Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Аппроксимативные свойства систем экспонент на прямой и полупрямой, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 3, 125–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:18:42

УДК 517.5

А. М. Седлецкий

Аппроксимативные свойства систем экспонент на прямой и полупрямой

Для произвольных $a > 0$, $\alpha > 1$ строится класс целых функций, зависящих от комплексного параметра μ . Описаны все значения μ , при которых последовательность λ_n нулей каждой функции этого класса порождает полную и минимальную систему экспонент

$$\exp(-i\lambda_n t - a|t|^\alpha)$$

в $L^p(\mathbb{R})$ ($L^p(\mathbb{R}_+)$), $p \geq 2$. Примеры таких систем были известны раньше только при $\alpha = 2$.

Библиография: 14 названий.

1. Речь пойдет об аппроксимативных свойствах систем экспонент с быстро убывающим весом, а именно, систем вида

$$e^{-i\lambda_n t} \exp(-a|t|^\alpha), \quad \lambda_n \in \Lambda; \quad a > 0, \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

в пространствах L^p на всей прямой и на полупрямой.

Первоначально [1]–[5] полнота систем (1) в $L^2(\mathbb{R})$ исследовалась для вещественных показателей λ_n . В первую очередь это связано с теоремой Н. Винера [6], по которой линейная оболочка сдвигов

$$f(t + \lambda) \quad (2)$$

($\lambda \in \mathbb{R}$) функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ плотна в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье $\hat{f} \neq 0$ почти всюду. Эквивалентная формулировка (с $g = \hat{f}$) состоит в том, что линейная оболочка взвешенных экспонент

$$e^{-i\lambda t} g(t) \quad (3)$$

($\lambda \in \mathbb{R}$) плотна в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $g \neq 0$ почти всюду.

Отталкиваясь от этой теоремы, мы приходим к задаче описания последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ (конечно, зависящих от g , $g \neq 0$ почти всюду) таких, что системы (3) с $\lambda \in \Lambda$ представляют собой подходящий аппарат аппроксимации в $L^2(\mathbb{R})$. К настоящему моменту теория наиболее продвинута в случае веса

$$g(t) = \exp(-a|t|^\alpha), \quad a > 0, \quad \alpha > 1, \quad (4)$$

т. е. для систем (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96049).

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$, пусть $\beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$. В статье автора [7] доказано следующее. Пусть β целое; тогда если система (1) полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$, то

$$\begin{aligned} 1) \quad & \overline{\Delta}_\beta(\Lambda) > 0, \\ 2) \quad & \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \sum_{|\lambda_n| < R} \frac{1}{\lambda_n^\beta} \right| < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\overline{\Delta}_\beta(\Lambda)$ обозначает верхнюю плотность последовательности Λ при порядке β , т.е.

$$\overline{\Delta}_\beta(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\beta}.$$

Предположим теперь, что β целое и $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ или что β четное и $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Тогда условие (5) превращается в условие

$$\sum \frac{1}{|\lambda_n|^\beta} < \infty,$$

влекущее свойство $n/|\lambda_n|^\beta \rightarrow 0$ и, в частности, $\overline{\Delta}_\beta(\Lambda) = 0$. То есть в этом случае условия 1), 2) необходимого признака полноты и минимальности системы (1) в $L^2(\mathbb{R})$ несовместимы.

Вывод: если мы хотим иметь дело не только с полными, но и с минимальными системами (1) в $L^2(\mathbb{R})$, мы должны – с точки зрения расположения последовательности Λ – выйти в комплексную плоскость (по крайней мере, в случае четных β).

Отметим, что обратное преобразование Фурье функции (4) есть целая функция, и в эквивалентной постановке речь идет о полных и минимальных в $L^2(\mathbb{R})$ системах (2) комплексных сдвигов ($\lambda \in \Lambda$) этой целой функции.

Первыми полную и одновременно минимальную систему (1) в $L^2(\mathbb{R})$ с $\alpha = 2$ предъявили Р. Залик и Абуабара Т. Саад [8], доказавшие следующее. Пусть

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 \left(2(\pi n)^{1/2} \exp \left(i \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)_{n=1}^{\infty} \cup \{\pm \lambda\}, \quad (6)$$

где $\lambda \neq 0$ не принадлежит предыдущему множеству в (6); тогда система

$$e^{-i\lambda_n t} \exp(-t^2/2), \quad \lambda_n \in \Lambda, \quad (7)$$

полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$.

Для доказательства утверждения о полноте в [8] был предложен оригинальный прием; однако в его реализации условие $\alpha = 2$ играет существенную роль.

В [9], где рассматривались более общие последовательности

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 \left(2(\pi(n+h))^{1/2} \exp \left(i \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)_{n=1}^{\infty} \cup \{\pm \lambda\}, \quad h > -1, \quad (8)$$

установлено, что система (7), (8) полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $-1/8 < h \leq 1/8$. Тем самым предшествующий результат расширен, но его доказательство использует упомянутый прием из [8], а потому снова проходит только для $\alpha = 2$.

Вопрос о существовании полных и минимальных (одновременно) систем (1) в $L^2(\mathbb{R})$ при $\alpha \neq 2$ оставался открытым. Если же говорить о пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, то этот вопрос в литературе вообще не рассматривался, в том числе, и для $\alpha = 2$.

В настоящей статье восполняется этот пробел. Для любых $\alpha > 1$, $a > 0$ мы конструируем класс целых функций, зависящих от комплексного параметра μ , и описываем все значения μ , при которых последовательность Λ нулей каждой функции этого класса порождает полную и минимальную систему (1) в $L^p(\mathbb{R})$ (в $L^p(\mathbb{R}_+)$), $p \geq 2$.

2. Всюду в дальнейшем $a > 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $K(\beta, a) = (\alpha a)^{-\beta/\alpha} \cdot \beta^{-1}$, $z = x + iy = re^{i\theta}$.

ЛЕММА 1. Пусть $|\theta_k| < \pi$, $\theta_k \neq 0$. Положим

$$\begin{aligned}\theta_k^0 &= \frac{\theta_k}{\alpha} + \frac{\pi}{2\beta}, \quad \text{если } \theta_k \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \theta_k^0 &= \frac{\theta_k}{\alpha} - \frac{\pi}{2\beta}, \quad \text{если } \theta_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).\end{aligned}$$

Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}a_k &= |\sin \theta_k|^{\beta-1}, \quad I_k = \left(\theta_k^0 - \frac{\pi}{2\beta}, \theta_k^0 + \frac{\pi}{2\beta}\right), \\ h_k(\theta) &= a_k \cos \beta(\theta - \theta_k^0), \quad \theta \in I_k; \quad h_k(\theta) = 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \setminus I_k, \\ b_k(\theta) &= |\sin \theta|^\beta - h_k(\theta), \quad \theta \in I_k.\end{aligned}$$

Тогда

- 1) $h_k(\theta) \leq |\sin \theta|^\beta$, $|\theta| \leq \pi$,
- 2) при $\theta \neq 0, \pm\pi$ знак равенства в 1) достигается в единственной точке $\theta = \theta_k$,
- 3) $b'_k(\theta_k) = 0$, $b''_k(\theta_k) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай $0 < \theta_k \leq \pi/2$. Сначала проверим, что $\theta_k \in I_k$. По определению θ_k^0 имеем

$$\theta_k^0 - \theta_k = \frac{\pi}{2\beta} - \frac{\theta_k}{\beta}. \quad (9)$$

Поэтому $0 \leq \theta_k^0 - \theta_k < \frac{\pi}{2\beta}$. И так как I_k есть интервал радиуса $\frac{\pi}{2\beta}$ с центром в точке θ_k^0 , то $\theta_k \in I_k$.

Теперь убедимся, что $I_k \subset (0, \pi)$. Условие $I_k \subset (0, \pi)$ равносильно системе неравенств $0 < \theta_k/\alpha$, $\theta_k/\alpha + \pi/\beta < \pi$, которая записывается в виде двойного неравенства $0 < \theta_k < \pi$. Это двойное неравенство верно, так как мы рассматриваем случай $0 < \theta_k \leq \pi/2$. Итак, $I_k \subset (0, \pi)$.

Рассмотрим функцию

$$A(\theta) = \frac{h_k(\theta)}{\sin^\beta \theta}, \quad \theta \in I_k.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\text{sign } A'(\theta) &= -\beta a_k \sin^{\beta-1} \theta (\sin \beta(\theta - \theta_k^0) \sin \theta + \cos \beta(\theta - \theta_k^0) \cos \theta), \\ \text{sign } A'(\theta) &= -\cos(\theta(\beta - 1) - \beta\theta_k^0) = -\cos(\beta - 1)(\theta - \alpha\theta_k^0).\end{aligned} \quad (10)$$

Значение $\theta = \theta_k$ отвечает значению $-\pi/2$ под знаком косинуса в (10). Таким образом, $A'(\theta_k) = 0$, и при переходе через точку θ_k производная $A'(\theta)$ меняет знак с плюса на минус. Из (9) следует, что расстояние от точки θ_k до концов интервала I_k меньше, чем π/β , и подавно, меньше, чем $\pi/(\beta-1)$. Поэтому правая часть в (10) больше на I_k не меняет знака. Следовательно, функция $A(\theta)$ достигает в точке θ_k своего наибольшего значения на I_k . Но из определений следует, что $A(\theta_k) = 1$. Значит, утверждение 1) верно для $\theta \in I_k$; для остальных θ оно очевидно. Из сказанного следует также и утверждение 2).

По доказанному точка θ_k есть точка экстремума дифференцируемой функции $b_k(\theta)$, и потому $b'_k(\theta_k) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} b''_k(\theta) &= (\beta \sin^{\beta-1} \theta \cos \theta + a_k \beta \sin \beta(\theta - \theta_k^0))' \\ &= \beta((\beta-1) \sin^{\beta-2} \theta \cos^2 \theta - \sin^\beta \theta + a_k \beta \cos \beta(\theta - \theta_k^0)). \end{aligned}$$

Но $a_k \cos \beta(\theta - \theta_k^0) = \sin^\beta \theta$ при $\theta = \theta_k$, и значит,

$$b''_k(\theta) = \beta(\beta-1) \sin^{\beta-2} \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \beta(\beta-1) \sin^{\beta-2} \theta \neq 0, \quad \theta = \theta_k.$$

Утверждение 3) верно. Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для дальнейших рассуждений полезно иметь в виду следующую геометрическую трактовку леммы 1. График функции $h_k(\theta)$ представляет собой арку косинусоиды, расположенную над интервалом I_k длины π/β с центром в точке θ_k^0 . Эта арка вписана в график функции $|\sin \theta|^\beta$ так, что точка θ_k является точкой касания этих двух графиков, а для остальных значений $\theta \in I_k$ график функции $h_k(\theta)$ лежит ниже графика функции $|\sin \theta|^\beta$.

Заметим еще, что обозначения леммы 1, равно как и обозначения леммы 2, используются в дальнейшем без дополнительных напоминаний.

ЛЕММА 2. Пусть $-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < \pi$, $\theta_k \neq 0$, $k = \overline{1, m}$. Обозначим

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \max(h_k(\theta) : k = \overline{1, m}), \quad |\theta| \leq \pi, \\ b(\theta) &= |\sin \theta|^\beta - h(\theta), \quad |\theta| \leq \pi. \end{aligned}$$

Тогда

- 1) $h(\theta) \leq |\sin \theta|^\beta$, $|\theta| \leq \pi$,
- 2) знак равенства при $\theta \neq 0, \pm\pi$ в 1) достигается в точках θ_k , $k = \overline{1, m}$, и только в них,
- 3) $b(\theta) \sim c_k(\theta - \theta_k)^2$, $\theta \rightarrow \theta_k$, $c_k \neq 0$, $k = \overline{1, m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вне объединения интервалов I_k имеем $h(\theta) = 0$, и для таких θ утверждение 1) очевидно. График функции $h_k(\theta)$ есть арка косинусоиды, расположенная над интервалом I_k , а график функции $h(\theta)$ получается склейкой частей графиков функций $h_k(\theta)$. Так как $\theta_k < \theta_{k+1}$, то при этом у каждой точки θ_k существует окрестность, в которой $h(\theta) = h_k(\theta)$, причем замыкание объединения этих окрестностей совпадает с замыканием объединения интервалов I_k . Поэтому оставшаяся часть леммы 2 следует из леммы 1. Лемма 2 верна.

В дальнейшем важную роль будут играть следующие понятия: тригонометрически ρ -выпуклая функция, индикатор целой функции, целая функция вполне регулярного роста. По поводу этих понятий см., например, [10].

ЛЕММА 3. Пусть $H(\theta)$ – тригонометрически β -выпуклая функция, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_3$, причем $H(\theta_i) \leq 0$, $i = 1, 3$. Тогда

- 1) если $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\beta$, то $H(\theta) \leq 0$ на $[\theta_1, \theta_3]$,
- 2) если $\theta_3 - \theta_1 = \pi/\beta$ и $H(\theta_i) < 0$ хотя бы при одном значении $i = 1, 3$, то $H(\theta) \leq 0$ на $[\theta_1, \theta_3]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\theta_1 = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим β -тригонометрическую функцию $t(\theta) = \varepsilon \sin \beta\theta$.

1) Так как $0 < \beta\theta_3 < \pi$, то $H(0) \leq t(0)$, $H(\theta_3) < t(\theta_3)$. По определению тригонометрической β -выпуклости отсюда следует, что

$$H(\theta) \leq t(\theta) = \varepsilon \sin \beta\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_3. \quad (11)$$

Так как ε здесь можно взять сколь угодно малым, то $H(\theta) \leq 0$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_3$.

2) Так как $\theta_1 = 0$, то $\theta_3 = \pi/\beta$. Пусть для определенности $H(0) < 0$. В силу непрерывности тригонометрически β -выпуклой функции имеем $H(\theta_2) < t(\theta_2)$ при достаточно малом $\theta_2 \in (0, \pi/\beta)$. Значит,

$$H(0) < t(0), \quad H(\theta_2) < t(\theta_2), \quad H(\pi/\beta) \leq t(\pi/\beta). \quad (12)$$

По определению тригонометрической β -выпуклости из первой пары этих неравенств следует, что $H(\theta) \leq t(\theta)$ на $[0, \theta_2]$, а из второй пары следует, что $H(\theta) \leq t(\theta)$ на $[\theta_2, \pi/\beta]$. В итоге мы получаем неравенство (11) с $\theta_3 = \pi/\beta$, откуда $H(\theta) \leq 0$, $0 \leq \theta \leq \theta_3 = \pi/\beta$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $H(\theta)$ – тригонометрически β -выпуклая функция. Пусть $\theta_1 < \theta_3$, $\theta_3 - \theta_1 = \pi/\beta$, $H(\theta_1) = H(\theta_3) = 0$ и $H(\theta) = o(\theta - \theta_i)$ хотя бы при одном значении $i = 1, 3$. Тогда $H(\theta) \leq 0$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова считаем, что $\theta_1 = 0$, $\theta_3 = \pi/\beta$. Пусть для определенности $H(\theta) = o(\theta)$, $\theta \rightarrow +0$. Пусть функция $t(\theta)$ та же, что в доказательстве леммы 3. Так как $\sin \beta\theta \sim \beta\theta$, а $H(\theta) = o(\theta)$, $\theta \rightarrow +0$, то при достаточно малом $\theta_2 \in (0, \pi/\beta)$ будем иметь $H(\theta_2) < t(\theta_2)$. То есть

$$H(0) = t(0), \quad H(\theta_2) < t(\theta_2), \quad H(\pi/\beta) = t(\pi/\beta).$$

Теперь целиком повторяются рассуждения, следующие за (12). Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $b(\theta)$ – функция из леммы 2, а $A, \beta > 0$, $S_k = \{z : r > 1, |\theta - \theta_k| < \delta\}$. Тогда если $\delta > 0$ достаточно мало, то условие

$$J_k = \iint_{S_k} \exp(-Ab(\theta)r^\beta) r^s dr d\theta < \infty \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (13)$$

равносильно условию $s + 1 < \beta/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме $2b(\theta) > 0$ при $\theta \in U_k = (\theta : |\theta - \theta_k| < \delta), \theta \neq \theta_k; b(\theta_k) = 0$. Положим $t = b(\theta)r^\beta$. Тогда

$$r = (t/b(\theta))^{1/\beta}, \quad dr = (1/\beta)t^{1/\beta-1}(b(\theta))^{-1/\beta} dt,$$

и с точностью до ненулевого постоянного сомножителя

$$J_k = \int_{U_k} \frac{d\theta}{(b(\theta))^{(s+1)/\beta}} \int_{b(\theta)}^\infty e^{-At} t^{(s+1)/\beta-1} dt.$$

Пусть сначала $s+1 > 0$. Тогда обозначив $b = \max(b(\theta) : \theta \in \bar{I}_k)$, имеем

$$0 < c_1 = \int_b^\infty < \int_{b(\theta)}^\infty < \int_0^\infty = c_2 < \infty,$$

и вспоминая лемму 2, видим, что интеграл J_k конечен или бесконечен одновременно с интегралом

$$\int_0^\infty \theta^{-2(s+1)/\beta} d\theta.$$

Конечность последнего интеграла равносильна условию $2(s+1)/\beta < 1$. Таким образом, если $s+1 > 0$, то условие $J_k < \infty$ равносильно условию $s+1 < \beta/2$. Поэтому остается показать, что если $s+1 \leq 0$, то $J_k < \infty$.

Но это уже следует из доказанной части. Действительно, так как $r > 1$ для $z \in S_k$, то из определения (13) интеграла J_k видно, что если он конечен при некотором значении $s = s_0$, то он будет конечным и при всех меньших значениях s , т.е. при $s \leq s_0$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $\sigma_1 = (z : r > 1, 0 < \theta < \delta)$, $\sigma_2 = (z : r > 1, \pi - \delta < \theta < \pi)$, $\delta > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $q > 1$, $A > 0$, $\beta > 0$. Тогда

$$\iint_{\sigma_i} (1+y)^s \exp(-Ay^\beta) r^{-q} dx dy < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл в (14) не зависит от i ; разберем случай $i = 1$. Пусть π – пересечение σ_1 с полосой $0 < y < 1$. Сначала докажем, что конечна часть интеграла (14), взятая по π . Имеем

$$(1+y)^s \exp(-Ay^\beta) \leq C < \infty, \quad z \in \pi,$$

и потому, если $\varepsilon = 1/\sin \delta$, $a(r) = \arcsin(1/r)$, то

$$\iint_\pi \leq C \iint_\pi r^{-q} dx dy \leq c_1 + c_2 \int_\varepsilon^\infty r^{-q+1} dr \int_0^{a(r)} d\theta \leq c_1 + c_3 \int_\varepsilon^\infty r^{-q} dr < \infty,$$

так как $q > 1$.

Остается рассмотреть ту часть интеграла в (14), которая берется по множеству $\sigma = (z \in \sigma_1 : y \geq 1)$.

Если $z \in \sigma$, то $1+y \asymp y$, и значит,

$$\iint_\sigma < c \int_\varepsilon^\infty r^{-q+s+1} dr \int_{a(r)}^\delta \theta^s \exp(-B(\theta r)^\beta) d\theta, \quad B > 0. \quad (15)$$

Положим $(\theta r)^\beta = t$; тогда $\theta = t^{1/\beta}/r$, $d\theta = ct^{1/\beta-1} dt/r$, и внутренний интеграл в (15) не превосходит

$$\frac{c}{r^{s+1}} \int_{\Delta}^{\infty} e^{-Bt} t^{(s+1)/\beta-1} dt \leq \frac{c_1}{r^{s+1}}, \quad \Delta = \left(r \arcsin \frac{1}{r} \right)^\beta \geq \Delta_1 > 0.$$

Значит,

$$\iint_{\sigma} \leq c \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{-q} dr < \infty,$$

и лемма 6 доказана.

В наших построениях важную роль играет функция типа Миттаг–Леффлера [11]

$$E_{\beta}(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\beta)}, \quad \beta > 0, \quad \mu \in \mathbb{C};$$

$E_{\beta}(z; \mu)$ – целая функция.

ТЕОРЕМА А [11]. Если $\gamma \in (\pi/(2\beta), \pi)$, $\beta > 1/2$, то при любом $s \in \mathbb{N}$

$$E_{\beta}(z; \mu) = \beta z^{\beta(1-\mu)} \exp(z^{\beta}) - \sum_{j=1}^s \frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu - j/\beta)} + O\left(\frac{1}{r^{s+1}}\right), \quad |\arg z| \leq \gamma,$$

$$E_{\beta}(z; \mu) = - \sum_{j=1}^s \frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu - j/\beta)} + O\left(\frac{1}{r^{s+1}}\right), \quad \gamma \leq |\arg z| \leq \pi.$$

Нам понадобятся также свойства преобразований Фурье быстро убывающих функций. Пусть

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \exp(-a|t|^{\alpha}) g(t) dt. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА Б [12]. Если $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$, $q \geq 1$, то $G(z)$ – целая функция и при всех $\theta \neq \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\int_1^{\infty} |G(re^{i\theta})|^q r^{(q-2)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)r^{\beta} |\sin \theta|^{\beta}) dr < \infty. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА В [12]. Пусть $1 < q \leq 2$. 1) Пусть $G(z)$ – целая функция такая, что

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |G(z)|^q (1 + |y|)^{(q-3)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)|y|^{\beta}) dx dy < \infty. \quad (18)$$

Тогда $G(z)$ представима в виде (16) с $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$.

2) Пусть $G(z)$ – целая функция такая, что $G(z) \in H_-^2$ и конечен интеграл в (18), взятый по полуплоскости $y > 0$. Тогда $G(z)$ представима в виде (16) с $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$, причем $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Здесь через H_-^2 обозначен класс Харди в нижней полуплоскости, т.е. класс функций, аналитических при $y < 0$ и таких, что

$$\sup_{y < 0} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 dx < \infty.$$

3. Полнота и неминимальность систем экспонент на прямой и на полупрямой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $-\pi < \theta_1 < \dots < \theta_l < 0 < \theta_{l+1} < \dots < \theta_m < \pi$, причем

$$\begin{aligned} \theta_1 + \pi &\leq \frac{\pi}{\beta}, & \theta_l &\geq -\frac{\pi}{\beta}, & \theta_{l+1} &\leq \frac{\pi}{\beta}, & \pi - \theta_m &\leq \frac{\pi}{\beta}, \\ \theta_{k+1} - \theta_k &\leq \frac{\pi}{\beta}, & k &= 1, \dots, l-1, l+1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Положим

$$e(z) = \sum_{k=1}^m \pm a_k E_\beta(z e^{-i\theta_k^0}; \mu), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (19)$$

где числа θ_k^0 и a_k определены в лемме 1, а знаки в (19) выбраны так, что

$$\sum_{k=1}^m \pm a_k e^{i\theta_k^0} \neq 0, \quad \text{если} \quad \mu - \frac{1}{\beta} \notin \{0, -1, -2, \dots\}, \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^m \pm a_k e^{2i\theta_k^0} \neq 0, \quad \text{если} \quad \mu - \frac{1}{\beta} \in \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (21)$$

Обозначим

$$F(z) = e((K(\beta, a))^{1/\beta} z), \quad (22)$$

и пусть Λ – последовательность всех нулей функций $F(z)$. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда

1) если

$$\operatorname{Re} \mu \leq \frac{1}{\beta} + \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2}, \quad (23)$$

то система (1) полна в $L^p(\mathbb{R})$,

2) если

$$\operatorname{Re} \mu \leq \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2}, \quad (24)$$

то система (1) неминимальна в $L^p(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нулю λ функции $F(z)$ кратности s в системе (1) отвечают s функций

$$t^j e^{-i\lambda t} \exp(-a|t|^\alpha), \quad j = \overline{0, s-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Предположим, что система (1) неполна в $L^p(\mathbb{R})$, и докажем, что

$$\operatorname{Re} \mu > \frac{1}{\beta} + \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Так как система (1) неполна в $L^p(\mathbb{R})$, то найдется нетривиальная функция $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$ такая, что целая функция (16) обращается в 0 в точках Λ . Но Λ – последовательность всех нулей функции $F(z)$. Поэтому

$$G(z) = F(z)E(z), \quad (26)$$

где $E(z)$ – некоторая целая функция. Покажем, что $E(z) \in [\beta, 0]$, т.е. что $E(z)$ имеет минимальный тип при порядке β .

Из (16) следует, что

$$|G(z)| \leq M < \infty, \quad |y| \leq 1. \quad (27)$$

Далее (см. [12]) справедлива оценка

$$|G(z)| \leq C|y|^{\beta/2-1} \exp(K(\beta, a)|y|^\beta), \quad |y| \geq 1. \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует, что порядок функции $G(z)$ не выше β и что ее индикатор $h_G(\theta)$ при порядке β подчиняется оценке

$$h_G(\theta) \leq K(\beta, a)|\sin \theta|^\beta, \quad |\theta| \leq \pi. \quad (29)$$

Перейдем к функции $F(z)$. По теореме А порядок функции $E_\beta(z; \mu)$ равен β , а ее индикатор равен:

$$\begin{aligned} \cos \beta \theta & \quad \text{при } |\theta| \leq \frac{\pi}{2\beta}, \\ 0 & \quad \text{при } |\theta| \geq \frac{\pi}{2\beta}. \end{aligned}$$

Из теоремы А также следует, что $E_\beta(z; \mu)$ есть целая функция вполне регулярного роста.

Отсюда делаем вывод, что функция $a_k E_\beta(z e^{-i\theta_k^0}; \mu)$ имеет вполне регулярный рост и что ее индикатор равен $h_k(\theta)$, $|\theta| \leq \pi$.

Теперь напомним следующие два свойства индикатора ($h_F(\theta)$ обозначает индикатор функции $F(z)$).

Если $h_{F_1}(\theta) > h_{F_2}(\theta)$, то $h_{F_1+F_2}(\theta) = h_{F_1}(\theta)$.

Если при этом луч $\arg z = \theta$ является лучом вполне регулярного роста для функции $F_1(z)$, то он является таким и для функции $F_1(z) + F_2(z)$.

Учитывая эти свойства, вид (19) функции $e(z)$ и только что сказанное о росте функции $a_k E_\beta(z e^{-i\theta_k^0}; \mu)$, получаем следующее. Во-первых, индикатор $h_e(\theta)$ функции $e(z)$ равен

$$h_e(\theta) = h(\theta), \quad \theta \in \bigcup I_k, \quad \theta \notin T,$$

где T — множество точек недифференцируемости функции $h(\theta)$. Во-вторых, все лучи $\arg z = \theta$, $\theta \in \bigcup I_k$, $\theta \notin T$, являются лучами вполне регулярного роста функции $e(z)$.

В силу непрерывности индикатора

$$h_e(\theta) = h(\theta), \quad \theta \in \bigcup \bar{I}_k. \quad (30)$$

Выясним поведение $e(z)$ на лучах $\arg z = \theta \notin \bigcup \bar{I}_k$. В силу теоремы А при любом натуральном s

$$a_k E_\beta(z e^{-i\theta_k^0}; \mu) = a_k \sum_{j=1}^s \frac{z^{-j} e^{ij\theta_k^0}}{\Gamma(\mu - j/\beta)} + O\left(\frac{1}{r^{s+1}}\right), \quad \arg z = \theta \notin \bar{I}_k.$$

Значит, беря $s = 2$, при $\theta \notin \bigcup \bar{I}_k$ получаем

$$e(z) = \frac{z^{-1}}{\Gamma(\mu - 1/\beta)} \sum_{k=1}^m \pm a_k e^{i\theta_k^0} + \frac{z^{-2}}{\Gamma(\mu - 2/\beta)} \sum_{k=1}^m \pm a_k e^{2i\theta_k^0} + O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Если $\mu - 1/\beta \neq 0, -1, \dots$, то $\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\beta)} \neq 0$ и тогда

$$e(z) = \frac{c}{z} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad \arg z \notin \bigcup \bar{I}_k, \quad (31)$$

где $c \neq 0$ в силу (20). Если же $\mu - 1/\beta \in \{0, -1, \dots\}$, то $\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\beta)} = 0$, но $\frac{1}{\Gamma(\mu-2/\beta)} \neq 0$, так как $0 < 1/\beta < 1$, и потому $\mu - 1/(2\beta) \neq 0, -1, \dots$. Тогда

$$e(z) = \frac{c}{z^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad \arg z \notin \bigcup \bar{I}_k, \quad (32)$$

где $c \neq 0$ в силу (21). В любом из этих случаев

$$h_e(\theta) = 0, \quad \theta \notin \bigcup \bar{I}_k, \quad (33)$$

причем в соответствующих секторах $e(z)$ имеет вполне регулярный рост.

Отсюда вытекают необходимые нам свойства функции $F(z)$ (см. (22)): все лучи $\arg z = \theta \notin T$, где T — множество точек недифференцируемости функции $h(\theta)$, являются лучами вполне регулярного роста функции $F(z)$, и ее индикатор равен

$$h_F(\theta) = K(\beta, a)h(\theta), \quad |\theta| \leq \pi.$$

Теперь мы можем заняться непосредственно функцией $E(z)$. Напомним только еще, что если луч $\arg z = \theta$ является лучом вполне регулярного роста хотя бы для одной из функций $F_1(z)$, $F_2(z)$, то

$$h_{F_1 F_2}(\theta) = h_{F_1}(\theta) + h_{F_2}(\theta).$$

С учетом этого и сказанного чуть выше о росте $F(z)$, из (26), (29) заключаем, что

$$h_E(\theta) \leq K(\beta, a)b(\theta), \quad b(\theta) = |\sin \theta|^\beta - h(\theta), \quad |\theta| \leq \pi. \quad (34)$$

Нам надо убедиться, что $h_E(\theta) \leq 0$ всюду; тогда мы будем уверены, что $E(z) \in [\beta, 0]$.

Функция $h_E(\theta)$ является тригонометрически β -выпуклой.

Присоединим к точкам $\theta_1, \dots, \theta_m$ точки $0, \pm\pi$. Объединенную систему обозначим θ_k , $k = \overline{0, m+2}$; считаем, что она пронумерована так:

$$-\pi = \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1 < \dots < \tilde{\theta}_{m+1} < \tilde{\theta}_{m+2} = \pi.$$

По условию $\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k \leq \pi/\beta$, $k = \overline{0, m+1}$. Покажем, что

$$h_E(\theta) \leq 0, \quad \tilde{\theta}_k \leq \theta \leq \tilde{\theta}_{k+1}, \quad k = \overline{0, m+1}. \quad (35)$$

Так как $(\tilde{\theta}_k) = (\theta_k) \cup \{0, \pm\pi\}$, то из (34) и леммы 2 следует, что $h(\tilde{\theta}_k) \leq 0$, $k = \overline{0, m+2}$. Если $\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k < \pi/\beta$, то $h_E(\theta) \leq 0$ на $[\tilde{\theta}_k, \tilde{\theta}_{k+1}]$ по первому утверждению леммы 3. Поэтому остается рассмотреть случай $\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k = \pi/\beta$. Если $h_E(\tilde{\theta}_k) < 0$ или $h_E(\tilde{\theta}_{k+1}) < 0$, то $h_E(\theta) \leq 0$, $\tilde{\theta}_k \leq \theta \leq \tilde{\theta}_{k+1}$ по второму

утверждению леммы 3. Если же $h_E(\tilde{\theta}_k) = h_E(\tilde{\theta}_{k+1}) = 0$, то в силу (34) из леммы 2 следует, что

$$h_E(\theta) = O((\theta - \tilde{\theta}_j)^2), \quad \theta \rightarrow \tilde{\theta}_j, \quad j = k, k+1.$$

По лемме 4 $h_E(\theta) \leq 0$ на $[\tilde{\theta}_k, \tilde{\theta}_{k+1}]$ и в этом случае. Мы доказали (35). Значит, $h_E(\theta) \leq 0$, $|\theta| \leq \pi$, и следовательно, $E(z) \in [\beta, 0]$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы доказать, что $E(z)$ есть многочлен. Для этого выясним поведение $E(z)$ на лучах $\arg z = \tilde{\theta}_k$, $k = \overline{1, m+2}$.

Пусть U_k — достаточно малая окрестность точки θ_k . В силу теоремы А равномерно по $\theta \in U_k$

$$|F(z)| \sim Cr^{\beta(1-\operatorname{Re} \mu)} \exp(K(\beta, a)r^\beta h(\theta)), \quad C > 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Отсюда и из (28) с учетом того, что $h(\theta_k) = |\sin \theta_k|^\beta$, находим

$$|E(z)| \leq Cr^{\beta \operatorname{Re} \mu - \beta/2 - 1}, \quad r \rightarrow \infty, \quad \arg z = \theta_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Из (27), (31), (32) видно, что

$$|E(z)| = O(r^2), \quad r \rightarrow \infty, \quad \arg z = 0, \pm\pi.$$

Таким образом, на лучах $\arg z = \tilde{\theta}_k$, $k = \overline{1, m+2}$ функция $E(z)$ растет не быстрее степени. Напомним, что $E(z) \in [\beta, 0]$ и что $\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k \leq \pi/\beta$, $k = \overline{0, m+1}$. Применяя теорему Фрагмена–Линделёфа к секторам $\tilde{\theta}_k \leq \arg z \leq \tilde{\theta}_{k+1}$, $k = \overline{0, m+1}$, заключаем, что в каждом из них, а значит, и во всей плоскости функция $E(z)$ растет не быстрее степени. В итоге $E(z)$ есть многочлен.

Какова бы ни была степень этого многочлена,

$$|E(z)| \geq C > 0, \quad r > r_0.$$

Используя это, (26), (36), находим, что при всех $k = \overline{1, m}$

$$|G(re^{i\theta})| \geq cr^{\beta(1-\operatorname{Re} \mu)} \exp(K(\beta, a)r^\beta h(\theta)), \quad c > 0, \quad r > r_0, \quad \theta = \theta_k.$$

Но по теореме Б для функции $G(z)$ должно выполняться условие (17) при $\theta = \theta_k$. И так как $h(\theta_k) = |\sin \theta_k|^\beta$, то отсюда

$$\int_0^\infty r^{(q-2)(1-\beta/2)+q\beta(1-\operatorname{Re} \mu)} dr < \infty.$$

Значит, $(q-2)(1-\beta/2)+q\beta(1-\operatorname{Re} \mu) < -1$, что равносильно условию (25). Утверждение 1) доказано.

2) Пусть система (1) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$. Пусть $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$ та функция биортогональной системы, которая аннулирует функции (1) при $n \neq 0$. Тогда функция (16) обращается в 0 в точках $\Lambda \setminus \lambda_0$, и потому

$$G(z) = \frac{E(z)F(z)}{z - \lambda_0},$$

где $E(z)$ — некоторая целая функция. Как и при доказательстве утверждения 1), убеждаемся сначала, что $E(z) \in [\beta, 0]$, а затем, что $E(z)$ — многочлен. Значит,

$$|G(z)| \geq \frac{c|F(z)|}{r}, \quad c > 0, \quad r > r_0,$$

и в силу (36)

$$|G(re^{i\theta})| \geq cr^{\beta(1-\operatorname{Re} \mu)-1} \exp(K(\beta, a)r^\beta h(\theta)), \quad c > 0, \quad r > r_0, \quad \theta = \theta_k.$$

Так как $h(\theta_k) = |\sin \theta_k|^\beta$, то отсюда по теореме Б

$$\int_0^\infty r^{(q-2)(1-\beta/2)+q\beta(1-\operatorname{Re} \mu)-q} dr < \infty.$$

Следовательно, $(q-2)(1-\beta/2)+q\beta(1-\operatorname{Re} \mu)-q < -1$, и значит, $\operatorname{Re} \mu > 1/2 + 1/(q\alpha)$, что противоречит предположению. Мы доказали утверждение 2) и всю теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \pi$, причем

$$\theta_1 \leq \frac{\pi}{\beta}, \quad \theta_{k+1} - \theta_k \leq \frac{\pi}{\beta}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \pi - \theta_m \leq \frac{\pi}{\beta}.$$

Пусть $e(z)$ — функция (19), где числа θ_k^0 и a_k определены в лемме 1, а знаки выбраны в соответствии с условиями (20) и (21). Пусть $F(z)$ — функция (22), и Λ — последовательность всех ее нулей. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда

- 1) если выполнено условие (23), то система (1) полна в $L^p(\mathbb{R}_+)$,
- 2) если выполнено условие (24), то система (1) неминимальна в $L^p(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что система (1) неполна в $L^p(\mathbb{R}_+)$, и покажем, что имеет место условие (25). По предположению найдется нетривиальная функция $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$, $g(t) = 0$ при $t < 0$, такая, что целая функция (16) обращается в 0 в точках Λ . Отсюда следует (26), где $E(z)$ — целая функция. Надо показать, что $E(z) \in [\beta, 0]$. Для $G(z)$ оценка (28) сохраняется при $y \geq 1$, а оценка (27) верна при $y \leq 1$, так как $g(t) = 0$ при $t < 0$. Значит, порядок $G(z)$ не выше β , а для ее индикатора верны оценки

$$h_G(\theta) \leq K(\beta, a) \sin^\beta \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad h_G(\theta) \leq 0, \quad -\pi \leq \theta \leq 0.$$

Далее, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, заключаем, что индикатор $h_e(\theta)$ функции $e(z)$ при порядке β равен

$$h_e(\theta) = h(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad h(\theta) = 0, \quad -\pi \leq \theta \leq 0,$$

и что $e(z)$ имеет вполне регулярный рост на всех лучах, за исключением, быть может, лучей $\arg z = \theta \in T$, где T — множество точек недифференцируемости функции $h(\theta)$, $0 < \theta < \pi$. Отсюда следует, что индикатор функции $F(z)$ равен

$$h_F(\theta) = K(\beta, a)h(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad h_F(\theta) = 0, \quad -\pi \leq \theta \leq 0,$$

и что лучи $\arg z = \theta \notin T$ являются лучами вполне регулярного роста функции $F(z)$. Тогда для индикатора функции $E(z)$ верны оценки

$$h_E(\theta) \leq K(\beta, a)b(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad h_E(\theta) \leq 0, \quad -\pi \leq \theta \leq 0.$$

Надо доказать, что $h_E(\theta) \leq 0$ при $0 \leq \theta \leq \pi$. Это делается точно так же, как в доказательстве теоремы 1. Сначала к набору $\theta_1, \dots, \theta_m$ присоединяются точки 0, π . Затем по аналогии устанавливается, что в секторах $0 \leq \arg z \leq \theta_1, \dots, \theta_m \leq \arg z \leq \pi$ $E(z)$ растет не быстрее степени. Это утверждение для нижней полуплоскости следует из оценки (27) при $y \leq 0$, из равенства (26) и из (31), (32). На этом шаге получается, что $E(z)$ — многочлен. Заключительный этап — вывод условия (25) из теоремы Б — осуществляется так же, как в теореме 1. Утверждение 1) доказано.

Так же по аналогии с доказательством утверждения 2) теоремы 1 проводится доказательство утверждения 2) теоремы 2. Теорема 2 доказана.

4. Неполнота и минимальность систем экспонент на прямой и на полупрямой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $F(z)$ та же, что в теореме 1, пусть Λ – последовательность всех нулей функции $F(z)$. Пусть $2 \leq p < \infty$. Тогда

1) если

$$\operatorname{Re} \mu > \frac{1}{\beta} + \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2}, \quad (37)$$

то система (1) неполна в $L^p(\mathbb{R})$,

2) если

$$\operatorname{Re} \mu > \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2}, \quad (38)$$

то система (1) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточно показать, что функция $F(z)$ представима в виде (16) с $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$. В силу теоремы В для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что для $G = F$ выполнено условие (18).

Сначала покажем, что при достаточно малом $\delta > 0$ конечны части интеграла в (18) с $G = F$, взятые по “секторам” S_k , введенным в лемме 5. Для этого воспользуемся оценкой (36). Получим

$$\begin{aligned} & \iint_{S_k} |F(z)|^q (1 + |y|)^{(q-3)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)r^\beta |\sin \theta|^\beta) dx dy \\ & \leq C \iint_{S_k} \exp(-qK(\beta, a)r^\beta b(\theta)) r^{(q-3)(1-\beta/2) + q\beta(1-\operatorname{Re} \mu) + 1} dr d\theta. \end{aligned} \quad (39)$$

По условию $\operatorname{Re} \mu > 1/\beta + 1/(q\alpha) + 1/2$, и значит, $(q-3)(1-\beta/2) + q\beta(1-\operatorname{Re} \mu) + 2 < \beta/2$. По лемме 5 интеграл (39) конечен, $k = \overline{1, m}$.

Таким образом, остается рассмотреть часть интеграла (18) с $G = F$, взятую по множеству

$$\left(z : z \in \mathbb{C}, r > 1, z \notin \bigcup (S_k : k = \overline{1, m}) \right).$$

В ходе доказательства леммы 1 мы показали, что все отрезки $\overline{I}_k$, $k = \overline{1, m}$, лежат на множестве $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, т.е. при некотором $\gamma > 0$

$$\bigcup (\overline{I}_k : k = \overline{1, m}) \subseteq (\theta : \gamma \leq |\theta| \leq \pi - \gamma).$$

Пусть $b = \max(\beta(1 - \operatorname{Re} \mu), -1)$. Тогда по теореме А

$$|F(z)| \leq Cr^b \exp(K(\beta, a)r^\beta h(\theta)), \quad C > 0, \quad r > r_0, \quad \gamma \leq |\theta| \leq \pi - \gamma,$$

и значит,

$$\begin{aligned} & |F(z)|^q (1 + |y|)^{(q-3)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)r^\beta |\sin \theta|^\beta) \\ & \leq Cr^l \exp(-qK(\beta, a)r^\beta b(\theta)), \quad r > r_0, \quad \gamma \leq |\theta| \leq \pi - \gamma, \end{aligned}$$

при некотором l . По лемме 2 $b(\theta) \geq \varepsilon > 0$ вне объединения окрестностей U_k точек θ_k , $k = \overline{1, m}$. Значит, если

$$P = \left(\theta : \gamma \leq |\theta| \leq \pi - \gamma, \theta \notin \bigcup (U_k : k = \overline{1, m}) \right),$$

то при некотором $\varepsilon_1 > 0$

$$|F(z)|^q (1 + |y|)^{(q-3)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)r^\beta |\sin \theta|^\beta) \leq C \exp(-\varepsilon_1 r^\beta)$$

для $\theta \in P$, $r > r_1$. Это показывает, что часть интеграла в (18) с $G = F$, распространенная на множество

$$(z : r > 1, \gamma \leq |\theta| \leq \pi - \gamma, \theta \notin \bigcup U_k),$$

конечна. Остается рассмотреть часть интеграла (18) с $G = F$, взятую по множеству

$$\sigma = (z : r > 1, (|\theta| < \gamma) \cup (\pi - \gamma \leq |\theta| \leq \pi)).$$

По теореме А $|F(z)| = O(r^{-1})$, $z \in \sigma$, и значит, на σ

$$|F(z)|^q (1 + |y|)^{(q-3)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)|y|^\beta) \leq C(1 + |y|)^s r^{-q} \exp(-A|y|^\beta).$$

Отсюда и из леммы 6 следует конечность той части интеграла в (18) с $G = F$, которая взята по множеству σ . В итоге мы показали, что для функции $G = F$ условие (18) выполнено. Утверждение 1) доказано.

2) Сначала покажем, что

$$\iint_{r>1} |F(z)|^q r^{-q} (1 + |y|)^{(q-3)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)|y|^\beta) dx dy < \infty. \quad (40)$$

В ходе доказательства утверждения 1) мы проверяли условие (18) для $G = F$. Теперь в (40) появился дополнительный множитель r^{-q} . Поэтому нам достаточно проследить, какие изменения в доказательство вносит этот множитель.

Очевидно, что множитель r^{-q} не повлияет на части интеграла, берущиеся по множествам σ и $(z : r > 1, \theta \in P)$. Надо только учесть влияние этого множителя в интегралах по “секторам” S_k .

Используя оценку (36), имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{S_k} |F(z)|^q r^{-q} (1 + |y|)^{(q-3)(1-\beta/2)} \exp(-qK(\beta, a)|y|^\beta) dx dy \\ & \leq C \iint_{S_k} \exp(-qK(\beta, a)r^\beta b(\theta)) r^{(q-3)(1-\beta/2)+q\beta(1-\operatorname{Re} \mu)+1-q} dr d\theta. \end{aligned} \quad (41)$$

По условию $\operatorname{Re} \mu > 1/(q\alpha) + 1/2$. Значит, $(q-3)(1-\beta/2)+q\beta(1-\operatorname{Re} \mu)+2-q < \beta/2$, и по лемме 5 интеграл (41) конечен. Мы доказали свойство (40).

Перейдем к непосредственному доказательству минимальности системы (1). Предположим сначала, что все нули λ_n ($n \in \mathbb{N}$) функции $F(z)$ просты. Из (40) следует, что для целой функции

$$\frac{F(z)}{z - \lambda_n} \quad (42)$$

выполнены условия теоремы В. По этой теореме преобразование Фурье $g_n(t)$ функции (42) лежит в $L^q(\mathbb{R})$. Но функции

$$h_n(t) = \frac{g_n(t)}{F'(\lambda_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

образуют биортогональную систему к системе (1) на $\mathbb{R}$. По доказанному $h_n(t) \in L^q(\mathbb{R})$, и значит, система (1) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$.

Пусть теперь λ_n — корень кратности m_n функции $F(z)$. Тогда точке λ_n в системе (1) отвечают m_n функций

$$e^{-i\lambda_n t}, te^{-i\lambda_n t}, \dots, t^{m_n-1}e^{-i\lambda_n t}.$$

В этом случае соответствующий набор

$$h_{n,1}(t), h_{n,2}(t), \dots, h_{n,m_n}(t) \quad (43)$$

функций биортогональной системы состоит из подходящих линейных комбинаций преобразований Фурье функций

$$\frac{F(z)}{z - \lambda_n}, \frac{F(z)}{(z - \lambda_n)^2}, \dots, \frac{F(z)}{(z - \lambda_n)^{m_n}} \quad (44)$$

(см. [13]). Мы уже доказали, что для первой функции (44) выполнены условия теоремы В. Подавно они выполнены и для остальных функций (44). Значит, функции (43) лежат в $L^q(\mathbb{R})$. Снова все функции биортогональной системы к системе (1) на $\mathbb{R}$ принадлежат пространству $L^q(\mathbb{R})$, т.е. система (1) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$. Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $F(z)$ та же, что в теореме 2, пусть Λ — последовательность всех нулей функции $F(z)$. Пусть $2 \leq p < \infty$. Тогда

- 1) если выполнено условие (37), то система (1) неполна в $L^p(\mathbb{R}_+)$,
- 2) если выполнено условие (38), то система (1) минимальна в $L^p(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточно показать, что функция $F(z)$ представима в виде (16) с $g(t) \in L^q(\mathbb{R})$, $g(t) = 0$, $t < 0$. По теореме В для этого достаточно проверить, что $F(z) \in H_-^2$ и что для $G = F$ конечен интеграл в (18), взятый по верхней полуплоскости $y > 0$. Конечность этого интеграла устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 3. Далее, теперь $\theta_k \in (0, \pi)$, и значит (см. доказательство леммы 1), все интервалы I_k также принадлежат $(0, \pi)$. Таким образом, оценки (31), (32) верны для нижней полуплоскости $y < 0$. Из них с учетом формулы (22) и следует принадлежность $F(z) \in H_-^2$. Утверждение 1) доказано. Внося аналогичные изменения в доказательство утверждения 2) теоремы 3, получаем утверждение 2) теоремы 4. Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Λ — последовательность точек из теоремы 1 (теоремы 2). Пусть $2 \leq p < \infty$. Тогда система (1):

- 1) полна в $L^p(\mathbb{R})$ ($L^p(\mathbb{R}_+)$) тогда и только тогда, когда выполнено условие (23),
- 2) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$ ($L^p(\mathbb{R}_+)$) тогда и только тогда, когда выполнено условие (38),
- 3) полна и минимальна в $L^p(\mathbb{R})$ ($L^p(\mathbb{R}_+)$) тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \mu \leq \frac{1}{\beta} + \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2}.$$

5. Присутствующие в теоремах 1–4 функции $F(z)$ являются подходящими линейными комбинациями функций типа Миттаг–Леффлера. Если $1 < \beta \leq 2$, то в теореме 2 можно взять всего одну точку θ_k , т.е. в этом случае $F(z)$ совпадает с функцией типа Миттаг–Леффлера. Асимптотика нулей таких функций изучена достаточно полно (см. [11], [14]). Но в условиях теоремы 1 число слагаемых соответствующей линейной комбинации не меньше двух. В связи с доказанными теоремами вопрос о распределении нулей функций $F(z)$ нуждается в исследовании, но для этого потребуются отдельная работа.

Список литературы

1. *Zalik R.* On approximation by shifts and a theorem of Wiener // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 243. P. 299–308.
2. *Zalik R.* On some gap theorems and the closure of translates // Notices Amer. Math. Soc. 1978. V. 25. № 2. P. A–314.
3. *Faxen B.* On approximation by translates and related problems in function theory // Ark. Math. 1981. V. 19. № 2. P. 271–289.
4. *Седлецкий А. М.* Аппроксимация сдвигами и полнота взвешенных систем экспонент в $L^2(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 1. С. 92–107.
5. *Седлецкий А. М.* Аппроксимация сдвигами функции на прямой // Теория приближ. функций. Тр. Междунар. конф. приближ. функций, Киев, 31 мая – 5 июня, 1983. М.: Наука, 1987. С. 397–400.
6. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963.
7. *Седлецкий А. М.* Аппроксимативные свойства систем экспонент в $L^p(a, b)$ // Дифференц. уравн. 1995. Т. 31. № 10. С. 1675–1681.
8. *Zalik R., Abuabara Saad T.* Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 126. P. 483–493.
9. *Сальникова Т. А.* Полные и минимальные системы экспонент в пространствах $L^p(\mathbb{R})$ // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 118–129.
10. *Левин Б. Я.* Целые функции (курс лекций). М.: Изд-во МГУ, 1971.
11. *Джрбацян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
12. *Седлецкий А. М.* Преобразования Фурье быстро убывающих функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 3. С. 187–202.
13. *Седлецкий А. М.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 51–95.
14. *Седлецкий А. М.* Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг–Леффлера // Anal. Math. 1994. Т. 20. С. 117–132.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
30.05.1997