Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, Порядковые оценки модуля изменения суммы лакунарного тригонометрического ряда, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 5, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:25:52

УДК 517.5

А. С. Белов

Порядковые оценки модуля изменения суммы лакунарного тригонометрического ряда

В статье находятся порядковые оценки для модуля изменения и усредненного модуля суммы лакунарного тригонометрического ряда через его коэффициенты.

Эти интересные глобальные характеристики функции и их применения изучались в работах З. А. Чантурия, Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянова, Б. Сендова, В. Попова и других. Поскольку в теории функций в качестве примера функции с теми или иными свойствами достаточно часто используется сумма лакунарного тригонометрического ряда, то полезно знать о ней как можно больше и, в частности, такие ее глобальные характеристики, как модуль изменения и усредненный модуль.

Приводятся также необходимые и достаточные условия принадлежности суммы лакунарного тригонометрического ряда некоторым классам функций, определяемым через указанные характеристики.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Моему учителю П. Л. Ульянову посвящается эта работа в связи с его семидесятилетием.

Пусть действительная функция f непрерывна на сегменте $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. Для каждого натурального числа n определим величину

$$\nu_f(n)_I = \sup \sum_{k=1}^n |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|, \quad (1)$$

где верхняя грань берется по всевозможным наборам непересекающихся интервалов $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$, лежащих в I . Положим $\nu_f(0)_I = 0$. Последовательность $\{\nu_f(n)_I\}_{n=0}^\infty$, следуя терминологии З. А. Чантурия [1], будем называть модулем изменения функции f на сегменте I . Для любого сегмента $J \subset I$ пусть

$$\Omega_f(J) = \max_{x \in J} f(x) - \min_{x \in J} f(x) = \max\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in J\}.$$

Тогда при любом натуральном n справедливо равенство

$$\nu_f(n)_I = \sup \sum_{k=1}^n \Omega_f([x_{k-1}, x_k]), \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00094).

где верхняя грань берется по всем точкам $\alpha = x_0 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = \beta$. Модуль изменения является интересной глобальной характеристикой функции f . Подробнее о свойствах модуля изменения см. работы [1], [2]. Для наших целей достаточно знать только следующие простейшие свойства модуля изменения, которые легко вытекают из (1) и (2): $\nu_f(n-1)_I \leq \nu_f(n)_I$ и $n^{-1}\nu_f(n)_I \geq (n+1)^{-1}\nu_f(n+1)_I$ при всех натуральных n .

Пусть $\Delta = |I| = \beta - \alpha$ — длина сегмента I , n — натуральное число и $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ — произвольный набор непересекающихся интервалов, лежащих в I . Для каждого $k = 1, \dots, n$ обозначим через m_k наибольшее целое неотрицательное число такое, что $m_k \Delta \leq n(\beta_k - \alpha_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| &\leq \sum_{k=1}^n \left| f(\beta_k) - f\left(\alpha_k + m_k \frac{\Delta}{n}\right) \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \left| f\left(\alpha_k + j \frac{\Delta}{n}\right) - f\left(\alpha_k + (j-1) \frac{\Delta}{n}\right) \right|. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^n m_k \leq \frac{n}{\Delta} \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) \leq n$, то в последней двойной сумме не более n слагаемых. Следовательно, для любого натурального n верно неравенство $\nu_f(n)_I \leq 2 \sup \sum_{k=1}^n |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|$, где верхняя грань берется по всем наборам непересекающихся интервалов $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$, которые лежат в I и имеют длину $\beta_k - \alpha_k \leq |I|/n$ при всех $k = 1, \dots, n$. В частности (см. также [1]),

$$\nu_f(n)_I \leq 2n \omega\left(\frac{|I|}{n}; f\right)_I \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\omega(\delta; f)_I = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$, $\delta \geq 0$, — модуль непрерывности функции f на сегменте I . При всех $\delta \geq 0$ положим

$$\tau_f(\delta)_I = \frac{1}{|I|} \int_I \Omega_f\left(\left[x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right] \cap I\right) dx. \quad (4)$$

Функцию $\tau_f(\delta)_I$ будем, для краткости, называть просто усредненным модулем функции f . О свойствах этой глобальной характеристики функции f см. работы [3], [4]. Нам достаточно знать, что $\tau_f(\delta)_I$ — неотрицательная, неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty)$ такая, что $\tau_f(0)_I = 0$, $\tau_f(\delta)_I = \tau_f(2|I|)_I = \Omega_f(I)$ при $\delta \geq 2|I|$ и $\tau_f(\delta_1 + \delta_2)_I \leq \tau_f(\delta_1)_I + \tau_f(\delta_2)_I$ при всех $\delta_1 \geq 0$ и $\delta_2 \geq 0$. Для каждого натурального n из (2) и (4) имеем

$$\tau_f\left(\frac{\Delta}{n}\right)_I = \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha}^{\alpha+\Delta/n} \sum_{k=0}^{n-1} \Omega_f\left(\left[x + \frac{k\Delta}{n} - \frac{\Delta}{2n}, x + \frac{k\Delta}{n} + \frac{\Delta}{2n}\right] \cap I\right) dx \leq \frac{1}{n} \nu_f(n)_I.$$

Таким образом, усредненный модуль и модуль изменения функции f связаны соотношением

$$\tau_f\left(\frac{|I|}{n}\right)_I \leq \frac{\nu_f(n)_I}{n} \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (5)$$

Более подробно о связи между такими глобальными характеристиками функции f как усредненный модуль и модуль изменения см. работу Е. А. Севастьянова [5],

а об их применении – книгу Б. Сендова и В. Попова [3] и обзорную статью М. Авдиспахича [6].

Цель настоящей статьи – считая функцию f суммой лакунарного тригонометрического ряда, найти порядковые оценки для модуля изменения и усредненного модуля функции f через коэффициенты соответствующего лакунарного ряда. Поскольку в теории функций в качестве примера функции с теми или иными свойствами достаточно часто удается использовать сумму лакунарного тригонометрического ряда, то, на наш взгляд, важно знать и такие полезные глобальные характеристики суммы лакунарного ряда, как усредненный модуль и модуль изменения.

§2. Обозначения и основные результаты

Пусть всюду далее

$$f(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x + \psi_n), \quad (6)$$

где последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \lambda > 1 \quad \text{при всех } n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\sum a_n < \infty$, а действительные числа a и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольны. Все эти условия далее всегда считаются выполненными. Для удобства будем считать, что $\lambda_0 = 0$ и $\pi/\lambda_0 = +\infty$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} N(\delta) &= N \quad \text{при } \delta \in \left[\frac{\pi}{\lambda_N}, \frac{\pi}{\lambda_{N-1}} \right), \quad N \geq 1; \\ R(y) &= \sum_{n: \lambda_n \geq y} a_n, \quad T(y) = \sum_{n: \lambda_n < y} a_n \lambda_n, \\ U(y) &= \left(\sum_{n: \lambda_n < y} a_n^2 \lambda_n^2 \right)^{1/2}, \quad L(y) = U(y) + y R(y) \quad \text{при } y > 0; \\ v_n &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k, \quad w_n = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \lambda_k^2 \right)^{1/2} \quad \text{при } n \geq 0; \\ a(\delta) &= \sum_{n=N(\delta)}^{\infty} a_n = R\left(\frac{\pi}{\delta}\right) \quad \text{при } \delta > 0; \\ \omega_1(\delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \min(\lambda_n \delta, \pi) \quad \text{при } \delta \geq 0; \\ \omega_0(\delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} (w_n - w_{n-1}) \min(\lambda_n \delta, \pi) \quad \text{при } \delta \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Во всем дальнейшем изложении все приведенные выше обозначения используются только в указанном смысле; в частности, $f(x)$ всюду обозначает сумму ряда (6). Ссылка на (8) указывает на использование некоторых из этих обозначений.

Напомним, что *модулем непрерывности* называется определенная и непрерывная при $\delta \geq 0$ неубывающая функция ω такая, что $\omega(0) = 0$ и $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ при всех $\delta_1 \geq 0$ и $\delta_2 \geq 0$. Если к тому же функция ω выпукла вверх, то она называется *выпуклым модулем непрерывности*. Заметим, что при каждом натуральном n функция $\min(\lambda_n \delta, \pi)$ является выпуклым модулем непрерывности. Очевидна также оценка

$$\lambda_n^{-1}(w_n - w_{n-1}) \leq a_n \quad \text{при } n \geq 1. \quad (9)$$

Поэтому функции $\omega_1(\delta)$ и $\omega_0(\delta)$ как суммы равномерно сходящихся рядов из выпуклых модулей непрерывности являются выпуклыми модулями непрерывности. В частности, функции $\delta^{-1}\omega_1(\delta)$ и $\delta^{-1}\omega_0(\delta)$ не возрастают на $(0, \infty)$. Следует также отметить, что $\omega_1(\delta) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\omega_0(\delta) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}(w_n - w_{n-1})$ при $\delta \geq \pi/\lambda_1$, т.е. функции ω_1 и ω_0 постоянны на $[\pi/\lambda_1, +\infty)$. Очевидно, что они линейны на каждом из сегментов $[\pi/\lambda_N, \pi/\lambda_{N-1}]$, где $N = 2, 3, \dots$. Функции ω_1 и ω_0 являются важными характеристиками лакунарного ряда (6).

Имеет место (см. §3)

ЛЕММА 1. *Верны оценки:*

$$\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda-1}\right)\omega_0(\delta) \geq \delta L\left(\frac{\pi}{\delta}\right) = \delta U\left(\frac{\pi}{\delta}\right) + \pi a(\delta) \geq \omega_0(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0 \quad (10)$$

и

$$\pi \sum_{m=n}^{\infty} \frac{w_m}{\lambda_m} \geq \omega_0(\pi \lambda_n^{-1}) \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \pi \sum_{m=n}^{\infty} \frac{w_m}{\lambda_m} \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (11)$$

Полагая $\delta = \pi/y$, оценки (10) можно записать в виде

$$\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda-1}\right)y\omega_0\left(\frac{\pi}{y}\right) \geq \pi L(y) = \pi U(y) + \pi y R(y) \geq y\omega_0\left(\frac{\pi}{y}\right) \quad \text{при } y > 0. \quad (12)$$

Пусть $I = [\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$, — произвольный сегмент, который в дальнейшем обычно считается фиксированным, а его длина обозначается через $\Delta = |I| = \beta - \alpha$.

Буква A всюду далее обозначает положительную достаточно большую постоянную, в каждом случае свою, зависящую только от тех параметров, которые указаны за ней в скобках.

Основным результатом этой статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного сегмента I , $|I| > 0$, справедливы оценки:*

$$A^{-1}(\lambda, \lambda_1 |I|) \omega_0(\delta) \leq \tau_f(\delta)_I \leq A(\lambda, \lambda_1 |I|) \omega_0(\delta) \quad \text{при } \delta \geq 0, \quad (13)$$

$$\tau_f\left(\frac{|I|}{n}\right)_I \leq \frac{\nu_f(n)_I}{n} \leq A(\lambda, \lambda_1 |I|) \tau_f\left(\frac{|I|}{n}\right)_I \quad \text{при } n \geq 1, \quad (14)$$

$$A^{-1}(\lambda, \lambda_1 |I|) n \omega_0\left(\frac{|I|}{n}\right) \leq \nu_f(n)_I \leq A(\lambda, \lambda_1 |I|) n \omega_0\left(\frac{|I|}{n}\right) \quad \text{при } n \geq 1. \quad (15)$$

Поскольку ω_0 является выпуклым модулем непрерывности, то

$$\min\{1, \pi^{-1}|I|\} \omega_0\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \omega_0\left(\frac{|I|}{n}\right) \leq \max\{1, \pi^{-1}|I|\} \omega_0\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{при } n \geq 1. \quad (16)$$

Отсюда в силу (15), (8) и (12) верны соотношения

$$\nu_f(n)_I \asymp n \omega_0\left(\frac{\pi}{n}\right) \asymp U(n) + nR(n) = L(n) \quad \text{при } n \geq 1$$

и

$$\tau_f(\delta)_I \asymp \omega_0(\delta) \quad \text{при } \delta \geq 0,$$

причем соответствующие постоянные в этих порядковых эквивалентностях зависят только от λ , λ_1 и $|I|$. Таким образом, порядок роста модуля изменения функции f , как и порядок убывания усредненного модуля функции f , от сегмента I не зависят. Напомним, что если функции g и h определены и неотрицательны на некотором множестве E на прямой, то говорят, что функции g и h имеют на E одинаковый порядок роста, и пишут $g \asymp h$ на E , если есть такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что $C_1 g(x) \leq h(x) \leq C_2 g(x)$ при всех $x \in E$.

При $p > 0$ и $\gamma \in (1, p+1]$ будем писать $f \in \text{ch}_\gamma^p$ на I , если $\sum n^{-\gamma} (\nu_f(n)_I)^p < \infty$. Из теоремы 1 довольно просто вытекает описание функций вида (6) из класса ch_γ^p и, в частности, из класса ch_2^1 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для произвольного сегмента I , $|I| > 0$, справедливы следующие три утверждения.

- 1) Если $p > 0$ и $\gamma \in (1, p+1)$, то $f \in \text{ch}_\gamma^p$ на I тогда и только тогда, когда

$$\sum a_n^p \lambda_n^{p+1-\gamma} < \infty. \quad (17)$$

- 2) Если $p > 0$, то $f \in \text{ch}_{p+1}^p$ на I тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty y^{-1} (R(y))^p dy < \infty. \quad (18)$$

- 3) $f \in \text{ch}_2^1$ на I тогда и только тогда, когда

$$\sum a_n \ln \lambda_n < \infty. \quad (19)$$

Теорема 1 также позволяет легко получить через обозначения (8) условия обратимости соотношения (3) для функции вида (6).

СЛЕДСТВИЕ 2. Следующие утверждения эквивалентны.

1) Существует положительная постоянная C_1 такая, что

$$n \omega \left(\frac{|I|}{n}, f \right)_I \leq C_1 \nu_f(n)_I \quad \text{при } n \geq 1. \quad (20)$$

2) Существует положительная постоянная C_2 такая, что

$$\omega_1(\delta) \leq C_2 \omega_0(\delta) \quad \text{при } \delta \geq 0. \quad (21)$$

3) Существует положительная постоянная C_3 такая, что

$$v_n \leq C_3 \left(w_n + \lambda_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right) \quad \text{при } n \geq 1. \quad (22)$$

4) Существует положительная постоянная C_4 такая, что

$$v_n \leq C_4 \left(\max_{k \leq n} (a_k \lambda_k) + \lambda_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right) \quad \text{при } n \geq 1. \quad (23)$$

Из теоремы 1 также вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любой убывающей последовательности положительных чисел $\{\nu(n)\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что последовательность $\{\nu(n)/n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и стремится к нулю, существует функция f вида (6), для которой на любом сегменте I , $|I| > 0$, справедливы соотношения

$$n \omega \left(\frac{|I|}{n}, f \right)_I \asymp \nu_f(n)_I \asymp \nu(n) \quad \text{при } n \geq 1. \quad (24)$$

Подробное доказательство сформулированных утверждений и составляет содержание этой статьи.

Нам осталось отметить, что доказательство леммы 1 и верхних оценок в (13) и (15) проведено в § 3; § 4 посвящен доказательству нижних оценок в (13) и (15) и оценок (14). Наконец, в § 5 доказываются следствия 1–3. В конце статьи помещено замечание 1, в котором указываются возможные обобщения теоремы 1.

Отметим также, что основные результаты этой статьи были, без доказательства, сформулированы в статье [7] (см. там теоремы 1 и 2 и следствия 1 и 2).

§ 3. Оценки сверху для модуля изменения и усредненного модуля

Прежде всего заметим, что если число $\delta > 0$ и натуральное число N таковы, что $\delta \in [\pi/\lambda_N, \pi/\lambda_{N-1})$, то из (8) следуют равенства: $N = N(\delta)$ и

$$\begin{aligned}\omega_0(\delta) &= w_{N-1}\delta + \pi \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^{-1}(w_n - w_{n-1}) \\ &= \delta U\left(\frac{\pi}{\delta}\right) + \pi \sum_{n=N(\delta)}^{\infty} \lambda_n^{-1}(w_n - w_{n-1}).\end{aligned}\quad (25)$$

В частности,

$$\begin{aligned}\omega_0\left(\frac{\pi}{\lambda_N}\right) &= \pi \lambda_N^{-1} w_{N-1} + \pi \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} (\lambda_m^{-1} - \lambda_{m+1}^{-1})(w_n - w_{n-1}) \\ &= \pi \sum_{m=N}^{\infty} (\lambda_m^{-1} - \lambda_{m+1}^{-1}) w_m.\end{aligned}\quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть $\delta \in [\pi/\lambda_N, \pi/\lambda_{N-1})$, где N – натуральное число. Из (25) и (9) сразу имеем $\omega_0(\delta) \leq \delta U(\pi/\delta) + \pi a(\delta)$. Из (26) и (7) получаем

$$\pi \sum_{m=N}^{\infty} \lambda_m^{-1} w_m \geq \omega_0(\pi/\lambda_N) \geq (1 - \lambda^{-1}) \pi \sum_{m=N}^{\infty} \lambda_m^{-1} w_m \geq (1 - \lambda^{-1}) \pi \sum_{m=N}^{\infty} a_m.$$

Этим доказаны оценки (11) и оценка

$$\omega_0(\delta) \geq \omega_0(\pi/\lambda_N) \geq (1 - \lambda^{-1}) \pi a(\delta).$$

Отсюда и из (25) следует $\delta U(\pi/\delta) + \pi a(\delta) \leq (1 + \lambda(\lambda - 1)^{-1}) \omega_0(\delta)$. Этим оценки (10), а значит, и (12), также доказаны.

Отметим, что из (25) и (26) сразу вытекает представление

$$\omega_0(\delta) = \int_0^{\delta} U\left(\frac{\pi}{t}\right) dt \quad \text{при всех } \delta \geq 0,$$

которое удобно при оценивании ω_0 в конкретных случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ в (15). Пусть n – произвольное натуральное число и $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ – произвольный набор непересекающихся интервалов, лежащих в сегменте $I = [\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$ и $\alpha_k \leq \beta_k$ при $k = 1, \dots, n$. Пусть $\Delta = |I| = \beta - \alpha$, $\gamma = \Delta/n$ и $N = N(\gamma)$. Обозначим $S(x) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \cos(\lambda_n x + \psi_n)$. Тогда при каждом $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)| &\leq |S(\beta_k) - S(\alpha_k)| + 2 \sum_{n=N}^{\infty} a_n \\ &= \left| \int_{\alpha_k}^{\beta_k} S'(x) dx \right| + 2a(\gamma) \leq \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |S'(x)| dx + 2a(\gamma).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leq \int_I |S'(x)| dx + 2n a(\gamma).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\nu_f(n)_I \leq \int_I |S'(x)| dx + 2n a(\gamma). \quad (27)$$

Но (см. [8, гл. 5, теорема 8.20], [9, теорема 1])

$$\begin{aligned} \int_I |S'(x)| dx &= \int_I \left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n \lambda_n \sin(\lambda_n x + \psi_n) \right| dx \\ &\leq A(\lambda) (\Delta + \lambda_1^{-1}) w_{N-1} = \Delta A(\lambda) K U\left(\frac{\pi}{\gamma}\right), \end{aligned}$$

где $K = 1 + (\lambda_1 |I|)^{-1}$. Поэтому из (27), (8) и (12) получаем (напомним, что постоянная A в каждом случае своя)

$$\begin{aligned} \nu_f(n)_I &\leq A(\lambda) K n \gamma U\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) + 2n a(\gamma) \leq \max\left\{A(\lambda) K, \frac{2}{\pi}\right\} n \gamma L\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) \\ &\leq A(\lambda) (1 + (\lambda_1 |I|)^{-1}) n \omega_0\left(\frac{|I|}{n}\right). \end{aligned}$$

Этим верхняя оценка (15) доказана, причем постоянную в ней можно взять в виде

$$A(\lambda, \lambda_1 |I|) = A(\lambda) (1 + (\lambda_1 |I|)^{-1}). \quad (28)$$

Доказательство верхней оценки в (13). Поскольку при $\delta \geq 2\Delta$ функция $\tau_f(\delta)_I$ превращается в постоянную, то верхнюю оценку в (13) достаточно доказывать при $\delta \in (0, 2\Delta]$, где $\Delta = |I|$ — длина сегмента I . В этом случае существует натуральное n такое, что $\delta \in (2\Delta/(n+1), 2\Delta/n]$. Тогда в силу (5) и уже доказанной верхней оценки в (15) имеем

$$\tau_f(\delta)_I \leq 2\tau_f\left(\frac{\Delta}{n}\right)_I \leq 2n^{-1} \nu_f(n)_I \leq A(\lambda, \lambda_1 |I|) \omega_0\left(\frac{\Delta}{n}\right) \leq A(\lambda, \lambda_1 |I|) \omega_0(\delta).$$

Этим верхняя оценка в (13) полностью доказана, причем соответствующую постоянную можно взять в виде (28).

§ 4. Завершение доказательства теоремы 1

Напомним, что $f(x)$ — это сумма ряда (6). При всех $\delta \geq 0$ рассмотрим функцию

$$\underline{\omega}(\delta; f) = \inf \max_{x \in J} |f(x) - c|, \quad (29)$$

где нижняя грань берется по всем числам c и всем сегментам J , длина которых равна $|J| = \delta$. Ясно, что при всех $\delta \geq 0$ имеют место представления

$$\begin{aligned} \underline{\omega}(\delta; f) &= \inf_{x, c} \max_{t \in [0, \delta]} |f(x+t) - c| = \inf_{x, c} \max_{t \in [0, \delta]} |f(x-t) - c| \\ &= \inf_{x, c} \max_{|t| \leq \delta/2} |f(x+t) - c| \\ &= \inf_{x, c} \max_{|t| \leq \delta/2} \left| c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n t + \lambda_n x + \psi_n) \right|, \end{aligned} \quad (30)$$

где каждая из нижних граней берется по всем числам c и x . Поскольку для любого сегмента J колебание

$$\Omega_f(J) = \max_{x \in J} f(x) - \min_{x \in J} f(x) = 2 \min_c \max_{x \in J} |f(x) - c|,$$

то из определения (29) очевидно равенство

$$\underline{\omega}(\delta; f) = \frac{1}{2} \inf \Omega_f(J), \quad (31)$$

где нижняя грань берется по всем сегментам J , длина которых равна $|J| = \delta$. Отсюда легко вытекает

ЛЕММА 2. *Для любого сегмента I , $|I| > 0$, при всех $\delta \in [0, |I|]$ верна оценка: $\tau_f(\delta)_I \geq \underline{\omega}(\delta; f)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (31) и (4) при $\delta \in [0, |I|]$ имеем

$$2\tau_f(\delta)_I \geq \tau_f(2\delta)_I = \frac{1}{|I|} \int_I \Omega_f([x-\delta, x+\delta] \cap I) dx \geq 2\underline{\omega}(\delta; f).$$

Этим лемма 2 доказана.

При всех $\delta \geq 0$ рассмотрим также функцию

$$\theta(\delta) = \inf \max_{|t| \leq \delta/2} \left| c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n t + \varphi_n) \right|,$$

где нижняя грань берется по всем числам c и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Здесь последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ те же, что и в (6). Из представления (30) сразу получаем, что

$$\underline{\omega}(\delta; f) \geq \theta(\delta) \quad \text{при всех } \delta \geq 0. \quad (32)$$

Важной частью доказательства теоремы 1 является

ЛЕММА 3. При всех $\delta > 0$ верна оценка:

$$\omega_0(\delta) \leq A(\lambda) \left(\theta(\delta) + \delta U\left(\frac{\pi}{\delta}\right) \right). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $h \geq 0$ очевидно тождество

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = - \sum_{n=1}^{\infty} 4 \sin^2\left(\frac{\lambda_n h}{2}\right) a_n \cos(\lambda_n x + \psi_n).$$

Пусть положительное число ε пока произвольно. При каждом натуральном N , полагая $\delta = \varepsilon(2\lambda_N)^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} & \max_{|x| \leq \delta} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| + \sum_{n=1}^{N-1} 4a_n \sin^2\left(\frac{\lambda_n h}{2}\right) \\ & \geq \max_{|x| \leq \delta} \left| \sum_{n=N}^{\infty} 4 \sin^2(\lambda_n h/2) a_n \cos(\lambda_n x + \psi_n) \right| \\ & \geq A^{-1}(\lambda, \varepsilon) \sum_{n=N}^{\infty} 4a_n \sin^2\left(\frac{\lambda_n h}{2}\right), \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из варианта известного неравенства Сидона–Зигмунда, доказанного автором в [10, теорема 2]. Следовательно,

$$4 \max_{|t| \leq \delta+h} |f(t)| + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \lambda_n^2 h^2 \geq A^{-1}(\lambda, \varepsilon) \sum_{n=N}^{\infty} 4a_n \sin^2\left(\frac{\lambda_n h}{2}\right).$$

Возьмем здесь нижнюю грань по всем числам a и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (6)). Тогда получим неравенство

$$4\theta(\varepsilon\lambda_N^{-1} + 2h) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \lambda_n^2 h^2 \geq A^{-1}(\lambda, \varepsilon) \sum_{n=N}^{\infty} 4a_n \sin^2\left(\frac{\lambda_n h}{2}\right),$$

которое справедливо при всех натуральных N и действительных $h \geq 0$. Положим $h = \varepsilon\lambda_N^{-1}t$, где $t \in [0, 1]$, и проинтегрируем обе части полученного неравенства по t от 0 до 1. Поскольку функция θ не убывает на $[0, \infty)$, то в результате получаем

$$\begin{aligned} 4\theta(3\varepsilon\lambda_N^{-1}) + \frac{1}{3}\varepsilon^2\lambda_N^{-2} \sum_{n=1}^{N-1} a_n \lambda_n^2 & \geq A^{-1}(\lambda, \varepsilon) \sum_{n=N}^{\infty} 4a_n \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\varepsilon\lambda_n}{2\lambda_N}t\right) dt \\ & \geq 4A^{-1}(\lambda, \varepsilon) \left(\inf_{v \geq \varepsilon/2} \int_0^1 \sin^2(vt) dt \right) \sum_{n=N}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Отсюда, беря $\varepsilon = \pi/3$ и деля все на 4, приходим к оценке

$$\theta\left(\frac{\pi}{\lambda_N}\right) + \pi^2\lambda_N^{-2} \sum_{n=1}^{N-1} a_n \lambda_n^2 \geq A^{-1}(\lambda) \sum_{n=N}^{\infty} a_n,$$

которая справедлива при всех натуральных N . Возьмем произвольное $\delta > 0$ и (см. (8)) положим в полученной оценке $N = N(\delta)$. Сразу получаем оценку

$$\theta(\delta) + \delta^2 \sum_{n=1}^{N(\delta)-1} a_n \lambda_n^2 \geq A^{-1}(\lambda) a(\delta). \quad (34)$$

Но в силу (7)

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_n \lambda_n^2 \leq w_{N-1} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n^2 \right)^{1/2} \leq w_{N-1} \lambda_{N-1} (1 - \lambda^{-2})^{-1/2}.$$

Поэтому

$$\delta \sum_{n=1}^{N(\delta)-1} a_n \lambda_n^2 \leq \pi (1 - \lambda^{-2})^{-1/2} U\left(\frac{\pi}{\delta}\right).$$

Отсюда, из (34) и (10) имеем

$$\omega_0(\delta) \leq \pi a(\delta) + \delta U\left(\frac{\pi}{\delta}\right) \leq A(\lambda) \theta(\delta) + A(\lambda) \delta U\left(\frac{\pi}{\delta}\right).$$

Оценка (33) доказана.

Пусть теперь $I = [\alpha, \beta]$ — произвольный сегмент и $\Delta = |I| = \beta - \alpha > 0$ — его длина. Завершим доказательство соотношений (13), (14) и (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ В (13). Пусть сначала $\delta \in (0, \Delta]$. Тогда в силу (4) при любом $h \in [0, \delta]$ верна оценка

$$\begin{aligned} \Delta \tau_f(\delta)_I &\geq \int_{\alpha+h/2}^{\beta-h/2} \Omega_f([x-h/2, x+h/2]) dx \\ &\geq \int_{\alpha+h/2}^{\beta-h/2} |f(x+h/2) - f(x-h/2)| dx \\ &= \int_{\alpha+h/2}^{\beta-h/2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \sin\left(\frac{\lambda_n h}{2}\right) \sin(\lambda_n x + \psi_n) \right| dx. \end{aligned}$$

Отсюда при $h = \delta/2$ по оценке из [9, теорема 2] имеем

$$\begin{aligned} \tau_f(\delta)_I &\geq \frac{1}{\Delta} \int_{\alpha+\Delta/4}^{\beta-\Delta/4} \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \sin\left(\frac{\lambda_n \delta}{4}\right) \sin(\lambda_n x + \psi_n) \right| \\ &\geq A^{-1}(\lambda, \Delta \lambda_1) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sin^2\left(\frac{\lambda_n \delta}{4}\right) \right)^{1/2} \\ &\geq A^{-1}(\lambda, \Delta \lambda_1) \left(\sum_{n=1}^{N(\delta)-1} a_n^2 \left(\frac{\lambda_n \delta}{2\pi}\right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tau_f(\delta)_I \geq A^{-1}(\lambda, \Delta\lambda_1)\delta U(\pi/\delta)$. Отсюда, из леммы 2 и оценки (32) получаем оценку

$$A(\lambda, \Delta\lambda_1)\tau_f(\delta)_I \geq \theta(\delta) + \delta U\left(\frac{\pi}{\delta}\right).$$

Вместе с леммой 3 это дает нижнюю оценку в (13) при $\delta \in (0, \Delta]$. Теперь заметим, что по варианту неравенства Сидона–Зигмунда [10, теорема 2] для любых чисел c и $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ верна оценка

$$\max_{|t| \leq \Delta/2} \left| c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n t + \varphi_n) \right| \geq A^{-1}(\lambda, \Delta\lambda_1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

т. е.

$$A(\lambda, \Delta\lambda_1)\theta(\Delta) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

В силу (8) и (9) очевидна оценка

$$\omega_0(\delta) \leq \omega_1(\delta) \quad \text{при всех } \delta \geq 0. \quad (35)$$

Поэтому при всех $\delta \geq \Delta$ получаем

$$A(\lambda, \Delta\lambda_1)\theta(\Delta) \geq \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \omega_1(\delta) \geq \omega_0(\delta).$$

Отсюда, из леммы 2 и оценки (32) при $\delta \geq \Delta$ имеем

$$\tau_f(\delta)_I \geq \tau_f(\Delta)_I \geq \theta(\Delta) \geq A^{-1}(\lambda, \Delta\lambda_1)\omega_0(\delta).$$

Этим нижняя оценка в (13) доказана при всех $\delta \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ В (15). Из уже доказанной нижней оценки в (13) и оценки (5) при каждом натуральном n имеем

$$n^{-1}\nu_f(n)_I \geq \tau_f\left(\frac{\Delta}{n}\right)_I \geq A^{-1}(\lambda, \Delta\lambda_1)\omega_0\left(\frac{\Delta}{n}\right).$$

Оценка (15) полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНОК (14). Нижняя оценка в (14) – это оценка (5). Поскольку для каждого натурального n из верхней оценки (15) и нижней оценки (13) имеем

$$n^{-1}\nu_f(n)_I \leq A(\lambda, \Delta\lambda_1)\omega_0\left(\frac{\Delta}{n}\right) \leq A(\lambda, \Delta\lambda_1)\tau_f\left(\frac{\Delta}{n}\right)_I,$$

то верна и верхняя оценка (14). Теорема 1 полностью доказана.

§5. Следствия из теоремы 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть $p > 0$ и $\gamma \in (1, p+1]$. По оценкам (15) и (16) $f \in \text{ch}_\gamma^p$ на I тогда и только тогда, когда

$$\sum n^{-\gamma} \left(n \omega_0 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)^p < \infty, \quad \text{т.е.} \quad \int_1^\infty y^{-\gamma} \left(y \omega_0 \left(\frac{\pi}{y} \right) \right)^p dy < \infty.$$

Последнее условие в силу оценок (12) эквивалентно условию

$$\int_1^\infty y^{-\gamma} (L(y))^p dy < \infty.$$

Поскольку при $N = 1, 2, \dots$ и $y \in (\lambda_{N-1}, \lambda_N]$ функция

$$L(y) = w_{N-1} + y \sum_{n=N}^\infty a_n,$$

то $f \in \text{ch}_\gamma^p$ на I тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия

$$\sum_{N=2}^\infty (w_{N-1})^p \int_{\lambda_{N-1}}^{\lambda_N} y^{-\gamma} dy < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{N=2}^\infty \left(\sum_{n=N}^\infty a_n \right)^p \int_{\lambda_{N-1}}^{\lambda_N} y^{p-\gamma} dy < \infty. \quad (36)$$

В силу (7) интеграл в первом условии имеет порядок $\lambda_{N-1}^{1-\gamma}$, а интеграл из второго условия имеет порядок $\lambda_N^{p+1-\gamma}$ при $\gamma < p+1$ и $\ln(\lambda_N/\lambda_{N-1})$ при $\gamma = p+1$. Ясно, что как из первого, так и из второго условий (36) сразу вытекает условие (17). Если $\gamma < p+1$, то условия (36) превращаются в условия

$$\sum_{N=1}^\infty \lambda_N^{1-\gamma} \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \lambda_n^2 \right)^{p/2} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{N=1}^\infty \lambda_N^{p+1-\gamma} \left(\sum_{n=N}^\infty a_n \right)^p < \infty, \quad (37)$$

причем первое условие (36) эквивалентно первому условию (37) и при $\gamma = p+1$.

Докажем сначала, что из условия (17) вытекает первое условие (37). Действительно, пусть положительное δ таково, что $\delta p/2 < \gamma - 1$. Тогда если $p > 2$, то при натуральных N по неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \lambda_n^2 \right)^{p/2} &\leq \sum_{n=1}^N (a_n^2 \lambda_n^{2-\delta})^{p/2} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^{\delta p/(p-2)} \right)^{(p-2)/2} \\ &\leq \lambda_N^{\delta p/2} \left(\sum_{n=1}^N a_n^p \lambda_n^{p-\delta p/2} \right) \left(\sum_{k=0}^\infty \lambda^{-k \delta p/(p-2)} \right)^{(p-2)/2}. \end{aligned}$$

Если $p \leq 2$, то при натуральных N получаем

$$\left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \lambda_n^2 \right)^{p/2} \leq \sum_{n=1}^N a_n^p \lambda_n^p \leq \lambda_N^{p/2} \sum_{n=1}^N a_n^p \lambda_n^{p-\delta p/2}.$$

В любом случае первое условие (37) будет выполнено, если

$$\sum_{N=1}^{\infty} \lambda_N^{1-\gamma+\delta p/2} \sum_{n=1}^N a_n^p \lambda_n^{p-\delta p/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{N=n}^{\infty} \lambda_N^{1-\gamma+\delta p/2} \right) \lambda_n^{p-\delta p/2} a_n^p < \infty.$$

Последнее же условие немедленно вытекает из (17). Таким образом, условие (17) эквивалентно первому условию (36).

Докажем теперь, что при $\gamma < p+1$ из условия (17) следует второе условие (37). Для этого возьмем такое положительное δ , что $\delta p < p+1-\gamma$. Тогда если $p > 1$, то при натуральных N имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=N}^{\infty} a_n \right)^p &\leq \sum_{n=N}^{\infty} (a_n \lambda_n^{\delta})^p \left(\sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^{-\delta p/(p-1)} \right)^{p-1} \\ &\leq \lambda_N^{-\delta p} \left(\sum_{n=N}^{\infty} a_n^p \lambda_n^{\delta p} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k \delta p/(p-1)} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Если же $p \leq 1$, то при натуральных N получаем

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} a_n \right)^p \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n^p \leq \lambda_N^{-\delta p} \sum_{n=N}^{\infty} a_n^p \lambda_n^{\delta p}.$$

В любом случае второе условие (37) будет выполнено, если

$$\sum_{N=1}^{\infty} \lambda_N^{p+1-\gamma-\delta p} \sum_{n=N}^{\infty} a_n^p \lambda_n^{\delta p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{N=1}^n \lambda_N^{p+1-\gamma-\delta p} \right) \lambda_n^{\delta p} a_n^p < \infty.$$

Последнее же условие немедленно вытекает из (17). Утверждение 1) следствия 1 доказано.

Пусть теперь $\gamma = p+1$. Тогда второе условие (36) совпадает с условием (18). Докажем, что из (18) следует и первое условие (36). Действительно, из (18), т.е. второго условия (36), вытекает, что $\sum a_N^p \ln(\lambda_N/\lambda_{N-1}) < \infty$. В частности, выполнено условие (17), а значит, как уже доказано выше, выполнено эквивалентное ему первое условие (36). Утверждение 2) следствия 1 также доказано.

Пусть далее $p = 1$ и $\gamma = 2$. Тогда условие (18) совпадает с условием

$$\sum_{N=2}^{\infty} \left(\sum_{n=N}^{\infty} a_n \right) \ln \frac{\lambda_N}{\lambda_{N-1}} < \infty.$$

Это последнее условие, очевидно, совпадает с условием (19). Следствие 1 полностью доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Пусть $\omega(\delta; f) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq \delta\}$, $\delta \geq 0$, – модуль непрерывности функции f на всей прямой. Тогда (см. [11, формулы (26), (27) и (33)])

$$A^{-1}(\lambda) \omega_1(\delta) \leq \omega(\delta; f) \leq \omega_1(\delta) \quad \text{при всех } \delta \geq 0. \quad (38)$$

Известно также, что (см. [10, теорема 3])

$$A^{-1}(\lambda, \Delta \lambda_1) \omega(\delta; f) \leq \omega(\delta; f)_I \leq \omega(\delta; f) \quad \text{при всех } \delta \geq 0, \quad (39)$$

где $\Delta = |I|$ – длина сегмента I . Из теоремы 1 и оценок (38) и (39) сразу вытекает, что утверждение 1) следствия 2 эквивалентно утверждению: существует такая положительная постоянная C , что

$$\omega_1\left(\frac{\Delta}{n}\right) \leq C \omega_0\left(\frac{\Delta}{n}\right) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Это последнее утверждение, очевидно, эквивалентно утверждению 2) следствия 2. Отметим, что при $\delta \geq 0$ верны представления

$$\omega_1(\delta) = \delta T\left(\frac{\pi}{\delta}\right) + \pi a(\delta) = \pi \delta \int_{\delta}^{\infty} t^{-2} a(t) dt = \int_0^{\delta} T\left(\frac{\pi}{t}\right) dt. \quad (40)$$

Поскольку функции ω_1 и ω_0 линейны на сегментах $[\pi/\lambda_n, \pi/\lambda_{n-1}]$, $n \geq 2$, и постоянны на промежутке $[\pi/\lambda_1, \infty)$, то (21) эквивалентно соотношению $\omega_1(\pi/\lambda_n) \leq C_2 \omega_0(\pi/\lambda_n)$ при $n \geq 1$. При натуральном n в силу (40) и леммы 1 верны соотношения:

$$\omega_1\left(\frac{\pi}{\lambda_n}\right) = \pi \lambda_n^{-1} v_n + \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

и

$$\omega_0\left(\frac{\pi}{\lambda_n}\right) \leq \pi \lambda_n^{-1} w_{n-1} + \pi \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq A(\lambda) \omega_0\left(\frac{\pi}{\lambda_n}\right).$$

Поэтому утверждение 2) следствия 2 эквивалентно утверждению: существует такая положительная постоянная C , что

$$v_n \leq C \left(w_{n-1} + \lambda_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Поскольку $w_n \leq w_{n-1} + a_n \lambda_n$, то последнее утверждение эквивалентно утверждению 3) следствия 2. При каждом натуральном n имеем

$$C_3 w_n \leq C_3 v_n^{1/2} \left(\max_{k \leq n} a_k \lambda_k \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2} C_3^2 \max_{k \leq n} (a_k \lambda_k).$$

Поэтому из (22) вытекает, что при всех натуральных n верна оценка

$$v_n \leq \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2} C_3^2 \max_{k \leq n} (a_k \lambda_k) + C_3 \lambda_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k,$$

т.е. верно утверждение 4) следствия 2. Обратно, из утверждения 4), очевидно, сразу вытекает утверждение 3) следствия 2. Таким образом, условия (20), (21), (22) и (23) эквивалентны между собой. Этим следствие 2 полностью доказано.

Из оценки (3) и следствия 2 вытекает, что для функции (6) соотношение

$$\nu_f(n)_I \asymp n \omega\left(\frac{|I|}{n}; f\right)_I \quad \text{при } n \geq 1$$

верно тогда и только тогда, когда для некоторой положительной постоянной C_4 выполнена оценка (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Если последовательность $\nu = \{\nu(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена, то, очевидно, в качестве $f(x)$ можно взять любую функцию (6), у которой $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n < \infty$. Поэтому будем предполагать, что последовательность ν неограничена. Поскольку последовательность ν не убывает, то $\nu(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. По условию последовательность $\{\nu(n)/n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастая стремится к нулю. Положим $\lambda_1 = 1$. Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ при некотором натуральном m уже выбраны, то обозначим через λ_{m+1} наименьшее натуральное число такое, что $\nu(\lambda_{m+1}) > 2\nu(\lambda_m)$. Поскольку $\nu(2\lambda_m) \leq 2\nu(\lambda_m)$, то $\lambda_{m+1} > 2\lambda_m$ при всех натуральных m . Положим

$$a_n = \nu(\lambda_n) \lambda_n^{-1} - \nu(\lambda_{n+1}) \lambda_{n+1}^{-1} \quad \text{при } n \geq 1.$$

Тогда $a_n \geq 0$ при $n \geq 1$ и $\sum a_n < \infty$. Числа a и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ возьмем произвольным образом. Рассмотрим соответствующую функцию (6). При натуральных n имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \nu(\lambda_n) \lambda_n^{-1} \quad (41)$$

и

$$v_n = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k \leq \sum_{k=1}^n \nu(\lambda_k) \leq 2\nu(\lambda_n) = 2\lambda_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k. \quad (42)$$

Поэтому выполнено утверждение 3) следствия 2. По следствию 2 и оценкам (3), (38) и (39) на любом сегменте $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, имеем

$$\nu_f(n)_I \asymp n \omega\left(\frac{|I|}{n}; f\right)_I \asymp n \omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Если $\lambda_m \leq n < \lambda_{m+1}$ при некотором натуральном m , то в силу (8), (41) и (42)

$$n \omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi v_m + \pi n \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \leq 2\pi \nu(\lambda_m) + \pi n \lambda_{m+1}^{-1} \nu(\lambda_{m+1}) \leq 3\pi \nu(n)$$

и

$$\begin{aligned} n \omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right) &\geq \pi v_m + \pi \lambda_m \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \\ &\geq \pi \lambda_m \sum_{k=m}^{\infty} a_k = \pi \nu(\lambda_m) \geq \frac{\pi}{2} \nu(\lambda_{m+1} - 1) \geq \frac{\pi}{2} \nu(n). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{2}\nu(n) \leq n\omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq 3\pi\nu(n) \quad \text{при всех } n \geq 1$$

и соотношения (24) доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть k – произвольное натуральное число и $p \in [1, \infty)$. Тогда для функции (6) разность

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j f(x + kh)$$

при всех h представима в виде

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(2 \sin\left(\frac{\lambda_n h}{2}\right) \right)^k \cos\left(\lambda_n x + \frac{\lambda_n kh}{2} + \psi_n + \frac{\pi k}{2}\right).$$

Пусть $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, – произвольный сегмент и число $\delta \geq 0$. Рассмотрим определенную при всех x функцию

$$\omega_k(f; \delta, x) = \max\{|\Delta_h^k f(t)|\},$$

где максимум берется по всем t и h таким, что $t, t + kh \in [x - k\delta/2, x + k\delta/2] \cap I$. Эта функция (см. [3, раздел 1.3]) называется локальным модулем гладкости порядка k функции f в точке x . При всех $\delta \geq 0$ усредненный модуль порядка k функции f определяется формулой

$$\tau_k(f; \delta)_{L^p(I)} = \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega_k(f; \delta, x))^p dx \right)^{1/p}. \quad (43)$$

Отметим, что в этих обозначениях функция (4) совпадает с $\tau_1(f; \delta)_{L^1(I)}$. Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1, позволяют получить порядковые оценки и для усредненного модуля порядка k функции (6), т.е. верна

ТЕОРЕМА 2. Для любых натурального k , $p \in [1, \infty)$ и любого сегмента $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, для функции (6) при всех $\delta > 0$ справедливо порядковое соотношение

$$\tau_k(f; \delta)_{L^p(I)} \asymp \delta^k \left(\sum_{n=1}^{N(\delta)-1} a_n^2 \lambda_n^{2k} \right)^{1/2} + \pi^k \sum_{n=N(\delta)}^{\infty} a_n,$$

причем соответствующие этому соотношению положительные постоянные можно взять зависящими только от p , λ , $\lambda_1|I|$ и k .

Отметим, что в случае $p = \infty$ правая часть формулы (43) дает модуль непрерывности порядка k функции f на сегменте I , т.е.

$$\omega_k(f; \delta)_I = \max\{|\Delta_h^k f(x)| : x, x + kh \in I\}.$$

В этом случае (см. [10], [11]), при всех $\delta \geq 0$ верно порядковое соотношение

$$\omega_k(f; \delta)_I \asymp \sum_{n=1}^{\infty} a_n \min(\delta^k \lambda_n^k, \pi^k),$$

причем соответствующие этому соотношению положительные постоянные можно взять зависящими только от λ , $\lambda_1|I|$ и k .

Список литературы

1. Чантурия З. А. Модуль изменения и его применение в теории рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214. № 1. С. 63–66.
2. Севастьянов Е. А. Кусочно-монотонная аппроксимация и Ф-вариации // Anal. Math. 1975. Т. 1. № 2. С. 141–164.
3. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости. М.: Мир, 1988.
4. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. О приближении функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности, рациональных) функций // Матем. сб. 1976. Т. 101. № 4. С. 508–541.
5. Севастьянов Е. А. Средний модуль колебания и кусочно-монотонная аппроксимация // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 6. С. 867–876.
6. Avdispahic M. Concepts of generalized bounded variation and the theory of Fourier series // Internat. J. Math. Math. Sci. 1986. V. 9. № 2. P. 223–244.
7. Белов А. С. Лакунарные тригонометрические ряды и функции обобщенной ограниченной вариации // Сообщения АН ГССР. 1989. Т. 134. № 3. С. 49–52.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
9. Belov A. S. On some local properties of the sum of lacunary trigonometric series // Anal. Math. 1988. V. 14. № 1. P. 65–97.
10. Белов А. С. О неравенстве Сидона–Зигмунда в теории лакунарных тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 502–515.
11. Белов А. С. О сумме лакунарного ряда // Труды ММО. 1975. Т. 33. С. 107–153.

Ивановский государственный университет

Поступила в редакцию
20.02.1998