Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Семенов, Теоремы о неподвижной точке при контролируемом отказе от выпуклости значений многозначного отображения, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 3, 141–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:21:24

УДК 513.83

П. В. Семенов

**Теоремы о неподвижной точке
при контролируемом отказе от выпуклости
значений многозначного отображения**

В настоящей работе исследуется вопрос о том, в какой степени можно отказаться от выпуклости значений многозначных отображений в классических теоремах Какутани, Боннеблста–Карлина, Гликсберга о неподвижных точках. Для ответа на этот вопрос с каждым замкнутым подмножеством P банахова пространства ассоциируется некоторая числовая функция $\alpha_P: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, называемая функцией невыпуклости множества P . Чем ближе функция невыпуклости α_P к нулю, тем “выпуклее” становится множество P . Равенство $\alpha_P \equiv 0$ эквивалентно выпуклости P . В работе доказаны селекционные, аппроксимационные теоремы и теоремы о неподвижных точках для многозначных отображений F конечномерных и бесконечномерных паракомпактов с заменой условия $\alpha_{F(x)} \equiv 0$ на условия типа “ $\alpha_{F(x)}$ меньше единицы”. Сравниваются различные формализации последнего условия и доказана топологическая устойчивость такого типа ограничений.

Библиография: 25 названий.

Введение

Классическая теорема Брауэра о неподвижной точке непрерывного отображения двумерного диска в себя была обобщена на случай отображений с бесконечномерной замкнутой (компактной) выпуклой областью определения Шаудером [1] (соответственно Тихоновым). Для выпуклозначных отображений конечномерного пространства существование неподвижных точек доказал Какутани [2], а в случае бесконечномерных областей определения – Боннеблст и Карлин (многозначная теорема Шаудера) [3] и Гликсберг (многозначная теорема Тихонова или же бесконечномерная теорема Какутани) [4]. Подробные сведения об использовании топологических методов в теории неподвижных точек многозначных отображений можно найти в статье [5]; см. также обзор [6].

В настоящей работе исследуется вопрос о том, в какой степени можно отказаться от выпуклости значений многозначных отображений в указанных теоремах о неподвижных точках. Для ответа на этот вопрос требуется рассмотреть некий объект, “измеряющий” уклонение от выпуклости замкнутых подмножеств нормированных пространств. В качестве таких объектов мы рассматриваем здесь числовые функции $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01166а).

Для замкнутого непустого подмножества $P \subset E$ нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$ и для открытого шара $D \subset E$ число

$$\Delta(D, P) = \sup\{\text{dist}(x, P) \mid x \in \text{conv}(D \cap P)\}$$

естественно измеряет “абсолютную” невыпуклость множества P внутри шара D , а отношение $\Delta(D, P)/r$ есть “относительная” невыпуклость P внутри D . Здесь, как обычно, $\text{conv}(D \cap P)$ – выпуклая оболочка пересечения $D \cap E$ и $\text{dist}(x, P) = \inf\{\|x - p\| \mid p \in P\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функцией невыпуклости $\alpha_P(\cdot)$ замкнутого непустого подмножества P нормированного пространства E называется функция, которая каждому числу $r > 0$ ставит в соответствие число*

$$\alpha_P(r) = \sup\{\Delta(D, P)/r \mid D - \text{открытый шар радиуса } r\}.$$

Чем ближе функция невыпуклости α_P к нулю, тем “выпуклее” становится множество P . Равенство $\alpha_P \equiv 0$ эквивалентно выпуклости P . Ясно, что значения функции невыпуклости всегда лежат в отрезке $[0, 2]$, а если норма в пространстве E задана скалярным произведением, то в отрезке $[0, 1]$. Можно показать, что последнее свойство характеризует (в размерности большей двух) пространства со скалярным произведением.

Контролируемый отказ от выпуклости в настоящей работе состоит в том, что мы рассматриваем множества, функции невыпуклости которых, грубо говоря, меньше единицы. Для формального определения последнего понятия ассоциируем с каждой функцией $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ некоторую функциональную последовательность $q^n = q_\alpha^n: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, по правилу:

$$q^0(t) = t, q^1(t) = \alpha(t)t, \dots, q^{n+1}(t) = \alpha(q^n(t))q^n(t), \dots$$

Другими словами, $\{q_\alpha^n\}$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем α . Если при этом $\alpha(q^n(t)) = 0$ для некоторого n , то по определению положим $q^{n+2}(t) = q^{n+3}(t) = \dots = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ *G-суммируема*, если функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_\alpha^n(\cdot)$ поточечно сходится на $(0, \infty)$; сумму этого ряда обозначим $S_\alpha(t)$.

Обозначим через α^+ функцию $\alpha^+(s) = \overline{\lim}_{t \rightarrow s+0} \alpha(t)$, $s > 0$. Естественно также обозначить через α^{+0} функцию $\alpha^{+0}(s) = \overline{\lim}_{t \rightarrow s+0} \alpha(t)$, $s \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим следующие свойства числовой функции $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$:*

- (1) *функция α^{+0} меньше единицы;*
- (2) *функция α G-суммируема;*
- (3) *функция α имеет G-суммируемую строгую мажоранту;*
- (4) *функция α^+ имеет G-суммируемую строгую мажоранту.*

Тогда справедливы импликации $(1) \Rightarrow (2)$, $(1) \Rightarrow (3)$, $(1) \Rightarrow (4)$, неизвестна справедливость импликации $(4) \Rightarrow (3)$, а остальные импликации ложны.

Типичный пример выполнимости всех свойств (1)–(4) из предложения 3 – монотонно возрастающие функции $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ или же функции, мажорируемые таковыми. В случае (3) будем говорить, что функция α заметно меньше единицы, и использовать обозначение $\alpha < 1 - 0$. В случае (4) будем говорить, что функция α меньше единицы справа.

Следующая теорема является основной в данной работе и является невыпуклозначной версией теоремы Гликсберга.

ТЕОРЕМА 4. Пусть компактное подмножество K банахова пространства $(B, \|\cdot\|)$ является абсолютным окрестностным ретрактом и обладает свойством неподвижной точки для однозначных отображений в себя. Пусть $F: K \rightarrow K$ – полунепрерывное сверху компактнозначное отображение, и пусть для каждого $x \in K$ функция невыпуклости множества $F(x)$ заметно меньше единицы. Тогда F имеет неподвижную точку, т.е. имеется точка $x_0 \in K$ такая, что $x_0 \in F(x_0)$.

Невыпуклозначная версия теоремы Боннеблеста–Карлина состоит в том, что полунепрерывное сверху отображение $F: A \rightarrow A$ замкнутого подмножества A банахова пространства B имеет неподвижную точку, как только к замыканию $K = \text{clos}\{F(A)\}$ множества $F(A) = \bigcup\{F(a) \mid a \in A\}$ применима теорема 4.

Реально теорема 4 применима к любому абсолютному ретракту K . В частности, она применима к любому компакт K с $\alpha_K < 1 - 0$, как показывает следующая теорема 5, в которой из оценки $\alpha_P < 1 - 0$ выводится топологическая тривиальность множества P и его аппроксимативная топологическая тривиальность.

ТЕОРЕМА 5. Если функция невыпуклости замкнутого подмножества P банахова пространства B заметно меньше единицы, то:

- 1) P есть UVR -подмножество B , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что существует ретракция $R_\delta: D_\delta(P) \rightarrow P$ δ -окрестности множества P на само множество P , которая внутри ε -окрестности $D_\varepsilon(P)$ гомотопна постоянному отображению $D_\delta(P)$ в себя.
- 2) P есть абсолютный экстензор для паракомпактных пространств.

Теорема 4 является следствием теоремы 5 в силу аппроксимационной теоремы [7], [8], в которой наличие однозначных (графических) аппроксимаций многозначного отображения выводится из UV -свойств значений этого отображения. Теорема 5, в свою очередь, есть следствие следующей селекционной теоремы 6.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\Phi: X \rightarrow B$ – полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в банахово пространство B , и пусть существует заметно меньшая единицы мажоранта семейства функций невыпуклости всех значений $\Phi(x)$, $x \in X$. Тогда существует непрерывная однозначная селекция отображения Φ .

Для формулировки конечномерной версии теоремы 4 о неподвижной точке определим множество $\text{conv}_{n+1}(A)$ как объединение всех выпуклых оболочек не более чем $(n+1)$ -элементных подмножеств множества A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Функцией невыпуклости α_P^n (в размерности n) замкнутого непустого подмножества P нормированного пространства E называется функция, которая каждому числу $r > 0$ ставит в соответствие число*

$$\alpha_P^n(r) = \sup \{ \Delta_{n+1}(D, P)/r \mid D - \text{открытый шар радиуса } r \},$$

где

$$\Delta_{n+1}(D, P) = \sup \{ \text{dist}(x, P) \mid x \in \text{conv}_{n+1}(D \cap P) \}.$$

Всюду ниже под размерностью $\dim$ нормального топологического пространства понимается его лебегова размерность.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $\Phi: X \rightarrow B$ – полунепрерывное снизу отображение n -мерного (в смысле $\dim$) паракомпакта X в банахово пространство B , и пусть существует меньшая единицы справа мажоранта семейства функций невыпуклости (в размерности n) всех значений $\Phi(x)$, $x \in X$. Тогда отображение Φ имеет непрерывную однозначную селекцию.*

Теорема 8 есть явный аналог теоремы 6, но доказательство теоремы 8 принципиально отличается от доказательства теоремы 6. Кратко говоря, объяснение этого несоответствия заключается в том, что переход от множества A к множеству $\text{conv } A$ дает выпуклое множество, т.е. “максимально” простое с топологической точки зрения множество. В то же время, переход от множества A к множеству $\text{conv}_{n+1} A$ улучшает глобальные топологические свойства, но может и ухудшать локальные топологические свойства. Например, множество A может быть локально связным, а множество $\text{conv}_2 A$ не быть таковым. Видимо, по этой причине в теореме 8 приходится использовать наличие G -суммируемой мажоранты у функции α^+ , а не у функции α , как в теореме 6. Следствием селекционной теоремы 8 является следующий конечномерный аналог теоремы 4 о неподвижной точке.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть компактное подмножество K банахова пространства $(B, \|\cdot\|)$ является абсолютным ретрактом и $\dim K \leq n$. Пусть $F: K \rightarrow K$ – полунепрерывное сверху компактнозначное отображение, и пусть для каждого $x \in K$ функция невыпуклости (в размерности n) множества $F(x)$ меньше единицы справа. Тогда F имеет неподвижную точку.*

Определение функции невыпуклости несколько напоминает определение модуля равномерной выпуклости сферы банахова пространства: мы двигаем по множеству вершины симплекса фиксированного чебышевского радиуса и смотрим насколько точки симплекса удалены при этом от самого множества. Более явным образом, понятие функции невыпуклости обобщает понятие α -паравыпуклых множеств, введенное Майклом в [9]. Так называются множества, функция невыпуклости которых мажорируется на всем луче $(0, \infty)$ константой $0 \leq \alpha < 1$.

Явное вычисление или же нахождение хорошей верхней оценки функции невыпуклости конкретного множества – вещь достаточно трудоемкая. Положительные результаты имеются для поперечных возмущений выпуклых множеств, т.е. для графиков непрерывных функций с выпуклыми областями определения [10]–[12] и для продольных возмущений выпуклых множеств, т.е. для букетов выпуклых множеств [13]. Один из центральных результатов настоящей работы состоит в некоторой устойчивости семейства множеств, у которых функции невыпуклости заметно меньше единицы.

ТЕОРЕМА 10. Пусть даны равномерно выпуклое банахово пространство $(B, \|\cdot\|)$, функция $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ заметно меньшая единицы и число $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $\beta: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ заметно меньшая единицы такая, что для любого множества P с $\alpha_P \leq \alpha$ функция невыпуклости замкнутой ε -окрестности $\overline{D}_\varepsilon(P)$ множества P не превосходит функции β .

Кратко говоря, ε -окрестности хороших множеств тоже не плохие. Следующий пример показывает, что невыпуклость сколь угодно малых ε -окрестностей множества, вообще говоря, может существенно отличаться от невыпуклости самого множества, т.е. в теореме 10 при фиксированном множестве P и при $\varepsilon \rightarrow 0$ функцию β нельзя считать сходящейся к функции α_P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для любого числа $0 \leq q < 1$ найдется число $p \in (q, 1)$ и найдется q -паравыпуклый компакт $K \subset \mathbb{R}^2$, который имеет сколь угодно малые не p -паравыпуклые замкнутые окрестности.

Следствием теоремы 10 является следующая общая аппроксимационная теорема 12. Напомним, что (графической) ε -аппроксимацией многозначного отображения $H: X \rightarrow Y$ метрических пространств (X, ρ) , (Y, d) называется однозначное непрерывное отображение $h_\varepsilon: X \rightarrow Y$ такое, что его график $\Gamma(h_\varepsilon)$ лежит в ε -окрестности графика $\Gamma(H)$ относительно шах-метрики в декартовом произведении $X \times Y$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\dim X \leq n$, пусть $F: X \rightarrow B$ – полунепрерывное сверху компактнозначное отображение в равномерно выпуклое банахово пространство $(B, \|\cdot\|)$, и пусть для каждого $x \in X$ функция невыпуклости (в размерности n) множества $F(x)$ заметно меньше единицы. Тогда F имеет непрерывные однозначные ε -аппроксимации для любого $\varepsilon > 0$.

Теоремы 4, 6, 8, 12 настоящей работы являются метрическими невыпуклозначными аналогами классических теорем для выпуклозначных отображений. В случае полиэдральной области определения X гомологический и соответственно гомотопический подходы к доказательству соответствующих теорем о невыпуклозначных отображениях развиты в работах [14], [15].

Ниже следующий текст организован так. В §1 собраны технические утверждения о соотношениях между различными уточнениями понятия “функция меньше единицы”, т.е. доказано предложение 3. В §2 доказаны бесконечномерные теоремы 4, 5, 6. В следующем §3 доказаны их конечномерные аналоги: теоремы 8 и 9. Наконец, в заключительном §4 доказаны теорема 10 и теорема 12, являющаяся конечномерным невыпуклозначным аналогом известной аппроксимационной теоремы Челлины [16]. Стандартные сведения о многозначных отображениях и их селекциях см. в [17], [18], [5], [6].

§1. Функции, мажорируемые G -суммируемыми

Отметим, что условие $\overline{\lim}_{t \rightarrow s+0} \alpha(t) < 1$, $s > 0$, естественно возникает в теории неподвижных точек многозначных обобщенных сжатий. Более точно, с 1983 года открыта проблема [19] о достаточности этого условия для наличия неподвижных точек у α -сжатий полных метрических пространств M , т.е. отображений

$C: M \rightarrow M$ таких, что

$$H_\rho(C(x), C(y)) \leq \alpha(\rho(x, y)) \cdot \rho(x, y), \quad x, y \in M,$$

где H_ρ – хаусдорфова метрика между подмножествами пространства M , ассоциированная с данной метрикой ρ самого пространства M . В работе [20] показано, что добавление к этому условию случая $s = 0$, т.е. в точности условие (1) предложения 3, дает положительное решение данной проблемы.

В то же время условие G -суммируемости и, тем более, условие $\alpha < 1 - 0$, существенно слабее условия $\alpha^{+0} < 1$. В свою очередь, условие G -суммируемости не наследственно, т.е. существуют не G -суммируемые функции, которые мажорируются G -суммируемыми. Кроме того, G -суммируемыми могут быть и функции невыпуклости несвязных множеств. Именно по этой причине приходится в теоремах 4, 5, 6 ослаблять G -суммируемость функций невыпуклости $\alpha_{F(x)}$ до условия, что $\alpha_{F(x)}$ заметно меньше единицы. Последнее условие очевидно уже наследственно: если $\beta < 1 - 0$ и $\alpha \leq \beta$, то и $\alpha < 1 - 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Докажем импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3).

Если $\overline{\lim}_{t \rightarrow s+0} \alpha(t)$ меньше единицы при всех $s \geq 0$, то же самое верно и для функции $\beta = (1 + \alpha)/2$, $\beta > \alpha$. Докажем, что функция β является G -суммируемой. Фиксируем $t > 0$ и рассмотрим числовую последовательность $\{q_\beta^n(t)\} = \{b_n\}$:

$$q^0(t) = t, q^1(t) = \beta(t)t, \dots, q^{n+1}(t) = \beta(q^n(t))q^n(t), \dots$$

Ясно, что последовательность $\{b_n\}$ строго убывает к некоторому числу $s \geq 0$. Из равенства $b_{n+1} = \beta(b_n)b_n$ следует, что $s = 0$. Так как правый верхний предел функции β в $s = 0$ строго меньше единицы, то для некоторой константы $k < 1$ при всех достаточно больших n верно неравенство $\beta(b_n) \leq k$. Значит, начиная с некоторого номера числовой ряд $\sum b_n$ мажорируется суммой геометрической прогрессии $\sum k^n$.

(1) $\Rightarrow$ (4). Если функция γ есть максимум функций α и α^+ , то $\gamma^{+0} < 1$ и поэтому $\beta^{+0} < 1$, где $\beta = (1 + \gamma)/2$ есть строгая мажоранта функции α^+ . По предыдущему доказательству функция β G -суммируема.

Контрпример к импликациям (2) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\alpha(\cdot)$ равна нулю вне точек $1/n^2$ и $\alpha(1/n^2) = n(n+1)$. Тогда для всех $t > 0$ значения функции $q_\alpha^1(t) = \alpha(t)t$ лежат вне последовательности $\{1/n^2\}$ и поэтому числовой ряд $\sum q_\alpha^n(t)$ состоит из не более, чем двух слагаемых. Значит, функция α G -суммируема, а ее верхний предел в нуле равен единице. Кроме того, функция α^+ тождественно равна нулю и поэтому имеет G -суммируемую мажоранту.

Контрпример к импликации (2) $\Rightarrow$ (3) (значит, и к (2) $\Rightarrow$ (1)). Пусть на $(0, a_1]$ функция α равна константе $k < 1$, а на полуинтервалах $(a_n, a_{n+1}]$ для функции α верно неравенство $\alpha(t) \leq a_n/t$, где $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ – некоторая фиксированная последовательность. Тогда для $t > 0$ при некотором m верно включение $t \in (a_m, a_{m+1}]$ и, значит, значения функции $q_\alpha^1(t) = \alpha(t)t$ лежат на $(a_k, a_{k+1}]$ для некоторого $k < m$. Следовательно, значения функции $q_\alpha^2(t) = \alpha(q_\alpha^1(t)) \cdot q_\alpha^1(t)$ лежат на $(a_p, a_{p+1}]$ для некоторого $p < k < m$ и т.д. Поэтому числовой ряд $\sum q_\alpha^n(t)$, начиная с $n = m$, мажорируется рядом $\sum k^n$. Значит, функция α G -суммируема,

а в точках $s = a_n$ верхние пределы у α справа могут равняться 1. Этот пример весьма типичен в том смысле, что для любого конечного подмножества P банахова пространства $(B, \|\cdot\|)$ функция невыпуклости α_P имеет в точности описанный вид для $k = 0$ и для некоторой последовательности $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ и при этом на полуинтервалах $(a_n, a_{n+1}]$ функция α_P равна a_n/t . Если бы у G -суммируемой функции α_P существовала бы G -суммируемая мажоранта, то по теореме 5 множество P было бы стягиваемо, а это не так.

Контрпример к импликациям (2) $\Rightarrow$ (4) и (3) $\Rightarrow$ (4). Пусть, как и выше, на $(0, a_1]$ функция α равна константе $k < 1$, а на полуинтервалах $(a_n, a_{n+1}]$ для функции α верно неравенство $\alpha(t) \leq a_n/t$, где $0 < a_1 < a_2 < \dots$ – некоторая фиксированная последовательность. Тогда α строго мажорируется G -суммируемой функцией невыпуклости подходящего конечного множества, а функция α^+ не имеет такой мажоранты просто потому, что в некоторых точках она равна единице.

Контрпример к импликации (3) $\Rightarrow$ (2) (значит, и к (3) $\Rightarrow$ (1)). Фиксируем монотонно убывающую к единице последовательность a_n с $a_1 = 2$ и определим функцию $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ (функцию $\beta: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$) равной $2/t$ (равной $3/t$) при $t \geq 4$, равной $1/5$ (равной $1/4$) при $t < 4$ и $t \notin \{a_n\}$ и равной a_{n+1}/a_n (равной $(1 + a_{n+1}/a_n)/2$) при $t = a_n$. Ясно, что $\beta > \alpha$. Докажем, что функция α не G -суммируема. При $t \geq 4$ имеем $q_\alpha^1(t) = t \cdot \alpha(t) = 2 = a_1$, $q_\alpha^2(t) = \alpha(q_\alpha^1(t)) \cdot q_\alpha^1(t) = a_1 \cdot \alpha(a_1) = a_2, \dots, q_\alpha^n(t) = a_n > 1, \dots$. Поэтому $S_\alpha(t) = \infty$. Докажем, что функция β G -суммируема. При $t \geq 4$ имеем $q_\beta^1(t) = t \cdot \beta(t) = 3$ и $q_\beta^2(t) = \beta(q_\beta^1(t)) \cdot q_\beta^1(t) = 3 \cdot \beta(3) = 3/4 < 1$. Значит, $q_\beta^{n+1}(t) = q_\beta^n(t)/4$ при $n \geq 2$ и поэтому $S_\beta(t) < \infty$. Если $t < 4$ и $t \notin \{a_n\}$, то $q_\beta^1(t) = t \cdot \beta(t) = t/4 < 1$ и, значит, как и выше, $q_\beta^{n+1}(t) = q_\beta^n(t)/4$ при $n \geq 2$. Если же $t = a_n$, то $a_{n+1}/a_n < \beta(t) < 1$ и поэтому $a_{n+1} < q_\beta^1(t) < a_n$, т.е. $q_\beta^1(t) \notin \{a_n\}$. Значит, $S_\beta(q_\beta^1(t)) < \infty$ и $S_\beta(t) = t + S_\beta(q_\beta^1(t)) < \infty$, т.е. функция β есть G -суммируемая строгая мажоранта не G -суммируемой функции α .

Контрпример к импликации (4) $\Rightarrow$ (2). Фиксируем монотонно убывающую к нулю последовательность a_n , и пусть $\alpha(\cdot)$ равна нулю вне точек a_n , а $\alpha(a_n) = a_{n+1}/a_n$. Тогда функция α^+ тождественно равна нулю и поэтому имеет G -суммируемую мажоранту. В то же время $q_\alpha^n(a_1) = a_n$ и поэтому $S_\alpha(a_1) = \sum a_n$. Остается взять a_n так, чтобы последний ряд расходился. Предложение 3 доказано.

Прокомментируем сложность опровержения импликации (4) $\Rightarrow$ (3). Если α мажорирует функцию невыпуклости некоторого множества P , то из условия (4), по теореме 8, следует, что P есть абсолютный экстензор для всех конечномерных паракompактов. А невыполнения условия (3) можно было бы по теореме 6 добиться, если бы P не было абсолютным экстензором для всех паракompактов. Примеры таких множеств существуют [21], но явная оценка функций невыпуклости конкретно для них затруднительна.

§ 2. Контролируемый отказ от выпуклости. Бесконечномерный случай

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Случай 1. Начнем со случая, когда в условиях этой теоремы для некоторой константы $r > 0$ найдется непрерывная однозначная

r -селекция $g: X \rightarrow B$ отображения $\Phi: X \rightarrow B$, т.е.

$$\text{dist}(g(x), \Phi(x)) < r, \quad x \in X.$$

Мы хотим, стартуя с этой r -селекции, найти некоторую непрерывную однозначную селекцию $\varphi: X \rightarrow B$ отображения $\Phi: X \rightarrow B$, $\varphi(x) \in \Phi(x)$ при всех $x \in X$, и оценить насколько при таком улучшении мы удалимся от первоначального положения. Итак, положим $\varphi_0 = g$ и

$$\Phi_1(x) = \overline{\text{conv}}\{D(\varphi_0(x), r) \cap \Phi(x)\}, \quad x \in X.$$

Отображение $\Phi_1: X \rightarrow B$ имеет непустые замкнутые выпуклые значения и полунепрерывно снизу в силу полунепрерывности снизу отображения Φ и непрерывности однозначного отображения φ . По классической теореме Майкла [18] отображение Φ_1 имеет непрерывную однозначную селекцию, скажем φ_1 . Тогда при всех $x \in X$ верны неравенства $\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \leq r = q_\alpha^0(r)$ и в силу определения 1 функции невыпуклости множества $\Phi(x)$

$$\text{dist}(\varphi_1(x), \Phi(x)) \leq \alpha_{\Phi(x)}(r) \cdot r < \alpha(r) \cdot r = r_1 = q_\alpha^1(r).$$

В последнем неравенстве функция α есть G -суммируемая строгая мажоранта функций невыпуклости множеств $\Phi(x)$, $x \in X$. Если непрерывные однозначные отображения $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ из X в B уже построены так, что при всех $x \in X$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\| &\leq r_{n-1} = q_\alpha^{n-1}(r), \\ \text{dist}(\varphi_n(x), \Phi(x)) &< r_n = q_\alpha^n(r), \end{aligned}$$

то положим

$$\Phi_{n+1}(x) = \overline{\text{conv}}\{D(\varphi_n(x), r_n) \cap \Phi(x)\}, \quad x \in X.$$

Отображение $\Phi_{n+1}: X \rightarrow B$ имеет непустые (по индукционному предположению) замкнутые выпуклые значения и полунепрерывно снизу в силу полунепрерывности снизу отображения Φ и непрерывности однозначного отображения φ_n . Тогда для непрерывной однозначной селекции φ_{n+1} отображения Φ_{n+1} при всех $x \in X$ верны неравенства $\|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\| \leq r_n = q_\alpha^n(r)$ и в силу определения функции невыпуклости $\alpha_{\Phi(x)}$ множества $\Phi(x)$ получаем

$$\text{dist}(\varphi_{n+1}(x), \Phi(x)) \leq \alpha_{\Phi(x)}(r_n) \cdot r_n < \alpha(r_n) \cdot r_n = r_{n+1} = q_\alpha^{n+1}(r).$$

По условию теоремы функция $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ является G -суммируемой, т.е. функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_\alpha^n(\cdot)$ поточечно сходится на $(0, \infty)$. В частности, сходится и числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_\alpha^n(r)$. Значит, последовательность отображений $\{\varphi_n\}$ является фундаментальной в равномерной метрике и поэтому равномерно на X

сходится к некоторому непрерывному отображению $\varphi: X \rightarrow B$, которое и будет искомой непрерывной селекцией отображения Φ . При этом ясно, что

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - g(x)\| &= \|\varphi(x) - \varphi_0(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} q_{\alpha}^n(r) = S_{\alpha}(r) < r + S_{\alpha}(r) = \beta(r). \end{aligned}$$

Первый случай в теореме 6 доказан. Отметим, что здесь нам потребовалась сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} q_{\alpha}^n(t)$ в единственной точке $t = r$.

Случай 2. Рассмотрим случай произвольного непрерывного однозначного отображения $g: X \rightarrow B$. Выберем $r > 1$ так, чтобы было непусто открытое множество $G_0 = \{x \in X \mid D(g(x), r) \cap \Phi(x) \neq \emptyset\}$ и положим

$$G_n = \{x \in X \mid D(g(x), q_{\beta}^n(r)) \cap \Phi(x) \neq \emptyset\}.$$

Так как $\beta(r) = r + S_{\alpha}(r) \geq 2r$, то из равенств $q_{\beta}^1(r) = \beta(r) \cdot r$ и $q_{\beta}^{n+1}(r) = \beta(q_{\beta}^n(r)) \cdot q_{\beta}^n(r)$ и из неравенства $r > 1$ следует, что числовая последовательность $\{q_{\beta}^n(r)\}$ монотонно стремится к бесконечности. Значит, $\emptyset \neq G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ и $\bigcup \{G_n \mid n \in \mathbb{N}\} = X$. Паракомпактность (даже счетная паракомпактность) пространства X гарантирует тогда существование монотонно (по включению) возрастающей последовательности замкнутых подмножеств $A_n \subset G_n$, дающих в объединении все пространство X . Более того, можно считать семейство $\{A_n\}$ локально конечным.

Применим теперь разобранный выше случай 1 к паракомпакту $X = A_0$, непрерывному снизу отображению $\Phi_0 = \Phi|_{A_0}$, выбранному выше числу $r > 1$ и однозначной непрерывной r -селекции $g_0 = g|_{A_0}$ отображения Φ_0 . Получим на паракомпакте A_0 селекцию φ_0 отображения Φ_0 такую, что

$$\|\varphi_0(x) - g_0(x)\| \leq S_{\alpha}(r) < \beta(r) < r \cdot \beta(r) = q_{\beta}^1(r).$$

Применим случай 1 к паракомпакту $X = A_1$, числу $q_{\beta}^1(r)$ и к однозначной непрерывной $q_{\beta}^1(r)$ -селекции $g_1 = g|_{A_1}$ полунепрерывного снизу отображения Φ_1 , которое на A_0 совпадает с построенной выше селекцией φ_0 , а на $A_1 \setminus A_0$ совпадает с отображением Φ . Если $x \in A_0$, то $\text{dist}(g_1(x), \Phi_1(x)) = \|g_0(x) - \varphi_0(x)\| < q_{\beta}^1(r)$, если же $x \in A_1 \setminus A_0$, то $\text{dist}(g_1(x), \Phi_1(x)) = \text{dist}(g(x), \Phi(x)) < q_{\beta}^1(r)$ в силу условия $A_1 \subset G_1 = \{x \in X \mid D(g(x), q_{\beta}^1(r)) \cap \Phi(x) \neq \emptyset\}$. Значит, случай 1 действительно применим, и мы получаем на паракомпакте A_1 селекцию φ_1 отображения Φ_1 , которая на A_0 совпадает с φ_0 и такую, что

$$\|\varphi_1(x) - g_1(x)\| \leq S_{\alpha}(q_{\beta}^1(r)) < \beta(q_{\beta}^1(r)) < q_{\beta}^1(r) \cdot \beta(q_{\beta}^1(r)) = q_{\beta}^2(r).$$

Продолжая по индукции, мы для каждого $x \in X$ определим некоторый элемент $\varphi_{n(x)} = \varphi_{n(x)+1} = \dots = \varphi(x) \in \Phi(x)$, где $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\}$. В силу

локальной конечности семейства $\{A_n\}$ некоторая окрестность точки x пересекается только с конечным числом элементов этого семейства, а значит, целиком содержится в некотором A_n , $n > n(x)$. Значит, отображение φ в этой окрестности точки x совпадает с непрерывным отображением φ_n и поэтому само непрерывно в x . Отметим, что в отличие от случая 1 никакой явной оценки на расстояние между g и селекцией φ здесь получить не удастся. Теорема 6 доказана.

Теорему 6 можно усилить, заменив условие равномерного мажорирования $\alpha_{\Phi(x)} \leq \alpha$, $x \in X$, условием локально равномерного мажорирования.

ТЕОРЕМА 6'. Пусть $\Phi: X \rightarrow B$ – полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в банахово пространство B , и пусть для каждой точки $x \in X$ найдется ее окрестность $W(x)$ и найдется G -суммируемая функция α_x , строго мажорирующая функции невыпуклости всех значений $\Phi(z)$, $z \in W(x)$. Тогда существует непрерывная однозначная селекция отображения Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. 1) Для фиксированного $\varepsilon > 0$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_{\alpha}^n(\varepsilon)$ сходится, где $\alpha(\cdot)$ – строгая G -суммируемая мажоранта функции невыпуклости множества P . Выберем номер $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sum_{n=N}^{\infty} q_{\alpha}^n(\varepsilon) < \varepsilon$ и положим $\delta = q_{\alpha}^N(\varepsilon)$. Так как функция α строго больше нуля, то и $\delta = q_{\alpha}^N(\varepsilon) > 0$. Тогда $S_{\alpha}(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{\alpha}^n(q_{\alpha}^N(\varepsilon)) = q_{\alpha}^N(\varepsilon) + q_{\alpha}^N(\varepsilon) \cdot \alpha(q_{\alpha}^N(\varepsilon)) + \dots = \sum_{n=N}^{\infty} q_{\alpha}^n(\varepsilon) < \varepsilon$. Теперь на метризуемом, а значит, на паракомпактном пространстве $X = D_{\delta}(P)$ рассмотрим многозначное отображение $\Phi: X \rightarrow B$, которое каждую точку x из P переводит в себя и каждую точку x из $X \setminus P$ переводит в P . Кроме того, рассмотрим тождественное отображение g пространства X . Ясно, что g есть непрерывная однозначная δ -селекция отображения Φ и что функции невыпуклости всех значений отображения Φ строго мажорируются функцией $\alpha(\cdot)$. Применяем теорему 6, случай 1, и получаем непрерывную селекцию φ отображения Φ , которая автоматически будет ретракцией X на P . Кроме того, $\|\varphi(x) - x\| \leq S_{\alpha}(\delta) < \varepsilon$. Значит, линейная гомотопия $f(x, t) = (1-t)g(x) + t\varphi(x)$, $t \in [0, 1]$, будет гомотопией g и φ внутри ε -окрестности $D_{\varepsilon}(P)$ множества P .

Утверждение 2) стандартно следует из теоремы 6, так как всякая задача о продолжении однозначного отображения есть частный случай некоторой задачи о нахождении непрерывной селекции, а последняя задача по теореме 6 имеет решение в классе паракомпактов. Теорема 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Напомним, что всякое многозначное отображение F метрического компакта K в себя с замкнутым графиком $\Gamma(F) \subset K \times K$ при любом $\varepsilon > 0$, допускающее ε -аппроксимации $f_{\varepsilon}: K \rightarrow K$, которые имеют неподвижные точки x_{ε} , само имеет неподвижную точку. Такой точкой будет любая предельная точка последовательности $\{x_{\varepsilon_n}\}$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Последнее утверждение, в частности, справедливо для полунепрерывных сверху компактнозначных отображений. Так как по условию теоремы 4 компакт K имеет свойство неподвижной точки для непрерывных однозначных отображений, то остается проверить ε -аппроксимируемость данного отображения F . Для этого по теореме [7], [8] достаточно проверить, что все значения отображения F являются UV^{∞} -подмножествами банахова пространства B , т.е. что для любой окрестности U множества $F(x)$ найдется меньшая окрестность V этого множества такая, что

при любом $n \in \mathbb{N}$ всякое непрерывное отображение n -мерной сферы S^n в V гомотопически тривиально как отображение S^n в U . Так как множество $P = F(x)$ является компактом, то любая его окрестность U содержит некоторую ε -окрестность $D_\varepsilon(P)$. По утверждению 1) теоремы 5 выберем $\delta > 0$ так, чтобы δ -окрестность $D_\delta(P) = V$ множества P ретрагировалась бы на P внутри $D_\varepsilon(P) \subset U$. При этом такая ретракция гомотопна тождественному отображению V на себя. Тогда и любой сфероид, лежащий в V , гомотопируется внутри U в некоторый сфероид, лежащий в P . Последний сфероид стягивается по P (а значит, и внутри U) в точку вместе совсем P в соответствии с утверждением 2) теоремы 5. Теорема 4 доказана.

§3. Контролируемый отказ от выпуклости. Конечномерный случай

Доказательство теоремы 8 напоминает доказательство теоремы 6, т.е. на первом шаге следует научиться улучшать r -селекции до настоящих селекций. Различие состоит в том, что в теореме 6 выпуклозначная теорема Майкла применима к отображениям

$$\Phi_{k+1}(x) = \overline{\text{copv}}\{D(\varphi_k(x), r_k) \cap \Phi(x)\}, \quad x \in X,$$

а к отображениям

$$\Psi_{k+1}(x) = \overline{\text{copv}}_{n+1}\{D(\varphi_k(x), r_k) \cap \Phi(x)\}, \quad x \in X,$$

никакая известная селекционная теорема (выпуклозначная или же конечномерная), вообще говоря, не применима, так как операция $\overline{\text{copv}}_{n+1}$ может нарушать порядок локальной связности.

ПРИМЕР. Существует дискретное (значит, локально связное) множество A , для которого множество $\overline{\text{copv}}_2 A$ не локально связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В гильбертовом пространстве l_2 со стандартным базисом $e_1, e_2, e_3, \dots$ можно рассмотреть множество

$$A = \bigcup \{(1/n)e_{2n-1} \pm e_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда начало координат θ принадлежит $\overline{\text{copv}}_2 A$, а все достаточно малые окрестности точки θ состоят из θ и дизъюнктного объединения счетного числа отрезков. Действительно, точка

$$x = (1-t) \cdot ((1/n)e_{2n-1} \pm e_{2n}) + t \cdot ((1/k)e_{2k-1} \pm e_{2k})$$

при $n \neq k$ есть сумма двух точек, одна из которых лежит на отрезке $[(1/n)e_{2n-1} + (1/k)e_{2k-1}]$, а другая — на отрезке $[\pm e_{2n}, \pm e_{2k}]$. Значит, расстояние от x до θ больше $1/2$ при всех достаточно больших n и k . В то же время при $n = k$ получаем, что $(1/n)e_{2n-1} \in \overline{\text{copv}}_2 A$ и поэтому $\theta \in \overline{\text{copv}}_2 A$.

Вернемся к доказательству теоремы 8. Во-первых, заметим, что достаточно научиться только исправлять r -селекции до настоящих селекций. Действительно, обозначим через $\Pi_\alpha^n(B)$ семейство всех непустых замкнутых подмножеств P банахова пространства B , у которых функция невыпуклости α_P^n (в размерности n)

мажорируется фиксированной функцией $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\alpha < 1 - 0$. Ясно, что все одноточечные множества лежат в $\Pi_\alpha^n(B)$. Если мы докажем, что всякое полунепрерывное снизу отображение $\Phi: X \rightarrow \Pi_\alpha^n(B)$ метрического n -мерного компакта X имеет непрерывную однозначную селекцию, то по обратной селекционной теореме Майкла [18] получим, что все элементы семейства $\Pi_\alpha^n(B)$ $(n - 1)$ -связны, а само семейство $\Pi_\alpha^n(B)$ равностепенно локально $(n - 1)$ -связно. Тогда по прямой селекционной теореме Майкла [18] получим, что компакт X можно заменить на паракомпакт X , т.е. докажем теорему 8. Итак, будем считать, что X есть n -мерный компакт. Рассмотрим числовую функцию $d(x) = \text{dist}(\theta, \Phi(x))$, θ — начало координат в B , $x \in X$. Легко видеть, что $d(\cdot)$ — полунепрерывная сверху числовая функция на компакте X , и поэтому она ограничена сверху некоторой константой $r > 0$. Другими словами, постоянное отображение $\varphi_0 \equiv \theta$ есть непрерывная r -селекция отображения Φ и достаточно будет, начиная с φ_0 , построить некоторую селекцию отображения Φ . Подчеркнем, что селекции многозначных отображений обычно [18] ищутся в виде предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных ε -селекций (“внешние” приближения) или же [22], [23] последовательности δ -непрерывных селекций (“внутренние” приближения) данного многозначного отображения. В теореме 8 применяется смешанная техника, и ответ строится как равномерный предел последовательности δ -непрерывных ε -селекций; $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Выделим в отдельное утверждение индуктивный переход от r_n -селекции φ_n к некоторой r_{n+1} -селекции φ_{n+1} с $r_{n+1} < r_n$.

ТЕОРЕМА 13 (улучшение селекций). Пусть $\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ — функция, строго мажорирующая функции невыпуклости (в размерности n) всех значений полунепрерывного снизу отображения $F: X \rightarrow B$ n -мерного паракомпакта X в банахово пространство B . Пусть заданы положительные числа r, δ, σ и однозначная δ -непрерывная r -селекция $f: X \rightarrow B$ отображения F . Тогда для $r^* = r + 2\delta + \sigma$ существует однозначное отображение $f^*: X \rightarrow B$ такое, что:

- а) f^* есть $\alpha(r^*) \cdot r^*$ -селекция отображения F ;
- б) $\|f^*(x) - f(x)\| < r^*$ для всех $x \in X$;
- в) f^* σ -непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем сначала конструкцию из шести пунктов.

1) Для каждого $x \in X$ произвольно выберем по точке $y(x)$ из пересечения $F(x) \cap D(f(x), r)$.

2) Для каждого $x \in X$ произвольно выберем по окрестности $V(x)$, в которой для всех x' верно неравенство $\|f(x') - f(x)\| < 2\delta$.

3) Определим непустую окрестность $W(x) = V(x) \cap F^{-1}(D(y(x), \sigma/3))$ точки x и рассмотрим открытое покрытие $\omega = \{W(x)\}$, $x \in X$, паракомпакта X .

4) Пусть $\{U_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$, — локально конечное открытое покрытие X кратности $\leq n + 1$, вписанное в покрытие ω , и $\{e_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$, — соответствующее разбиение единицы, $\text{supp}(e_\gamma) \subset U_\gamma$.

5) Для каждого индекса $\gamma \in \Gamma$ произвольно фиксируем точку $x_\gamma \in X$ так, чтобы $U_\gamma \subset W(x_\gamma)$, и произвольно фиксируем однозначную селекцию (не непрерывную) $s_\gamma: \text{supp}(e_\gamma) \rightarrow B$ многозначного отображения, которое каждой

точке $x' \in \text{supp}(e_\gamma) \subset U_\gamma \subset W(x_\gamma)$ ставит в соответствие непустое множество $F(x') \cap D(y(x_\gamma), \sigma/3)$.

6) Определим f^* равенством $f^*(x) = \sum e_\gamma(x) \cdot s_\gamma(x)$, $\gamma \in \Gamma$.

Теперь проверим свойства а), б), в). Для этого стандартным образом рассмотрим множества $A(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid e_\gamma(x) > 0\}$ и $B(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid x \in \text{supp}(e_\gamma)\}$. Ясно, что $f^*(x) = \sum e_\gamma(x) \cdot s_\gamma(x)$, $\gamma \in A(x)$ и что число элементов в $A(x)$ не превосходит $n + 1$, см. п. 4). Оценим теперь размер не более чем $(n + 1)$ -элементного подмножества $\{s_\gamma(x)\}$, $\gamma \in A(x)$, банахова пространства B :

$$\|s_\gamma(x) - f(x)\| \leq \|s_\gamma(x) - y(x_\gamma)\| + \|y(x_\gamma) - f(x_\gamma)\| + \|f(x_\gamma) - f(x)\|.$$

Первое слагаемое в правой части меньше $\sigma/3$ (см. п. 5)), второе слагаемое меньше r (см. п. 1)), а третье – меньше 2δ , так как $x \in \text{supp}(e_\gamma) \subset U_\gamma \subset W(x_\gamma) \subset V(x_\gamma)$. Следовательно, все точки $\{s_\gamma(x)\}$, $\gamma \in A(x)$, удалены от $f(x)$ менее чем на $r + 2\delta + \sigma/3 < r + 2\delta + \sigma = r^*$, т.е. лежат в пересечении $F(x) \cap D(f(x), r^*)$. По определению функции невыпуклости (в размерности n) получаем, что

$$\text{dist}(f^*(x), F(x)) \leq \alpha_{F(x)}^n(r^*) \cdot r^* < \alpha(r^*) \cdot r^*,$$

что доказывает свойство а).

Свойство б) сразу следует из оценки

$$\begin{aligned} \|f^*(x) - f(x)\| &= \left\| \sum e_\gamma(x) \cdot (s_\gamma(x) - f(x)) \right\| \\ &\leq \max\{\|s_\gamma(x) - f(x)\| \mid \gamma \in A(x)\} < r^*. \end{aligned}$$

Для доказательства в) рассмотрим для $x \in X$ открытую окрестность

$$G(x) = \left(\bigcap \{\text{Int}(\text{supp}(e_\gamma)) \mid \gamma \in A(x)\} \right) \setminus \left(\bigcup \{\text{supp}(e_\gamma) \mid \gamma \notin B(x)\} \right).$$

Хорошо известно [22], [12], что в этой окрестности верны включения

$$A(x) \subset A(x') \subset B(x') \subset B(x), \quad x' \in G(x).$$

Тогда для $x' \in G(x)$ получаем, что

$$\begin{aligned} f^*(x') - f^*(x) &= \sum_{\gamma \in A(x')} e_\gamma(x') \cdot s_\gamma(x') - \sum_{\gamma \in A(x)} e_\gamma(x) \cdot s_\gamma(x) \\ &= \sum_{\gamma \in A(x)} [e_\gamma(x') - e_\gamma(x)] \cdot s_\gamma(x) \\ &\quad + \sum_{\gamma \in A(x)} e_\gamma(x') \cdot [s_\gamma(x') - s_\gamma(x)] \\ &\quad + \sum_{\gamma \in A(x') \setminus A(x)} e_\gamma(x') \cdot s_\gamma(x'). \end{aligned}$$

Первое слагаемое есть сумма $\leq n + 1$ непрерывных на $G(x)$ отображений, каждое из которых в точке x обращается в нуль. Значит, в некоторой окрестности точки x это слагаемое по норме меньше $\sigma/6$. Норма второго слагаемого меньше $2\sigma/3$, так как точки $s_\gamma(x')$ и $s_\gamma(x)$ по построению (см. п. 5)) лежат в шаре $D(y(x_\gamma), \sigma/3)$. Наконец, третье слагаемое по норме не превосходит $\sum_{\gamma \in B(x) \setminus A(x)} e_\gamma(x') \cdot \|s_\gamma(x')\|$. Последняя сумма есть сумма конечного числа непрерывных числовых функций, каждая из которых равна нулю в точке x . Значит, в некоторой окрестности точки x норма третьего слагаемого меньше $\sigma/6$. Свойство в) и теорема 13 об улучшении селекций доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Искомую селекцию φ отображения Φ построим как равномерный предел последовательности δ_n -непрерывных r_n -селекций $\varphi_n: X \rightarrow B$ отображения Φ с $\delta_n \rightarrow 0, r_n \rightarrow 0$.

Шаг 0). Постоянное отображение $\varphi_0 \equiv \theta$ есть непрерывная r -селекция отображения Φ для некоторого $r > 0$. Значит, $r_0 = r$.

Пусть β есть G -суммируемая строгая мажоранта для α^+ . Тогда для некоторого $\tau_0 > 0$ из неравенства $r_0 < r^* < r_0 + \tau_0$ следует неравенство $\alpha(r^*) \cdot r^* < \beta(r_0) \cdot r_0 = q_\beta^1(r_0)$. Выберем $\delta_0, \delta_1 > 0$ так, чтобы $r_0 < r^* = r_0 + 2\delta_0 + \delta_1 < r_0 + \tau_0$.

Шаг 1). Применим теорему об улучшении селекций в ситуации, когда

$$F = \Phi, \quad f = \varphi_0, \quad r = r_0, \quad \delta = \delta_0, \quad \sigma = \sigma_1, \quad r^* = r_0 + 2\delta_0 + \delta_1.$$

Получим δ_1 -непрерывную $\alpha(r^*) \cdot r^*$ -селекцию (а значит, и $q_\beta^1(r_0)$ -селекцию) $\varphi_1: X \rightarrow B$ отображения Φ такую, что $\|\varphi_1 - \varphi_0\| < r^* < r_0 + \tau_0$. Так как верхний предел справа у функции α в точке $r_1 = q_\beta^1(r_0)$ меньше $\beta(r_1)$, то для некоторого $\tau_1 > 0$ из неравенства $r_1 < r^* < r_1 + \tau_1$ следует неравенство $\alpha(r^*) \cdot r^* < \beta(r_1) \cdot r_1 = q_\beta^2(r_0)$. Если при этом оказалось, что $2\delta_1 \geq \tau_1$, то мы просто уменьшим δ_1 в шаге 0) так, чтобы $2\delta_1 < \tau_1$. Важно при этом, что степень разрывности δ_1 отображения φ_1 по теореме об улучшении селекций не зависит от степени разрывности δ_0 отображения φ_0 . Выберем $\delta_2 > 0$ так, чтобы

$$r_1 < r^* = r_1 + 2\delta_1 + \delta_2 < r_1 + \tau_1.$$

Шаг 2). Применим теорему об улучшении селекций в ситуации, когда $F = \Phi$, $f = \varphi_1$, $r = r_1 = q_\beta^1(r_0)$, $\delta = \delta_1$, $\sigma = \delta_2$, $r^* = r_1 + 2\delta_1 + \delta_2$. Получим δ_2 -непрерывную $\alpha(r^*) \cdot r^*$ -селекцию (а значит, и $q_\beta^2(r_0)$ -селекцию) $\varphi_2: X \rightarrow B$ отображения Φ такую, что $\|\varphi_2 - \varphi_1\| < r^* < r_1 + \tau_1$. Так как верхний предел справа у функции α в точке $r_2 = q_\beta^2(r_0)$ меньше $\beta(r_2)$, то для некоторого $\tau_2 > 0$ из неравенства $r_2 < r^* < r_2 + \tau_2$ следует неравенство $\alpha(r^*) \cdot r^* < \beta(r_2) \cdot r_2 = q_\beta^3(r_0)$. Если при этом оказалось, что $2\delta_2 \geq \tau_2$, то мы просто уменьшим δ_2 в шаге 1) нужным образом, т.е. так, чтобы $2\delta_2 < \tau_2$. Важно при этом, что степень разрывности δ_2 отображения φ_2 по теореме об улучшении селекций не зависит от степени разрывности δ_1 отображения φ_1 . Выберем $\delta_3 > 0$ так, чтобы

$$r_2 < r^* = r_2 + 2\delta_2 + \delta_3 < r_2 + \tau_2.$$

Продолжив по индукции, мы получим последовательность отображений $\varphi_n: X \rightarrow B$ таких, что φ_n есть δ_n -непрерывная $q_\beta^n(r_0)$ -селекция отображения Φ и при этом $\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| < q_\beta^n(r_0) + \tau_n$, $2\delta_n < \tau_n$ для всех натуральных n . Для окончания доказательства остается в вышеприведенной процедуре заранее положить, что $\sum \tau_n < \infty$. Теорема 8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. По теореме 8 всякий компакт $F(x)$, $x \in X$, есть абсолютный экстензор, а значит, и абсолютный ретракт, в размерности n . В частности, $F(x)$ есть ретракт компакта K , который по условию является ретрактом объемлющего банахова пространства B . Значит, всякий компакт $F(x)$, $x \in X$, есть абсолютный ретракт в классе метрических пространств. Ясно, что тогда все

значения $F(x)$, $x \in X$, отображения F являются UV^{n-1} -подмножествами K . По аппроксимационной теореме [8] F имеет неподвижную точку.

Закончим этот параграф примером, показывающим, что у n -мерного абсолютного ретракта P с $\alpha_P^n < 1 - 0$ может не быть хорошей оценки для общей функции невыпуклости α_P . Рассмотрим график функции $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, и пусть P — ограничение этого графика на две стороны равностороннего треугольника, вписанного в окружность $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда прямой подсчет показывает, что функция невыпуклости (в размерности 1) α_P^1 всюду не превосходит некоторой константы $q < 1$. В то же время ясно, что $\alpha_P^2(1+t) = 1/(1+t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$.

§ 4. Устойчивость множеств, функции невыпуклости которых заметно меньше единицы

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11. Для произвольных чисел $R, \varepsilon > 0$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим три точки

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= (\pm(R + \varepsilon \cos \varphi), \varepsilon \sin \varphi), \\ B &= (0, q(R + \varepsilon \cos \varphi) + \varepsilon \sin \varphi), \end{aligned}$$

где $\cos \varphi = q/(1+q^2)^{1/2}$ и $\sin \varphi = 1/(1+q^2)^{1/2}$. Проведем через точки B , A_+ и A_- дугу окружности. Обозначим эту дугу P . Если $C_{\pm} = (\pm R, 0)$, то длины отрезков A_+C_+ и A_-C_- равны ε , т.е. точки $C_{\pm}$ лежат в $\overline{D}_{\varepsilon}(P)$. Ясно, что угол между A_+C_+ (соответственно A_-C_-) и положительным (отрицательным) направлением оси абсцисс равен именно φ и $\operatorname{ctg} \varphi = q$. Кроме того, A_+C_+ (соответственно A_-C_-) перпендикулярен отрезку A_+B (отрезку A_-B). Функция невыпуклости α_P дуги P вычисляется сравнительно просто и максимум этой функции, равный $q = (y(B) - y(A_+))/x(A_+)$, достигается при $r = x(A_+)$.

Обозначим через Q замкнутую ε -окрестность множества P . По построению начало координат θ лежит в $\operatorname{conv}(Q)$. Ясно, что минимум расстояний $\|x\|$, $x \in P$, достигается при $x \in \{A_-, A_+, B\}$. Значит,

$$\operatorname{dist}(\theta, P) \geq \min\{\theta B, \theta A_+\} = \min\{qR + \varepsilon(1+q^2)^{1/2}, (R^2 + \varepsilon^2 + 2R\varepsilon \cos \varphi)^{1/2}\}$$

и поэтому

$$\operatorname{dist}(\theta, Q) \geq \operatorname{dist}(\theta, P) - \varepsilon \geq \min\{qR + \varepsilon(1+q^2)^{1/2}, (R^2 + \varepsilon^2 + 2R\varepsilon \cos \varphi)^{1/2}\} - \varepsilon.$$

Решив относительно R два неравенства

$$qR + \varepsilon(1+q^2)^{1/2} - \varepsilon \geq pR \quad \text{и} \quad (R^2 + \varepsilon^2 + 2R\varepsilon \cos \varphi)^{1/2} - \varepsilon \geq pR,$$

получаем, что

$$R \leq \varepsilon \cdot \frac{(1+q^2)^{1/2} - 1}{p-q} \quad \text{и} \quad R \geq 2\varepsilon \cdot \frac{p - \cos \varphi}{1-p^2}.$$

При фиксированных ε и q и при $p \rightarrow q$ правая часть второго неравенства стремится к числу, а правая часть первого неравенства стремится к $+\infty$. Значит, у системы этих двух неравенств есть решения R при всех p , достаточно близких к q .

Итак, при фиксированном $q \in [0, 1)$ для любых $\varepsilon > 0$ и любых достаточно близких к q чисел $p \in (q, 1)$ найдется $R > 0$ так, что для функции невыпуклости ε -окрестности Q множества $P = P(R, \varepsilon)$ верно неравенство $\alpha_Q(R) \cdot R \geq pR > qR$, в то время как $\alpha_P(\cdot) \leq q$. При этом, если число p уже выбрано, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ верно, что $R \rightarrow 0$ просто потому, что R пропорционально ε .

Теперь при фиксированном $q \in [0, 1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ построим описанным выше образом множества $P_n = P(R_n, \varepsilon_n)$ так, чтобы $\sum \varepsilon_n < \infty$ и $q < p \leq p_n$. Разместим копии множеств P_n на фиксированной прямой и на достаточно далеких расстояниях друг от друга: например, расстояния между P_n и P_{n+1} больше суммы диаметров множеств P_n и P_{n+1} и меньше удвоенной суммы этих диаметров. После этого объединим эти копии, добавив еще отрезки $[(A_n)_+, (A_{n+1})_-]$ и предел последовательности $\{A_n\}$. Получим компактное подмножество K евклидовой плоскости, которое q -паравыпукло (т.е. $\alpha_K(\cdot) \leq q$) и у которого никакая его замкнутая ε_n -окрестность Q не является p -паравыпуклым множеством. Предложение 11 доказано.

Для доказательства теоремы 10 потребуются некоторые предварительные результаты. Всюду ниже мы фиксируем обозначение $R(E)$ для чебышевского радиуса подмножества E банахова пространства B , т.е. для инфимума множества радиусов шаров, содержащих E .

Следующее упрощение при оценке функции невыпуклости α_P множества P связано с тем, что в хороших банаховых пространствах при вычислении α_P в точке $r > 0$ достаточно рассматривать не все точки симплекса $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \in P \cap D$, D — шар радиуса r , а в точности одну точку этого симплекса. Именно, чебышевский центр этого симплекса. Напомним, что чебышевский центр $c(E)$ ограниченного подмножества E банахова пространства B — это центр замкнутого шара радиуса $R(E)$ в пространстве B , который содержит множество E . А. Л. Гаркави охарактеризовал те банаховы пространства B , в которых чебышевские центры ограниченных множеств всегда существуют, а также те банаховы пространства B , в которых у любого ограниченного множества существует единственный чебышевский центр. Оказывается, что (в последнем случае) это в точности равномерно выпуклые банаховы пространства [24].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'. *Центральной функцией невыпуклости $\hat{\alpha}_P(\cdot)$ замкнутого непустого подмножества P равномерно выпуклого банахова пространства B называется функция, которая каждому числу $r > 0$ ставит в соответствие число*

$$\hat{\alpha}_P(r) = \sup \{ \text{dist}(c(D \cap P), P) / r \mid D - \text{открытый шар радиуса } r \}.$$

ЛЕММА 14. *Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — равномерно выпуклое банахово пространство. Тогда для любого замкнутого ограниченного подмножества $P \subset B$ эквивалентны условия:*

- а) *функция невыпуклости α_P заметно меньше единицы;*
- б) *центральная функция невыпуклости $\hat{\alpha}_P$ заметно меньше единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\hat{\alpha}_P \leq \alpha_P$ и поэтому б) следует из а). Для доказательства обратной импликации выберем произвольно $n \in \mathbb{N}$, точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ из P с $R = R(\{x_1, \dots, x_n\})$. Пусть $c = c(\{x_1, \dots, x_n\})$ — чебышевский центр множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Можно считать, что $\|c - x_i\| = R$: в противном случае c лежит в одной из граней многогранника $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ и можно перейти в меньшую размерность. Для произвольного $\delta \in (0, 1)$ проведем замкнутые шары D_i радиуса $(1 - \delta) \cdot R$ с центрами в точках x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим произвольную точку $x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$. Мы хотим оценить расстояние $\text{dist}(x, P)$ через уже имеющуюся оценку $\text{dist}(c, P) \leq \hat{\alpha}_P(R) \cdot R$. Для точки x , отличной от c , возможны ровно два случая.

Случай 1. Точка x лежит в одном из шаров D_i . Тогда расстояние от x до множества P не превосходит $(1 - \delta) \cdot R$.

Случай 2. Точка x лежит вне объединения шаров D_i . Замкнутые шары $\hat{D}_i$ радиуса R , концентричные шарам D_i , покрывают многогранник $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$. Значит, для некоторого $i \leq n$ точка x лежит в разности $\hat{D}_i \setminus D_i$. И, более того, отрезок $[x, c]$ целиком лежит в этой разности в силу звездности относительно точки c множества $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \bigcup\{D_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Но тогда $\|x - c\| \leq \varepsilon_B(\delta) \cdot R$, где $\varepsilon_B(\cdot)$ — функция, обратная к модулю равномерной выпуклости пространства B , и значит, $\text{dist}(x, P) \leq \text{dist}(c, P) + \|x - c\| \leq (\hat{\alpha}_P(R) + \varepsilon_B(\delta)) \cdot R$.

Рассмотрим теперь при фиксированном R следующее уравнение относительно переменной $\delta \in (0, 1)$:

$$\hat{\alpha}_P(R) + \varepsilon_B(\delta) = 1 - \delta.$$

В силу монотонности и непрерывности $\varepsilon_B(\cdot)$ у этого уравнения имеется единственное решение $\delta = \delta(R)$. Определим теперь функцию $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ равенством $\alpha(R) = 1 - \delta(R)$. Тогда из рассмотренных выше случай 1 и 2 следует, что

$$\text{dist}(x, P) \leq \alpha(R) \cdot R, \quad x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\},$$

т.е. что функция α мажорирует функцию невыпуклости α_P множества P . При этом, если G -суммируемая функция $\hat{\beta}$ мажорирует центральную функцию невыпуклости $\hat{\alpha}_P$ множества P , то функция $\beta: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$, заданная равенством $\beta(R) = 1 - \delta'(R)$, где $\delta'(R)$ есть корень уравнения

$$\hat{\beta}(R) + \varepsilon_B(\delta) = 1 - \delta,$$

будет G -суммируемой мажорантой функции α , а значит, и функции невыпуклости α_P множества P . Лемма 15 доказана.

В доказательстве теоремы 10 решающим техническим моментом является предложение 15, формализующее следующее, геометрически “очевидное”, наблюдение: если в треугольнике одна из сторон почти равна сумме двух других, то расстояния от вершин треугольника до его сторон малы, т.е. треугольник “вытянут”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — равномерно выпуклое банахово пространство. Тогда для любого $0 < \lambda \leq 1$ найдется непрерывная функция $\sigma_\lambda: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ такая, что:

- (а) из неравенств $\|x - y\| \leq a$, $0 < \|y - z\| = b$, $\|x - z\| \geq \sigma_\lambda(a, b) \cdot a + b$ следует, что $\text{dist}(z, \text{span}\{x, y\}) \leq \lambda b$;

- (в) для всякого $b > 0$ верхний предел функции $\sigma_\lambda(\cdot, b)$ в точке $a = 0$ меньше единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Пусть фиксированы функция $\alpha < 1 - 0$ и число $\varepsilon > 0$. Определим функцию $\beta: (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ в точке r равенством $\beta(r) = \max\{\alpha(r + \varepsilon), \sigma_\lambda(r, \varepsilon)\}$, где σ_λ — функция из предложения 15, построенная для числа $\lambda = 1 - \alpha(r + \varepsilon) \in (0, 1]$.

Пусть P — множество, функция невыпуклости α_P которого мажорируется функцией α . Докажем, что функция невыпуклости α_Q замкнутой ε -окрестности Q множества P мажорируется функцией β . Для этого рассмотрим произвольный открытый шар D радиуса r , пересекающий множество Q . Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n \in D \cap P$, а $z_1, z_2, \dots, z_n$ — точки из P , для которых $\|y_i - z_i\| \leq \varepsilon$. Нам следует оценить расстояние $\text{dist}(x, Q)$ для точек x многогранника $\text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$. Если одно из расстояний $\|x - z_i\|$ не больше ε , то $x \in Q$ и оценивать нечего. Если же все эти расстояния больше ε , то, подвинув точки y_i к точке x по отрезкам, можно считать, что $\|y_i - z_i\| = \varepsilon$. Пусть c — чебышевский центр многогранника $\text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$. По лемме 14 достаточно оценить расстояние от точки c до множества Q . Возможны ровно два случая:

- 1) для некоторого $1 \leq i \leq n$ верно неравенство

$$\|c - z_i\| < \sigma \cdot r + \varepsilon, \quad \text{где } \sigma = \sigma_\lambda(r, \varepsilon);$$

- 2) для всех $1 \leq i \leq n$ верны неравенства

$$\|c - z_i\| \geq \sigma \cdot r + \varepsilon.$$

В случае 1) $\text{dist}(c, Q) < \sigma r \leq \beta(r) \cdot r$, так как $z_i \in P$. В случае 2) применяем предложение 15 к треугольникам $\Delta cy_i z_i$:

$$\|c - y_i\| \leq r, \quad 0 < \|y_i - z_i\| = \varepsilon, \quad \|c - z_i\| \geq \sigma_\lambda(r, \varepsilon) \cdot r + \varepsilon.$$

Получаем, что $\text{dist}(z_i, \text{span}\{c, y_i\}) \leq \lambda \varepsilon$. Пусть w_i — точка на прямой $\text{span}\{c, y_i\}$, для которой $\|z_i - w_i\| = \text{dist}(z_i, \text{span}\{c, y_i\}) \leq \lambda \varepsilon \leq \varepsilon$. Тогда точка y_i лежит на отрезке $[c, w_i]$ и, в частности, точка c лежит в многограннике $\text{conv}\{w_1, \dots, w_n\}$. В силу выпуклости шаров найдется точка v из многогранника $\text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$ такая, что $\|c - v\| \leq \lambda \varepsilon$. Точки $z_1, \dots, z_n$ лежат во множестве P и лежат в шаре D' радиуса $r + \varepsilon$, concentричном шару D . Теперь к этому шару D' , множеству P , точкам $z_1, \dots, z_n$ из пересечения $D' \cap P$ и точке $v \in \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$ применяем определение функции невыпуклости α_P . Получаем, что

$$\text{dist}(v, P) \leq \alpha_P(r + \varepsilon) \cdot (r + \varepsilon) < \alpha(r + \varepsilon) \cdot (r + \varepsilon)$$

и поэтому в силу выбора $\lambda = 1 - \alpha(r + \varepsilon)$ получаем, что

$$\text{dist}(c, P) < \lambda \varepsilon + \alpha(r + \varepsilon) \cdot (r + \varepsilon) = \varepsilon + \alpha(r + \varepsilon) \cdot r.$$

Значит, $\text{dist}(c, Q) < \alpha(r + \varepsilon) \cdot r \leq \beta(r) \cdot r$. Теорема 10 доказана.

Отметим, что формула $\beta(r) = \max\{\alpha(r + \varepsilon), \sigma_\lambda(r, \varepsilon)\}$ даже в случае константной функции α дает для β функциональный, а не константный ответ. Другими словами, не удастся вывести паравыпуклость $Q = \overline{D}_\varepsilon(P)$ из паравыпуклости P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 15. Для простоты ограничимся случаем гильбертова пространства $H = B$. Для любых положительных a и b положим σ_1 равным положительному корню уравнения $ta + b = (a^2 + b^2)^{1/2}$ и положим σ_2 равным положительному корню уравнения

$$t - (1 - t^2)(a/2b) = (1 - \lambda^2)^{1/2}.$$

Более явным образом, для $\tau = a/b$ получаем

$$\sigma_1 = \frac{(1 + \tau^2)^{1/2} - 1}{2\tau} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \frac{[1 + \tau^2 + 2\tau(1 - \lambda^2)^{1/2}]^{1/2} - 1}{\tau}.$$

Далее по определению положим $\sigma_\lambda(a, b) = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Тогда непрерывность $\sigma_\lambda(\cdot, \cdot)$ следует из явного вида σ_1 и σ_2 , а условие $\lim_{a \rightarrow 0} \sigma_\lambda(a, b) < 1$ следует из $\sigma_1 \rightarrow 0$ и $\sigma_2 \rightarrow (1 - \lambda^2)^{1/2} < 1$ при $\tau \rightarrow 0$. Для завершения доказательства рассмотрим произвольный треугольник Δxyz такой, что

$$\|x - y\| \leq a, \quad 0 < \|y - z\| = b, \quad \|x - z\| \geq \sigma_\lambda(a, b) \cdot a + b = \sigma \cdot a + b.$$

Пусть w — основание перпендикуляра, опущенного из точки z на прямую $\text{span}\{x, y\}$. Тогда $\|x - z\| \geq \sigma \cdot a + b \geq \sigma_1 \cdot a + b = (a^2 + b^2)^{1/2} \geq (\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2)^{1/2}$. Значит, угол $\psi = \angle zyx$ не меньше прямого, и точка y лежит на отрезке $[x, w]$. Поэтому $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \psi \geq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 - 2\|x - y\| \cdot \|y - z\| \cdot \cos \psi = \|x - z\|^2 \geq (\sigma \cdot a + b)^2$ и, значит, $-2ab \cdot \cos \psi \geq 2\sigma ab - a^2(1 - \sigma^2)$. Так как функция $t \mapsto t - (1 - t^2)(a/2b)$ монотонно возрастает при $t > 0$, то из неравенства $\sigma \geq \sigma_2$ получаем, что

$$-\cos \psi \geq \sigma_2 - (1 - \sigma_2^2)(a/2b) = (1 - \lambda^2)^{1/2}.$$

Следовательно, $\text{dist}(z, \text{span}\{x, y\}) = \|z - w\| = \|y - z\| \cdot \sin \psi \leq \lambda b$.

Верен и аналог теоремы 10 для функций невыпуклости (в размерности n).

ТЕОРЕМА 10'. Пусть даны равномерно выпуклое банахово пространство $(B, \|\cdot\|)$, функция $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ заметно меньшая единицы и число $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $\beta: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ заметно меньшая единицы такая, что для любого множества P с $\alpha_P^n \leq \alpha$ функция невыпуклости (в размерности n) замкнутой ε -окрестности $\overline{D}_\varepsilon(P)$ множества P не превосходит функции β .

Для доказательства теоремы 10' достаточно заметить, что в доказательстве теоремы 10 количество вершин $z_i \in D' \cap P$ многогранника $\text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$ не превосходит количества вершин $y_i \in D \cap P$ многогранника $\text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Использование теоремы 10' и теоремы 8 показывает, что все значения многозначного отображения F и любые ε -окрестности этих значений являются абсолютными экстензорами в размерности n . Следовательно, все значения $F(x)$, $x \in X$, есть UV^{n-1} -подмножества банахова пространства B . Использование аппроксимационной теоремы [25] завершает доказательство теоремы 12.

Список литературы

1. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen // *Studia Math.* 1930. V. 2. P. 171–180.
2. *Kakutani S.* A generalization of Brouwer's fixed point theorem // *Duke Math.* 1941. V. 8. P. 457–459.
3. *Bohnenblust H., Karlin S.* On a theorem of Ville. Contribution to the theory of games // *Ann. of Math. Stud.* 1950. P. 155–160.
4. *Glikhsberg I.* A further generalization of the Kakutani fixed point theorem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1952. V. 3. P. 170–174.
5. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуковский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // *УМН.* 1980. Т. 35. №1. С. 59–126.
6. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуковский В. В.* Многозначные отображения // *Математический анализ.* Т. 19. М.: ВИНТИ, 1982. С. 127–231.
7. *Gorniewicz L., Granas A., Kryszewsky W.* On the homotopy method in the fixed point index theory of multivalued mappings of compact absolute neighborhood retracts // *J. Math. Anal. Appl.* 1991. V. 161. P. 457–473.
8. *Gutew V.* A fixed-point theorem for UV^n usco maps // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1996. V. 124. P. 945–952.
9. *Michael E.* Paraconvex sets // *Scand. Math.* 1959. V. 7. P. 372–376.
10. *Repovs D., Semenov P.* On paraconvexity of graphs of continuous functions // *Set-Valued Anal.* 1995. V. 3. P. 23–32.
11. *Repovs D., Semenov P.* On functions of nonconvexity for graphs of continuous functions // *J. Math. Anal. Appl.* 1995. V. 196. P. 1021–1029.
12. *Семенов П. В.* Функционально паравышуклые множества // *Матем. заметки.* 1993. Т. 54. №6. С. 74–81.
13. *Семенов П. В.* О паравышуклости звездноподобных множеств // *Сиб. матем. журн.* 1996. Т. 37. №2. С. 399–405.
14. *Гельман Б. Д.* Обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке для многозначных отображений // *ДАН СССР.* 1973. Т. 209. №1. С. 53–57.
15. *Гельман Б. Д.* О некоторых классах сечений многозначных отображений // *Применение топологии в современном анализе.* Воронеж: Изд-во ВГУ, 1985. С. 42–62.
16. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory // *Grundlehren der Math. Wiss.* V. 264. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
17. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
18. *Michael E.* Continuous selections. I, II // *Ann. of Math.* 1956. V. 63. №2. P. 361–382; V. 64. №3. P. 562–580.
19. *Reich S.* Some problems and results in fixed points theory // *Contemp. Math.* 1983. V. 21. P. 179–187.
20. *Daffer P., Kaneko H.* Fixed points of generalized contractive multivalued mappings // *J. Math. Anal. Appl.* 1995. V. 192. P. 655–666.
21. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
22. *Michael E.* Convex structures and continuous selections // *Canad. J. Math.* 1959. V. 11. P. 556–575.
23. *Чобан М. М.* Многозначные отображения и борелевские множества // *Труды ММО.* 1970. Т. 22. С. 229–250.
24. *Гаркави А. Л.* Наилучшие возможные сети и наилучшее возможное разбиение множеств в линейном нормированном пространстве // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1962. Т. 26. С. 87–106.
25. *Щепин Е. В., Бродский Н. Б.* Селекции фильтрованных многозначных отображений // *Труды МИРАН.* 1996. Т. 212. С. 218–239.