S_{\delta,r}f\|_{L_p(\mathbb{R})} + \delta^r \|(S_{\delta,r}f)^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (2.47)$$

Оценка (2.27) для функции $S_{\delta,r}f$ запишется в виде

$$\|f - S_{\delta,r}f\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \omega^{[r]}(\delta, f; L_p(\mathbb{R})) \leq r^r \omega^{[r]}(\frac{\delta}{r}, f; L_p(\mathbb{R})),$$

а из последнего равенства в (2.28) и неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned}\|(S_{\delta,r}f)^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{R})} &\leq \left(\frac{r}{\delta}\right)^r \sum_{u=1}^r \binom{r}{u} \frac{1}{u^r} \omega^{[r]}(\frac{\delta u}{r}, f; L_p(\mathbb{R})) \\ &\leq \left(\frac{r}{\delta}\right)^r (2^r - 1) \omega^{[r]}(\frac{\delta}{r}, f; L_p(\mathbb{R})).\end{aligned}$$

Из этих оценок и из (2.47) следует второе неравенство в (2.46).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Вывод неравенств (1.14) ничем не отличается от вывода неравенств (2.46), лишь в формуле (2.26) в этом случае надо функцию f_n положить равной $f_{\mathbb{T}}$, где $f_{\mathbb{T}}$ — периодическое продолжение f на $\mathbb{R}$.

ЛЕММА 2.5. Пусть оператор дифференцирования D действует в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ по правилу

$$Dx = -ix', \quad x \in \mathfrak{D}(D) := \sim W_p^1(\mathbb{R}), \quad (2.48)$$

а $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тогда

$$\|R(\lambda; d)\|_{[L_p(\mathbb{R}), L_q(\mathbb{R})]} \leq \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^{1-1/p+1/q} |\operatorname{Im} \lambda|^{-1+1/p-1/q}, \quad (2.49)$$

где $(1 - 1/p + 1/q)^{1-1/p+1/q} := 1$ в случае $p = 1$ и $q = \infty$.

Если через $\mathfrak{G}_{\zeta}(D)_p$ обозначить множество векторов степени не выше ζ относительно оператора D , действующего в $L_p(\mathbb{R})$, то

$$\mathfrak{G}_{\zeta}(D)_p = \mathfrak{G}_{\zeta,p}, \quad \zeta \geq 0. \quad (2.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Резольвента оператора D имеет вид:

$$\begin{aligned}(R(\lambda; D)f)(t) &= i \int_0^\infty e^{i\lambda\tau} f(t-\tau) d\tau, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ (R(\lambda; D)f)(t) &= i \int_0^\infty e^{-i\lambda\tau} f(t+\tau) d\tau, \quad \operatorname{Im} \lambda < 0,\end{aligned}$$

а $\|e^{-\eta(\cdot)}\|_{L_\nu[0,\infty)} = (\eta\nu)^{-1/\nu}$, $\eta > 0$, $1 \leq \nu \leq \infty$. Отсюда и из неравенства Юнга следует (2.49). При $p = \infty$ равенство (2.50) установлено в работе [2] (см. вывод обобщенного неравенства Ахиезера и замечание 1 в [2]), а при $1 \leq p < \infty$ оно сформулировано в [19, теорема 5]. Впрочем доказательство равенства (2.50) и в случае $p < \infty$ ничем не отличается от имеющегося в [2], если учесть, что для каждой функции $g \in \mathfrak{G}_{\zeta,p}$ выполнена оценка (2.44).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2.4 и 2.5. Согласно оценке (2.49) оператор $A = D$, действующий в пространстве $X = L_p(\mathbb{R})$, удовлетворяет условиям теорем 1.1 и 1.2, если в теореме 1.2 считать $Y = L_q(\mathbb{R})$, $q \geq p$, а $\gamma = 1/p - 1/q$ (см. также замечание 1.3). Из равенства (2.50) имеем $E_\zeta(f, D)_{L_p(\mathbb{R})} = \mathcal{A}_\zeta(f)_p$, а из вида K -функционала (2.45) и определения (2.48) оператора D следует, что

$$K(\delta, f; L_p(\mathbb{R}), \mathfrak{D}(D^r)) = K(\delta, f; L_p(\mathbb{R}), W_p^r(\mathbb{R})), \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p(\mathbb{R}).$$

Кроме того, справедливы очевидные равенства $E^{[r]}(f, D)_{L_p(\mathbb{R})} = \mathcal{A}_0(f)_p$, $r \in \mathbb{P}$. Если теперь учесть оценки (2.46), то неравенства (2.39), (2.40), (2.41) и (2.43) получаются, соответственно, из неравенств (1.6), (1.7), (1.18) и (1.19), причем при выводе (2.39) из (1.6) используется также замечание 1.1. Неравенство (2.42) является простым следствием неравенств (2.40), (2.41) и (2.43) и выводится из них точно так же, как оценка (1.20) выводится из (1.7), (1.18) и (1.19).

§ 3. Неравенство Бернштейна–Никольского для векторов конечной степени

Через H_1 обозначим класс Харди голоморфных в единичном круге функций α , для которых $\|\alpha(\zeta e^{i(\cdot)})\|_1$ равномерно ограничена по $\zeta \in (0, 1)$. Если функция $\alpha \in H_1$, то для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ существует радиальный предел $\alpha(e^{i\theta}) := \lim_{\zeta \nearrow 1} \alpha(\zeta e^{i\theta})$ и $\alpha(e^{i(\cdot)}) \in L_1$, а также справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \alpha(e^{i\theta}) d\theta = \begin{cases} \frac{1}{k!} \alpha^{(k)}(0), & k = 0, 1, \dots, \\ 0, & k = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть φ – измеримая функция, заданная на отрезке $[0, 2\pi]$, и $\varphi(\theta) \geq 0$ почти при всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Определим классы функций

$$\Phi_1(\varphi) = \{\alpha \in H_1 : \alpha(0) = 1, \alpha(e^{i(\cdot)})\varphi(\cdot) \in L_1\},$$

а для натурального числа $r \geq 2$

$$\Phi_r(\varphi) = \{\alpha \in \Phi_1(\varphi) : \alpha'(0) = \dots = \alpha^{(r-1)}(0) = 0\}.$$

Пусть

$$\nu_r(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \inf_{\alpha \in \Phi_r(\varphi)} \int_0^{2\pi} |\alpha(e^{i\theta})| |\varphi(\theta)| d\theta, \quad (3.2)$$

причем если множество $\Phi_r(\varphi)$ пусто, то считаем $\nu_r(\varphi) = \infty$. Очевидно, что $\nu_r(\mu\varphi) = \mu\nu_r(\varphi)$ для любой постоянной $\mu \geq 0$.

Основным в данном параграфе является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta$ для некоторого $\zeta > 0$, а Y – такое банахово пространство, что $X(A, I) \hookrightarrow Y$. Тогда для всех $r \in \mathbb{P}$ справедлива оценка

$$\|A^r g\|_Y \leq \zeta^{r+1} \nu_{r+1}(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X, Y]}) \|g\|_X, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее будем считать, что класс $\Phi_{r+1}(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X, Y]})$ не пуст, так как в противном случае $\nu_{r+1}(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X, Y]}) = \infty$ и оценка (3.3) очевидна.

Пусть α – произвольная функция, принадлежащая $\Phi_{r+1}(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X, Y]})$. В замечании 1.2 показано, что условие $X(A, I) \hookrightarrow Y$ гарантирует непрерывность оператор-функции $R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$ по норме пространства $[X, Y]$, а значит, $R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)$ почти сепарабельнозначна [20, определение 3.5.3]. Тогда [20, теорема 3.5.3] функция $R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)$ со значениями в $[X, Y]$ сильно измерима [20, определение 3.5.4]. Отсюда и из измеримости $\alpha(e^{i(\cdot)})$ следует сильная измеримость функции $\alpha(e^{i(\cdot)})R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)$. По предположению

$$\alpha \in \Phi_{r+1}(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X, Y]}),$$

а значит,

$$\int_0^{2\pi} |\alpha(e^{i\theta})| \|R(\zeta e^{i\theta}; A)\|_{[X, Y]} d\theta < \infty.$$

Отсюда и из [20, теорема 3.7.4] вытекает интегрируемость в смысле Бохнера функции $\alpha(e^{i(\cdot)})R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)$, принимающей значения в $[X, Y]$. Поэтому определены операторы

$$B_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \overline{\alpha(e^{-i\theta})} R(\zeta e^{-i\theta}; A) d\theta, \quad (3.4)$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера, и $B_k \in [X, Y]$, $k \in \mathbb{Z}$. Из определения интеграла Бохнера [20, определения 3.7.2 и 3.7.3] (как и при доказательстве того факта, что коэффициенты Фурье числовой суммируемой функции стремятся к нулю) получаем

$$\|B_k\|_{[X, Y]} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \pm\infty. \quad (3.5)$$

Из равенств (3.1), (3.4) и из

$$R(\zeta e^{-i\theta}; A)Ag = g + \zeta e^{-i\theta} R(\zeta e^{-i\theta}; A)g, \quad \zeta e^{-i\theta} \in \rho(A), \quad g \in \mathfrak{D}(A),$$

выводим

$$\begin{aligned} B_k Ag &= \frac{1}{k!} \overline{\alpha^{(k)}(0)} g + \zeta B_{k+1} g, \quad k \in \mathbb{P}, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A), \\ B_k Ag &= \zeta B_{k+1} g, \quad k = -1, -2, \dots, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из последних равенств заключаем, что $B_0 g = \zeta^{-k} B_{-k} A^k g$ для $k \in \mathbb{N}$ и $g \in \mathfrak{G}_\zeta(A)$. Но $\sup_{k \in \mathbb{N}} \zeta^{-k} \|A^k g\|_X = c(g) < \infty$, если $g \in \mathfrak{G}_\zeta(A)$, поэтому

$$\|B_0 g\|_Y \leq c(g) \|B_{-k}\|_{[X, Y]}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A).$$

Отсюда и из (3.5) имеем $B_0 g = 0$, $g \in \mathfrak{G}_\zeta(A)$. Воспользовавшись этим равенством, предположением $\alpha(0) = 1$, а также тем, что $\alpha'(0) = \dots = \alpha^{(r)}(0) = 0$, если $r \geq 1$, из равенств (3.6) выводим, что $B_{r+1} g = -\zeta^{-r-1} A^r g$ для $g \in \mathfrak{G}_\zeta(A)$. Сравнивая это выражение элемента $B_{r+1} g$ с определением (3.4) оператора B_k , получаем

$$\frac{A^r g}{\zeta^{r+1}} = \left(\frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(r+1)\theta} \overline{\alpha(e^{-i\theta})} R(\zeta e^{-i\theta}; A) d\theta \right) g, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A),$$

т. е.

$$\frac{\|A^r g\|_Y}{\zeta^{r+1}} \leq \frac{\|g\|_X}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\alpha(e^{i\theta})| \|R(\zeta e^{-i\theta}; A)\|_{[X, Y]} d\theta, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A). \quad (3.7)$$

Согласно предположению α — произвольная функция из

$$\Phi_{r+1}(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X, Y]}),$$

поэтому утверждение теоремы является следствием определения (3.2) постоянной $\nu_r(\varphi)$ и неравенства (3.7).

Далее понадобится утверждение, установленное в работе [2, лемма 3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\varphi(\theta) \geq 0$ почти при всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Если $1/\varphi \in L_1$ и $\int_0^{2\pi} \ln^+ \varphi(\theta) d\theta < \infty$, то для всех $r \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\nu_r(\varphi) \leq \exp \left(\frac{2r-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \varphi(\theta) d\theta \right).$$

Приведем теперь следствие из теоремы 3.1 в том виде, в котором оно будет использовано в § 4.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1, а при некотором $\beta > 0$ постоянная $c(\beta, \zeta)$ задается формулой

$$c(\beta, \zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\zeta}{\beta} \|R(\zeta e^{i\theta}; A)\|_{[X, Y]} \right) d\theta < \infty. \quad (3.8)$$

Тогда для всех $r \in \mathbb{P}$ справедлива оценка

$$\|A^r g\|_Y \leq e^{(2r+1)c(\beta, \zeta)} \beta \zeta^r \|g\|_X, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функция $\varphi(\cdot) := (\zeta/\beta)\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X,Y]}$ удовлетворяет условиям предложения 3.1. Для этого согласно (3.8) достаточно показать, что $1/\varphi \in L_\infty$. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность $\lambda_s \in \mathcal{T}(\zeta) \cap \rho(A)$, для которой $\|R(\lambda_s, A)\|_{[X,Y]} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Отсюда и из резольвентного уравнения $R(\lambda; A) - R(\lambda_s; A) = (\lambda - \lambda_s)R(\lambda_s; A)R(\lambda; A)$, $\lambda \in \rho(A)$, следует, что $\|R(\lambda; A)\|_{[X,Y]} = 0$, а это, естественно, невозможно. Используя теперь теорему 3.1 и равенство $\nu_r(\beta\varphi) = \beta\nu_r(\varphi)$, $\beta > 0$, имеем

$$\|A^r g\|_Y \leq \beta \zeta^r \nu_{r+1} \left(\frac{\zeta}{\beta} \|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X,Y]} \right) \|g\|_X, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A),$$

откуда и из предложения 3.1 вытекает оценка (3.9).

Отметим, что если условие (3.8) выполнено при некотором положительном β , то тогда это же условие выполнено и при любом другом положительном значении β .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть при некотором $\zeta > 0$ окружность $\mathcal{T}(\zeta)$ принадлежит резольвентному множеству оператора A , за исключением, быть может, точек $\pm\zeta$, а Y – такое банахово пространство, что $X(A, I) \hookrightarrow Y$ и при некоторых вещественных $\gamma > -1$ и $c > 0$ выполнена оценка

$$\|R(\lambda; A)\|_{[X,Y]} \leq c |\operatorname{Im} \lambda|^{-1+\gamma}, \quad \lambda \in \mathcal{T}(\zeta), \quad \lambda \neq \pm\zeta. \quad (3.10)$$

Тогда с постоянной

$$\varkappa(\gamma; l) := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin l\theta|}{|\sin \theta|^{1-\gamma}} d\theta, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

при всех $r \in \mathbb{P}$ справедливы неравенства

$$\|A^r g\|_Y \leq c \varkappa \left(\gamma; \left[\left[\frac{r}{2} \right] \right] + 1 \right) \zeta^{r+\gamma} \|g\|_X, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A), \quad (3.12)$$

где $\left[[r/2] \right]$ – целая часть числа $r/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (3.10) заключаем, что функция α_r , заданная равенством $\alpha_r(\lambda) = 1 - \lambda^{2\left[[(r+1)/2]\right]}$, принадлежит классу $\Phi_r(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X,Y]})$, а согласно определениям (3.2) и (3.11) постоянных $\nu_r(\varphi)$ и $\varkappa(\gamma; l)$ имеем

$$\nu_r(\|R(\zeta e^{i(\cdot)}; A)\|_{[X,Y]}) \leq \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\alpha_r(e^{i\theta})| d\theta}{\zeta^{1-\gamma} |\sin \theta|^{1-\gamma}} = \frac{c}{\zeta^{1-\gamma}} \varkappa \left(\gamma; \left[\left[\frac{r+1}{2} \right] \right] \right),$$

откуда и из теоремы 3.1 получается утверждение следствия 3.2.

Для иллюстрации теоремы 3.1 и ее следствий выведем утверждение, относящееся к функциям, принадлежащим $\mathfrak{G}_{\zeta,p}$, т.е. к функциям, имеющим экспоненциальный тип ζ и сужение которых на вещественную ось принадлежит $L_p(\mathbb{R})$ (см. п. 2.2 и, в частности, замечание 2.1).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $\zeta > 0$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тогда для каждой функции $g \in \mathfrak{G}_{\zeta,p}$ справедливы оценки

$$\|g'\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq 2\zeta \|g\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad (3.13)$$

$$\|g\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq c(p; q) \zeta^{1/p-1/q} \|g\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad (3.14)$$

где постоянная $c(p; q)$ определяется формулой

$$c(p; q) := \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^{1-1/p+1/q} \int_0^\pi (\sin \theta)^{1/p-1/q} d\theta \quad (3.15)$$

и $c(1; \infty) := 4/\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор D тот же, что и в (2.48). Тогда согласно оценке (2.49) оператор $A = D$, действующий в пространстве $X = L_p(\mathbb{R})$, удовлетворяет требованиям следствия 3.2, если в нем считать $Y = L_q(\mathbb{R})$, а $\gamma = 1/p - 1/q$. Полагая в (3.12) $r = 1$ и $Y = X = L_p(\mathbb{R})$, получаем (3.13). Если же в (3.12) считать $r = 0$, то получим (3.14). При этом учитывалось, что ввиду леммы 2.5 множество векторов степени не выше ζ относительно оператора D совпадает с $\mathfrak{G}_{\zeta,p}$.

Оценка (3.13) установлена Бернштейном [5, работа 22], правда, с неутюняемой постоянной 1 вместо 2. Оценка (3.14) установлена Никольским (см., например, [12, п. 3.3.5]) с постоянной

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-1/p+1/q} \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^{-1+1/p-1/q},$$

которая при некоторых значениях p и q больше чем $c(p; q)$ из (3.15), а при некоторых значениях p и q меньше. Отметим, что $c(p; q) \leq 2$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. По поводу других возможных значений постоянной в неравенстве Никольского см. [11, п. 4.9.53] и [12, замечания к гл. 3].

§ 4. Доказательства основных результатов

В этом параграфе установлены некоторые уточнения теорем 1.1 и 1.2, причем условия, присутствующие в этих теоремах, реализуются в конкретной задаче, связанной с негармонической системой функций. Соответствующий пример дан в конце работы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть оператор A удовлетворяет условию (ζ) из § 1, а β — такая положительная и неубывающая на полуоси $[\zeta_1, \infty)$ функция, для которой

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\zeta_m}{\beta(\zeta_m)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|_{[X]} \right) d\theta < \infty. \quad (4.1)$$

Тогда найдется такая постоянная $c \geq 1$, что

$$E_\zeta(f, A)_X \leq c^r K(\zeta^{-r} \beta(\zeta), f; X, \mathfrak{D}(A^r)), \quad \zeta \geq \zeta_1, \quad f \in X, \quad z \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [2, теорема 1] существует такая постоянная $c_1 \geq 1$, для которой

$$E_{\zeta_m}(f, A)_X \leq K \left(\frac{c_1^r}{\zeta_m^r} \beta(\zeta_m), f; X, \mathfrak{D}(A^r) \right), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Так как по условию (ζ) последовательность $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ возрастает и стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$, то для каждого $\zeta \geq \zeta_1$ найдется такое натуральное m , что $\zeta_m \leq \zeta < \zeta_{m+1}$. Отсюда и из неравенства (4.3), используя невозрастаемость $E_\zeta(f, A)_X$ и неубываемость $K(\zeta, f; X, \mathfrak{D}(A^r))$ по $\zeta \geq 0$, а также оценку $K(\mu\zeta, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) \leq \mu K(\zeta, f; X, \mathfrak{D}(A^r))$, $\mu \geq 1$, имеем

$$E_\zeta(f, A)_X \leq E_{\zeta_m}(f, A)_X \leq c_1^r \left(\frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} \right)^r K \left(\frac{1}{\zeta^r} \beta(\zeta), f; X, \mathfrak{D}(A^r) \right).$$

Из этих соотношений и условия (ζ) вытекает утверждение (4.2).

В доказательствах следующих двух теорем используется простое утверждение, относящееся к условию (ζ) , которое выделим в виде замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности, такая, что $\zeta_{m+1}/\zeta_m \leq c_\zeta$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует подпоследовательность $\{\zeta'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, для которой $\zeta'_1 = \zeta_1$ и $2 \leq \zeta'_{m+1}/\zeta'_m < 2c_\zeta$. Поэтому далее, не уменьшая общности, будем считать, что если оператор A удовлетворяет условию (ζ) , то для последовательности $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ выполнено следующее:

$$2 \leq \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} < 2c_\zeta, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

и $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Далее используется следующее предположение относительно положительной и неубывающей на $[\zeta_1, \infty)$ функции β , фигурирующей в условии (4.1): для некоторой постоянной $c \geq 1$

$$\beta(2\zeta) \leq c\beta(\zeta), \quad \zeta \geq \zeta_1. \quad (4.5)$$

Из этой оценки, неубываемости функции β и предположения (4.4) следует, что

$$\frac{\beta(\zeta_{m+1})}{\beta(\zeta_m)} \leq c', \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.6)$$

с некоторой постоянной $c' \geq 1$, зависящей лишь от c_ζ и c из условий (4.4) и (4.5).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть оператор A удовлетворяет условию (ζ) , а β – такая положительная и неубывающая на полуоси $[\zeta_1, \infty)$ функция, для которой выполнены условия (4.1) и (4.5). Тогда найдется постоянная $c > 1$ такая, что

$$K \left(\frac{1}{\zeta^r \beta(\zeta)}, f; X, \mathfrak{D}(A^r) \right) \leq \left(\frac{c}{\zeta} \right)^r \left(E^{[r]}(f, A)_X + \int_0^\zeta \xi^{r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \right),$$

$$\zeta \geq \zeta_1, \quad f \in X, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее будем считать $\zeta_0 = 0$. Ввиду невозрастания $E_\xi(f, A)_X$ по $\xi \geq 0$ имеем

$$E_{\zeta_{m+1}}(f, A)_X \leq \frac{r}{\zeta^r} \int_0^\zeta \xi^{r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi, \quad 0 < \zeta \leq \zeta_{m+1}, \quad m \in \mathbb{P}, \quad (4.8)$$

и

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \xi^{r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \geq \frac{1}{r} (\zeta_k^r - \zeta_{k-1}^r) E_{\zeta_k}(f, A)_X, \quad k \in \mathbb{N},$$

а согласно предположению (4.4) если $k \geq 2$, то

$$\frac{1}{r} (\zeta_k^r - \zeta_{k-1}^r) \geq \frac{1}{r} \zeta_{k-1}^r (2^r - 1) \geq \left(\frac{\zeta_{k-1}}{\zeta_{k+1}} \right)^r \zeta_{k+1}^r \geq \frac{1}{(2c_\zeta)^{2r}} \zeta_{k+1}^r,$$

а если $k = 1$, то

$$\frac{1}{r} (\zeta_k^r - \zeta_{k-1}^r) = \frac{1}{r} \left(\frac{\zeta_k}{\zeta_{k+1}} \right)^r \zeta_{k+1}^r \geq \frac{1}{r(2c_\zeta)^r} \zeta_{k+1}^r.$$

Значит, найдется постоянная $c_1 > 1$ такая, что

$$\zeta_{k+1}^r E_{\zeta_k}(f, A)_X \leq c_1^r \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \xi^{r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Примеры показывают, что в общем случае линейное многообразие $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ не замкнуто в X . Отсюда, в частности, выводим, что не для каждого вектора f существует такой элемент $g_\zeta \in \mathfrak{G}_\zeta(A)$, что $\|f - g_\zeta\|_X = E_\zeta(f, A)_X$. Тем не менее из определения (1.1) величины $E_\zeta(f, A)_Y$ следует, что для произвольных $\varepsilon > 0$ и $f \in X$ найдется такой элемент $g_{\varepsilon, k}$, что

$$\|f - g_{\varepsilon, k}\|_X \leq E_{\zeta_k}(f, A)_X + \varepsilon, \quad g_{\varepsilon, k} \in \mathfrak{G}_{\zeta_k}(A), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Кроме того, учитывая определение (1.2) величины $E^{[r]}(f, A)_Y$, заключаем, что для произвольного вектора $f \in X$ найдется такой элемент $g_0 \in \mathfrak{Z}(A^r)$, что

$$\|f - g_0\|_X \leq E^{[r]}(f, A)_X + \varepsilon.$$

Используя теперь невозрастание $E_\zeta(f, A)_X$ по $\zeta \geq 0$ и неравенство $E_\zeta(f, A)_X \leq E^{[r]}(f, A)_X$, $\zeta > 0$, $r \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned} \|g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k}\|_X &\leq 2E_{\zeta_k}(f, A)_X + 2\varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \|g_{\varepsilon, 1} - g_0\|_X &\leq 2E^{[r]}(f, A)_X + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

По условию теоремы 4.2 при всех $\zeta = \zeta_m$ и $Y = X$ оператор A удовлетворяет требованиям следствия 3.1, поэтому, исходя из условия (4.1) и включений $g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k} \in \mathfrak{G}_{\zeta_{k+1}}(A)$, $k \in \mathbb{N}$, $g_{\varepsilon, 1} - g_0 \in \mathfrak{G}_{\zeta_1}(A)$, выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|A^r(g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k})\|_X &\leq c_2^r \zeta_{k+1}^r \beta(\zeta_{k+1}) \|g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k}\|_X \\ &\leq 2c_2^r \zeta_{k+1}^r \beta(\zeta_{k+1}) (E_{\zeta_k}(f, A)_X + \varepsilon), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \|A^r(g_{\varepsilon, 1} - g_0)\|_X &\leq 2c_2^r \zeta_1^r \beta(\zeta_1) (E^{[r]}(f, A)_X + \varepsilon) \end{aligned}$$

с не зависящей ни от ε , ни от r постоянной $c_2 \geq 1$. Но $g_{\varepsilon, m+1} = g_0 + (g_{\varepsilon, 1} - g_0) + \sum_{k=1}^m (g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k})$, а $A^r g_0 = 0$. Значит,

$$\begin{aligned} \|A^r g_{\varepsilon, m+1}\|_X &\leq 2c_2^r \left(\zeta_1^r \beta(\zeta_1) E^{[r]}(f, A)_X \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^m \zeta_{k+1}^r \beta(\zeta_{k+1}) E_{\zeta_k}(f, A)_X + \varepsilon \sum_{k=1}^{m+1} \zeta_k^r \beta(\zeta_k) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для произвольного $\zeta \geq \zeta_1$ выберем такое натуральное число m , для которого $\zeta_m \leq \zeta < \zeta_{m+1}$. По предположению $g_{\varepsilon, m+1} \in \mathfrak{D}(A^r)$, откуда и из определения (1.3) K -функционала имеем

$$K\left(\frac{1}{\zeta^r \beta(\zeta)}, f; X, \mathfrak{D}(A^r)\right) \leq \|f - g_{\varepsilon, m+1}\|_X + \frac{1}{\zeta^r \beta(\zeta)} \|A^r g_{\varepsilon, m+1}\|_X.$$

Подставляя в правую часть этого неравенства оценки (4.10) и (4.11), получаем

$$\begin{aligned} K\left(\frac{1}{\zeta^r \beta(\zeta)}, f; X, \mathfrak{D}(A^r)\right) &\leq E_{\zeta_{m+1}}(f, A)_X + \varepsilon + 2 \left(\frac{c_2}{\zeta}\right)^r \left(\frac{\beta(\zeta_1)}{\beta(\zeta)} \zeta_1^r E^{[r]}(f, A)_X \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^m \frac{\beta(\zeta_{k+1})}{\beta(\zeta)} \zeta_{k+1}^r E_{\zeta_k}(f, A)_X + \frac{\varepsilon}{\beta(\zeta)} \sum_{k=1}^{m+1} \zeta_k^r \beta(\zeta_k) \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Левая часть неравенства (4.12) и постоянная c_2 не зависят от ε , а ε — произвольное положительное число. Следовательно, неравенство (4.12) справедливо и при $\varepsilon = 0$. Полагая в нем $\varepsilon = 0$, используя неубываемость функции β , неравенство $\beta(\zeta_{m+1}) \leq c' \beta(\zeta_m)$, $\zeta_m \leq \zeta < \zeta_{m+1}$, вытекающее из (4.6), а также учитывая (4.8), (4.9), выводим

$$\begin{aligned} K\left(\frac{1}{\zeta^r \beta(\zeta)}, f; X, \mathfrak{D}(A^r)\right) &\leq \frac{r}{\zeta^r} \int_0^\zeta \xi^{r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \\ &\quad + 2 \left(\frac{c_2}{\zeta}\right)^r \left(\zeta_1^r E^{[r]}(f, A)_X + c' c_1^r \int_0^{\zeta_m} \xi^{r-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \right), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение (4.7) теоремы 4.2.

Отметим, что утверждения (1.6) и (1.7) теоремы 1.1 являются, соответственно, следствиями утверждений (4.2) и (4.7) теорем 4.1 и 4.2, если считать в них функцию β равной 1, причем при выводе утверждения (1.7) используется также оценка (1.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из доказательства теоремы 4.1 видно, что постоянная s в неравенстве (4.2) непрерывно зависит лишь от верхней грани в (4.1) и от

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m},$$

т.е. от c_ζ из (4.4). Аналогично, постоянная s в неравенстве (4.7) непрерывно зависит от верхней грани в (4.1), c_ζ , ζ_1 и от c' из (4.6).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть оператор A удовлетворяет условию (ζ) , β – такая положительная и неубывающая на полуоси $[\zeta_1, \infty)$ функция, для которой выполнены условия (4.1) и (4.5), а Y – такое банахово пространство, что $X(A, I) \hookrightarrow Y$ и

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\zeta_m}{\beta(\zeta_m)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|_{[X, Y]} \right) d\theta < \infty. \quad (4.13)$$

Тогда найдется такая постоянная $c > 1$, что как только при некотором $j \in \mathbb{P}$ выполнено

$$\int_{\zeta_1}^{\infty} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_{\xi}(f, A)_X d\xi < \infty, \quad (4.14)$$

то $f \in \mathfrak{D}(A^j)$, $A^j f \in Y$ и

$$\begin{aligned} E_{\zeta}(A^j f, A)_Y \\ \leq c^j \left(E_{\zeta}(f, A)_X + \int_{\zeta_1}^{\infty} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_{\xi}(f, A)_X d\xi \right), \quad 0 < \zeta \leq \zeta_1, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} E_{\zeta}(A^j f, A)_Y \\ \leq c^j \left(\zeta^j \beta(\zeta) E_{\zeta}(f, A)_X + \int_{\zeta}^{\infty} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_{\xi}(f, A)_X d\xi \right), \quad \zeta > \zeta_1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} E^{[l-j]}(A^j f, A)_Y \\ \leq c^j \left(E^{[l]}(f, A)_X + \int_{\zeta_1}^{\infty} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_{\xi}(f, A)_X d\xi \right), \quad l = j, j+1, \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

В случае $j = 0$ утверждение теоремы справедливо без предположения о выполнении (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\beta(\xi)$ не убывает, а $E_{\xi}(f, A)_X$ не возрастает по ξ , то

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_{\xi}(f, A)_X d\xi \\ & \geq \left(\ln \frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k} \right) \zeta_k^j \beta(\zeta_k) E_{\zeta_{k+1}}(f, A)_X \\ & = \left(\left(\frac{\zeta_k}{\zeta_{k+2}} \right)^j \frac{\beta(\zeta_k)}{\beta(\zeta_{k+2})} \ln \frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k} \right) \zeta_{k+2}^j \beta(\zeta_{k+2}) E_{\zeta_{k+1}}(f, A)_X, \end{aligned}$$

откуда из неравенств (4.4) и (4.6) следует существование такой постоянной $c_1 > 1$, что

$$\zeta_{k+2}^j \beta(\zeta_{k+2}) E_{\zeta_{k+1}}(f, A)_X \leq c_1^j \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_{\xi}(f, A)_X d\xi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и для произвольного элемента $f \in X$ найдем такие векторы $g_{\varepsilon, k}$, что

$$\begin{aligned} \|f - g_{\varepsilon, k}\|_X & \leq E_{\zeta_k}(f, A)_X + \varepsilon 2^{-k-1} \zeta_{k+1}^{-j} \beta(\zeta_{k+1})^{-1}, \quad g_{\varepsilon, k} \in \mathfrak{G}_{\zeta_k}(A), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \|f - g_{\varepsilon, 0}\|_X & \leq E^{[l]}(f, A)_X + \varepsilon 2^{-1} \zeta_2^{-j} \beta(\zeta_2)^{-1}, \quad g_{\varepsilon, 0} \in \mathfrak{Z}(A^l). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Отсюда, учитывая невозрастаемость последовательностей $\{E_{\zeta_k}(f, A)_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{\zeta_k^{-j} \beta(\zeta_k)^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, выводим оценки

$$\|g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k}\|_X \leq 2E_{\zeta_k}(f, A)_X + \varepsilon 2^{-k} \zeta_{k+1}^{-j} \beta(\zeta_{k+1})^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.20)$$

$$\|g_{\varepsilon, 2} - g_{\varepsilon, 0}\|_X \leq 2E^{[l]}(f, A)_X + \varepsilon \zeta_2^{-j} \beta(\zeta_2)^{-1}. \quad (4.21)$$

Поскольку оператор A удовлетворяет условиям (4.1) и (4.13), то согласно следствию 3.1 существует такая постоянная $c_2 \geq 1$, что

$$\begin{aligned} \|A^j g\|_X &\leq c_2^j \zeta_k^j \beta(\zeta_k) \|g\|_X, \quad g \in \mathfrak{G}_{\zeta_k}(A), \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{P}, \\ \|A^j g\|_Y &\leq c_2^j \zeta_k^j \beta(\zeta_k) \|g\|_X, \quad g \in \mathfrak{G}_{\zeta_k}(A), \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{P}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Определим теперь пространство $Y_0 = X \cap Y$ с нормой $\|g\|_{Y_0} = \|g\|_X + \|g\|_Y$, $g \in Y_0$. Очевидно, что $Y_0 \hookrightarrow X$ и

$$\|A^j g\|_{Y_0} \leq 2c_2^j \zeta_k^j \beta(\zeta_k) \|g\|_X, \quad g \in \mathfrak{G}_{\zeta_k}(A), \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{P}.$$

Воспользовавшись оценками (4.20), (4.21) и включениями

$$g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k} \in \mathfrak{G}_{\zeta_{k+1}}(A), \quad g_{\varepsilon, 2} - g_{\varepsilon, 0} \in \mathfrak{G}_{\zeta_2}(A),$$

имеем

$$\|A^j (g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k})\|_{Y_0} \leq 4c_2^j (\zeta_{k+1}^j \beta(\zeta_{k+1}) E_{\zeta_k}(f, A)_X + \varepsilon 2^{-k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.23)$$

$$\|A^j (g_{\varepsilon, 2} - g_{\varepsilon, 0})\|_{Y_0} \leq 4c_2^j (\zeta_2^j \beta(\zeta_2) E^{[l]}(f, A)_X + \varepsilon 2^{-1}). \quad (4.24)$$

А ввиду (4.18) и (4.23) справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m}^{\infty} \|A^j (g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k})\|_{Y_0} \\ &\leq 4c_2^j \left(c_1^j \int_{\zeta_{m-1}}^{\infty} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_{\xi}(f, A)_X d\xi + \varepsilon 2^{-m} \right), \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Пусть теперь вектор f удовлетворяет условию (4.14). Тогда равенство

$$A^j g_{\varepsilon, s} - A^j g_{\varepsilon, m} = \sum_{k=m}^{s-1} A^j (g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k}), \quad s \geq m+1,$$

и оценка (4.25) показывают, что последовательность векторов $\{A^j g_{\varepsilon, k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ фундаментальна в пространстве Y_0 . Следовательно, эта последовательность сходится по норме пространства Y_0 к некоторому элементу $y \in Y_0$. То есть

$$y = A^j g_{\varepsilon, 0} + A^j (g_{\varepsilon, 2} - g_{\varepsilon, 0}) + \sum_{k=2}^{\infty} A^j (g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k}), \quad (4.26)$$

причем в силу определения пространства Y_0 ряд, находящийся в правой части этого равенства, будет сходиться как по норме пространства Y , так и по норме пространства X .

Но $E_\xi(f, A)_X$ не возрастает, а $\beta(\xi)$ не убывает по $\xi \geq \zeta_1$, поэтому из условия (4.14) вытекает, что $E_\xi(f, A)_X \rightarrow 0$, когда $\xi \rightarrow \infty$. Отсюда и из неравенства (4.19) следует сходимость по норме пространства X последовательности векторов $\{g_{\varepsilon, k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ к вектору f . Оператор A^j замкнут и, как было показано, последовательность $\{A^j g_{\varepsilon, k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится по норме X к y . Значит, $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и $A^j f = y$. Включение $y \in Y$ было установлено ранее. Тем самым установлена справедливость первого утверждения теоремы 4.3.

Докажем теперь оценки (4.15)–(4.17). Отметим, что поскольку $\|g\|_Y \leq \|g\|_{Y_0}$ для $g \in Y_0$, то неравенства (4.23)–(4.25) справедливы, если в них считать $Y_0 = Y$. Именно в таком виде эти неравенства используются далее.

Так как по предположению вектор $g_{\varepsilon, 0} \in \mathfrak{Z}(A^l)$ и $l \geq j$, то $A^j g_{\varepsilon, 0} \in \mathfrak{Z}(A^{l-j})$. Поэтому $E^{[l-j]}(A^j f, A)_Y \leq \|A^j f - A^j g_{\varepsilon, 0}\|_Y$. Поскольку в (4.26) $y = A^j f$, из этого равенства и из неравенств (4.24), (4.25) выводим

$$E^{[l-j]}(A^j f, A)_Y \leq 4c_2^j \left(\zeta_2^j \beta(\zeta_2) E^{[l]}(f, A)_Y + c_1^j \int_{\zeta_1}^{\infty} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_\xi(f, A)_X d\xi + \varepsilon \right),$$

откуда в силу независимости постоянных c_1 и c_2 от $\varepsilon > 0$ получаем (4.17).

Пусть $\zeta > \zeta_1$. Тогда найдется такое натуральное число m , что $\zeta_m \leq \zeta < \zeta_{m+1}$, а для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой вектор $g_{\varepsilon, \zeta}$, что

$$\|f - g_{\varepsilon, \zeta}\|_X \leq E_\zeta(f, A)_X + \varepsilon 2^{-1} \zeta_{m+1}^{-j} \beta(\zeta_{m+1})^{-1}, \quad g_{\varepsilon, \zeta} \in \mathfrak{G}_\zeta(A),$$

откуда и из (4.19) получаем

$$\|g_{\varepsilon, m+1} - g_{\varepsilon, \zeta}\|_X \leq 2E_\zeta(f, A)_X + \varepsilon \zeta_{m+1}^{-j} \beta(\zeta_{m+1})^{-1}. \quad (4.27)$$

Последовательность векторов $\{A^j g_{\varepsilon, k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится по норме пространства Y к вектору $A^j f$, поэтому

$$A^j f = A^j g_{\varepsilon, \zeta} + A^j (g_{\varepsilon, m+1} - g_{\varepsilon, \zeta}) + \sum_{k=m+1}^{\infty} A^j (g_{\varepsilon, k+1} - g_{\varepsilon, k}).$$

Кроме того, $A^j g_{\varepsilon, \zeta} \in \mathfrak{G}_\zeta(A)$, а значит, $E_\zeta(A^j f, A)_Y \leq \|A^j f - A^j g_{\varepsilon, \zeta}\|_Y$. Отсюда и из (4.25) имеем

$$\begin{aligned} E_\zeta(A^j f, A)_Y &\leq \|A^j (g_{\varepsilon, m+1} - g_{\varepsilon, \zeta})\|_Y + \|A^j (g_{\varepsilon, m+2} - g_{\varepsilon, m+1})\|_Y \\ &\quad + 4c_2^j \left(c_1^j \int_{\zeta_{m+1}}^{\infty} \xi^{j-1} \beta(\xi) E_\xi(f, A)_X d\xi + \varepsilon 2^{-m-2} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из неравенств (4.22), (4.27) и включения $g_{\varepsilon, m+1} - g_{\varepsilon, \zeta} \in \mathfrak{G}_{\zeta_{m+1}}(A)$ следует, что

$$\|A^j (g_{\varepsilon, m+1} - g_{\varepsilon, \zeta})\|_Y \leq 2c_2^j (\zeta_{m+1}^j \beta(\zeta_{m+1}) E_\zeta(f, A)_X + \varepsilon 2^{-1}). \quad (4.29)$$

А в силу предположения (4.4) и неравенства (4.6) найдется постоянная $c_3 > 1$, для которой

$$\zeta_{m+1}^j \beta(\zeta_{m+1}) \leq \zeta_{m+2}^j \beta(\zeta_{m+2}) \leq c_3^j \zeta^j \beta(\zeta), \quad \zeta_m \leq \zeta < \zeta_{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из этих неравенств и оценок (4.23), (4.28) и (4.29) имеем

$$E_\zeta(A^j f, A)_Y \leq 6c_2^j \left(c_3^j \zeta^j \beta(\zeta) E_\zeta(f, A)_X + c_1^j \int_{\zeta_{m+1}}^\infty \xi^{j-1} \beta(\xi) E_\xi(f, A)_X d\xi + \varepsilon \right).$$

Отсюда, учитывая независимость левой части этого неравенства и постоянных c_1 , c_2 и c_3 от $\varepsilon > 0$, получаем утверждение (4.16).

Поскольку оценки (4.27)–(4.29) справедливы и при $m = 0$, то из них следует утверждение (4.15).

И наконец, заметим, что предположение о выполнении условия (4.1) было сделано для того, чтобы последовательность векторов $\{A^j g_{\varepsilon, k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходилась по норме пространства X . Однако в случае $j = 0$, как было показано ранее, это свойство является следствием условия (4.14). Поэтому в случае $j = 0$ утверждение теоремы справедливо без предположения о выполнении (4.1).

Утверждения (1.18) и (1.19) теоремы 1.2 являются, соответственно, следствиями утверждений (4.15), (4.16) и (4.17) теоремы 4.3, если в них положить $\beta(\zeta) = \zeta^\gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из доказательства теоремы 4.3 видно, что постоянная c в неравенствах (4.15)–(4.17) непрерывно зависит от верхних граней в (4.1), (4.13) и от постоянных c_ζ и c' из (4.4) и (4.6). Кроме того, в неравенствах (4.15) и (4.17) эта постоянная c непрерывно зависит также и от ζ_1 , $\beta(\zeta_1)$. Из непрерывной зависимости постоянной c от указанных величин несложно заключить, что в неравенствах (2.10)–(2.12) и (2.41)–(2.43) постоянную c можно выбрать так, чтобы она не зависела от p и q , $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

§ 5. Некоторые следствия

Сформулируем в виде теоремы одно простое следствие из теорем 4.1 и 4.3, которое потребуется при выводе утверждений этого параграфа. Так как в формулировках всех этих утверждений участвуют одни и те же условия на оператор A и функцию β (что и в теореме 4.2), то повторим их в формулировке следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть существует такая монотонная возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что $\sup_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{m+1}/\zeta_m < \infty$ и $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \rho(A)\} = 2\pi\zeta_m$. Предположим, что β – положительная и неубывающая на полуоси $[\zeta_1, \infty)$ функция, для которой $\sup_{\zeta \geq \zeta_1} \beta(2\zeta)/\beta(\zeta) < \infty$ и

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\zeta_m}{\beta(\zeta_m)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|_{[X]} \right) d\theta < \infty.$$

Тогда найдутся такие положительные постоянные c и c_β , что

$$E_\zeta(f, A)_X \leq \zeta^{c_\beta} \left(\frac{c}{\zeta}\right)^r \|A^r f\|_X, \quad \zeta \geq \zeta_1, \quad f \in \mathfrak{D}(A^r), \quad r \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Если, кроме того,

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\ln E_\zeta(f, A)_X}{\ln \zeta} = -\infty, \quad (5.2)$$

то вектор $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и

$$\|A^r f\|_X \leq c^r \left(\|f\|_X + \int_{\zeta_1}^\infty \xi^{r+c_\beta-1} E_\xi(f, A)_X d\xi \right), \quad r \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $c_1 := \sup_{\zeta \geq \zeta_1} \beta(2\zeta)/\beta(\zeta) < \infty$ имеем $\beta(2^n \zeta_1) \leq c_1^n \beta(\zeta_1)$. Для каждого $\zeta \geq \zeta_1$ выберем такое натуральное число n , что $2^{n-1} \zeta_1 \leq \zeta < 2^n \zeta_1$. Тогда, используя неубываемость функции β , получаем, что для всех достаточно больших $\zeta \geq \zeta_1$ (а значит, и n) справедливо неравенство

$$\frac{\ln \beta(\zeta)}{\ln \zeta} \leq \frac{n \ln c_1 + \ln \beta(\zeta_1)}{(n-1) \ln 2 + \ln \zeta_1},$$

т.е. $c_\beta := \sup_{\zeta \geq \zeta_0} \ln \beta(\zeta)/\ln \zeta < \infty$, где ζ_0 — достаточно велико. Отсюда следует существование положительной постоянной c_2 , для которой

$$\beta(\zeta) \leq c_2 \zeta^{c_\beta}, \quad \zeta \geq \zeta_1. \quad (5.4)$$

Согласно условиям теоремы 5.1 оператор A и функция β удовлетворяют требованиям теоремы 4.1, а следовательно, справедлива оценка (4.2). Но

$$K(\delta, f; X, \mathfrak{D}(A^r)) \leq \delta \|A^r f\|_X, \quad \delta \geq 0, \quad f \in \mathfrak{D}(A^r),$$

поэтому из (4.2) и (5.4) имеем

$$E_\zeta(f, A)_X \leq c_2 \zeta^{c_\beta} \left(\frac{c}{\zeta}\right)^r \|A^r f\|_X, \quad \zeta \geq \zeta_1, \quad f \in \mathfrak{D}(A^r), \quad r \in \mathbb{N},$$

откуда вытекает требуемая оценка (5.1) (возможно, с иной постоянной c , не зависящей от r).

Условие (5.2) означает, что для произвольного $\alpha > 0$ найдется такое ζ_α , что $E_\zeta(f, A)_X \leq \zeta^{-\alpha}$, $\zeta \geq \zeta_\alpha$. Отсюда и из оценки (5.4) следует выполнение условия (4.14) при всех $j \in \mathbb{N}$. Но условия теоремы 5.1 совпадают с условиями теоремы 4.3, если в ней считать $Y = X$. Поэтому на основании теоремы 4.3 из (5.2) вытекает, что $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и при всех $l \geq j$ справедливы неравенства (4.17). Полагая в (4.17) $l = j$ и пользуясь соотношениями $E^{[0]}(f, A)_X = \|f\|_X$, $E^{[j]}(f, A)_X \leq \|f\|_X$ и (5.4), приходим (после замены j на r) к оценке (5.3), возможно, с иной постоянной c , чем в (4.17), но не зависящей от r .

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда для того чтобы $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$, необходимо и достаточно, чтобы для него выполнялось соотношение (5.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из оценки (5.1), а достаточность показана в теореме 5.1.

Элемент $f \in X$ называется голоморфным (целым) вектором оператора A , если $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и ряд (1.4) сходится по норме пространства X в некоторой окрестности нуля (соответственно, во всей комплексной плоскости).

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Для того чтобы элемент f был голоморфным вектором оператора A , необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} E_\zeta(f, A)_X^{1/\zeta} < 1. \quad (5.5)$$

- 2) Для того чтобы элемент f был целым вектором оператора A , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} E_\zeta(f, A)_X^{1/\zeta} = 0. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Голоморфность вектора f означает, что $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и для некоторого $\delta > 0$ найдется такая постоянная c_δ , что

$$\delta^r \|A^r f\|_X \leq c_\delta r!, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Значит, $\|A^r f\|_X \leq c_\delta (r/\delta)^r$, $r \in \mathbb{N}$. Отсюда и из (5.1) имеем

$$E_\zeta(f, A)_X \leq c_\delta \zeta^{c_\beta} \left(\frac{c\zeta}{\delta\zeta} \right)^r, \quad \zeta \geq \zeta_1, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Для любого $\xi \geq 1$ выберем такое натуральное число r , что $r \leq \xi < r + 1$. Тогда из (5.8) получаем

$$E_\zeta(f, A)_X \leq c_\delta \zeta^{c_\beta} \left(\frac{c\xi}{\delta\zeta} \right)^r \leq c_\delta \zeta^{c_\beta} \left(\max \left\{ 1; \frac{\delta\zeta}{c\xi} \right\} \right) \left(\frac{c\xi}{\delta\zeta} \right)^\xi, \quad \zeta \geq \zeta_1, \quad \xi \geq 1. \quad (5.9)$$

Полагая теперь $\xi = \delta\zeta/(ce)$, выводим

$$E_\zeta(f, A)_X \leq c_\delta \zeta^{c_\beta} e^{1-\delta\zeta/(ce)}, \quad \zeta \geq \max \left\{ \zeta_1; \frac{ce}{\delta} \right\},$$

т.е.

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} E_\zeta(f, A)_X^{1/\zeta} \leq e^{-\delta/(ce)} \quad (5.10)$$

и, следовательно, справедливо соотношение (5.5).

Если выполнено соотношение (5.5), то найдутся такие постоянные $\sigma > 0$ и $c_\sigma > 0$, что

$$E_\zeta(f, A)_X \leq c_\sigma e^{-\sigma\zeta}, \quad \zeta \geq 0, \quad (5.11)$$

поэтому выполнено условие (5.2). Отсюда на основании теоремы 5.1 $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и для него справедливы оценки (5.3). Из (5.3) и (5.11) имеем

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|z|^r \|A^r f\|_X}{r!} \leq e^{c|z|} \|f\|_X + c_\sigma \int_{\zeta_1}^{\infty} \xi^{c_\beta-1} e^{(c|z|-\sigma)\xi} d\xi. \quad (5.12)$$

Значит, ряд (1.4) сходится при $|z| < \sigma/c$, т.е. f — голоморфный вектор оператора A .

Тем самым первое утверждение теоремы 5.2 доказано.

Пусть теперь f — целый вектор оператора A . Тогда оценка (5.7) выполнена при произвольном фиксированном $\delta > 0$, а это, в свою очередь, означает справедливость оценки (5.10) при сколь угодно большом $\delta > 0$. Отсюда следует соотношение (5.6). Если же выполнено соотношение (5.6), то оценка (5.11) справедлива при сколь угодно большом фиксированном значении $\sigma > 0$, а ввиду (5.12) это означает сходимость ряда (1.4) при всех z . Тем самым вектор f — целый, т.е. второе утверждение теоремы 5.2 также доказано.

Следующие далее утверждения посвящены изучению порядка роста и типа функции $e^{zA}f$, заданной равенством (1.4), в предположении, что f — целый вектор оператора A . Тогда (см., например, [18, гл. 7, § 1]) порядок роста ρ функции $e^{zA}f$ подсчитывается по формуле

$$\rho = \left(1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \|A^r f\|_X}{r \ln r}\right)^{-1}, \quad (5.13)$$

а при $0 < \rho < \infty$ тип σ — по формуле

$$\sigma = \frac{e^{\rho-1}}{\rho} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\|A^r f\|_X^{\rho/r}}{r^{\rho-1}}. \quad (5.14)$$

При написании этих формул принимался во внимание вид ряда (1.4) и формула Стирлинга для гамма-функции (см., например, [21, формула 8.327])

$$\Gamma(\zeta) = \zeta^{\zeta-1/2} e^{-\zeta} \sqrt{2\pi} (1 + O(\zeta^{-1})), \quad \zeta \rightarrow +\infty, \quad (5.15)$$

которая для натуральных значений принимает вид:

$$\Gamma(r+1) = r! = r^r e^{-r} \sqrt{2\pi r} (1 + O(r^{-1})), \quad r \in \mathbb{N} \text{ и } r \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Вектор f — целый и вектор-функция $e^{zA}f$ имеет порядок роста, меньший 1, или порядок роста, равный 1, и конечный тип тогда и только тогда, когда найдется такое $\zeta_0 \geq 0$, что $E_\zeta(f, A)_X = 0$ при $\zeta \geq \zeta_0$.
- 2) Если при некотором $\zeta_0 > 0$ выполнены условия: $E_\zeta(f, A)_X > 0$ при $0 < \zeta < \zeta_0$ и $E_\zeta(f, A)_X = 0$ при $\zeta \geq \zeta_0$, то f — целый вектор оператора A и вектор-функция $e^{zA}f$ имеет первый порядок роста и нормальный тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – целый вектор, а вектор-функция $e^{zA}f$ имеет порядок роста, меньший 1, или порядок роста, равный 1, и конечный тип. Согласно формулам (5.13) и (5.14) это равносильно тому, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \|A^r f\|_X^{1/r} = \sigma, \quad (5.16)$$

причем $\sigma = 0$, если $e^{zA}f$ имеет порядок роста, меньший 1, или порядок роста, равный 1, и минимальный тип, и σ – конечно и отлично от нуля, если $e^{zA}f$ имеет порядок роста, равный 1, и нормальный тип σ . Из равенства (5.16) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c(\varepsilon, f) > 0$, для которой

$$\|A^r f\|_X \leq c(\varepsilon, f)(\varepsilon + \sigma)^r, \quad r \in \mathbb{P}, \quad (5.17)$$

т.е. $f \in \mathfrak{G}_{\varepsilon+\sigma}(A)$, и поэтому $E_\zeta(f, A)_X = 0$, $\zeta \geq \varepsilon + \sigma$.

Пусть теперь $E_\zeta(f, A)_X = 0$ при $\zeta \geq \zeta_0$. Тогда согласно оценкам (5.3) найдется такая постоянная $c_1 > 0$, для которой $\|A^r f\|_X \leq c_1^r \|f\|_X$, $r \in \mathbb{P}$. Отсюда и из формул (5.13) и (5.14) получаем, что вектор-функция $e^{zA}f$ имеет либо первый порядок роста и конечный тип, либо ее порядок роста меньше 1. Тем самым установлено первое утверждение теоремы 5.3.

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что если $E_\zeta(f, A)_X > 0$ при $0 < \zeta < \zeta_0$ и $E_\zeta(f, A)_X = 0$ при $\zeta > \zeta_0$, то целая вектор-функция $e^{zA}f$ не может иметь порядок роста меньше 1 или при первом порядке роста не может иметь минимальный тип. Предположим, что это не так. Тогда, как отмечалось ранее, в соотношении (5.16) $\sigma = 0$, что согласно (5.17) влечет $f \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{G}_\varepsilon(A)$. То есть $E_\zeta(f, A)_X = 0$ при всех $\zeta > 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость второго утверждения теоремы 5.3.

Тем самым теорема 5.3 доказана.

Теорема 5.3 дает полную характеристику порядка роста и типа вектор-функции $e^{zA}f$ в случае финитного $E_\zeta(f, A)_X$. Поэтому в следующей теореме предположим дополнительно, что $E_\zeta(f, A)_X > 0$ при всех $\zeta > 0$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.1, f – целый вектор оператора A и $E_\zeta(f, A)_X > 0$, $\zeta > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Порядок роста ρ вектор-функции $e^{zA}f$ находится из равенства

$$\frac{\rho}{\rho - 1} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln(1/E_\zeta(f, A)_X)}{\ln \zeta}, \quad (5.18)$$

причем $\rho = 1$, когда правая часть в (5.18) равна ∞ , и $\rho = \infty$, когда правая часть в (5.18) равна 1.

- 2) Если вектор-функция $e^{zA}f$ имеет порядок роста, равный 1, то она имеет максимальный тип.
- 3) Если вектор-функция $e^{zA}f$ имеет конечный порядок роста $\rho > 1$, то она имеет минимальный, нормальный или максимальный тип, соответственно, тогда и только тогда, когда число

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\zeta^{\rho/(\rho-1)}}{-\ln E_\zeta(f, A)_X}$$

равно нулю, конечно и отлично от нуля или равно бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Так как по условию теоремы 5.4 вектор f – целый, то для него справедливо соотношение (5.6), из которого заключаем, что правая часть в формуле (5.18) всегда больше или равна 1 (за исключением случая финитного $E_\zeta(f, A)_X$). Тем самым формула (5.18) утверждает (что полностью согласуется с теоремой 5.3): *при выполнении условий теоремы 5.4 порядок роста целой вектор-функции $e^{zA}f$ всегда больше или равен 1*. Отметим также, что утверждение 2) теоремы 5.4 является следствием теоремы 5.3.

Теорема 5.4 будет выведена из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.5. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1, а число $\alpha > 0$. Тогда для того чтобы $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и выполнялось соотношение*

$$a := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\|A^r f\|_X^{\alpha/r}}{r} < \infty, \quad (5.19)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$b := \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\zeta^\alpha}{-\ln E_\zeta(f, A)_X} < \infty. \quad (5.20)$$

Число $a = 0$ тогда и только тогда, когда $b = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и выполнено неравенство (5.19). Тогда из соотношений (5.1) и (5.19) заключаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_0 \in \mathbb{N}$, для которого

$$E_\zeta(f, A)_X \leq \zeta^{c_\beta} \left(\frac{(a + \varepsilon)^{1/\alpha} c r^{1/\alpha}}{\zeta} \right)^r, \quad \zeta \geq \zeta_1, \quad r \geq r_0.$$

Откуда, как и при выводе оценок (5.9), имеем

$$E_\zeta(f, A)_X \leq \zeta^{c_\beta} \left(\max \left\{ 1; \frac{\zeta}{(a + \varepsilon)^{1/\alpha} c \xi^{1/\alpha}} \right\} \right) \left(\frac{(a + \varepsilon)^{1/\alpha} c \xi^{1/\alpha}}{\zeta} \right)^\xi,$$

где $\zeta \geq \zeta_1$, а $\xi \geq r_0$. Полагая теперь $\xi = (\zeta / ((a + \varepsilon)^{1/\alpha} c e))^\alpha$, выводим

$$E_\zeta(f, A)_X \leq \zeta^{c_\beta} e^{1 - (\zeta / ((a + \varepsilon)^{1/\alpha} c e))^\alpha}, \quad \zeta \geq \max\{\zeta_1; (a + \varepsilon)^{1/\alpha} c e r_0^{1/\alpha}\}.$$

Поэтому для указанных значений ζ

$$-\ln E_\zeta(f, A)_X \geq -c_\beta \ln \zeta - 1 + \frac{\zeta^\alpha}{(a + \varepsilon) c^\alpha e^\alpha},$$

а значит,

$$b \leq (a + \varepsilon) c^\alpha e^\alpha. \quad (5.21)$$

Если же выполнено неравенство (5.20), то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c_1 > 0$, что $E_\zeta(f, A)_X \leq c_1 \exp(-\zeta^\alpha / (b + \varepsilon))$, $\zeta > 0$. Тем

самым выполнено требование (5.2). Отсюда согласно теореме 5.1 $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и справедливы оценки (5.3), из которых получаем

$$\|A^r f\|_X \leq c^r \left(\|f\|_X + c_1 \int_{\zeta_1}^{\infty} \xi^{r+c_\beta-1} e^{-\xi^\alpha/(b+\varepsilon)} d\xi \right), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Делая замену $\tau = \xi^\alpha/(b+\varepsilon)$ в интеграле, находящемся в правой части этого неравенства, и учитывая определение гамма-функции, заключаем, что

$$\|A^r f\|_X \leq 2c^r \max \left\{ \|f\|_X; \frac{c_1}{\alpha} (b+\varepsilon)^{(r+c_\beta)/\alpha+2} \Gamma \left(\frac{r+c_\beta}{\alpha} + 2 \right) \right\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$a \leq (b+\varepsilon)c^\alpha \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \Gamma \left(\frac{r+c_\beta}{\alpha} + 2 \right)^{\alpha/r}.$$

Но из формулы Стирлинга (5.15) (при этом полезно также иметь в виду и формулу 8.328.2 из [21]) вытекает, что для произвольного вещественного ν справедливо равенство

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\zeta} \Gamma \left(\frac{\zeta}{\alpha} + \nu \right)^{\alpha/\zeta} = \frac{1}{\alpha e},$$

поэтому $a \leq (b+\varepsilon)c^\alpha/(\alpha e)$. Поскольку в этом неравенстве и в оценке (5.21) ε — произвольное положительное число, то из них вытекает утверждение теоремы 5.5.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.1, $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \|A^r f\|_X}{r \ln r} \geq 0.$$

Тогда справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \|A^r f\|_X}{r \ln r} = \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\ln \zeta}{\ln \ln(1/E_\zeta(f, A)_X)}. \quad (5.22)$$

Вывод этого следствия из теоремы 5.5 основан на простых преобразованиях, связанных с оценками верхних пределов, и поэтому здесь опускается. Отметим лишь, что так как по условию $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$, то согласно следствию 5.1 $E_\zeta(f, A)_X \rightarrow 0$, когда $\zeta \rightarrow \infty$. Кроме того, всегда можно считать, что $E_\zeta(f, A)_X > 0$ при $\zeta > 0$. Действительно, в противном случае, используя теорему 5.3, получаем равенство нулю левой и правой частей в (5.22).

Если теперь учесть замечание 5.1, то доказательство теоремы 5.4 вытекает из формул (5.13), (5.14), (5.22) и утверждения теоремы 5.5.

Отметим, что теорема 5.5 и следствие 5.2 являются в определенном смысле усилением теоремы 5.4 на случай нецелых векторов и, в частности, на случай, когда правая часть в равенстве (5.18) меньше 1 (ср. с замечанием 5.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если в теоремах 5.1–5.5 и в следствиях 5.1, 5.2 положить $A = D_{\mathbb{T}}$ или $A = D$, где операторы $D_{\mathbb{T}}$ и D заданы, соответственно, формулами (1.11) и (2.48), то из них получаются дополнения к ряду известных результатов (эти дополнения касаются лишь случая $p < \infty$). Так, считая $A = D$, получим результаты Бернштейна [6, работа 89], за исключением тех из них, которые относятся к формуле ширины полосы голоморфности функции f и к формуле для типа целой функции f , выраженные через наилучшие приближения $\mathcal{A}_{\zeta}(f)_{\infty}$ (см. п. 2.2). Для получения утверждений, относящихся к вычислению радиуса сходимости и типа ряда (1.4), необходимо предположить выполнение более сильных ограничений относительно оператора A и несколько модернизировать доказательство теоремы 4.3. При этом оказывается полезной теорема 3 работы [2], уточняющая оценку (5.1) в случае, когда резольвента оператора A удовлетворяет условию (3.10) при $\zeta = \zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим следующую краевую задачу для оператора дифференцирования

$$-ix' = \lambda x, \quad U(x) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a(t)b(\pi - |t|)x(t)}{(\pi - |t|)^{\alpha}} dt = 0, \quad (5.23)$$

где $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, a — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$ и $a(-\pi+) \neq 0$, $a(\pi-) \neq 0$, а b — положительная и слабо колеблющаяся на $[0, \pi]$ функция. Требование слабой колеблемости b означает, что при произвольном $\delta > 0$ в некоторой правой окрестности нуля $t^{\delta}b(t)$ возрастает, а $t^{-\delta}b(t)$ убывает.

Пусть оператор A действует в пространстве $X = C[-\pi, \pi]$ по правилу

$$Ax = -ix', \quad x \in \mathfrak{D}(A) := \{x \in C^1[-\pi, \pi] : U(x) = 0\}.$$

Собственные значения λ_k , $k \in \mathbb{Z}$, задачи (5.23) совпадают с собственными значениями оператора A , которые, в свою очередь, совпадают с нулями целой функции

$$\Delta(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{a(t)b(\pi - |t|)}{(\pi - |t|)^{\alpha}} dt.$$

Кроме того, у задачи (5.23) и у оператора A одни и те же цепочки собственных и присоединенных к ним функций, отвечающие одному и тому же собственному значению λ_k .

Согласно [22, лемма 2] для λ_k справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_k = k + O(1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \rightarrow \pm\infty, \quad (5.24)$$

и для произвольного $\delta > 0$ найдется такая постоянная $c_{\delta} > 0$, что

$$|\Delta(\lambda)| \geq c_{\delta} |\lambda|^{\operatorname{Re} \alpha - 1} b(|\lambda|^{-1}) e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}, \quad |\lambda| \geq \pi^{-1}, \quad |\lambda - \lambda_k| \geq \delta. \quad (5.25)$$

Покажем, что резольвента оператора A допускает оценку

$$\|R(\lambda; A)\|_{[C[-\pi, \pi]]} \leq \beta(|\lambda|) |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}, \quad |\lambda| \geq \pi^{-1}, \quad |\lambda - \lambda_k| \geq \delta, \quad (5.26)$$

с функцией β , заданной равенством

$$\beta(\zeta) = c'_\delta \zeta^{1-\operatorname{Re} \alpha} b(\zeta^{-1})^{-1}, \quad \zeta \geq \pi^{-1}, \quad (5.27)$$

где c'_δ – некоторая положительная постоянная.

Действительно, из общего вида решения уравнения $-ix' - \lambda x = f$ и из предположения, что $U(x) = 0$, получаются следующие представления:

$$(R(\lambda; A)f)(t) = i \int_{-\pi}^t e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau - i \frac{e^{i\lambda t}}{\Delta(\lambda)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a(\tau)b(\pi-|\tau|)}{(\pi-|\tau|)^\alpha} \left(\int_{-\pi}^{\tau} e^{i\lambda(\tau-\xi)} f(\xi) d\xi \right) d\tau, \quad (5.28)$$

$$(R(\lambda; A)f)(t) = -i \int_t^{\pi} e^{i\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau + i \frac{e^{i\lambda t}}{\Delta(\lambda)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a(\tau)b(\pi-|\tau|)}{(\pi-|\tau|)^\alpha} \left(\int_{\tau}^{\pi} e^{i\lambda(\tau-\xi)} f(\xi) d\xi \right) d\tau. \quad (5.29)$$

При $\lambda \neq \lambda_k$ оба эти представления совпадают, однако, равенство (5.28) дает требуемую оценку (5.26) в случае $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, а равенство (5.29) – в случае $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$. Для этого надо лишь с помощью неравенства Гёльдера оценить интегралы, входящие в эти представления, и воспользоваться неравенством (5.25).

Из представления (5.28) или (5.29) следует мероморфность резольвенты оператора A , а значит, $\mathcal{E}_\zeta(f) := E_\zeta(f, A)_{C[-\pi, \pi]}$ совпадают с наилучшими приближениями функции f посредством тех собственных и присоединенных функций задачи (5.23), которые были указаны в предложении 1.1.

Пользуясь определением слабо колеблющейся функции и ее свойством [23, гл. V, § 2] $b(2t)/b(t) \rightarrow 1$, когда $t \searrow 0$, заключаем, что функция β , заданная равенством (5.27), удовлетворяет условию (4.5) при достаточно больших ζ_1 . А учитывая асимптотику (5.24) собственных значений λ_k и оценку (5.26), получаем, что оператор A и функция β удовлетворяют всем требованиям теорем 4.1, 4.2 и 5.1–5.5. Тем самым для наилучших приближений $\mathcal{E}_\zeta(f)$ функции $f \in C[-\pi, \pi]$ посредством собственных и присоединенных функций задачи (5.23) справедливы все выводы из § 5. В частности, из теоремы 5.2 следует утверждение: *для того чтобы функция $f \in C[-\pi, \pi]$ голоморфно продолжалась в некоторую окрестность отрезка $[-\pi, \pi]$ и $U(f^{(r)}) = 0$, $r \in \mathbb{P}$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\zeta(f)^{1/\zeta} < 1$.*

И, наконец, отметим, что система собственных и присоединенных функций задачи (5.23) содержит богатый запас конкретных систем функций. В частности (см., например, [24, с. 65–67] или [25, лемма 3.1.1]), при подходящем выборе числа α и функции a в задаче (5.23) ее системой собственных функций является система экспонент $\{\exp(i(k + \gamma \operatorname{sign} k)t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $0 < \operatorname{Re} \gamma < \frac{1}{2}$. От наилучших приближений по этой системе уже несложно перейти к наилучшим приближениям по системе синусов и косинусов вида $\{\sin(k + \gamma)t\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{1\} \cup \{\cos(k + \gamma)t\}_{k \in \mathbb{N}}$. Поэтому и к этой системе функций применимы выводы § 4 и § 5.

Список литературы

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
2. Радзиевский Г. В. О наилучших приближениях и о скорости сходимости разложений по корневым векторам оператора // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49. № 6. С. 754–773.
3. Nelson E. Analytic vectors // Ann. of Math. 1959. V. 70. № 3. P. 572–615.
4. Goodman R. Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 143. P. 55–76.
5. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
6. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
7. Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 24. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3–163.
8. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung // Inauguraldissertation und Preisschrift. Univ. Göttingen 1911.
9. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 3. С. 219–242.
10. Тиман А. Ф., Тиман М. Ф. Обобщенный модуль непрерывности и наилучшие приближения в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. № 1. С. 17–20.
11. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
12. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
13. Андриенко В. А. Теоремы вложения для функций одного переменного // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1971. С. 203–262.
14. Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44 (86). № 1. С. 53–84.
15. Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 3. С. 649–686.
16. Ульянов П. Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123). № 1. С. 104–131.
17. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
18. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.
19. Радыно Я. В. Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. № 9. С. 791–793.
20. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
22. Седлецкий А. М. О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Труды МИАН. 1991. Т. 200. С. 299–309.
23. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965.
24. Levinson N. Cap and density theorems. New York: Amer. Math. Soc., 1940.
25. Седлецкий А. М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 51–95.