Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Стенькин, Л. П. Шильников, Гомоклинический Ω -взрыв и области гиперболичности, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 4, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 11:25:59

УДК 517.9

О. В. Стенькин, Л. П. Шильников

Гомоклинический Ω -взрыв и области гиперболичности

Для общих однопараметрических семейств многомерных систем, претерпевающих гомоклинический Ω -взрыв, доказываются существование областей гиперболичности и изучается структура гиперболических множеств.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Динамические системы с негрубыми гомоклиническими орбитами Пуанкаре представляют значительный интерес в качественной теории динамических систем. Именно наличием таких орбит объясняется весьма сложное поведение траекторий, подчас не поддающееся разумному описанию. И в то же время негрубые гомоклинические орбиты встречаются во многих конкретных моделях.

Простой пример негрубой гомоклинической орбиты мы имеем в том случае, когда устойчивое и неустойчивое многообразия седлового цикла L имеют квадратичное касание. В этом случае принято говорить, что имеет место гомоклиническое касание. В общем случае такие системы образуют в пространстве динамических систем бифуркационные поверхности коразмерности один. Вообще системы с гомоклиническими касаниями по структуре множества N траекторий, целиком лежащих в некоторой малой окрестности U периодической орбиты L и гомоклинической к нему траектории Γ , разбиваются на три типа [1]–[4]. К первому типу относятся те, у которых $N = L \cup \Gamma$. Ко второму типу относятся системы, в которых все траектории из N , за исключением гомоклинической, – седловые. Для таких систем может быть дано полное описание множества N : оно эквивалентно надстройке над некоторой факторсистемой, получаемой из топологической схемы Бернулли из трех символов. И, наконец, третий тип составляют системы, для которых N имеет далеко нетривиальную структуру. Отметим только, что для описания всюду плотного множества систем такого типа требуется счетное множество инвариантов – Ω -модулей. И здесь важно следующее обстоятельство: в любой окрестности точки бифуркационной поверхности систем с гомоклиническим касанием существуют области Ньюхауса – области, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями [1], [5]. Поскольку в этих областях всюду плотны системы третьего типа, то из этого следует важный вывод: полный бифуркационный анализ конкретных моделей нереалистичен [2].

Возникает вопрос: могут ли наряду с областями Ньюхауса существовать и области гиперболичности? Впервые положительный ответ на этот вопрос был дан

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01135) и INTAS (грант № 93-0570).

в [6]–[8] для случая двумерных диффеоморфизмов (а, следовательно, и трехмерных потоков). В [6]–[8] речь шла о диффеоморфизмах первого типа, выделенных в [9] (различные случаи касаний многообразий седла с положительными мультипликаторами для двумерных диффеоморфизмов см. на рис. 1). Подобные диффеоморфизмы интересны тем, что они могут отделять области систем с простой динамикой от областей систем со сложным поведением траекторий. В таких случаях говорят, что имеет место Ω -взрыв.

Рис. 1

В настоящей работе речь пойдет об обобщении этих результатов на многомерный случай. При этом мы опираемся на работу [9], в которой были выделены все бифуркационные поверхности H^1 систем первого типа. Заметим, что Ω -взрывы здесь могут иметь место и в случае, когда пара ведущих мультипликаторов является комплексной.

§ 2. Постановка задачи. Основная теорема

Пусть рассматриваемое нами однопараметрическое семейство динамических систем $X_\mu - C^r$ -гладкое по пространственным переменным и параметру, $r \geq 3$. Предположим, что при $\mu = 0$ система X_0 удовлетворяет свойствам А)–Е), которые мы сформулируем ниже.

- А) X_0 имеет седловое периодическое движение L_0 с мультипликаторами λ_i, γ_j , причем

$$|\lambda_m| \leq \dots \leq |\lambda_1| < 1 < |\gamma_1| < |\gamma_2| \leq \dots \leq |\gamma_n|.$$

Обозначим $\lambda = |\lambda_1|, \gamma = |\gamma_1|$. Пусть выполняется либо

- А1) λ_1 – действительно и $\lambda > |\lambda_2|$,

либо

$$A2) \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda \cdot \exp(i\psi), \psi \neq 0, \pi, \text{ и } \lambda > |\lambda_3|.$$

Б) Седловая величина $\sigma = \lambda \cdot \gamma < 1$.

В) Устойчивое $\mathcal{W}^s$ и неустойчивое $\mathcal{W}^u$ многообразия имеют квадратичное касание по гомоклинической кривой Γ_0 . В частности, $\dim(\mathcal{W}_M^s \cap \mathcal{W}_M^u) = 2$, где $\mathcal{W}_M^s$ и $\mathcal{W}_M^u$ — касательные подпространства к $\mathcal{W}^s$ и $\mathcal{W}^u$, соответственно, в точке $M \in \Gamma_0$.

Изучение динамики таких систем сводится к исследованию отображений Пуанкаре некоторой секущей S к периодическому движению L_0 в себя, которые строятся с помощью отображений $T_0(\mu)$ и $T_1(\mu)$, где T_0 — отображение по траекториям, близким к периодическому движению L_μ , а T_1 — глобальное отображение по траекториям системы X_μ в окрестности Γ_0 . Точка $O = L \cap S_0$ является седловой неподвижной точкой, ее инвариантные многообразия обозначим W^s и W^u . Пусть $M^+ \in W_{\text{loc}}^s$ и $M^- \in W_{\text{loc}}^u$ — две точки пересечения Γ_0 с S . Тогда будем считать, что отображение T_1 определено в окрестности точки M^- , $T_1(M^-) = M^+$. Неведущие устойчивое и неустойчивое многообразия O будем обозначать, соответственно, W^{ss} и W^{uu} . Касательные подпространства к многообразиям W^s, W^u, W^{ss}, W^{uu} в точке $O = \bar{W}^s, \bar{W}^u, \bar{W}^{ss}$ и $\bar{W}^{uu}$. Аналогично, для ведущих направлений введем обозначения $W^{s+}, W^{u+}, \bar{W}^{s+}$ и $\bar{W}^{u+}$. Можно показать, что W^{ss} и W^{uu} однозначно вкладываются в инвариантные C^{r-1} -слоения F^{ss} и F^{uu} на W_{loc}^s и W_{loc}^u и что существуют инвариантные C^1 -многообразия H_u и H_s , касательные к $\bar{W}^u \oplus \bar{W}^{s+}$ и $\bar{W}^s \oplus \bar{W}^{u+}$, $H_u \supseteq W_{\text{loc}}^u, H_s \supseteq W_{\text{loc}}^s$ [10].

Предположим, что

- Г) $M^+ \notin W^{ss}, M^- \notin W^{uu}$;
- Д) $T_1(H_u)$ трансверсально F^{ss} в точке M^+ ,
 $T_1^{-1}(H_s)$ трансверсально F^{uu} в точке M^- ;
- Е) X_0 является системой первого класса.

Последнее означает, что существует такая окрестность U контура $L_0 \cup \Gamma_0$, что множество траекторий системы X_0 , целиком лежащих в U , тривиально, т.е. не содержит траекторий, отличных от L_0 и Γ . В дальнейшем множество траекторий системы X_μ , целиком лежащих в U , мы будем обозначать N_μ . Условие Е) в теоретико-множественном смысле переписывается в виде $N_0 = \{L_0, \Gamma_0\}$. Точные аналитические условия будут приведены ниже. С точки зрения геометрии отображений к первому классу относятся диффеоморфизмы, у которых многообразие W^u касается W^s “снизу” (рис. 1).

Условия Г) и Д) являются существенными условиями только для многомерных диффеоморфизмов (размерность 3 и выше). Условие Г) запрещает касания многообразий по неведущим направлениям, т.е. таких, как на рис. 2а в случае $m = 2, n = 1$. Условие Д) исключает такой вид касаний, какой показан на рис. 2б. Другими словами, для трехмерных диффеоморфизмов с одномерным неустойчивым многообразием седла, для которых выполнены как условие Г), так и Д), гомоклинические касания должны иметь определенный вид (см. рис. 2с, 2д).

Предположим, что для рассматриваемого однопараметрического семейства X_μ параметр μ выбран так, что для отрицательных значений параметра мы имеем систему с простой динамикой (в окрестности U), а при положительных значениях па-

Рис. 2

раметра рождается пара грубых гомоклинических кривых (пример однопараметрического семейства двумерных диффеоморфизмов см. на рис. 3).

Предположим также, что выполняется следующее условие:

Ж) семейство X_μ в пространстве C^r -гладких динамических систем трансверсально к H^1 .

Рис. 3

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА. Для любого $\mu_0 > 0$ существует счетная последовательность открытых интервалов Δ_k , $\Delta_k \subset (0, \mu_0)$, такая, что множество N неблуждающих в U траекторий системы X_μ , где $\mu \in \Delta_k$, топологически эквивалентно надстройке над схемой Бернулли B_3 из трех символов.

Заметим, что множество N_μ целиком содержится в некоторой малой окрестности $U_k(\mu)$, $U_k(\mu) \subset U$.

Удобно разделить ведущие и неведущие координаты. В соответствии с этим примем обозначения: x, y – ведущие координаты, u, v – неведущие. В некоторых координатах отображение T_0 имеет следующее представление [1], [2], [4]:

$$\begin{cases} (\bar{x}, \bar{u}) = A(\mu)(x, u) + (f_1(x, u, y, v, \mu), f_2(x, u, y, v, \mu)), \\ (\bar{y}, \bar{v}) = B(\mu)(y, v) + (g_1(x, u, y, v, \mu), g_2(x, u, y, v, \mu)), \end{cases} \quad (1)$$

причем

$$\begin{aligned} f_1(x, y, 0, 0, \mu) &= 0, & f_i(0, 0, y, v, \mu) &= \frac{\partial f_i}{\partial x}(0, 0, y, v, \mu) = 0, \\ g_1(0, 0, y, v, \mu) &= 0, & g_i(x, u, 0, 0, \mu) &= \frac{\partial g_i}{\partial y}(x, u, 0, 0, \mu) = 0, \end{aligned}$$

f_i и g – C^{r-1} -гладки по совокупности переменных.

Пусть Π_0 и Π_1 – достаточно малые окрестности точек $M^+(x^+, u^+, 0, 0)$ и $M^-(0, 0, y^-, v^-)$:

$$\Pi_0 = \{(x_0, u_0, y_0, v_0) : \|(x_0 - x^+, u_0 - u^+)\| \leq \varepsilon_0, \|(y_0, v_0)\| \leq \varepsilon_0\}, \quad (2)$$

$$\Pi_1 = \{(x_1, u_1, y_1, v_1) : \|(x_1, u_1)\| \leq \varepsilon_0, \|(y_1 - y^-, v_1 - v^-)\| \leq \varepsilon_0\}.$$

Производное отображение $T': \Pi_0 \rightarrow \Pi_1$ по траекториям системы в окрестности L_μ определено на $\sigma_0 \subset \Pi_0$, где σ_0 состоит из счетного числа непересекающихся “прямоугольников” σ_n^0 и $\bigcup_{n=\bar{k}}^\infty T_0^n \sigma_n^0 = T' \sigma^0 \subset \Pi_1$, где $\bar{k}$ – номер крайнего “прямоугольника” ($\bar{k}$ зависит от размера рассматриваемой окрестности). Обозначим $\sigma_n^1 = T_0^n \sigma_n^0$. На рис. 4 показан метод построения “прямоугольников” σ_n^0 и σ_n^1 .

Введем координаты (x_i, u_i, y_i, v_i) в окрестностях Π_i . Отображение $T_0^n \sigma_n^0$ может быть записано в перекрестном виде следующим образом [2], [4]:

$$\begin{cases} x_1 = A_1^n(\mu)x_0 + \psi_1(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu), \\ u_1 = A_2^n(\mu)u_0 + \psi_2(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu), \\ y_0 = \gamma^{-n}(\mu)y_1 + \psi_3(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu), \\ v_0 = B_2^{-n}(\mu)v_1 + \psi_4(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu), \end{cases} \quad (3)$$

где $\|\psi_i\|_{C^{r-2}} \leq \hat{\lambda}^n$, $i = 1, 2$; $\|\psi_j\|_{C^{r-2}} \leq \hat{\gamma}^{-n}$, $j = 3, 4$; $\|\psi_i\|_{C^{r-1}} \leq \varepsilon_k$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$;
 $\lambda > \hat{\lambda} > \max\{|\lambda_i|; |\lambda/\gamma|\}$; $\|A_2\| < \hat{\lambda}$; $\gamma < \hat{\gamma} < \min\{|\gamma_j|; \gamma^2\}$; $\|B_2^{-1}\| < \hat{\gamma}^{-1}$;

в случае А1) $A_1^n(\mu) = \lambda^n(\mu)$;

в случае А2) $A_1^n(\mu) = \lambda^n(\mu) \cdot E(n\varphi(\mu))$, где

$$E(n\varphi(\mu)) = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi(\mu)) & -\sin(n\varphi(\mu)) \\ \sin(n\varphi(\mu)) & \cos(n\varphi(\mu)) \end{pmatrix}.$$

Рис. 4

Принимая во внимание условия В)–Е), отображение $T_1: S \rightarrow S$ по траекториям системы X_μ в окрестности Γ_0 можно представить в виде

$$\begin{cases} x_0 - x^+ = F^x(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu), \\ u_0 - u^+ = F^u(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu), \\ y_0 = G(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu), \\ v_1 - v^- = H(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu), \end{cases} \quad (4)$$

где F^x, F^u, G, H — C^r -гладкие функции, $\frac{\partial F^x}{\partial y_1}(0, 0, 0, 0, 0) = b \neq 0$,

$$G(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu) = D(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu) \cdot (y_1 - y^- - \chi)^2 + C(x_1, u_1, v_0, \mu) + \mu, \quad (5)$$

$$D(0, 0, 0, 0, 0) = d, \quad \chi(0, 0, 0, 0) = 0, \quad C(0, 0, 0, \mu) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = c \neq 0,$$

$y_1 - y^- = \chi(x_1, u_1, v_0, \mu)$ — решение уравнения $\frac{\partial G}{\partial y_1}(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu) = 0$, параметр μ входит аддитивно в силу условия Ж).

С учетом представления (4) глобального отображения системы с гомоклиническими кривыми первого класса (условие Е)) определяются следующими аналитическими требованиями: $\gamma > 0, d < 0$ (см. работы [1]–[4], [9], [11]).

§3. Ω -взрыв

Как мы уже отмечали раньше, при $\mu = 0$ мы имеем только две траектории, целиком лежащие в U : само периодическое движение L и гомоклиническую к нему

траекторию Γ . При малых μ множество траекторий из N будет содержаться в некоторой подокрестности $V \subset U$, “диаметр” которой стремится к нулю при $\mu \rightarrow 0$. А именно, справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Множество N целиком лежащих в U траекторий системы X_μ заведомо содержится в окрестности $V(\mu)$, для которой выполнены следующие условия:*

$$V \cap \Pi_0 \subset \Pi_0^*(\mu), \quad V \cap \Pi_1 \subset \Pi_1^*(\mu),$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_0^* &= \left\{ (x_0, u_0, y_0, v_0) : \begin{aligned} &\|(x_0 - x^+, u_0 - u^+)\| \leq \rho(\mu), \\ &0 \leq y_0 \leq \gamma^{-k}(y^- + \rho(\mu)), \quad \|v_0\| \leq C^* \hat{\gamma}^{-k} \end{aligned} \right\}, \\ \Pi_1^* &= \left\{ (x_1, u_1, y_1, v_1) : \begin{aligned} &\|x_1\| \leq \lambda^k (\|x^+\| + \rho(\mu)), \quad \|u_1\| \leq C^* \hat{\lambda}^{k+1}, \\ &\|(y_1 - y^-, v_1 - v^-)\| \leq \rho(\mu). \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

$\rho(\mu) = \rho \cdot (\mu^{1/2} + \mu^{(\ln(\lambda/\hat{\lambda}))/\ln \gamma} \mu^{(\ln(\hat{\gamma}/\gamma))/\ln \gamma})$, $\rho(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, ρ — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в несколько этапов.

Шаг 1. В качестве первоначальных окрестностей возьмем Π_0 и Π_1 (см. (2)). Сразу заметим, что любая траектория, пересекающая окрестность Π_0 в точке с отрицательной координатой y_0 , покидает окрестность U в силу того, что $\gamma > 0$. Поэтому неблуждающим траекториям могут соответствовать только точки с неотрицательной координатой y_0 .

Как мы уже упоминали, отображение по траекториям системы из Π_0 в Π_1 определено на счетном множестве прямоугольников σ_i^0 , где $i \geq \bar{k}$. При этом множество σ_i^0 характеризуется тем, что содержит только те точки, которые за i итераций отображения T_0 попадают в окрестность Π_1 (рис. 4). Так как $\bar{k}$ — номер крайнего прямоугольника, то любые две последовательные точки пересечения с Π_0 и Π_1 неблуждающей в U траектории связаны числом итераций отображения T_0 (T_0^{-1}), не меньшим чем $\bar{k}$. Поэтому координаты пересечения неблуждающей в U траектории с окрестностями Π_0 и Π_1 в силу (3) должны удовлетворять оценкам

$$\begin{aligned} \|x_1\| &\leq \lambda^{\bar{k}} (\|x^+\| + \varepsilon_0 + \nu_{\bar{k}}), \\ \|u_1\| &\leq C^* \hat{\lambda}^{\bar{k}}, \\ |y_0| &\leq \gamma^{-\bar{k}} (y^- + \varepsilon_0 + \nu_{\bar{k}}), \\ \|v_0\| &\leq C^* \hat{\gamma}^{-\bar{k}}, \end{aligned} \tag{6}$$

где C^* — константа, не зависящая от $\bar{k}$, $\nu_{\bar{k}} \rightarrow 0$. Поэтому мы можем выбрать окрестности $\Pi_0^{(1)} \subset \Pi_0$ и $\Pi_1^{(1)} \subset \Pi_1$:

$$\begin{aligned} \Pi_0^{(1)} &= \{(x_0, u_0, y_0, v_0) \in \Pi_0 : 0 \leq y_0 \leq \gamma^{-\bar{k}}(y^- + \varepsilon_0 + \nu_{\bar{k}}), \|v_0\| \leq C^* \hat{\gamma}^{-\bar{k}}\}, \\ \Pi_1^{(1)} &= \{(x_1, u_1, y_1, v_1) \in \Pi_1 : \|x_1\| \leq \lambda^{\bar{k}}(\|x^+\| + \varepsilon_0 + \nu_{\bar{k}}), \|u_1\| \leq C^* \hat{\lambda}^{\bar{k}}\}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Заметим, что неблуждающие точки (точки пересечения неблуждающей траектории с секущей S) из окрестности Π_0 должны целиком содержаться в $T_1(\Pi_1^{(1)}) \cap \Pi_0^{(1)}$. Это позволяет нам оценить координату y_0 в $T_1(\Pi_1^{(1)})$. В силу (4) и того, что $D(0, 0, 0, 0, 0) = d < 0$, мы имеем

$$y_0 = D(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu) \cdot (y_1 - y^- - \chi)^2 + C(x_1, u_1, v_0, \mu) + \mu \leq C(x_1, u_1, v_0, \mu) + \mu.$$

Поскольку $C(0, 0, 0, 0, \mu) = 0$, $\lambda < \hat{\lambda}$ и справедливы оценки (6), мы получаем

$$y_0 \leq \tilde{C} (\lambda^{\bar{k}} + \hat{\gamma}^{-\bar{k}}) + \mu,$$

где $\tilde{C}$ – некоторая константа, не зависящая от $\bar{k}$.

Покажем, что образ $T_1(\Pi_1^{(1)})$ не пересекает полосу σ_k^0 . Действительно, так как $\sigma_k^0 = \Pi_0 \cap T_0^{-\bar{k}}(\Pi_1)$, то из (3) получаем, что σ_k^0 не содержится в полупространстве $y_0 \leq \gamma^{-\bar{k}}(y^- - \varepsilon_0 - \nu_k)$. С другой стороны, мы видим, что при малых (но фиксированных) μ

$$y_0 \leq \tilde{C} (\lambda^{\bar{k}} + \hat{\gamma}^{-\bar{k}} + \mu) \ll \gamma^{-\bar{k}}(y^- - \varepsilon_0 - \nu_k). \quad (7)$$

Это означает, что образ $T_1(\Pi_1^{(1)})$ не пересекает σ_k^0 . Следовательно, $\sigma_k^0 \cap T_1(\sigma_i^1)$, $i = \bar{k}, \dots, \infty$, и траектория, побывавшая на полоске σ_k^0 , на нее никогда не возвращается, а при итерациях в обратном времени вообще покидает рассматриваемую окрестность. Разумно в данном случае сузить окрестность и не рассматривать полосы σ_k^0 и σ_k^1 . В качестве новых окрестностей точек M^+ и M^- рассмотрим

$$\begin{aligned} \Pi_0^{(2)} &= \{(x_0, u_0, y_0, v_0) \in \Pi_0 : 0 \leq y_0 \leq \gamma^{-\bar{k}-1}(y^- + \varepsilon_0 + \nu_{\bar{k}+1}), \|v_0\| \leq C^* \hat{\gamma}^{-\bar{k}-1}\}, \\ \Pi_1^{(2)} &= \{(x_1, u_1, y_1, v_1) \in \Pi_1 : \|x_1\| \leq \lambda^{\bar{k}+1}(\|x^+\| + \varepsilon_0 + \nu_{\bar{k}+1}), \|u_1\| \leq C^* \hat{\lambda}^{\bar{k}+1}\}. \end{aligned}$$

Шаг 3. Повторяя заново шаги 1 и 2 до тех пор, пока справедливо неравенство (7), получаем, что образ “прямоугольников” σ_i^0 с большими номерами i относительно отображений $T_1 T_0^i$ не пересекает σ_i^0 . Поэтому в качестве окрестностей точек M^+ и M^- мы можем выбирать с каждым разом меньшие окрестности. С другой стороны, видно, что существует такой номер k , что пересечение $T_1 T_0^k(\sigma_k^0) \cap \sigma_k^0$ не является пустым. Такой номер k мы будем называть *пограничным*. Именно он определяет размеры минимальной окрестности, содержащей все траектории из N . Нетрудно оценить асимптотический порядок номера k . Пока выполняется неравенство (7) мы можем продолжать уменьшать размеры окрестностей. Этот процесс заканчивается в случае, если (7) не выполнится. Для этого необходимо, чтобы μ и γ^{-k} были величинами одного порядка малости. Или, что то же самое, $k \sim \ln(1/\mu)$. Последнюю запись мы понимаем в том смысле, что существует функция $C(\mu)$ такая, что

$$k(\mu) = \frac{1}{\ln \gamma} \ln \frac{1}{\mu} + C(\mu), \quad C(\mu) \leq \tilde{C}, \quad (8)$$

где $\tilde{C}$ – некоторая константа. Заметим, что $\tilde{C}$ является кусочно-непрерывной функцией. Она разрывна в точках, где целое $k(\mu)$ меняет значения.

Шаг 4. Теперь, используя вид (4) отображения T_1 , мы можем получить оценки на координаты x_0, v_0, y_1, v_1 в окрестностях точек M^+ и M^- . Третье уравнение системы (4) позволяет оценить координату y_1 . А именно, мы имеем

$$y_0 = G(x_1, u_1, y_1 - y^-, v_0, \mu).$$

Последнее соотношение в силу (5) мы перепишем в более удобном виде:

$$y_0 = d(y_1 - y^-)^2 + c^{(1)}x_1 + c^{(2)}u_1 + c^{(3)}v_0 + \mu + \dots,$$

где многоточие означает члены, малые по сравнению с выписанными. Имея оценки на координаты x_1, v_1, y_0, v_0 и принимая во внимание (8) и неравенства $\hat{\lambda} < \lambda < \gamma^{-1}$, $\hat{\gamma}^{-1} < \gamma^{-1}$, мы получаем, что

$$|y_1 - y^-| \leq a_1 \gamma^{-k(\mu)/2},$$

где a_1 — некоторая положительная константа. В дальнейшем зависимость k от параметра μ мы будем опускать.

Из первого, второго и четвертого уравнений (4) аналогичным образом мы получаем оценки

$$\|x_0 - x^+\| \leq a_2 \gamma^{-k/2}, \quad \|u_0 - u^+\| \leq a_3 \gamma^{-k/2}, \quad \|v_1 - v^-\| \leq a_4 \gamma^{-k/2}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Pi_0^{(3)} &= \left\{ (x_0, u_0, y_0, v_0) : \begin{aligned} &\|(x_0 - x^+, u_0 - u^+)\| \leq \tilde{a} \gamma^{-k/2}, \\ &0 \leq y_0 \leq \gamma^{-k}(y^- + \varepsilon_0 + \nu_k), \quad \|v_0\| \leq C^* \hat{\gamma}^{-k} \end{aligned} \right\}, \\ \Pi_1^{(3)} &= \left\{ (x_1, u_1, y_1, v_1) : \begin{aligned} &\|x_1\| \leq \lambda^k (\|x^+\| + \varepsilon_0 + \nu_k), \quad \|u_1\| \leq C^* \hat{\lambda}^k, \\ &\|(y_1 - y^-, v_1 - v^-)\| \leq \tilde{a} \gamma^{-k/2} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

И, наконец, заметим, что в качестве исходного ε_0 , не уменьшая общности, мы можем выбрать величину порядка $O(\gamma^{-k/2})$. В результате мы доказали, что множество N целиком содержится в окрестности V , $V \cap \Pi_0 \subset \Pi_0^k$, $V \cap \Pi_1 \subset \Pi_1^k$, где

$$\begin{aligned} \Pi_0^k &= \left\{ (x_0, u_0, y_0, v_0) : \begin{aligned} &\|(x_0 - x^+, u_0 - u^+)\| \leq \rho_k, \\ &0 \leq y_0 \leq \gamma^{-k}(y^- + \rho_k), \quad \|v_0\| \leq C^* \hat{\gamma}^{-k} \end{aligned} \right\}, \\ \Pi_1^k &= \left\{ (x_1, u_1, y_1, v_1) : \begin{aligned} &\|x_1\| \leq \lambda^k (\|x^+\| + \rho_k), \quad \|u_1\| \leq C^* \hat{\lambda}^{k+1}, \\ &\|(y_1 - y^-, v_1 - v^-)\| \leq \rho_k \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

где $\rho_k = \hat{\rho} \cdot (\gamma^{-k/2} + (\hat{\lambda}/\lambda)^k + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k})$ для некоторой константы $\hat{\rho}$. Принимая во внимание тот факт, что μ есть величина порядка $O(\gamma^{-k})$ (см. соотношения (8)), мы получаем исходные окрестности Π_0^* и Π_1^* . Лемма доказана.

Следствие 1. *Окрестность $V(\mu)$ стягивается к $\Gamma_0 \cup L_0$ при $\mu \rightarrow 0$.*

§ 4. Построение областей гиперболичности.

Доказательство теоремы

Рассмотрим отображение $\widehat{T} = T_1 T_0^i: \sigma_i^0 \rightarrow \Pi_1$. Справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Для произвольных $i, j \geq k(\mu)$ при выполнении неравенства*

$$\begin{aligned} \gamma^{-j} y^- - c x^+ \lambda^i - \mu &< -\delta_k (\lambda^i + \gamma^{-j}) && \text{в случае A1),} \\ \gamma^{-j} y^- - c E(i\varphi) x^+ \lambda^i - \mu &< -\delta_k (\lambda^i + \gamma^{-j}) && \text{в случае A2),} \end{aligned} \quad (9)$$

где $\delta_k = R \cdot (\gamma^{-k/2} + (\widehat{y}/y)^k + (\widehat{\lambda}/\lambda)^{-k})$, R – некоторая константа, $\delta_k \rightarrow 0$, $\delta_k > 0$, множество $T_1 \sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$ не пусто и состоит из двух компонент связности; при выполнении неравенства

$$\begin{aligned} \gamma^{-j} y^- - c x^+ \lambda^i - \mu &> \delta_k (\lambda^i + \gamma^{-j}) && \text{в случае A1),} \\ \gamma^{-j} y^- - c E(i\varphi) x^+ \lambda^i - \mu &> \delta_k (\lambda^i + \gamma^{-j}) && \text{в случае A2)} \end{aligned} \quad (10)$$

множество $T_1 \sigma_i^1 \cap \sigma_j^0 = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В целях упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_n^x(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu) &= A_1^n(\mu) x_0 + \psi_{1n}(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu), \\ \xi_n^u(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu) &= A_2^n(\mu) u_0 + \psi_{2n}(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu), \\ \eta_n^y(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu) &= \gamma^{-n}(\mu) y_1 + \psi_{3n}(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu), \\ \eta_n^v(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu) &= B_2^{-n}(\mu) v_1 + \psi_{4n}(x_0, u_0, y_1, v_1, \mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} \|\psi_{1n}\|_{C^1} &\leq \widehat{\lambda}^n, & \|\psi_{2n}\|_{C^1} &\leq \widehat{\lambda}^n, \\ \|\psi_{3n}\|_{C^1} &\leq \widehat{\lambda}^{-n}, & \|\psi_{4n}\|_{C^1} &\leq \widehat{\lambda}^{-n}. \end{aligned} \quad (12)$$

“Прямоугольник” σ_i^1 расслаивается на m -параметрическое семейство n -мерных поверхностей $\widetilde{\xi}^i$:

$$(x_1, u_1) = (\xi_i^x(x', u', y_1, v_1, \mu), \xi_i^u(x', u', y_1, v_1, \mu)),$$

где $x', u' \in J_k \equiv \{(x_0, u_0) : \|(x_0, u_0) - (x^+, u^+)\| \leq \rho_k\}$ – параметры,

$$\rho_k = \rho \cdot \left(\gamma^{-k/2} + \left(\frac{\widehat{\lambda}}{\lambda} \right)^k + \left(\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma} \right)^{-k} \right);$$

σ_j^0 расслаивается на n -параметрическое семейство m -мерных поверхностей $\widetilde{\eta}^j$:

$$(y_0, v_0) = (\eta_j^y(x_0, u_0, y', v', \mu), \eta_j^v(x_0, u_0, y', v', \mu)),$$

где параметры $y', v' \in I_k \equiv \{(y_1, v_1) : \|(y_1 - y^-, v_1 - v^-)\| \leq \rho_k\}$.

Выясним условия, при которых $\tilde{\xi}^i$ отображаются в поверхности, пересекающие $\tilde{\eta}^j$ при всех $x', u' \in J_k, y', v' \in I_k$. Другими словами, надо показать разрешимость системы

$$\begin{cases} x_0 - x^+ = F^x(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1 - y^-, \eta_j^v, \mu), \\ u_0 - u^+ = F^u(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1 - y^-, \eta_j^v, \mu), \\ \eta_j^y = G(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1 - y^-, \eta_j^v, \mu), \\ v_1 - v^- = H(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1 - y^-, \eta_j^v, \mu) \end{cases} \quad (13)$$

или равносильного ей уравнения

$$\begin{aligned} \eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu \\ = D(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1, \eta_j^v, \mu)(y_1 - y^- - \chi(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu))^2, \end{aligned} \quad (14)$$

которое можно получить, исключив x_0, u_0, v_1 из первого, второго и четвертого уравнений системы (13) и подставив их в третье уравнение системы (13).

Рассмотрим левую часть уравнения (14). В силу (11)

$$\begin{aligned} \eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v) - \mu \\ = \gamma^{-j} y' + \psi(x_0, u_0, y', v') - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v) - \mu. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (11) и (12) видно, что

$$\xi_i^x = O(\lambda^i), \quad \xi_i^u = O(\hat{\lambda}^i), \quad \eta_i^v = O(\hat{\gamma}^{-j}), \quad (16)$$

поэтому соотношение (15) переписывается в виде

$$\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v) - \mu = \gamma^{-j} y' - cA_1^i(\mu)x' - \mu + \dots,$$

где многоточием обозначены члены порядка $O(\hat{\lambda}^i + \hat{\gamma}^{-j})$.

В силу того, что справедливы неравенства $|y' - y^-| \leq \rho_k, \|x' - x^+\| \leq \rho_k$, где $\rho_k = \rho \cdot (\gamma^{-k/2} + (\hat{\lambda}/\lambda)^k + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k})$, мы получаем

$$\begin{aligned} \eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v) - \mu \\ = \gamma^{-j} y' - cA_1^i x' - \mu + O(\hat{\lambda}^i + \hat{\gamma}^{-j}) \left(\gamma^{-k/2} + \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^k + \left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \right)^{-k} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Ясно, что существует такая константа R_0 , что для всех $R \geq R_0$, которые определяют δ_k (см. условие леммы 2), из выполнения неравенств (9) следует

$$\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v) - \mu < 0.$$

Так как по условию $D(0, 0, 0, 0, 0) = d < 0$ (а следовательно, $D(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^y, \eta_j^v, \mu) < 0$), то уравнение (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_1 - y^- = \chi(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) \\ + (-1)^\alpha \sqrt{D^{-1}(\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что здесь мы имеем две ветви уравнения ($\alpha = 0, 1$). Доказательство существования решения уравнения (18) обоснуем, используя принцип сжимающих отображений.

Рассмотрим отображение $\sigma_\alpha: Y_k \rightarrow Y_k$, $Y_k = \{y_1 : |y_1 - y^-| \leq \rho_k\}$,

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 - y^- &= \chi(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) \\ &+ (-1)^\alpha \sqrt{D^{-1}(\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Покажем, что σ_α переводит Y_k в себя. В силу (16) мы имеем оценки

$$\begin{aligned} \|\chi(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu)\| &\leq \rho_1(\lambda^i + \hat{\gamma}^{-j} + |\mu|), \\ \|\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu\| &\leq \rho_2(\lambda^i + \hat{\gamma}^{-j} + |\mu|). \end{aligned} \quad (20)$$

Параметр μ в нашей задаче находится в строгой зависимости от номера $k(\mu)$ крайних “прямоугольников” σ_k^0 и σ_k^1 . Как мы уже отмечали (см. формулу (8)),

$$k(\mu) = \frac{1}{\ln \gamma} \ln \frac{1}{\mu} + c(\mu), \quad \mu \sim \gamma^{-k},$$

поэтому для отображения (19) в силу (20) мы получаем

$$|\hat{y}_1 - y^-| \leq \rho_1(\lambda^i + \hat{\gamma}^{-j}) + |\mu| + \sqrt{\rho_3(\lambda^i + \gamma^{-j}) + |\mu|} \leq \rho_4 \gamma^{-k/2}.$$

Не уменьшая общности, в качестве величины ρ_k , которая определяет размеры окрестностей Π_0^* и Π_1^* , мы можем взять

$$\rho_k = \rho_4 \cdot \left(\gamma^{-k/2} + \left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} \right)^k + \left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \right)^{-k} \right).$$

В этом случае отображение σ_α переводит Y_k в себя.

Покажем, что σ_α является сжимающим. Для этого проведем серию вспомогательных вычислений. Посчитаем производную $\frac{\partial \hat{y}_1}{\partial y_1}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial \chi}{\partial y_1}(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_1}(\sqrt{D^{-1}}) \sqrt{\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu} + \frac{1}{2} \sqrt{D^{-1}} \frac{\frac{\partial}{\partial y_1}(\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu)}{\sqrt{\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Сразу заметим, что

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \xi_i^x}{\partial y_1} \right\| &\leq \hat{\lambda}^i, & \left\| \frac{\partial \xi_i^u}{\partial y_1} \right\| &\leq \hat{\lambda}^i, \\ \left\| \frac{\partial \eta_i^y}{\partial y_1} \right\| &\leq \gamma^{-j} + \hat{\gamma}^{-j}, & \left\| \frac{\partial \eta_i^v}{\partial y_1} \right\| &\leq \hat{\gamma}^{-j}. \end{aligned} \quad (22)$$

Эти оценки легко получаются из (11) и (12).

1) Оценим сверху каждое из слагаемых правой части формулы (21).

$$\frac{\partial \chi}{\partial y_1}(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) = \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \xi_i^x}{\partial y_1} + \frac{\partial \chi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \xi_i^u}{\partial y_1} + \frac{\partial \chi}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial \eta_j^v}{\partial y_1}.$$

Поэтому из (22) следует

$$\left\| \frac{\partial \chi}{\partial y_1} \right\| \leq \rho_5(\widehat{\lambda}^i + \widehat{\gamma}^{-j}). \quad (23)$$

2) Оценим второе слагаемое. Ясно, что $\frac{\partial}{\partial y_1}(\sqrt{D^{-1}})$ есть величина ограниченная. Выражение $\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu$ нами уже было преобразовано. Поэтому в силу (17) верна следующая оценка:

$$|\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu| \leq \rho_6(\lambda^i + \widehat{\gamma}^{-j} + |\mu|).$$

Так как μ – величина порядка γ^{-k} , $\lambda < \gamma^{-k}$, $i, j \geq k$, в результате получаем, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y_1}(\sqrt{D^{-1}}) \sqrt{\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu} \right\| \leq \rho_7 \gamma^{-k/2}. \quad (24)$$

3) И, наконец, рассмотрим последнее слагаемое правой части формулы (21). Используя неравенства (22), мы оценим величину $\frac{\partial}{\partial y_1}(\eta_j^y(\dots) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu)$. Именно,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y_1}(\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu) \right\| \leq \rho_8(\widehat{\lambda}^i + \widehat{\gamma}^{-j}).$$

А так как в силу (17)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu} \\ &= \sqrt{\gamma^{-j} y^- c A_1^i(\mu) x' - \mu + O(\lambda^i + \gamma^{-j}) \left(\gamma^{-k/2} + \left(\frac{\widehat{\lambda}}{\lambda} \right)^k + \left(\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma} \right)^{-k} \right)} \end{aligned}$$

и справедливы условия леммы, то мы можем так определить последовательность δ_k , что

$$\sqrt{\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu} > \rho_9 \sqrt{(\lambda^i + \gamma^{-j}) \gamma^{-k/2} + \widehat{\lambda}^k + \widehat{\gamma}^{-k}}. \quad (25)$$

Таким образом, мы получили

$$\left\| \frac{1}{2} \sqrt{D^{-1}} \frac{\frac{\partial}{\partial y_1}(\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu)}{\sqrt{\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu}} \right\| \leq \rho_{10} \frac{\widehat{\lambda}^i + \widehat{\gamma}^{-j}}{\sqrt{(\lambda^i + \gamma^{-j}) \gamma^{-k/2} + \widehat{\lambda}^k + \widehat{\gamma}^{-k}}}. \quad (26)$$

Поэтому из (23), (24) и (26) следует, что

$$\left\| \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial y_1} \right\| \leq \rho_5 (\hat{\lambda}^i + \hat{\gamma}^{-j}) + \rho_7 \gamma^{-k/2} + \rho_{10} \frac{\hat{\lambda}^i + \hat{\gamma}^{-j}}{\sqrt{(\lambda^i + \gamma^{-j}) \gamma^{-k/2} + \hat{\lambda}^k + \hat{\gamma}^{-k}}}.$$

Ясно, что при больших k, i, j

$$\left\| \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial y_1} \right\| \leq q < 1.$$

Следовательно, отображение σ_α является сжимающим. Значит, у σ_α ($\alpha = 0, 1$) существует неподвижная точка $\tilde{Y}_1^\alpha$. Это доказывает непустоту множества $T_1 \sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$. Докажем, что множество $T_1 \sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$ двусвязное. Для этого нам достаточно показать, что отображения σ_0 и σ_1 действуют на пересекающихся подмножествах Y_k^0 и Y_k^1 интервала Y_k и отображают их в себя.

Представим σ_α в виде

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 - y^- &= \chi(0, 0, 0, \mu) + (\chi(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \chi(0, 0, 0, \mu)) \\ &\quad + (-1)^\alpha \sqrt{D^{-1}(\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Используя оценки (16) на функции $\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v$, получаем, что

$$(\chi(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \chi(0, 0, 0, \mu)) < \rho_{11}(\hat{\lambda}^i + \hat{\gamma}^{-j}).$$

Из (25) следует, что

$$\sqrt{D^{-1}(\eta_j^y(\dots) - C(\dots) - \mu)} > \rho_{12} \sqrt{\delta_k(\lambda^i + \gamma^{-j})}.$$

А так как $\sqrt{\delta_k(\lambda^i + \gamma^{-j})} \gg \lambda^i + \gamma^{-j}$, то найдется константа ρ_{13} такая, что σ_0 будет отображать Y_k^0 в себя, где

$$Y_k^0 = \{y_1 \in Y_0 : y_1 - y^- > \chi(0, 0, 0, \mu) - \rho_{13} \sqrt{\delta_k(\lambda^i + \gamma^{-j})}\}.$$

Отображение σ_1 действует на подмножестве Y_k^1 , где

$$Y_k^1 = \{y_1 \in Y_1 : y_1 - y^- > \chi(0, 0, 0, \mu) - \rho_{13} \sqrt{\delta_k(\lambda^i + \gamma^{-j})}\},$$

и переводит его в себя.

Так как Y_k^1 и Y_k^0 не пересекаются, то неподвижные точки отображений σ_1 и σ_0 разделены. Следовательно, множество $T_1 \sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$ является двусвязным.

Теперь покажем, что при выполнении неравенства (10) множества $T_1(\sigma_i^0)$ и σ_j^1 не пересекаются.

Из соотношений (17) и (10) следует, что

$$\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, y', v', \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu > 0.$$

Рис. 5

Так как по условию $D(0, 0, 0, 0, 0) = d < 0$, то уравнение (14) не имеет решений. Это говорит о том, что поверхности $\tilde{\xi}^i$ при всех $x', u' \in J_k$, $y', v' \in I_k$ переходят в поверхности, не пересекающие ξ^j . Следовательно, в этом случае множество $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$ является пустым.

Лемма доказана.

Пусть выполняется неравенство (9), т.е. $T_1T_0^i\sigma_i^0 \cap \sigma_j^0 \neq \emptyset$. Тогда прообраз каждой компоненты относительно отображения $T_1T_0^i: \sigma_i^0 \rightarrow \sigma_j^0$ представляет “полоску” $\sigma_{ij}^{0\alpha} \subset \sigma_j^0$, $\alpha = 1, 2$ (рис. 5).

ЛЕММА 3. При выполнении условий (9) отображение $T_1T_0^i$ на $\sigma_{ij}^{0\alpha}$ является седловым, т.е. оно может быть записано в виде

$$\begin{cases} (\bar{x}_0 - x^+, u_0 - u^+) = \tilde{F}_\alpha(x_0, u_0, \bar{y}_1, \bar{v}_1, \mu), \\ (\bar{y}_1 - y^-, v_1 - v^-) = \tilde{G}_\alpha(x_0, u_0, \bar{y}_1, \bar{v}_1, \mu), \end{cases} \quad (28)$$

где для производных функций $\tilde{F}_\alpha$ и $\tilde{G}_\alpha$ имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial \tilde{F}_\alpha}{\partial(x_0, u_0)} \right\| + \left\| \frac{\partial \tilde{F}_\alpha}{\partial(\bar{y}_1, \bar{v}_1)} \right\| + \left\| \frac{\partial \tilde{G}_\alpha}{\partial(x_0, u_0)} \right\| + \left\| \frac{\partial \tilde{G}_\alpha}{\partial(\bar{y}_1, \bar{v}_1)} \right\| < \frac{1}{2}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (9) и ограничение на параметр μ позволяют отображение записать в виде

$$\begin{cases} \bar{x}_0 - x^+ = F^x(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1 - y^-, \eta_j^v, \mu), \\ \bar{u}_0 - u^+ = F^u(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1 - y^-, \eta_j^v, \mu), \\ y_1 - y^- = \chi + (-1)^\alpha \sqrt{D^{-1}(\eta_j^y(\dots) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu)}, \\ v_1 - v^- = H(\xi_i^x, \xi_i^u, y_1 - y^-, \eta_j^v, \mu). \end{cases} \quad (30)$$

Так же, как и в лемме 2, можно показать, что отображения τ_α ($\alpha = 0, 1$):

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 - y^- &= \chi + (-1)^\alpha \\ &\times \sqrt{D^{-1}(\eta_j^y(x^+ + F^x, u^+ + F^u, \bar{y}_1 - y^-, \eta_j^v, \mu) - C(\xi_i^x, \xi_i^u, \eta_j^v, \mu) - \mu)}, \end{aligned} \quad (31)$$

гладко зависящие от параметров $x_0, u_0, \bar{y}_1, \bar{v}_1$, являются сжимающими, а следовательно, третье уравнение системы (30) разрешается относительно $y_1 - y^-$. Исключая переменную y_1 из оставшихся уравнений системы (30), приходим к следующей записи отображения:

$$\begin{cases} (\bar{x}_0 - x^+, u_0 - u^+) = \tilde{F}_\alpha(x_0, u_0, \bar{y}_1, \bar{v}_1, \mu), \\ (\bar{y}_1 - y^-, v_1 - v^-) = \tilde{G}_\alpha(x_0, u_0, \bar{y}_1, \bar{v}_1, \mu). \end{cases}$$

Оценки на производные функций $\tilde{F}_\alpha$ и $\tilde{G}_\alpha$ проверяются непосредственным их вычислением. Лемма доказана.

Рассмотрим интервал параметров $\Delta_k(\mu) = (\mu_k^1, \mu_k^2)$, где

$$\begin{aligned} \mu_k^1 &= \gamma^{-k-1}y^- + \|c\| \|x^+\| \lambda^k + \delta_k(\gamma^{-k-1} + \lambda^k), \\ \mu_k^2 &= \gamma^{-k}y^- - \|c\| \|x^+\| \lambda^k - \delta_k(\gamma^{-k} + \lambda^k), \end{aligned}$$

и возьмем произвольное $\mu \in \Delta_k(\mu) = (\mu_k^1, \mu_k^2)$.

Из леммы 2 непосредственно следует, что условие

$$\gamma^{-k-1}y^- + \|c\| \|x^+\| \lambda^k - \mu < -\delta_k(\gamma^{-k-1} + \lambda^k) \quad (32)$$

гарантирует двусвязное пересечение всех “прямоугольников” σ_i^0 и “подков” $T_1\sigma_j^1$, $i = k+1, \dots, \infty, j = k, \dots, \infty$ (см. рис. 6). Нетрудно увидеть, что при значениях параметра μ , удовлетворяющих также условию

$$\gamma^{-k}y^- - \|c\| \|x^+\| \lambda^k - \mu > \delta_k(\gamma^{-k} + \lambda^k), \quad (33)$$

Рис. 6

ни одна “подкова” $T_1 \sigma_j^1$ не имеет общих точек с σ_k^0 . Неравенства (32) и (33) являются совместными для интервалов параметров $\mu \in \Delta_k(\mu) = (\mu_k^1, \mu_k^2)$,

$$\begin{aligned} \mu_k^1 &= \gamma^{-k-1} y^- \left(1 + \frac{\|c\| \|x^+\|}{y^-} (\lambda\gamma)^k \gamma + \dots \right), \\ \mu_k^2 &= \gamma^{-k} y^- \left(1 - \frac{\|c\| \|x^+\|}{y^-} (\lambda\gamma)^k + \dots \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Изучим множество траекторий систем, отвечающих значениям параметра из интервала $\Delta_k(\mu)$.

Построим подсистему Ω топологической схемы Бернулли из трех символов 0, 1, 2, потребовав выполнение следующих условий:

- 1) в Ω нет траекторий с двумя соседними ненулевыми символами;
- 2) длина k_s отрезка из нулей, следующего за ненулевым символом, не менее k .

Ясно, что построенная подсистема Ω является топологической марковской цепью, граф которой изображен на рис. 7. Рассмотрим произвольную траекторию рассматриваемой системы X_μ , целиком лежащую в окрестности $V(\mu)$. Траектория обязана пересекать секущую S только в точках $\sigma^0 = \bigcup_{n=k}^\infty T_0^n \sigma_n^0$ (если траектория не является асимптотической к периодической орбите L_μ системы X_μ). Предположим, что траектория последовательно бывает на множествах $\sigma_{l_s l_{s+1}}^{0\alpha_s}$, $\sigma_{l_{s+1} l_{s+2}}^{0\alpha_{s+1}}$ и т. д. По этой траектории мы построим траекторию из Ω

$$(\dots, 0, \alpha_{s-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{l_s}, \alpha_s, \underbrace{0, \dots, 0}_{l_{s+1}}, \alpha_{s+1}, 0, \dots). \quad (35)$$

Справедливо и обратное: по любой траектории (35) мы восстанавливаем бесконечную в обе стороны последовательность отображений и “полосок”:

$$\dots \xrightarrow{T_1 T_0^{l_{s-1}}} \sigma_{l_s l_{s+1}}^{0\alpha_s} \xrightarrow{T_1 T_0^{l_s}} \sigma_{l_{s+1} l_{s+2}}^{0\alpha_{s+1}} \xrightarrow{T_1 T_0^{l_{s+1}}} \dots, \quad (36)$$

Рис. 7

$\alpha_s = 1, 2$, которая удовлетворяет в силу леммы 2 всем требованиям леммы о седловой неподвижной точке в прямом произведении пространств [12]. Следовательно, (36) имеет единственное решение, отвечающее неблуждающей траектории системы X_μ , $\mu \in \Delta_k(\mu)$, седлового типа. Стоит отметить, что из рассмотрения нельзя выкидывать и траектории асимптотические к L_μ : при этом достаточно положить $j = \infty$ или $i = \infty$ (справедливость лемм 2 и 3 непосредственно проверяется). Таким образом, мы доказали, что справедлива

ЛЕММА 4. *Траектории систем X_μ , $\mu \in \Delta_k(\mu)$, целиком лежащие в окрестности $V(\mu)$, являются седловыми и находятся во взаимно-однозначном соответствии и взаимно-непрерывном соответствии с траекториями подсистемы Ω .*

Чтобы закончить доказательство теоремы, воспользуемся результатами работы [13]. Рассмотрим надстройку над марковской цепью Ω . Из [13] следует, что она топологически эквивалентна надстройке над схемой Бернулли B_3 . Это заканчивает доказательство основной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $\lambda > 0$ можно уточнить границы интервалов $\Delta_k(\mu)$, а именно, в качестве μ_k^1 и μ_k^2 выбрать следующие значения (см. также рис. 8): если $c > 0$ (случай, когда семейство X_μ трансверсально к поверхности H_1^1), то

$$\begin{aligned}\mu_k^1 &= \gamma^{-k-1}y^-(1 + \dots), \\ \mu_k^2 &= \gamma^{-k}y^-\left(1 - \frac{\|c\| \|x^+\|}{y^-}(\lambda\gamma)^k + \dots\right),\end{aligned}$$

если $c < 0$ (X_μ трансверсально к H_2^1), то

$$\begin{aligned}\mu_k^1 &= \gamma^{-k-1}y^-\left(1 + \frac{\|c\| \|x^+\|}{y^-}(\lambda\gamma)^k\gamma + \dots\right), \\ \mu_k^2 &= \gamma^{-k}y^-(1 + \dots).\end{aligned}$$

Рис. 8

Многоточиями обозначены члены порядка $o((\lambda\gamma)^k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Назовем *относительной мерой гиперболичности* величину

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{m(B)}{\mu},$$

где $B = \{\hat{\mu} : \hat{\mu} \in (0, \mu), X_{\mu} - \text{гиперболична}\}$, m — лебегова мера. Из (34) видно, что длина интервала $\Delta_k(\mu)$ равна $\gamma^{-k}(1 - 1/\gamma)y^-(1 + \dots)$. Поэтому, просуммировав длины всех интервалов гиперболичности, получаем, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{m(B)}{\mu} = 1.$$

Этот результат аналогичен [6]–[8], но доказан для многомерных систем.

Список литературы

1. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О существовании областей Ньюхауса в окрестности систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Докл. АН. 1993. Т. 329. № 4. С. 404–407.
2. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. АН. 1993. Т. 330. № 2. С. 144–147.
3. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1049–1053.
4. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 6. С. 1165–1197.
5. Newhouse S. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1979. V. 50. P. 101–151.
6. Newhouse S., Palis J. Cycles and bifurcation theory // Astérisque. 1976. V. 31. P. 44–140.
7. Palis J., Takens F. Cycles and measure of bifurcation sets for two-dimensional diffeomorphisms // Invent. Math. 1985. V. 82. P. 397–422.
8. Palis J., Takens F. Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits // Ann. of Math. 1987. V. 125. P. 337–374.
9. Гаверилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. 1 // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). № 4. С. 475–492; 2 // Матем. сб. 1973. Т. 90 (132). № 1. С. 139–157.
10. Hirsh M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds // Lect. Notes in Math. V. 583. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
11. Гонченко С. В. Нетривиальные гиперболические подмножества систем с негрубой гомоклинической кривой // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1984. С. 89–102.
12. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). № 4. С. 378–397.
13. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Об особых множествах систем Морса–Смейла // Труды ММО. 1973. Т. 28. С. 181–214.

НИИ прикладной математики и кибернетики
при Нижегородском государственном
университете им. Н. И. Лобачевского,
Ниžний Новгород

E-mail: stenkin@focus.nnov.su, shilnikov@focus.nnov.su

Поступила в редакцию
25.06.1997