Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Модули над наследственными кольцами, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 4, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:36:41

УДК 512.55

А. А. Туганбаев

Модули над наследственными кольцами

Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся примитивным справа. Получено полное описание π -инъективных A -модулей. Выяснено, когда классическое кольцо частных кольца A является π -проективным A -модулем.

Получен критерий того, что наследственное справа нётерово справа первичное кольцо является полуцепным кольцом.

Библиография: 8 названий.

Все кольца, встречающиеся в работе, предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа “нётерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Через $J(M)$ обозначается радикал Джекобсона модуля M . Модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. Модуль называется *цепным*, если любые его два подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным модулем*. Цепная нётерова область A называется *полной*, если кольцо A является полным относительно $J(A)$ -адической топологии.

Модуль M называется *проективным относительно модуля N* (или *N -проективным*), если для любого эпиморфизма $h: N \rightarrow \bar{N}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}: M \rightarrow \bar{N}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow N$, что $hf = \bar{f}$. Модуль, проективный относительно себя, называется *квазипроективным* (или *самопроективным*) модулем. Модуль M называется *π -проективным* (см. [1, с. 359]), если для любых его подмодулей U и V таких, что $U + V = M$, существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f(M) \subseteq U$, $(1 - f)(M) \subseteq V$. Если все фактормодули модуля M являются неразложимыми, то M является, очевидно, π -проективным модулем. Поэтому все цепные модули являются π -проективными. Каждый квазипроективный модуль является π -проективным [1, с. 359]. Любая квазициклическая абелева группа $C(p^\infty)$ является π -проективным, но не квазипроективным модулем над кольцом целых чисел.

Напомним, что каждое нётерово первичное кольцо A обладает простым артиновым классическим кольцом частных Q , причем Q_A является инъективным неингулярным правым (левым) A -модулем. В [2, теорема 8] выяснено, когда классическое кольцо частных наследственного нётерова первичного кольца A , не являющегося примитивным справа, является квазипроективным правым A -модулем. В связи этим отметим первые два основных результата данной работы – теоремы 1 и 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – наследственное справа нётерово справа первичное кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) существует ненулевой инъективный π -проективный правый A -модуль M , не являющийся сингулярным;
- (2) A – полуцепное кольцо.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00627).

ТЕОРЕМА 2. Пусть Q – классическое кольцо частных наследственного нётерова первичного кольца A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) Q – π -проективный правый A -модуль;
- (2) либо A – цепная нётерова область, либо существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D .

Существуют цепные нётеровы области A , не являющиеся ни примитивными справа, ни полными (например, в качестве A можно взять кольцо всех рациональных чисел с нечетными знаменателями). Поэтому из теоремы 2 следует, что существуют наследственные нётеровы первичные кольца A , не являющиеся примитивными справа, у которых классические кольца частных являются π -проективными, но не квазипроективными правыми A -модулями. Следовательно, даже в не примитивном случае, существуют кольца, подпадающие под теорему 2 и не подпадающие под вышеупомянутую теорему 8 из [2].

Модуль M называется *инъективным относительно модуля N* (или *N -инъективным*), если для любого подмодуля $\overline{N}$ модуля N каждый гомоморфизм $\overline{f}: \overline{N} \rightarrow M$ может быть продолжен до гомоморфизма $f: N \rightarrow M$. Модуль, инъективный относительно себя, называется *квазиинъективным* (или *самoinъективным*) модулем. Модуль M называется *π -инъективным* (см. [1, с. 367]), если для любых его подмодулей U и V таких, что $U \cap V = 0$, существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f(U) = 0$, $(1 - f)(V) = 0$. Модуль называется *равномерным*, если все его подмодули являются неразложимыми. В частности, все цепные модули являются π -инъективными. Каждый квазиинъективный модуль является π -инъективным. Бесконечная циклическая группа является π -инъективным, но не квазиинъективным, равномерным модулем над кольцом целых чисел.

В [2, теорема 7] получено полное описание квазиинъективных правых модулей над ограниченными наследственными нётеровыми первичными кольцами. В связи с этим мы докажем третий основной результат работы – теорему 3.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M_A – модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , причем A не является примитивным справа. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – π -инъективный модуль;
- (2) либо M – инъективный модуль, либо M – квазиинъективный сингулярный модуль, либо $M = T \oplus U$, где T – инъективный сингулярный модуль, U – равномерный несингулярный модуль.

Модуль, не имеющий ненулевых инъективных подмодулей, называется *редуцированным*. Модуль, не содержащий бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей, называется *конечномерным* (в смысле Голди). Четвертым основным результатом работы является полученный в теореме 4 критерий проективности.

ТЕОРЕМА 4. Пусть M_A – модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , причем A не является примитивным справа кольцом. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M_A – конечнопорожденный проективный модуль;
- (2) M – π -проективный редуцированный конечномерный несингулярный модуль.

Заметим, что в теореме 4 нельзя опустить условие редуцированности. Действительно, пусть A – кольцо всех рациональных чисел с нечетными знаменателями, Q – поле частных коммутативной цепной нётеровой наследственной области A . Тогда Q_A – π -проективный конечномерный несингулярный модуль, не являющийся проективным.

Доказательство теорем разбито на ряд лемм, сгруппированных в два параграфа. Приведем ряд необходимых определений и обозначений. Модуль называется *вполне инъективным*, если все его фактормодули инъективны. Подмодуль фактормодуля модуля M называется *подфактором* модуля M . Через $\text{End}(M)$ и $\text{Lat}(M)$ обозначаются, соответственно, кольцо эндоморфизмов и решетка подмодулей модуля M . Через $r_A(N)$ обозначается аннулятор в кольце A подмножества N правого модуля M_A , причем индекс может опускаться, когда ясно, какое кольцо имеется в виду. Через $\text{Sing}(M)$ обозначается *сингулярный подмодуль* модуля M_A над кольцом A (т.е. множество всех таких элементов $m \in M$, что $r(m)$ – существенный правый идеал кольца A). Модуль M_A называется *несингулярным* (*сингулярным*), если $\text{Sing}(M) = 0$ ($\text{Sing}(M) = M$). Элемент a кольца A называется *регулярным*, если $r(a) = \ell(a) = 0$, где $\ell(a)$ – левый аннулятор элемента $a \in A$. Модуль M_A называется *делимым*, если $Ma = M$ для любого регулярного элемента $a \in A$. Через $T(M)$ обозначается *периодическая часть* модуля M_A (т.е. множество всех таких элементов $m \in M$, что аннулятор $r(m)$ содержит регулярный элемент кольца A). Модуль M_A называется *периодическим* (*модулем без кручения*), если $T(M) = M$ ($T(M) = 0$). Прямая сумма равномерных модулей называется *полуравномерным* модулем. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Модуль, у которого все циклические подмодули проективны, называется *риккартовым* модулем. Модуль M называется *конечно точным*, если существует такое натуральное число n , что прямая сумма M^n изоморфных копий модуля M содержит свободный циклический подмодуль. Модуль называется *полуартинновым*, если каждый его ненулевой фактормодуль является существенным расширением полупростого модуля. Модуль M называется *дистрибутивным*, если $\text{Lat}(M)$ – дистрибутивная решетка (т.е. $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для любых подмодулей X, Y, Z модуля M). Кольцо A называется *ограниченным справа*, если каждый его существенный правый идеал содержит ненулевой идеал кольца A . Кольцо A называется *совершенным справа*, если $A/J(A)$ – артиново кольцо и для любой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов из $J(A)$ существует такой номер n , что $a_n \cdot \dots \cdot a_1 = 0$.

§1. Несингулярные инъективные модули и полупростые кольца

ЛЕММА 1.1. Пусть A – кольцо, Q – инъективная оболочка модуля A_A , E_A – модуль, не являющийся сингулярным. Тогда справедливо следующее:

- (1) существует подмодуль N модуля E , изоморфный ненулевому правому идеалу кольца A ;
- (2) если E – неразложимый инъективный модуль, то E изоморфен некоторому неразложимому прямому слагаемому S модуля Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует такой ненулевой элемент $m \in E$, что правый идеал $r(m)$ кольца A не является существенным. Пусть $h: A_A \rightarrow mA$ – естественный эпиморфизм, B – такой ненулевой правый идеал кольца A , что $B \cap r(m) = 0$. Так как $B \cap \text{Ker}(h) = 0$, то модуль B_A изоморфен ненулевому

подмодулю $h(B)$ модуля E .

Допустим, что E – неразложимый инъективный модуль. Тогда E – инъективная оболочка модуля $h(B)$. Модуль Q имеет прямое слагаемое S , являющееся инъективной оболочкой модуля B . Так как $h(B) \cong B_A$, то $S \cong E$. Поэтому S – неразложимый модуль.

ЛЕММА 1.2. (1) U – несингулярный модуль $\iff \text{Hom}(T, U) = 0$ для любого сингулярного модуля $T \iff$ любое существенное расширение модуля U является несингулярным модулем;

(2) если N – существенный подмодуль модуля Q , то Q/N – сингулярный модуль;

(3) если N – ненулевой подмодуль равномерного модуля Q , то Q/N – сингулярный модуль;

(4) если $f: Q \rightarrow E$ – гомоморфизм модулей и $\text{Ker}(f)$ – существенный подмодуль модуля Q , то $f(Q)$ – сингулярный модуль;

(5) если E – несингулярный модуль и $f: Q \rightarrow E$ – ненулевой модульный гомоморфизм, то Q не является существенным расширением модуля $\text{Ker}(f)$;

(6) если E_1, E_2 – несингулярные равномерные модули, то любой ненулевой гомоморфизм $E_1 \rightarrow E_2$ является мономорфизмом;

(7) если E_1, E_2 – несингулярные неразложимые инъективные модули, то любой ненулевой гомоморфизм $E_1 \rightarrow E_2$ является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1) и (2) доказаны в [3, 1.20, 1.22]; (3) следует из (2) и того, что равномерный модуль является существенным расширением любого своего ненулевого подмодуля; (4) следует из (2) и того, что $f(Q) \cong Q/\text{Ker}(f)$; (5) следует из (4); (6) следует из (5); (7) следует из (6).

ЛЕММА 1.3. Пусть A – первичное кольцо, Q – инъективная оболочка модуля A_A , $\mathcal{E}$ – множество всех ненулевых несингулярных неразложимых инъективных правых A -модулей. Тогда справедливо следующее:

- (1) $\text{Hom}(B_A, C_A) \neq 0$ для любых ненулевых правых идеалов B, C кольца A ;
- (2) если B_1 и B_2 – ненулевые правые идеалы кольца A , S_1 и S_2 – инъективные оболочки правых A -модулей B_1 и B_2 , лежащие в модуле Q , то $\text{Hom}(S_1, S_2) \neq 0$;
- (3) либо множество $\mathcal{E}$ является пустым, либо существует такое ненулевое несингулярное неразложимое инъективное прямое слагаемое S модуля Q , что каждый модуль E из $\mathcal{E}$ изоморфен модулю S ;
- (4) если B, C – ненулевые несингулярные равномерные правые идеалы кольца A , то существуют мономорфизмы $B \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как A – первичное кольцо, то $CB \neq 0$. Поэтому $cB \neq 0$ для некоторого элемента $c \in C$. Тогда правило $f(b) = cb$ задает ненулевой гомоморфизм $f: B \rightarrow C$.

(2) Следует из (1) и того, что любой гомоморфизм $B_1 \rightarrow B_2$ может быть продолжен до гомоморфизма $S_1 \rightarrow S_2$.

(3) Пусть $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$. По лемме 1.1 (2) $E_i \cong S_i$, где S_i – ненулевое несингулярное неразложимое инъективное прямое слагаемое модуля Q , $i = 1, 2$. По (2) $\text{Hom}(S_1, S_2) \neq 0$. По лемме 1.2 (7) $S_1 \cong S_2$.

(4) Следует из (1) и из леммы 1.2 (6).

ЛЕММА 1.4. Пусть E – существенное расширение модуля M . Тогда справедливо следующее:

- (1) если N – модуль, $f \in \text{Hom}(N, E)$ и существует такой гомоморфизм $g: N \rightarrow M$, что f совпадает с g на $f^{-1}(M)$, то $f(N) \subseteq M$;
- (2) если модуль M инъективен относительно модуля N , то $f(N) \subseteq M$ для любого гомоморфизма $f \in \text{Hom}(N, E)$;
- (3) если f – эндоморфизм модуля E и существует такой эндоморфизм g модуля M , что f совпадает с g на $M \cap f^{-1}(M)$, то $f(M) \subseteq M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $y = (f - g)(x) \in M \cap (f - g)(N)$, $x \in N$. Тогда $f(x) = (f - g)(x) + g(x) = y + g(x) \in M$. Поэтому $x \in f^{-1}(M)$. Но тогда $y \in (f - g)(f^{-1}(M)) = 0$. Поэтому $M \cap (f - g)(N) = 0$. Так как E – существенное расширение модуля M , то $(f - g)(N) = 0$. Тогда $f(N) = g(N) \subseteq M$.

(2) Так как $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$ и $M - N$ -инъективный модуль, то существует такой гомоморфизм $g: N \rightarrow M$, что g совпадает с f на $f^{-1}(M)$. Из (1) следует вложение $f(N) \subseteq M$.

(3) Следует из (1).

ЛЕММА 1.5. Пусть E – инъективная оболочка модуля M . Равносильны следующие условия:

- (1) M – π -инъективный модуль;
- (2) каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля модуля M может быть продолжен до эндоморфизма модуля M ;
- (3) каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля модуля M может быть продолжен до идемпотентного эндоморфизма модуля M ;
- (4) для любых подмодулей N_1, N_2 модуля M таких, что $N_1 \cap N_2 = 0$, существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \supseteq N_1$, $M_2 \supseteq N_2$;
- (5) $f(M) \subseteq M$ для любого идемпотентного эндоморфизма f модуля E ;
- (6) для любого прямого разложения $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ модуля E верно равенство $M = \bigoplus_{i \in I} (M \cap E_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (1) $\iff$ (2) и импликации (4) $\implies$ (3), (3) $\implies$ (2), (5) $\implies$ (6) проверяются непосредственно.

(2) $\implies$ (5). Пусть $N \equiv M \cap f^{-1}(M)$. Так как $f^2 = f$, то $f(N) \subseteq N$. Поэтому ограничение эндоморфизма f на модуль N является идемпотентным эндоморфизмом модуля N . По условию существует такой эндоморфизм g модуля M , что f совпадает с g на N . Из леммы 1.4 (3) следует вложение $f(M) \subseteq M$.

(6) $\implies$ (4). Пусть $N_1 \oplus N_2 \in \text{Lat}(M)$. Так как E – инъективный модуль, то существует такое прямое разложение $E = E_1 \oplus E_2$, что E_i содержит N_i при $i = 1, 2$. По условию $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_i \equiv E_i \cap M$ при $i = 1, 2$.

ЛЕММА 1.6 [1, 17.11, 19.9]. Пусть E – инъективная оболочка модуля M . Тогда справедливо следующее:

- (1) M – квазиинъективный модуль $\iff M$ – вполне инвариантный подмодуль модуля E ;
- (2) если M – квазиинъективный неразложимый модуль, то M – равномерный модуль и $\text{End}(M)$ – локальное кольцо.

ЛЕММА 1.7. Пусть M – π -проективный модуль. Тогда справедливо следующее:

- (1) если $\text{End}(M)$ – локальное кольцо, то все фактормодули модуля M являются неразложимыми;
- (2) если $\text{End}(M)$ – локальное кольцо и все фактормодули модуля M являются π -инъективными, то M – цепной модуль;
- (3) если M – неразложимый модуль, у которого все фактормодули квазиинъективны, то M – цепной модуль;
- (4) если M – неразложимый вполне инъективный модуль, то M – цепной модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $h: M \rightarrow \overline{M}$ – эпиморфизм, причем верно разложение $\overline{M} = h(M_1) \oplus h(M_2)$, где $M_1, M_2 \in \text{Lat}(M)$. Тогда $M = M_1 + M_2$. Так как M – π -проективный модуль, то существует такой эндоморфизм $f \in \text{End}(M)$, что $f(M) \subseteq M_1$, $(1 - f)(M) \subseteq M_2$. Так как $\text{End}(M)$ – локальное кольцо, то либо $M_1 = M$, либо $M_2 = M$. Поэтому $\overline{M}$ – неразложимый модуль.

(2) Из леммы 1.5 следует, что каждый неразложимый π -инъективный модуль является равномерным. Из (1) и из условия следует, что каждый фактормодуль модуля M является равномерным. Поэтому M – цепной модуль.

(3) Следует из (2) и леммы 1.6 (2).

(4) Следует из (3).

ЛЕММА 1.8. Пусть каждый неразложимый инъективный правый модуль над кольцом A является цепным. Тогда справедливо следующее:

- (1) если A – полуцепное справа кольцо, то A – полуцепное кольцо;
- (2) если A – полуравномерное справа кольцо, то A – полуцепное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) доказан в [1, 55.11]; (2) следует из (1) и того, что инъективная оболочка любого равномерного модуля является равномерным модулем.

ЛЕММА 1.9. Пусть E_A – ненулевой неразложимый инъективный модуль над кольцом A , причем инъективная оболочка Q_A модуля A_A является вполне инъективным модулем. Тогда справедливо следующее:

- (1) существует эпиморфизм $f: Q \rightarrow E$ и, следовательно, E – вполне инъективный модуль;
- (2) если $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$, то E является гомоморфным образом хотя бы одного из модулей Q_i ;
- (3) если Q – прямая сумма неразложимых π -проективных модулей, то каждый неразложимый инъективный правый A -модуль является цепным вполне инъективным модулем;
- (4) если Q – прямая сумма неразложимых π -проективных модулей и A – полуравномерное справа кольцо, то A – полуцепное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\overline{E}$ – ненулевой циклический подмодуль модуля E . Существует ненулевой эпиморфизм $\overline{f}: A_A \rightarrow \overline{E} \subseteq E$. Так как E – инъективный модуль, то $\overline{f}$ можно продолжить до ненулевого гомоморфизма $f: Q \rightarrow E$. Так как Q – вполне инъективный модуль, то $f(Q)$ – ненулевой инъективный подмодуль неразложимого модуля E и, следовательно, $f(Q) = E$.

(2) По (1) существует эпиморфизм $f: Q \rightarrow E$. Так как $E \neq 0$, то $f(Q_i) \neq 0$ для некоторого $i \in I$. По условию $f(Q_i)$ – инъективный модуль. Тогда $f(Q_i)$ – ненулевое прямое слагаемое неразложимого модуля E . Поэтому $E = f(Q_i)$.

(3) Из лемм 1.7 (4) и 1.9, Q – полуцепной модуль. Теперь утверждение следует из (2) и того, что все гомоморфные образы цепных модулей являются цепными.

(4) Следует из (3) и леммы 1.8 (2).

ЛЕММА 1.10 [4, с. 290]. *Если кольцо A обладает самоинъективным справа классическим правым кольцом частных Q , то Q_A – инъективная оболочка модуля A_A .*

ЛЕММА 1.11. *Каждый риккартов модуль является несингулярным.*

Лемма 1.11 проверяется непосредственно.

ЛЕММА 1.12. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

- (1) *A обладает полупростым артиновым классическим правым кольцом частных;*
- (2) *A – полупервичное правое кольцо Голди;*
- (3) *A – несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо;*
- (4) *множество всех существенных правых идеалов кольца A совпадает с множеством всех правых идеалов, содержащих регулярные элементы;*
- (5) *A обладает полупростым артиновым классическим правым кольцом частных Q , причем Q_A – инъективная оболочка модуля A_A .*

В лемме 1.12 эквивалентности (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) доказаны в [5, следствие 9.13], эквивалентность (2) $\iff$ (4) доказана в [4, теорема 2.2], импликация (1) $\implies$ (5) следует из леммы 1.10, а импликация (5) $\implies$ (1) очевидна.

ЛЕММА 1.13. *Пусть A – риккартово справа конечномерное справа полупервичное кольцо. Тогда A – полуравномерное справа кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечномерное справа кольцо A обладает существенным правым идеалом $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$, где все B_i – ненулевые равномерные правые идеалы. По леммам 1.11 и 1.12 существенный правый идеал B содержит регулярный элемент b кольца A . Так как $bA \cong A_A$, то достаточно доказать, что bA_A – полуравномерный модуль. Для этого достаточно доказать, что если главный правый идеал N кольца A лежит в B и имеет размерность Голди $m \leq n$, то N – полуравномерный модуль. При $m = 1$ утверждение верно. Пусть $h_i: B \rightarrow B_i$ – естественные проекции. Так как все $h_i(N)$ – проективные модули, то $N \cap (\bigoplus_{j \neq i} B_j)$ – прямое слагаемое модуля N_A для любого i , причем соответствующее дополнение изоморфно модулю $h_i(N)$. Теперь утверждение доказывается индукцией по числу m .

ЛЕММА 1.14. *Пусть A – наследственное справа кольцо, Q_A – инъективная оболочка модуля A_A . Тогда справедливо следующее:*

- (1) *каждый инъективный правый A -модуль является вполне инъективным, а каждый проективный правый A -модуль является наследственным;*
- (2) *любой ненулевой неразложимый инъективный модуль E_A является гомоморфным образом модуля Q .*

Пункт (1) леммы 1.14 доказан в [1, 39.16], а пункт (2) следует из (1) и леммы 1.9 (1).

ЛЕММА 1.15 [1, 55.11]. Для нётерова справа кольца A равносильны условия:

- (1) A – полуцепное кольцо;
- (2) каждый конечнопорожденный правый A -модуль является полуцепным;
- (3) A – полуцепное справа кольцо, и каждый неразложимый инъективный правый A -модуль является цепным.

ЛЕММА 1.16. Пусть $\{Y_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество модулей. Тогда справедливо следующее:

- (1) если все модули Y_i проективны относительно некоторого модуля M , то $\bigoplus_{i \in I} Y_i$ – M -проективный модуль;
- (2) если Y – подфактор модуля $\bigoplus_{i \in I} Y_i$, X – модуль, проективный относительно всех модулей Y_i , причем либо I – конечное множество, либо X – конечнопорожденный модуль, то X – Y -проективный модуль;
- (3) если Y_1 – квазипроективный модуль, то любая конечная прямая сумма изоморфных копий модуля Y_1 является квазипроективным модулем.

Пункты (1) и (2) леммы 1.16 доказаны в [1, 18.1, 18.2], а (3) следует из (1) и (2).

ЛЕММА 1.17. Пусть модуль X проективен относительно модуля Y . Тогда справедливо следующее:

- (1) если существует эпиморфизм $h: Y \rightarrow X$, то $\text{Ker}(h)$ – прямое слагаемое модуля Y , причем X – квазипроективный модуль, изоморфный прямому слагаемому модуля Y ;
- (2) если X – t -порожденный модуль, где t – кардинальное число, и существует такое натуральное число n , что модуль Y^n содержит свободный подмодуль F ранга t , то X – проективный модуль;
- (3) если Y – конечно точный модуль, то модуль X проективен относительно любого конечнопорожденного правого A -модуля;
- (4) если X – конечнопорожденный модуль, а Y – конечно точный модуль, то X – проективный модуль;
- (5) если Y – неразложимый модуль, причем $X \neq 0$ и существует эпиморфизм $f: Y \rightarrow X$, то f – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как X проективен относительно Y , то для эпиморфизма f и тождественного отображения 1_X существует такой гомоморфизм $g: X \rightarrow Y$, что $1_X = fg$. Поэтому $Y = \overline{X} \oplus \text{Ker}(f)$, где $\overline{X} \cong X$. Кроме того, X проективен относительно $\overline{X}$. Поэтому X – квазипроективный модуль.

(2) По лемме 1.16 (2) X – F -проективный модуль. Так как существует эпиморфизм $h: F \rightarrow X$, то по (1) модуль X изоморфен прямому слагаемому свободного модуля F .

(3) Существует такое натуральное число n , что Y^n содержит свободный циклический подмодуль F . По (1) X – Y -проективный модуль. По лемме 1.16 (2) X – F -проективный модуль. По лемме 1.16 (2) модуль X проективен относительно любого конечнопорожденного свободного модуля. Так как произвольный конечнопорожденный модуль S является гомоморфным образом конечнопорожденного свободного модуля, то по лемме 1.16 (2) X проективен относительно любого конечнопорожденного модуля.

(4) Следует из (2).

(5) Следует из (1).

ЛЕММА 1.18 [1, 41.14]. Пусть M – π -проективный модуль и $M = X \oplus Y$. Тогда справедливо следующее:

- (1) X, Y – π -проективные модули, X – Y -проективный модуль, Y – X -проективный модуль;
- (2) если $X \cong Y$, то M – квазипроективный модуль.

ЛЕММА 1.19. Пусть A – несингулярное справа конечномерное справа первичное кольцо. Тогда A обладает простым артиновым классическим правым кольцом частных Q . Кроме того, справедливо следующее:

- (1) Q_A – инъективная оболочка модуля A_A и $Q_A = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$, где все Q_i – изоморфные ненулевые несингулярные равномерные инъективные модули, причем каждый ненулевой несингулярный неразложимый инъективный E_A изоморфен модулю Q_1 ;
- (2) если существует ненулевой несингулярный конечномерный инъективный квазипроективный модуль M_A , то каждый ненулевой несингулярный конечномерный инъективный правый A -модуль является квазипроективным и Q_A – квазипроективный модуль;
- (3) если существует ненулевой несингулярный конечномерный инъективный неравномерный π -проективный модуль M_A , то каждый ненулевой несингулярный конечномерный инъективный правый A -модуль является квазипроективным и Q_A – квазипроективный модуль;
- (4) Q_A – π -проективный модуль $\iff$ либо $n > 1$ и Q_A – квазипроективный модуль, либо $n = 1$, A – равномерная справа область, Q – правое тело частных области A , причем Q_A – π -проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из леммы 1.3 (3).

(2) Конечномерный модуль M имеет ненулевое квазипроективное прямое слагаемое E . Теперь (2) следует из (1) и того, что по лемме 1.16 (3) каждая конечная прямая сумма изоморфных копий квазипроективного модуля является квазипроективным модулем.

(3) Так как M – конечномерный неравномерный инъективный модуль, то M имеет прямое слагаемое $E_1 \oplus E_2$, где E_i – неразложимые модули, являющиеся по (1) изоморфными. Так как $E_1 \oplus E_2$ – π -проективный модуль и $E_1 \cong E_2$, то по лемме 1.18 (2) E_1 – квазипроективный модуль.

(4) Достаточно доказать импликацию $\implies$. По (1) $Q_A = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$, где все Q_i – изоморфные несингулярные равномерные модули. Если $n = 1$, то A – равномерное справа несингулярное справа кольцо и, следовательно, равномерная справа область, Q – правое тело частных области A , причем Q_A – π -проективный модуль. Пусть $n > 1$. По (1) и (3) Q_A – квазипроективный модуль.

ЛЕММА 1.20. Пусть A – наследственное справа нётерово справа полупрвичное кольцо, Q – полупростое артиново классическое правое кольцо частных кольца A . Тогда справедливо следующее:

- (1) Q_A – прямая сумма π -проективных модулей $\iff$ каждый неразложимый инъективный правый A -модуль является цепным $\iff A$ – полуцепное кольцо;
- (2) $J(A) = 0$ и Q_A – прямая сумма π -проективных модулей $\iff A$ – простое артиново кольцо;
- (3) Q_A – π -проективный модуль $\iff$ либо A – полуцепное кольцо и Q_A – квазипроективный модуль, либо A – цепная область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.12 A обладает полупростым артиновым классическим правым кольцом частных Q , причем Q_A – инъективная оболочка модуля A_A . По лемме 1.14 (1) Q_A – вполне инъективный модуль. По лемме 1.13 A – полуравномерное справа кольцо. Пункт (1) следует теперь из лемм 1.9 (4), 1.15 и того, что Q_A – прямая сумма неразложимых инъективных модулей.

(2) Следует из того, что $A/J(A)$ – артиново кольцо, если A – полуперенное кольцо.

(3) По (1) можно без ограничения общности считать, что A – полуперенное кольцо. По лемме 1.19 (4) остается рассмотреть случай, когда A – полуперенная область. В этом случае утверждение следует из (1) и того, что полуперенная область является перенным кольцом.

ЛЕММА 1.21. Пусть Q – классическое кольцо частных наследственного нётерова первичного кольца A . Равносильны следующие условия:

- (1) существует ненулевой несингулярный конечномерный инъективный неравномерный π -проективный правый A -модуль;
- (2) каждый ненулевой несингулярный конечномерный инъективный правый A -модуль является квазипроективным;
- (3) Q_A – квазипроективный модуль;
- (4) существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной перенной нётеровой областью D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1), (2) и (3) следует из леммы 1.19 (1), (3).

(3) $\iff$ (4). Эквивалентность условий (3) и (4) доказана в [2] в предположении, что A не является примитивным справа кольцом. Если выполнено условие (4) и A является примитивным справа кольцом, то A – простое артиново кольцо. Тогда выполнено условие (3). Если выполнено условие (3) и A является примитивным справа кольцом, то по лемме 1.20 (2) A – простое артиново кольцо. Тогда выполнено условие (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть Q – полупростое артиново классическое правое кольцо частных кольца A . По лемме 1.12 Q_A – инъективная оболочка модуля A_A . Импликация (2) $\implies$ (1) следует из леммы 1.20 (1). Докажем импликацию (1) $\implies$ (2). Пусть M – ненулевой инъективный π -проективный правый A -модуль E , не являющийся сингулярным. Из леммы 1.1 (1) следует, что модуль M содержит изоморфную копию ненулевого правого идеала B кольца A . Без ограничения общности можно считать, что B – ненулевой равномерный правый идеал, причем его инъективная оболочка S является неразложимым π -проективным прямым слагаемым модуля Q_A . По лемме 1.18 (1) $Q_A = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_n$, где все модули Q_i изоморфны неразложимому π -проективному модулю S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Теорема 2 следует из лемм 1.20 (3) и 1.21.

СЛЕДСТВИЕ 1.22. Пусть Q – классическое кольцо частных наследственного нётерова первичного кольца A .

Тогда Q_A – π -проективный модуль, не являющийся квазипроективным $\iff A$ – перенная нётерова область, не являющаяся полной.

Следствие 1.22 вытекает из теоремы 2.

§ 2. Строение π -инъективных и π -проективных модулей

ЛЕММА 2.1. Пусть модуль X инъективен относительно модуля Y , $\{Z_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество модулей. Тогда справедливо следующее:

- (1) если все модули Z_i инъективны относительно некоторого модуля M , то $\prod_{i \in I} Z_i$ – M -инъективный модуль;
- (2) если Z – подфактор модуля $\bigoplus_{i \in I} Z_i$, N – модуль, инъективный относительно всех модулей Z_i , то N – Z -инъективный модуль;
- (3) если Z_1 – квазиинъективный модуль, то любая конечная прямая сумма изоморфных копий модуля Z_1 является квазиинъективным модулем;
- (4) если существует мономорфизм $f: X \rightarrow Y$, то $f(X)$ – прямое слагаемое модуля Y , причем X – квазиинъективный модуль, изоморфный прямому слагаемому модуля Y ;
- (5) если Y – конечно точный модуль, то X – инъективный модуль;
- (6) если существует мономорфизм $f: X \rightarrow Y$, то $f(X)$ – прямое слагаемое модуля Y , причем X – квазиинъективный модуль;
- (7) если Y – неразложимый модуль, причем $X \neq 0$ и существует мономорфизм $f: X \rightarrow Y$, то f – изоморфизм;
- (8) если M_A – модуль над кольцом A , причем для любого существенного правого идеала B кольца A каждый гомоморфизм $f: B_A \rightarrow M$ может быть продолжен до гомоморфизма $g: A_A \rightarrow M$, то M – инъективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1) и (2) доказаны в [1, 16.1, 16.2]; (3) следует из (1) и (2). Доказательство (4) двойственно доказательству леммы 1.17 (1).

(5) Существует такое натуральное число n , что Y^n содержит свободный циклический подмодуль F . По (2) X – F -инъективный модуль. По критерию Бэра [1, 16.4] X – инъективный модуль.

(6) Следует из (4).

(7) Следует из (6).

(8) Пусть $\overline{B}$ – правый идеал кольца A , $\overline{f}: \overline{B}_A \rightarrow M$ – гомоморфизм. Найдется такой правый идеал C кольца A , что $\overline{B} \cap C = 0$ и правый идеал $B \equiv \overline{B} \oplus C$ является существенным. Правило $f(\overline{b} + c) = \overline{f}(\overline{b})$ задает продолжение гомоморфизма $\overline{f}$ до гомоморфизма $f: B \rightarrow M$. По условию f может быть продолжен до гомоморфизма $g: A_A \rightarrow M$. По (5) M – инъективный модуль.

ЛЕММА 2.2 [1, 41.20]. Пусть M – π -инъективный модуль и $M = X \oplus Y$. Тогда справедливо следующее:

- (1) X, Y – π -инъективные модули, X – Y -инъективный модуль, Y – X -инъективный модуль;
- (2) если $X \cong Y$, то M – квазиинъективный модуль.

ЛЕММА 2.3. Пусть T – сингулярный инъективный модуль, U – несингулярный модуль, $M \equiv T \oplus U$. Тогда справедливо следующее:

- (1) M – π -инъективный модуль $\iff U$ – π -инъективный модуль;
- (2) если U – равномерный модуль, то M – π -инъективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждый равномерный модуль является π -инъективным, то достаточно доказать только пункт (1). Надо доказывать только импликацию $\Leftarrow$. Пусть $\overline{U}$ – инъективная оболочка модуля U , $\overline{M} \equiv T \oplus \overline{U}$ – инъективная

оболочка модуля M , f – идемпотентный эндоморфизм модуля $\overline{M}$. По лемме 1.5 достаточно доказать вложение $f(M) \subseteq M$, что равносильно выполнению вложений $f(T) \subseteq T$ и $f(U) \subseteq T \oplus U$. Вложение $f(T) \subseteq T$ вытекает из того, что противном случае существовал бы ненулевой гомоморфизм из сингулярного модуля T в несингулярный модуль $\overline{U}$, что противоречит лемме 1.2 (1). Пусть $h: \overline{M} \rightarrow \overline{M}/T$ – естественный эпиморфизм. Так как $f(T) \subseteq T$, то f индуцирует идемпотентный эндоморфизм g модуля $h(\overline{M})$. Так как $h(\overline{M}) \cong \overline{U}$ и $h(M) \cong U$, то $h(\overline{M})$ – инъективная оболочка π -инъективного модуля $h(M)$. По лемме 1.5 $g(h(M)) \subseteq h(M)$. Поэтому $f(U) \subseteq T \oplus U$.

ЛЕММА 2.4. Пусть A – полупервичное правое кольцо Голди, Q – полупростое артиново классическое правое кольцо частных кольца A , M – произвольный правый A -модуль. Тогда справедливо следующее:

- (1) класс всех несингулярных правых A -модулей совпадает с классом всех правых A -модулей без кручения, а класс всех сингулярных правых A -модулей совпадает с классом всех периодических правых A -модулей;
- (2) сингулярный подмодуль $\text{Sing}(M)$ совпадает с периодической частью $T(M)$ модуля M ;
- (3) фактормодуль $M/\text{Sing}(M)$ является несингулярным модулем;
- (4) если M – существенное расширение сингулярного модуля, то M – сингулярный модуль;
- (5) если M – делимый несингулярный модуль, то M – инъективный модуль;
- (6) если M – несингулярный редуцированный модуль, то для каждого ненулевого прямого слагаемого N модуля M существует такой регулярный элемент $d \in A$, что $N \neq Nd$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из того, что по лемме 1.12 множество всех существенных правых идеалов кольца A совпадает со множеством всех правых идеалов кольца A , содержащих регулярные элементы; (2) следует из (1); (3) следует из (1) и (2); (4) следует из (3) и леммы 1.2 (2).

(5) По лемме 2.1 (8) достаточно доказать, что для любого существенного правого идеала B кольца A каждый гомоморфизм $f: B_A \rightarrow M$ может быть продолжен до гомоморфизма $g: A_A \rightarrow M$. По лемме 1.12 существенный правый идеал B содержит регулярный элемент d кольца A . Так как M – делимый модуль, то существует такой элемент $t \in M$, что $f(d) = td$. Правило $g(x) = tx$ задает гомоморфизм $g: A_A \rightarrow M$. Пусть $b \in B$. Достаточно доказать, что $f(b) = tb$. Так как кольцо A обладает классическим правым кольцом частных, то для элементов b, d существуют такие элементы $a, t \in A$, где t – регулярный элемент, что $bt = da$. Тогда $f(b)t = f(d)a = tda = mbt$, $(f(b) - tb)t = 0$. Так как по (1) M – модуль без кручения, то $f(b) = tb$. Поэтому M – инъективный модуль.

(6) Из (5) и того, что каждый инъективный подмодуль выделяется прямым слагаемым следует, что M не имеет ненулевых делимых прямых слагаемых.

ЛЕММА 2.5. Пусть A – первичное правое кольцо Голди, U_A – модуль, не являющийся сингулярным. Тогда справедливо следующее:

- (1) U – конечно точный модуль;
- (2) любой U -инъективный модуль является инъективным модулем;
- (3) любой U -проективный модуль является проективным относительно любого конечнопорожденного правого A -модуля;

- (4) *любой U -проективный конечнопорожденный модуль является проективным модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.1 (1) модуль U содержит изоморфную копию некоторого ненулевого правого идеала N кольца A . Достаточно доказать, что N_A – конечно точный модуль. Без ограничения общности можно считать, что N – равномерный правый идеал. Конечномерное справа кольцо A содержит существенный правый идеал $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$, где все B_i – ненулевые равномерные правые идеалы. По лемме 1.12 существенный правый идеал B содержит регулярный элемент b . Поэтому B содержит свободный циклический A -модуль bA . По лемме 1.3 (4) существуют мономорфизмы $B_i \rightarrow N$. Поэтому модуль N^n содержит свободный циклический подмодуль.

(2), (3), (4) Следуют из (1), леммы 2.1(5) и леммы 1.17 (3), (4).

ЛЕММА 2.6. *Пусть A – первичное правое кольцо Голди, M_A – модуль, не являющийся сингулярным. Равносильны следующие условия:*

- (1) M – π -инъективный модуль;
- (2) *либо M – инъективный модуль, либо $M = T \oplus U$, где T – сингулярный инъективный модуль, U – несингулярный равномерный модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (2) $\implies$ (1) следует из леммы 2.3 (2).

(1) $\implies$ (2). Пусть $S \equiv \text{Sing}(M)$, Q – инъективная оболочка модуля M . Тогда $Q = \overline{T} \oplus \overline{U}$, где $\overline{T}$ – инъективная оболочка модуля S , $\overline{U}$ – несингулярный модуль. По лемме 2.4 (4) $\overline{T}$ – сингулярный модуль. Пусть $T \equiv \overline{T} \cap M$, $U \equiv \overline{U} \cap M$. По лемме 1.5 $M = T \oplus U$. Так как T – сингулярный модуль и M не является сингулярным модулем, то U – ненулевой несингулярный модуль. По лемме 2.2 (1) T – U -инъективный модуль. По лемме 2.5 (2) T – инъективный модуль. Если $\overline{U}$ – неразложимый (инъективный) модуль, то U – равномерный модуль. Допустим, что $\overline{U} = U_1 \oplus \overline{U}_2$, где $\overline{U}_i$ – ненулевые модули. По лемме 1.5 $M = U_1 \oplus U_2$, где $U_i \equiv \overline{U}_i$. По лемме 2.2 (1) ненулевые модули U_1, U_2 являются инъективными относительно друг друга. По лемме 2.5 (2) U_1 и U_2 – инъективные модули. Поэтому $U_i = \overline{U}_i$, $M = Q$ – инъективный модуль.

ЛЕММА 2.7. *Пусть Q – инъективная оболочка π -инъективного модуля M , причем $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$. Тогда справедливо следующее:*

- (1) *если $M \cap Q_i$ – вполне инвариантный подмодуль модуля Q_i для любого $i \in I$, то M – квазиинъективный модуль;*
- (2) *если все Q_i являются дистрибутивными полуартиновыми модулями, то M – квазиинъективный модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $M_i \equiv M \cap Q_i$, $h_i: Q \rightarrow Q_i$ – естественные проекции. По лемме 1.5 $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. В силу леммы 1.5 достаточно доказать, что $f(M) \subseteq M$ для любого $f \in \text{End}(Q)$. Для этого достаточно доказать, что $(h_j f h_i)(M_i) \subseteq M_j$ для всех $i, j \in I$. По условию $(h_i f h_i)(M_i) \subseteq M_i$ для всех $i \in I$. Поэтому достаточно доказать, что $(h_j f h_i)(M_i) \subseteq M_j$ при $i \neq j$. Эндоморфизм $h_j f h_i$ модуля Q индуцирует гомоморфизм $g: M_i \rightarrow Q_j$, причем Q_j – существенное расширение модуля M_j . Кроме того, по лемме 2.2 (1) M_j – M_i -инъективный модуль. По лемме 1.4 (2) $(h_j f h_i)(M_i) = g(M_i) \subseteq M_j$.

(2) Следует из (1) и того, что любой подмодуль дистрибутивного полуартинова модуля Q_i является вполне инвариантным в Q_i [6].

ЛЕММА 2.8. Пусть Q_A – инъективный модуль над кольцом A . Тогда справедливо следующее:

- (1) если A – нётерово справа кольцо, то Q – прямая сумма неразложимых инъективных модулей;
- (2) если Q – несингулярный модуль и A – конечномерное справа несингулярное справа кольцо, то Q – прямая сумма неразложимых инъективных несингулярных модулей;
- (3) если Q – сингулярный модуль и A – наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся примитивным справа, то Q – прямая сумма цепных артиновых инъективных счетнопорожденных модулей, не являющихся конечнопорожденными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) см. в [1, 27.4]; (2) см. в [3, с. 84].

(3) По (1) и по лемме 2.4 (1) Q – прямая сумма неразложимых периодических инъективных модулей. Теперь применяем полученное в [2, теорема 4] описание неразложимых периодических модулей над наследственными нётеровыми первичными кольцами, не являющимися примитивными справа кольцами.

ЛЕММА 2.9. Пусть M – π -проективный модуль, причем каждый циклический подмодуль модуля M является наследственным. Тогда справедливо следующее:

- (1) если M обладает максимальным подмодулем, то M имеет ненулевое наследственное прямое слагаемое;
- (2) если M – конечномерный модуль, причем каждое ненулевое прямое слагаемое модуля M обладает максимальным подмодулем, то M – проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть N – максимальный подмодуль модуля M , P – циклический подмодуль модуля M , не лежащий в N . Тогда $M = P + N$. Так как M – π -проективный модуль и $M = P + N$, то существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow P$, что $(1 - f)(M) \subseteq N$. По условию $f(M)$ – проективный модуль. Поэтому проективный модуль $f(M)$ изоморфен прямому слагаемому модуля M . Так как $M = f(M) + (1 - f)(M) = f(M) + N \neq N$, то $f(M) \neq 0$.

(2) Следует из (1).

ЛЕММА 2.10. Пусть A – ограниченное слева полупервичное кольцо Голди, M_A – несингулярный модуль. Тогда справедливо следующее:

- (1) если $M = MB$ для каждого ненулевого идеала B кольца A , то M – инъективный модуль;
- (2) если M – редуцированный модуль, то для каждого ненулевого прямого слагаемого N модуля M существует такой ненулевой идеал B кольца A , что $N \neq NB$;
- (3) если M – редуцированный модуль и каждое собственное факторкольцо кольца A является совершенным справа, то каждое ненулевое прямое слагаемое N модуля M обладает максимальным подмодулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 2.4(5) достаточно доказать, что $M = Md$ для любого регулярного элемента $d \in A$. Так как A – полупервичное левое кольцо Голди, то по лемме 1.12 Ad – существенный левый идеал. По условию Ad содержит ненулевой идеал B кольца A . По условию $M = MB$. Поэтому $M = M(Ad) = Md$.

(2) Следует из (1) и того, что каждый инъективный подмодуль является прямым слагаемым.

(3) По (2) существует такой ненулевой идеал B кольца A , что $N \neq NB$. Так как каждый ненулевой правый модуль над совершенным справа кольцом обладает максимальным подмодулем [7, 22.8], то $(N/NB)_{A/B}$ обладает максимальным подмодулем. Поэтому N_A обладает максимальным подмодулем.

ЛЕММА 2.11. Пусть M_A – несингулярный конечнопорожденный модуль над полупервичным кольцом Голди A . Тогда справедливо следующее:

- (1) модуль M изоморфен подмодулю свободного A -модуля;
- (2) если A – полунаследственное справа кольцо, то M – проективный модуль;
- (3) если A – наследственное справа кольцо, то M – наследственный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) см. в [3, с. 156]; (2) следует из (1) и того, что любой конечнопорожденный подмодуль проективного правого модуля над полунаследственным справа кольцом является проективным модулем [1, 39.13].

(3) Пусть N – подмодуль модуля M . Так как A – наследственное справа конечномерное справа кольцо, то A – нётерово справа кольцо [3, с. 149]. Поэтому N – конечнопорожденный модуль. По (2) N – проективный модуль.

ЛЕММА 2.12. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо. Тогда справедливо следующее:

- (1) каждое собственное факторкольцо кольца A является артиновым полуцепным кольцом [7, 25.5.1];
- (2) если A не является примитивным справа кольцом, то A – ограниченное кольцо [8].

ЛЕММА 2.13. Пусть A – ограниченное слева наследственное нётерово первичное кольцо, M_A – несингулярный редуцированный модуль. Тогда справедливо следующее:

- (1) каждое ненулевое прямое слагаемое N модуля M обладает максимальным подмодулем;
- (2) если M – π -проективный модуль, то M имеет ненулевое наследственное прямое слагаемое;
- (3) если M – конечномерный π -проективный модуль, то M – проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из 2.12 (1) и 2.10 (3). По 2.11 (3) каждый конечнопорожденный подмодуль модуля M является наследственным. Поэтому (2) и (3) следуют из (1) и из леммы 2.9.

ЛЕММА 2.14 [3, 5.19]. Пусть M_A – проективный модуль над несингулярным справа кольцом A , причем M – существенное расширение конечнопорожденного модуля.

Тогда M – конечнопорожденный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если модуль M_A не является сингулярным, то утверждение следует из леммы 2.6. Если M – сингулярный модуль, то утверждение следует из лемм 2.7 (2) и 2.8 (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. $(2) \Rightarrow (1)$. По лемме 2.12 (2) A – ограниченное кольцо. По лемме 2.13(3) M – проективный модуль. Так как любой конечномерный модуль является существенным расширением конечнопорожденного модуля, то по лемме 2.14 M – конечнопорожденный модуль.

$(1) \Rightarrow (2)$. Допустим, что конечнопорожденный модуль M имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое E_A . Можно без ограничения общности считать, что E – неразложимый инъективный конечнопорожденный модуль. Пусть Q – простое артиново классическое кольцо частных кольца A . По лемме 1.19 (1) модуль Q_A является конечной прямой суммой изоморфных копий модуля E . Поэтому Q_A – конечнопорожденный модуль. Пусть $Q = \sum_{i=1}^n q_i A$. Существуют такие элементы $t, a_1, \dots, a_n \in A$, что $q_i = a_i t^{-1}$ при $i = 1, \dots, n$. Поэтому $Q = Qt = \sum_{i=1}^n a_i A \subseteq A \subseteq Q$. Тогда $A = Q$ – простое кольцо. Получено противоречие с тем, что A не является примитивным справа кольцом.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся ни примитивным справа, ни полуцепным кольцом. Для модуля M_A равносильны следующие условия:

- (1) M – конечнопорожденный проективный модуль;
- (2) M – π -проективный конечномерный несингулярный модуль.

Следствие 2.15 вытекает из теорем 1 и 4.

Список литературы

1. Wisbauer R. Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
2. Singh S. Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary noetherian prime rings // Canad. J. Math. 1974. V. 26. №5. P. 1173–1185.
3. Goodearl K. R. Ring theory. Nonsingular rings and modules. New York: Marcel Dekker, 1976.
4. Stenström B. Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
5. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
6. Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. (3). 1974. V. 28. P. 291–310.
7. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.
8. Lenagan T. H. Bounded hereditary noetherian prime rings // J. London Math. Soc. (2). 1973. V. 6. P. 241–246.

Московский энергетический институт
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Поступила в редакцию
04.03.1997