Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, Т. Ю. Рослова, Обобщенная локализация для двойных тригонометрических рядов Фурье и рядов Фурье–Уолша функций из $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 5, 21–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:23:13

УДК 517.5

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, Т. Ю. Рослова

**Обобщенная локализация для двойных
тригонометрических рядов Фурье и рядов
Фурье–Уолша функций из $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$**

В работе установлено, что для любого множества $\Omega \subset I^2 = [0, 1]^2$ и для любой функции $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(I^2)$, $f = 0$ на Ω , двойной ряд Фурье по тригонометрической системе $\Psi = \mathcal{E}$ и по системе Уолша–Пэли $\Psi = W$ (суммируемый по прямоугольникам) функции f сходится к нулю почти всюду (п.в.) на Ω . Тем самым доказано, что на любых открытых подмножествах квадрата I^2 справедлива обобщенная локализация п.в. для двойных тригонометрических рядов Фурье и рядов Фурье–Уолша, суммируемых по прямоугольникам, функций из класса $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$. В работе также установлено, что для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$, для любых функций $\Phi_{\mathcal{E}}(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$, $u \rightarrow \infty$, и $\Phi_W(u) = u(\log^+ \log^+ u)^{1-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, указанная локализация не имеет места на любых не плотных в I^2 множествах в классах $\Phi_{\Psi}(L)(I^2)$.

Библиография: 29 названий.

Введение

Работа посвящается П. Л. Ульянову в связи с его семидесятилетием.

1. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим $kx = k_1x_1 + \dots + k_Nx_N$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$. Рассмотрим также множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами и для любого $\lambda \in \mathbb{Z}^1$ положим $\mathbb{Z}_{\lambda}^N = \{n \in \mathbb{Z}^N : n_j \geq \lambda, j = 1, \dots, N\}$.

Пусть $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция, через $\Phi(L) = \Phi(L)(I^N)$ обозначим множество суммируемых функций f таких, что

$$\int_{I^N} \Phi(|f(x)|) dx < \infty,$$

где $I^N = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 \leq x_j < 1, j = 1, \dots, N\}$. Если $\Phi(u) = u^p$, то обозначим $\Phi(L) = L_p(I^N)$, $p \geq 1$; если $\Phi(u) = u \log^+ u$, где $\log^+ u = \log \max\{1, u\}$, то $\Phi(L) = L \log^+ L$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00332).

Работа второго и третьего авторов выполнена также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект поддержки научных школ (грант № 96-15-96073).

Пусть функция $f(x) \in \Phi(L)(I^N)$, $N \geq 1$, разложена в кратный ряд Фурье по тригонометрической системе $\mathcal{E} = \{e^{i2\pi nx}\}_{n \in \mathbb{Z}^N}$ и в кратный ряд Фурье по системе Уолша–Пэли $W = \{w_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_0^N}$, $x \in I^N$:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{i2\pi kx} \quad \text{и} \quad f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^N} \tilde{c}_k w_k(x) \quad (0.1)$$

(в случае тригонометрической системы будем считать функцию $f(x)$ имеющей период 1 по каждому аргументу).

Для любого вектора $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ рассмотрим прямоугольные частичные суммы:

$$S_n(x; f; \mathcal{E}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_N=-n_N}^{n_N} c_k e^{i2\pi(k_1 x_1 + \cdots + k_N x_N)}, \quad (0.2)$$

$$S_n(x; f; W) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_N=0}^{n_N-1} \tilde{c}_k w_{k_1}(x_1) \cdots w_{k_N}(x_N), \quad (0.3)$$

частным случаем которых являются квадратные частичные суммы $S_{n_0}(x; f; \Psi)$, $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$, когда $n_1 = n_2 = \cdots = n_N = n_0$. При этом под сходимостью рядов в (0.1) по прямоугольникам будем понимать существование предела частичных сумм $S_n(x; f; \Psi)$ – (0.2), (0.3) при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$), а под сходимостью рядов в (0.1) по квадратам – существование предела $S_{n_0}(x; f; \Psi)$ при $n_0 \rightarrow \infty$.

Пусть Ω – произвольное измеримое множество, $\Omega \subset I^N$, $\mu\Omega > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N -мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на Ω .

2. Отсутствие классической локализации для рядов Фурье как для тригонометрической системы ($\Psi = \mathcal{E}$), так и для системы Уолша–Пэли ($\Psi = W$) в классе L_p , $p \geq 1$, в кратном случае привело к понятию “обобщенная локализация почти всюду” (п.в.) [1] (см. также [2], [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Ω , $\Omega \subset I^N$, – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье (по ортонормированным системам $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$) функций из класса $\Phi(L)$ (из класса L_∞) справедлива на множестве Ω обобщенная локализация почти всюду (ОЛ), если из условия $f \in \Phi(L)(I^N)$ ($f \in L_\infty(I^N)$), $f(x) = 0$ на Ω следует, что почти всюду на Ω существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f; \Psi) = 0.$$

При $N = 1$ ОЛ справедлива на любых измеримых множествах $\Omega \subset I^1$ в классах L_p , $p > 1$. Для тригонометрической системы $\mathcal{E}$ это следует из работ Л. Карлесона [4] и Р. Ханта [5]; для системы Уолша–Пэли W – это следует из работ П. Билларда [6], Р. Ханта [7] и П. Шелина [8] (см. также [9, с. 135]). Если $p = 1$, то ОЛ в одномерном случае для системы W справедлива на открытых п.в. множествах¹

¹Множество Ω будем называть (см. [12], [14]) *открытым почти всюду*, если существует открытое множество Ω_1 такое, что $\mu(\Omega \Delta \Omega_1) = 0$.

(это следует из классического принципа локализации для системы Уолша–Пэли, установленного Н. Файном в [10], см. также [9] или [11]). Что касается тригонометрической системы $\mathcal{E}$, то при $N = 1$ для функций из $L_1(I^1)$ ОЛ справедлива на измеримом множестве $\Omega \subset I^1$, $\mu\Omega > 0$, тогда и только тогда, когда это множество является открытым п.в. Достаточность этого факта следует из классического принципа локализации Римана, необходимость доказана И. Л. Блошанским (см. [12, теорема 2 для $N = 1$]).

Для кратного случая исследования ОЛ для системы $\mathcal{E}$ были проведены И. Л. Блошанским в работах [1], [2], [12]–[15], для системы W – С. К. Блошанской, И. Л. Блошанским в работах [3] и [16]. Так, в случае $N = 2$ для тригонометрической системы $\mathcal{E}$ в работе [2] был доказан обобщенный принцип локализации п.в., заключающийся в том, что для функций $f \in L_p(I^N)$, $p > 1$, сходимость или расходимость двойного ряда Фурье (функции f) п.в. в некотором круге не зависит от поведения f вне этого круга. Для системы Уолша–Пэли W этот результат был доказан в работе [16] (см. также [3]). Таким образом, для двойных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) как по системе $\mathcal{E}$, так и по системе W на открытых п.в. множествах ОЛ справедлива в классах L_p , $p > 1$.

Заметим, что усилить последний результат, доказав его в случае $N = 2$, $p > 1$ для произвольного измеримого множества для системы $\mathcal{E}$, оказалось невозможным. В работе [13] было построено измеримое множество $\Omega \subset I^2$ с мерой, сколь угодно мало отличающейся от меры квадрата I^2 , на котором ОЛ (для тригонометрической системы $\mathcal{E}$) не справедлива в классе $L_\infty(I^2)$ при суммировании по прямоугольникам.

Что касается $N \geq 3$, то как для тригонометрической системы [15], так и для системы Уолша–Пэли [16], ОЛ в этом случае уже не справедлива ни на каком измеримом множестве $\Omega \subset I^N$, не являющемся плотным в I^N ($\bar{\Omega} \not\supset I^N$, $\bar{\Omega}$ – замыкание множества Ω), даже в классе $\mathbb{C}(I^N)$ при суммировании кратного ряда Фурье по прямоугольникам.

Если же рассматривать класс $L_1(I^N)$, $N \geq 2$, то аналогичный результат (а именно, несправедливость ОЛ ни на каком измеримом множестве $\Omega \subset I^N$: $\bar{\Omega} \not\supset I^N$, $N \geq 2$) для системы W был также получен в [16]. Что касается тригонометрической системы $\mathcal{E}$, то уже начиная с двумерного случая, ОЛ не справедлива вообще ни на каком измеримом множестве $\Omega \subset I^N$, $0 < \mu\Omega < 1$, в классе $L_1(I^N)$, $N \geq 2$, даже при суммировании кратного ряда Фурье по квадратам.

Сформулированные выше результаты поставили вопрос о справедливости ОЛ по системам $\mathcal{E}$ и W в классах, “лежащих между” $L_1(I^N)$ и $L_p(I^N)$, $p > 1$ при $N = 2$.

3. Если $f \in L(\log^+ L)^2 \log^+ \log^+ L(I^2)$, то, как следует из работы П. Шеллина [17], ряд Фурье по тригонометрической системе $\mathcal{E}$ функции f сходится п.в. на I^2 при суммировании по квадратам. Как следует из работы Ф. Морица [18], ряд Фурье–Уолша любой функции $f \in L_2(I^2)$ сходится п.в. на I^2 при суммировании по квадратам. (В случае суммирования по прямоугольникам, как известно, для систем $\mathcal{E}$ [19] и W [20] двойной ряд Фурье функции f может неограниченно расходиться п.в. на I^2 , даже если $f \in \mathbb{C}(I^2)$.) Таким образом, для системы Уолша–Пэли в классе $L_2(I^2)$ и для тригонометрической системы – уже в классе

$L(\log^+ L)^2 \log^+ \log^+ L(T^2)$ ОЛ для двойных рядов Фурье справедлива на любых измеримых подмножествах I^2 в случае суммирования по квадратам.²

Если же рассматривать ОЛ на открытых п.в. множествах, то в работе [22] (для $\Psi = \mathcal{E}$) и в [23] (для $\Psi = W$) было установлено, что для двойных рядов Фурье ОЛ справедлива на открытых п.в. подмножествах I^2 в классе $L(\log^+ L)^2$ при суммировании по прямоугольникам.

Последний результат естественно поставил вопрос о справедливости ОЛ как по системе $\mathcal{E}$, так и по системе W (на открытых множествах) в классах $\Phi(L)(I^2)$, когда $\Phi(u) = o(u(\log^+ u)^2)$ при $u \rightarrow \infty$.

4. В настоящей работе был получен следующий ответ на поставленный вопрос.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω – произвольное (непустое) открытое множество $\Omega \subset I^2$, и пусть $f(x) = 0$ на Ω . Тогда для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ имеем:

1. если $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(I^2)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f; \Psi) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in \Omega; \quad (0.4)$$

2. если $f \in L(\log^+ L)^2(I^2)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu\Omega_\varepsilon > \mu\Omega - \varepsilon$ и постоянная $C_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |S_n(x; f; \Psi)| \right\|_{L_1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \int_{I^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_\varepsilon. \quad (0.5)$$

Таким образом, сформулированный результат показывает, что при $N = 2$, $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ ОЛ справедлива на любом открытом п.в. множестве $\Omega \subset I^2$ в классе $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$.

Далее, естественно встает вопрос о справедливости ОЛ (на открытых п.в. множествах) в “более широком”, чем $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$ классе.

Некоторый ответ на поставленный вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω – произвольное измеримое множество, $\Omega \subset I^2$, $\mu\Omega > 0$ (μ – мера Лебега), не являющееся плотным в I^2 ($\overline{\Omega} \not\subset I^2$). Для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ существует подмножество $\Omega_0 = \Omega_0(\Psi) \subset \Omega$, $\mu\Omega_0 > 0$, такое, что для любых неубывающих функций $\Phi_\Psi(u)$, $u \in [0, \infty)$, удовлетворяющих условиям:

$$\Phi_\mathcal{E}(u) = o(u \log^+ \log^+ u) \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad (0.6)$$

$$\Phi_W(u) = u(\log^+ \log^+ u)^{1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (0.7)$$

существует функция $f = f_\Psi \in \Phi_\Psi(L)(I^2)$ такая, что

$$\begin{aligned} 1. & f(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega; \\ 2. & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x; f; \Psi)| = +\infty \text{ для почти всех } x \in \Omega_0. \end{aligned} \quad (0.8)$$

²При $N = 1$ ОЛ справедлива на любых измеримых множествах в $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$ для системы W (это следует из работы П. Шелина [8]) и в классе $L \log^+ L \log^+ \log^+ \log^+ L$ для системы $\mathcal{E}$ (это следует из недавней работы Н. Ю. Антонова [21]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты теорем 1 и 2 для тригонометрической системы $\mathcal{E}$ интересно сравнить с результатом работы [24] С. В. Конягина, доказавшим существование функций $f \in \Phi(L)(I^2)$, где $\Phi(u) = o(u \log^+ u \log^+ \log^+ u)$ при $u \rightarrow \infty$, с расходящимся п.в. по квадратам двойным тригонометрическим рядом Фурье.

5. В §1 доказываются вспомогательные результаты, которые позволяют в §2 (для $\Psi = \mathcal{E}$) и в §3 (для $\Psi = W$) доказать некоторые модификации теоремы 1 (теорему 1' для $\mathcal{E}$ и теорему 1'' для W); далее, в этих же параграфах показано, как из теоремы 1' и 1'' получить (соответственно для $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$) теорему 1. В §4 доказывается теорема 2.

§1. Вспомогательные утверждения

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\mathcal{L}(f) = \int_{I^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)| \log^+ \log^+ |f(x)| + 1) dx \quad (1.1)$$

и

$$\tilde{\Phi}(L) = \{f \in L_1(I^2) : \mathcal{L}(f) < \infty\}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим одномерные частичные суммы

$$S_{n_1}(x_1; f; \Psi; x_2) \equiv S_{n_1}(x_1; f(\cdot, x_2); \Psi) \quad \text{и} \quad S_{n_2}(x_2; f; \Psi; x_1) \equiv S_{n_2}(x_2; f(x_1, \cdot); \Psi)$$

по тригонометрической системе ($\Psi = \mathcal{E}$) и по системе Уолша–Пэли ($\Psi = W$) (см. (0.2) для $\Psi = \mathcal{E}$ и (0.3) для $\Psi = W$ при $N = 1$). С помощью ядер Дирихле $D_k(z) = D_k^\Psi(z)$, $k \in \mathbb{Z}_1^1$, $z \in I^1 = [0, 1)$, указанные суммы можно записать в виде:

$$S_{n_\nu}(x_\nu; f; \mathcal{E}; u_l) = \int_{I^1} f(u_1, u_2) D_{n_\nu}(u_\nu - x_\nu) du_\nu, \quad l, \nu = 1, 2, \quad l \neq \nu, \quad (1.3)$$

– одномерная частичная сумма по системе $\Psi = \mathcal{E}$ и

$$S_{n_\nu}(x_\nu; f; W; u_l) = \int_{I^1} f(u_1, u_2) D_{n_\nu}(u_\nu \dot{+} x_\nu) du_\nu, \quad l, \nu = 1, 2, \quad l \neq \nu, \quad (1.4)$$

– одномерная частичная сумма по системе $\Psi = W$.

Положим

$$S_*(x_\nu; f; \Psi; u_l) = \sup_{n_\nu \geq 1} |S_{n_\nu}(x_\nu; f; \Psi; u_l)|, \quad l, \nu = 1, 2, \quad l \neq \nu. \quad (1.5)$$

ЛЕММА. Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$. Тогда для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ существуют множества $P_0 = P_0(f, \Psi) \subset I^2$ такие, что

1. $\mu P_0 \leq C_0 [\mathcal{L}(f)]^{1/5}$;
2. для любых $x = (x_1, x_2) \in I^2 \setminus P_0$

$$\int_{I^1} S_*(x_\nu; f; \Psi; u_l) du_l \leq C_\nu \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\}, \quad l, \nu = 1, 2, \quad l \neq \nu, \quad (1.7)$$

где C_j , $j = 0, 1, 2$, – константы, не зависящие ни от функции f , ни от множества P_0 , $\mu = \mu_2$ – мера Лебега на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_n(x; \varphi; \Psi)$, $n \in \mathbb{Z}_1^1$, — n -ая частичная сумма одномерного ряда Фурье функции $\varphi \in L_1(I^1)$ по тригонометрической системе ($\Psi = \mathcal{E}$) и по системе Уолша–Пэли ($\Psi = W$) (см. (0.2) и (0.3) для $N = 1$), и пусть

$$S_*(x; \varphi; \Psi) = \sup_{n \geq 1} |S_n(x; \varphi; \Psi)|$$

— мажоранта этой частичной суммы.

Справедлив следующий результат, который был доказан подробно для системы Уолша–Пэли в работе П. Шелина [8, лемма 3.2] (см. также работы Ф. Сория [25, теорема 1] и Р. Ханта и М. Тейблсона [26, теорема 4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А. Для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ и для любой функции $\varphi \in L_1(I^1)$ такой, что

$$J(\varphi) = \int_{I^1} |\varphi(x)| (\log^+ |\varphi(x)| \log^+ \log^+ |\varphi(x)| + 1) dx < \frac{1}{2}, \quad (1.8)$$

существуют множества $E = E(\varphi; \Psi)$ такие, что

$$1. \mu_1 E \leq C_1 [J(\varphi)]^{1/5}; \quad (1.9)$$

$$2. S_*(x; \varphi; \Psi) \leq C_2 [J(\varphi)]^{2/5} \text{ при } x \in I^1 \setminus E, \quad (1.10)$$

где C_j , $j = 1, 2$, — константы, не зависящие ни от функции φ , ни от множества E , μ_1 — мера Лебега на прямой.

Докажем справедливость следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ и для любой функции $\varphi \in L_1(I^1)$ такой, что

$$J(\varphi) < \infty, \quad (1.11)$$

существуют множества $E = E(\varphi; \Psi)$ такие, что

$$1. \mu_1 E \leq C_1 [J(\varphi)]^{1/5}; \quad (1.12)$$

$$2. S_*(x; \varphi; \Psi) \leq C_2 \max\{[J(\varphi)]^{2/5}, J(\varphi)\} \text{ при } x \in I^1 \setminus E, \quad (1.13)$$

где C_j , $j = 1, 2$, — константы, не зависящие ни от функции φ , ни от множества E , μ_1 — мера Лебега на прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\varphi \in L_1(I^1)$ такая, что выполнено условие (1.11). Обозначим

$$a_\varphi = \max\left\{\frac{1}{2}, J(\varphi)\right\} \quad (1.14)$$

и положим

$$g(x) = \frac{1}{2a_\varphi} \cdot \varphi(x). \quad (1.15)$$

Рассмотрим $J(g)$. Имеем, учитывая (1.8), (1.14) и (1.15),

$$J(g) = \frac{1}{2a_\varphi} \int_{I^1} |\varphi(x)| \left(\log^+ \frac{|\varphi(x)|}{2a_\varphi} \log^+ \log^+ \frac{|\varphi(x)|}{2a_\varphi} + 1 \right) dx \leq \frac{1}{2a_\varphi} J(\varphi). \quad (1.16)$$

Рассмотрим два случая: $0 < J(\varphi) < 1/2$ и $1/2 \leq J(\varphi) < \infty$. Пусть $J(\varphi) < 1/2$, следовательно, из (1.14)–(1.16) имеем:

$$J(g) \leq \frac{1}{2a_\varphi} J(\varphi) = J(\varphi) < \frac{1}{2}. \quad (1.17)$$

Пусть $1/2 \leq J(\varphi) < \infty$, тогда (опять-таки из (1.14)–(1.16)) получаем:

$$J(g) \leq \frac{1}{2a_\varphi} J(\varphi) = \frac{1}{2} < J(\varphi). \quad (1.18)$$

В таком случае, из (1.17) и (1.18) имеем две оценки: во-первых,

$$J(g) \leq J(\varphi), \quad (1.19)$$

и, во-вторых, функция $g \in L_1(I^1)$ и

$$J(g) \leq \frac{1}{2}.$$

Последняя оценка означает, что определенная в (1.15) функция $g(x)$ удовлетворяет условию (1.8) предложения А. Следовательно (см. оценки (1.9), (1.10)), существуют множества $E = E(g, \Psi) = E(g(\varphi), \Psi)$ такие, что

$$\mu_1 E \leq C_1 [J(g)]^{1/5} \quad (1.20)$$

и

$$S_*(x; g) \leq C_2 [J(g)]^{2/5} \quad \text{при } x \in I^1 \setminus E. \quad (1.21)$$

Учитывая неравенство (1.19), из (1.20) получаем:

$$\mu_1 E \leq C_1 [J(\varphi)]^{1/5}. \quad (1.22)$$

Учитывая, в свою очередь, определение функции g (1.15), из (1.21) имеем:

$$\begin{aligned} S_*\left(x; \frac{\varphi}{2a_\varphi}\right) &\leq C_2 \left[\frac{1}{2a_\varphi} \int_{I^1} |\varphi(x)| (\log^+ |\varphi(x)| \log^+ \log^+ |\varphi(x)| + 1) dx \right]^{2/5} \\ &= C_2 \left[\frac{1}{2a_\varphi} J(\varphi) \right]^{2/5} \end{aligned} \quad (1.23)$$

для любого $x \in I^1 \setminus E$; или

$$S_*(x; \varphi) \leq C_2 [2a_\varphi]^{3/5} \cdot [J(\varphi)]^{2/5}, \quad x \in I^1 \setminus E. \quad (1.24)$$

Рассмотрев опять два случая: $0 < J(\varphi) < 1/2$ и $1/2 \leq J(\varphi) < \infty$, из (1.14) и (1.24) получаем оценку (1.13); оценка (1.22) доказывает (1.12).

Предложение 1.1 доказано.

Рассмотрим следующие две неотрицательные функции:

$$\mathcal{L}_\nu(f) = \mathcal{L}_\nu(x_\nu; f) = \int_0^1 |f(x_1, x_2)| (\log^+ |f(x_1, x_2)| \log^+ \log^+ |f(x_1, x_2)| + 1) dx_l, \\ x_\nu \in [0, 1), \quad l, \nu = 1, 2, \quad l \neq \nu, \quad (1.25)$$

очевидно (см. обозначения (1.1)),

$$\int_0^1 \mathcal{L}_\nu(t, f) dt = \mathcal{L}(f), \quad \nu = 1, 2. \quad (1.26)$$

Обозначим

$$\tilde{I}_\nu = \tilde{I}_\nu(f) = \{t \in [0, 1) : \mathcal{L}_\nu(t; f) < \infty\}, \quad \nu = 1, 2, \quad (1.27)$$

и положим

$$\tilde{I}^2 = \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2. \quad (1.28)$$

Если $f \in \tilde{\Phi}(L)$, то (см. (1.1), (1.2) и (1.26)), очевидно,

$$\mu \tilde{I}^2 = \mu I^2 = 1 \quad (1.29)$$

($\mu = \mu_2$ — мера Лебега на плоскости).

Из предложения 1.1 нетрудно установить (учитывая обозначения (1.25), (1.27), (1.28), (1.3)–(1.5) и (1.8)) справедливость следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$. Тогда для каждой из ортонормированных систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ и для любого $u = (u_1, u_2) \in \tilde{I}^2$ существуют множества $E_\nu = E_\nu(u_\nu; f; \Psi) \subset I^1$, $\nu = 1, 2$, такие, что

$$1. \quad \mu_1 E_\nu \leq K_\nu^{(1)} [\mathcal{L}_\nu(f)]^{1/5}, \quad \nu = 1, 2; \quad (1.30)$$

$$2. \quad S_*(x_l; f; \Psi; u_\nu) \leq K_\nu^{(2)} \max\{[\mathcal{L}_\nu(f)]^{2/5}, \mathcal{L}_\nu(f)\} \text{ при } x_l \in I^1 \setminus E_\nu, \\ l, \nu = 1, 2, \quad l \neq \nu, \quad (1.31)$$

где $K_\nu^{(j)}$, $j, \nu = 1, 2$, — константы, не зависящие ни от функции f , ни от множеств E_ν , $\nu = 1, 2$, ни от точек $u \in \tilde{I}^2$, μ_1 — мера Лебега на прямой.

Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$ (см. (1.1) и (1.2)). Следовательно, учитывая (1.25)–(1.29), для любого $u = (u_1, u_2) \in \tilde{I}^2$ $\mathcal{L}_\nu(u_\nu; f) < \infty$, $\nu = 1, 2$. В таком случае, учитывая предложение 1.2, существуют множества $E_\nu = E_\nu(u_\nu)$,³ для которых выполнены условия (1.30) и (1.31).

Построим множество $P_0 \subset I^2$, о котором говорится в условии леммы. Положим

$$P_0 = P_1 \cup P_2 = \left[\bigcup_{u_1 \in \tilde{I}_1} E_1(u_1) \right] \cup \left[\bigcup_{u_2 \in \tilde{I}_2} E_2(u_2) \right], \quad (1.32)$$

где множества $\tilde{I}_j$ определены в (1.27).

³ На зависимости этих множеств от f и Ψ мы в данный момент не акцентируем внимание.

Рассмотрим характеристические функции множеств P_k в (1.32), $k = 0, 1, 2$,

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in P_k, \\ 0, & x \in I^2 \setminus P_k, \quad k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Учитывая (1.30), (1.32) и (1.26) и используя неравенство Гёльдера, можем оценить меру множества P_0 так:

$$\begin{aligned} \mu P_0 &= \int_{P_0} \chi_0(x) dx \leq \int_{P_1} \chi_1(x) dx + \int_{P_2} \chi_2(x) dx \\ &\leq \int_0^1 \left\{ \int_{E_1(u_1)} \chi_1(u_1, x_2) dx_2 \right\} du_1 + \int_0^1 \left\{ \int_{E_2(u_2)} \chi_2(x_1, u_2) dx_1 \right\} du_2 \\ &\leq \int_0^1 \mu_1 E_1(t) dt + \int_0^1 \mu_1 E_2(t) dt \\ &\leq K_1^{(0)} \int_0^1 [\mathcal{L}_1(t; f)]^{1/5} dt + K_2^{(0)} \int_0^1 [\mathcal{L}_2(t; f)]^{1/5} dt \\ &\leq C_0 [\mathcal{L}(f)]^{1/5}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Оценим $S_*(x_l; f; \Psi; u_\nu)$, $l, \nu = 1, 2$, $l \neq \nu$, (1.5) вне множества P_0 . Пусть $x = (x_1, x_2) \notin P_0$. Учитывая (1.32), это означает, что $x \in CP_0 = I^2 \setminus P_0 = CP_1 \cap CP_2$, т.е. $x \in CP_1$ и $x \in CP_2$. Последнее, в свою очередь, означает (учитывая определение множеств P_1 и P_2), что для любого $u = (u_1, u_2) \in \tilde{I}^2$: $x_2 \in I^1 \setminus E_1(u_1)$, а $x_1 \in I^1 \setminus E_2(u_2)$. Применяя результат предложения 1.2 (оценку (1.31)), неравенство Гёльдера и учитывая соотношения (1.29) и (1.26), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_*(x_l; f; \Psi; u_\nu) du_\nu &\leq K_\nu^{(2)} \max \left\{ \int_0^1 [\mathcal{L}_\nu(u_\nu; f)]^{2/5} du_\nu, \int_0^1 \mathcal{L}_\nu(u_\nu; f) du_\nu \right\} \\ &\leq C_\nu \max \{ [\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f) \}, \quad l, \nu = 1, 2, \quad l \neq \nu. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Оценки (1.33) и (1.34) доказывают оценки (1.6) и (1.7).

Лемма доказана.

§ 2. Обобщенная локализация для двойных тригонометрических рядов Фурье

В этом параграфе мы докажем теорему 1 для тригонометрической системы $\mathcal{E}$. Так как во всем параграфе будет рассматриваться только система $\mathcal{E}$, то для удобства формулировок утверждений, а также чтобы не загромождать запись доказательств (этих утверждений), будем считать, что разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ — 2π -периодическая по каждому аргументу, задана на кубе T^N , где $T^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leq x_j < \pi, j = 1, \dots, N\}$, $N = 1, 2$. Обозначим также $S_n(x; f) = S_n(x; f; \mathcal{E})$.

Результат теоремы 1 для тригонометрической системы будет следовать из справедливости следующего результата.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2) \in L_1(T^2)$, и пусть $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \delta_1, \delta_2 \leq \pi$. Тогда справедливо равенство

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \frac{\sin n_1 u_1}{u_1} \cdot \frac{\sin n_2 u_2}{u_2} du_1 du_2 + \alpha_n(\delta, x; f),$$

$$n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_1^2, \quad (2.1)$$

где $\alpha_n(\delta, x; f) = \alpha_n(\delta, x; f; \mathcal{E})$. Причем

1. если $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(T^2)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\delta, x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in T^2; \quad (2.2)$$

2. если $f \in L(\log^+ L)^2(T^2)$, то

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n(\delta, x; f)| \right\|_{L_1(T^2)} \leq C(\delta) \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C(\delta), \quad (2.3)$$

где $C(\delta)$ – константа, не зависящая от функции $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_1^2$ рассмотрим ядро Дирихле $D_n(u) = D_{n_1}(u_1)D_{n_2}(u_2)$, где

$$D_{n_l}(u_l) = \frac{\sin(n_l + 1/2)u_l}{2 \sin u_l/2}$$

– одномерное ядро Дирихле, $l = 1, 2$. С помощью введенного ядра $D_n(u)$ прямоугольную частичную сумму $S_n(x; f)$ ряда Фурье функции $f(x)$ (см. (0.2) для $N = 2$) можно представить в следующем виде:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} f(x + u) D_n(u) du. \quad (2.4)$$

Для любых $k \in \mathbb{Z}_1^1$ и $t \in \mathbb{R}^1$ рассмотрим также упрощенное ядро Дирихле

$$\tilde{D}_k(t) = \frac{\sin kt}{t}$$

и ограниченные на $\mathbb{R}^1$ функции

$$G_k(t) = g(t) \sin kt + \frac{1}{2} \cos kt,$$

где $g(t) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{t}$ при $t \in (-\pi, \pi]$ (потребовав, чтобы $g(t + 2\pi) = g(t)$, и учитывая ограниченность $g(t)$ на $[-\pi, \pi]$, мы получаем ограниченность на $\mathbb{R}^1$ как $g(t)$, так и $G_k(t)$).

Представив ядро Дирихле в виде

$$D_n(u) = (\tilde{D}_{n_1}(u_1) + G_{n_1}(u_1))(\tilde{D}_{n_2}(u_2) + G_{n_2}(u_2)),$$

распишем частичную сумму (2.4) так:

$$\begin{aligned}
S_n(x; f) &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{T^2} f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) \tilde{D}_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \iint_{T^2} f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \\
&\quad \times \{ \tilde{D}_{n_1}(u_1) G_{n_2}(u_2) + G_{n_1}(u_1) \tilde{D}_{n_2}(u_2) + G_{n_1}(u_1) G_{n_2}(u_2) \} du_1 du_2 \\
&= J_n(x; f) + \sum_{j=1}^3 \beta_n^{(j)}(x; f) = J_n(x; f) + \alpha_n^{(1)}(x; f), \\
n &= (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_1^2, \quad x = (x_1, x_2) \in T^2,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$J_n(x; f) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{T^2} f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) \tilde{D}_{n_2}(u_2) du_1 du_2. \tag{2.6}$$

Далее, фиксируем произвольный вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \delta_j \leq \pi$, $j = 1, 2$, и представим интеграл (2.6) следующим образом

$$\begin{aligned}
J_n(x; f) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) \tilde{D}_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2}^{\pi} + \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{-\pi}^{-\delta_2} + \int_{-\pi}^{-\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} + \int_{\delta_1}^{\pi} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \right\} \\
&\quad \times f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) \tilde{D}_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta_1} \int_{-\pi}^{-\delta_2} + \int_{-\pi}^{-\delta_1} \int_{\delta_2}^{\pi} + \int_{\delta_1}^{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta_2} + \int_{\delta_1}^{\pi} \int_{\delta_2}^{\pi} \right\} \\
&\quad \times f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) \tilde{D}_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\
&= \tilde{J}_n(\delta, x; f) + \sum_{j=1}^8 \gamma_n^{(j)}(\delta, x; f) = \tilde{J}_n(\delta, x; f) + \alpha_n^{(2)}(\delta, x; f),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\tilde{J}_n(\delta, x; f) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} f(x_1 + u_1, x_2 + u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) \tilde{D}_{n_2}(u_2) du_1 du_2. \tag{2.8}$$

Окончательно, из оценок (2.5)–(2.8) имеем следующее представление для частичной суммы $S_n(x; f)$

$$S_n(x; f) = \tilde{J}_n(\delta, x; f) + \alpha_n^{(1)}(x; f) + \alpha_n^{(2)}(\delta, x; f) = \tilde{J}_n(\delta, x; f) + \alpha_n(\delta, x; f). \tag{2.9}$$

Докажем первую часть теоремы 1', т.е. оценку (2.2).

Пусть $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(T^2)$. Положим

$$\mathcal{L}(f) = \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)| \log^+ \log^+ |f(x)| + 1) dx$$

и

$$\tilde{\Phi}(L) = \{f \in L_1(T^2) : \mathcal{L}(f) < \infty\}. \tag{2.10}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$. Существует множество $P_1 \subset T^2$ такое, что

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n^{(1)}(x; f)| \leq K_1 \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\} \quad \text{при } x \in T^2 \setminus P_1 \quad (2.11)$$

и

$$\mu P_1 \leq K_0 [\mathcal{L}(f)]^{1/5}, \quad (2.12)$$

где K_j , $j = 0, 1$, — константы, не зависящие ни от функции f , ни от множества P_1 , $\mu = \mu_2$ — мера Лебега на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим интегралы $\beta_n^{(j)}(x; f)$, $j = 1, 2, 3$, в (2.5). Учитывая ограниченность функции $g(z)$, $|g(z)| \leq 1/\pi$ и 2π -периодичность функции $f(x_1, x_2)$ по каждой из переменных, для интеграла $\beta_n^{(3)}$ получаем следующую оценку

$$|\beta_n^{(3)}(x; f)| \leq \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right)^2 \|f\|_{L_1(T^2)}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим и оценим теперь сумму интегралов $\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}$. Для $\beta_n^{(1)}$ имеем (см. (2.5))

$$\begin{aligned} |\beta_n^{(1)}| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + u_1, u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) du_1 \right| du_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2)| du_2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2) \equiv \tilde{S}_{n_1}(x_1; f(\cdot, u_2)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + u_1, u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) du_1. \quad (2.15)$$

Аналогично можем определить $\tilde{S}_{n_2}(x_2; f; u_1)$ и получить оценку вида (2.14) для $\beta_n^{(2)}$. Рассмотрим $\tilde{S}_{n_1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + u_1, u_2) D_{n_1}(u_1) du_1 \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + u_1, u_2) G_{n_1}(u_1) du_1 \\ &= S_{n_1}(x_1; f; u_2) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + u_1, u_2) G_{n_1}(u_1) du_1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Аналогично (2.16) распишем $\tilde{S}_{n_2}$.

Далее, обозначим мажоранту одномерной частичной суммы (функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_ν , $\nu = 1, 2$)

$$S_*(x_\nu; f; u_l) = \sup_{n_\nu \geq 1} |S_{n_\nu}(x_\nu; f; u_l)|, \quad \nu, l = 1, 2, \quad \nu \neq l. \quad (2.17)$$

Из оценок (2.14)–(2.16), учитывая обозначения (2.17), получаем, что для любых $x = (x_1, x_2) \in T^2$

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\beta_n^{(1)}(x; f) + \beta_n^{(2)}(x; f)| &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{\nu, l=1, 2 \\ \nu \neq l}} \sup_{n_\nu \geq 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{S}_{n_\nu}(x_\nu; f; u_l)| du_l \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{\nu, l=1, 2 \\ \nu \neq l}} \int_{-\pi}^{\pi} S_*(x_\nu; f; u_l) du_l + \frac{2}{\pi^2} \|f\|_{L_1(T^2)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$ (см. (2.10)). На основании леммы §1, см. оценки (1.6), (1.7) (учитывая, что в настоящем параграфе нами рассматриваются функции, заданные на квадрате T^2), существуют константы C_j , $j = 0, 1, 2$, и множество $P_1 \subset T^2$ такие, что $\mu P_1 \leq C_0 [\mathcal{L}(f)]^{1/5}$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_*(x_\nu; f; u_l) du_l \leq C_\nu \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\} \quad \nu, l = 1, 2, \quad \nu \neq l, \quad (2.19)$$

для всех $x = (x_1, x_2) \in T^2 \setminus P_1$.

Учитывая (2.19), можем продолжить оценку в (2.18) так:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\beta_n^{(1)}(x; f) + \beta_n^{(2)}(x; f)| &\leq C_3 \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\} + C_4 \mathcal{L}(f) \\ &\leq C_5 \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\}, \quad x \in T^2 \setminus P_1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Окончательно, из оценок (2.13) и (2.20) получаем оценку (2.11).

Предложение 2.1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$. Существует множество $P_2 \subset T^2$ такое, что

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n^{(2)}(\delta, x; f)| \leq K_1(\delta) \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\} \quad \text{при } x \in T^2 \setminus P_2 \quad (2.21)$$

и

$$\mu P_2 \leq K_0 [\mathcal{L}(f)]^{1/5}, \quad (2.22)$$

где K_0 и $K_1(\delta)$ – константы, не зависящие ни от функции f , ни от множества P_2 , $\mu = \mu_2$ – мера Лебега на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим интегралы $\gamma_n^{(j)}(\delta, x; f)$, $j = 1, \dots, 8$, в (2.7). Интегралы $\gamma_n^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, оцениваются одинаково, в свою очередь, получение оценок для $\gamma_n^{(j)}$, $j = 5, 6, 7, 8$, также совпадает. Оценим первую группу интегралов. Пусть $j = 1$. Учитывая, что для упрощенного ядра Дирихле $\tilde{D}_k(t)$ справедлива оценка: $|\tilde{D}_k(t)| \leq 1/\delta_0$, при t , $\delta_0 \leq |t| \leq \pi$, получаем

$$|\gamma_n^{(1)}(\delta, x; f)| \leq \frac{1}{\delta_2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} f(x_1 + u_1, u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) du_1 \right| du_2. \quad (2.23)$$

Представив внутренний интеграл в (2.23) в виде

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_1} f(x_1 + u_1, u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) du_1 = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{-\delta_1} - \int_{\delta_1}^{\pi} \right\} f(x_1 + u_1, u_2) \tilde{D}_{n_1}(u_1) du_1,$$

можем продолжить оценку в (2.23) так:

$$|\gamma_n^{(1)}(\delta, x; f)| \leq \frac{1}{\delta_2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2)| du_2 + \frac{2}{\pi^2 \delta_1 \delta_2} \|f\|_{L_1(T^2)}, \quad (2.24)$$

где упрощенная частичная сумма $\tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2)$ определена в (2.15). Полностью повторив рассуждения, приведенные в предложении 2.1 (см. оценки (2.15)–(2.20)), можно утверждать, что существует множество $P_2 \subset T^2$ такое, что

$$\mu P_2 \leq C_0 [\mathcal{L}(f)]^{1/5}$$

и

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \left| \sum_{j=1}^4 \gamma_n^{(j)}(\delta, x; f) \right| \leq C_1(\delta) \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\}, \quad x \in T^2 \setminus P_2. \quad (2.25)$$

В свою очередь, для интегралов “второй группы” $\gamma_n^{(j)}$, $j = 5, 6, 7, 8$, очевидно, выполняется оценка

$$\sum_{j=5}^8 |\gamma_n^{(j)}(\delta, x; f)| \leq C_2(\delta) \|f\|_{L_1(T^2)} \leq C_2(\delta) \cdot \mathcal{L}(f). \quad (2.26)$$

Таким образом, получаем

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n^{(2)}(\delta, x; f)| \leq C(\delta) \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\}, \quad x \in T^2 \setminus P_2. \quad (2.27)$$

Предложение 2.2 доказано.

Опираясь на предложения 2.1 и 2.2, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(T^2)$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\delta, x; f) = 0 \quad \text{n.в. на } T^2. \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$E = P_1 \cup P_2. \quad (2.29)$$

Во-первых, учитывая (2.12), (2.23) и (2.29), имеем

$$\mu E \leq 2K_0[\mathcal{L}(f)]^{1/5}. \quad (2.30)$$

Во-вторых, для $x = (x_1, x_2) \in T^2 \setminus E$ в силу (2.11), (2.22) и (2.31) справедливы оценки

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n^{(j)}(\delta, x; f)| \leq K_1(\delta) \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\}, \quad j = 1, 2. \quad (2.31)$$

Теперь, после того как определено множество E , исследуем поведение на T^2

$$\alpha_n(\delta, x; f) = \alpha_n^{(1)}(x; f) + \alpha_n^{(2)}(\delta, x; f)$$

(см. (2.9)). Допустим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\delta, x; f) \neq 0$ на множестве положительной меры: это означает, что существуют $\varepsilon > 0$ и $\sigma > 0$ такие, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n(\delta, x; f)| \geq \varepsilon$$

на множестве меры σ .

Выберем функцию $h \in \mathbb{C}^\infty$, удовлетворяющую следующим условиям

$$K_1(\delta) \max\{[\mathcal{L}(f-h)]^{2/5}, \mathcal{L}(f-h)\} < \varepsilon$$

и

$$2K_0[\mathcal{L}(f-h)]^{1/5} < \sigma.$$

Так как

$$\limsup_n |\alpha_n(\delta, x; f)| \leq \limsup_n |\alpha_n(\delta, x; h)| + \limsup_n |\alpha_n(\delta, x; f-h)|, \quad (2.32)$$

а для $h \in \mathbb{C}^\infty$, очевидно, имеем

$$\limsup_n |\alpha_n(\delta, x; h)| = 0 \quad \text{для п.в. } x \in T^2,$$

то из (2.30)–(2.32) получаем

$$\begin{aligned} \limsup_n |\alpha_n(\delta, x; f)| &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n(\delta, x; f-h)| \\ &\leq K_1(\delta) \max\{[\mathcal{L}(f-h)]^{2/5}, \mathcal{L}(f-h)\} < \varepsilon \end{aligned}$$

вне множества E с мерой $\mu E \leq 2K_0[\mathcal{L}(f-h)]^{1/5} < \sigma$. Полученное противоречие позволяет сделать вывод о справедливости (2.28).

Предложение 2.3 доказано.

Предложения 2.1, 2.2 и 2.3 доказывают первую часть теоремы 1'.

Докажем вторую часть теоремы 1', т.е. оценку (2.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $f \in L(\log^+ L)^2(T^2)$. Тогда

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n(x; f)| \right\|_{L_1(T^2)} \leq C(\delta) \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C(\delta), \quad (2.33)$$

где $C(\delta)$ – константа, не зависящая от функции $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (2.9), имеем:

$$\alpha_n(\delta, x; f) = \alpha_n^{(1)}(x; f) + \alpha_n^{(2)}(\delta, x; f).$$

Оценим каждое из слагаемых.

Начнем с $\alpha_n^{(1)}$. Учитывая (2.5), $\alpha_n^{(1)}(x; f) = \sum_{j=1}^3 \beta_n^{(j)}(x; f)$. Оценим $\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}$. Из оценки (2.18) с учетом обозначений (2.17) получаем:

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}| \right\|_{L_1(T^2)} \\ \leq 2 \sum_{\substack{\nu, l=1,2 \\ \nu \neq l}} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} S_*(x_\nu; f; u_l) dx_\nu \right\} du_l + 8 \|f\|_{L_1(T^2)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Далее, в работе П. Шелина [17, теорема 6.1] для любой функции $\varphi \in L(\log^+ L)^2(T^1)$ получена следующая оценка:

$$\|S_*(x; \varphi; \mathcal{E})\|_{L_1(T^1)} \leq C \int_{T^1} |\varphi(x)| (\log^+ |\varphi(x)|)^2 dx + C, \quad (2.35)$$

где $C = \text{const}$, не зависящая от функции φ , а $S_*(x; \varphi) = \sup_{n \geq 1} |S_n(x; \varphi)|$ – мажоранта частичной суммы функции $\varphi(x)$. Применяя в (2.34) оценку (2.35), получаем:

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}| \right\|_{L_1(T^2)} \\ \leq 2C \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + 4\pi C + 8 \|f\|_{L_1(T^2)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

В свою очередь, для слагаемого $\beta_n^{(3)}$ выполняется оценка (2.13). Из оценок (2.13) и (2.36) получаем (используя стандартные рассуждения) оценку для $\alpha_n^{(1)}(x; f)$, а именно:

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n^{(1)}(x; f)| \right\|_{L_1(T^2)} \leq C_1 \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_1. \quad (2.37)$$

Оценим $\alpha_n^{(2)}$. Учитывая (2.7), имеем: $\alpha_n^{(2)}(\delta, x; f) = \sum_{j=1}^8 \gamma_n^{(j)}(\delta, x; f)$. Как и при доказательстве предложения 2.2, оценим две группы слагаемых: $\gamma_n^{(j)}$ для $j = 1, 2, 3, 4$ и $\gamma_n^{(j)}$ для $j = 5, 6, 7, 8$.

Оценим первую группу слагаемых. Из оценок (2.24), (2.25) получаем:

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\gamma_n^{(1)}(\delta, x; f)| \right\|_{L_1(T^2)} \\ & \leq \frac{1}{\delta_1 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{n_2 \geq 1} |\tilde{S}_{n_2}(x_2; f; u_1)| dx_2 \right\} du_1 + \frac{2}{\pi^2 \delta_1 \delta_2} \|f\|_{L_1(T^2)}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где интеграл $\tilde{S}_{n_2}(x_2; f; u_1)$ определен в (2.25). Далее, полностью повторив рассуждения, приведенные в предложении 2.1 (оценки (2.15), (2.16), (2.18) и учитывая обозначения (2.17)), из оценки (2.38) получаем:

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \left| \sum_{j=1}^4 \gamma_n^{(j)}(\delta, x; f) \right| \right\|_{L_1(T^2)} \\ & \leq C_1(\delta) \sum_{\substack{\nu, l=1,2 \\ \nu \neq l}} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{n_\nu \geq 1} |S_{n_\nu}(x_\nu; f; u_l)| dx_\nu \right\} du_l + C_1(\delta) \|f\|_{L_1(T^2)}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $S_{n_\nu}(x_\nu; f; u_l)$ — частичная сумма функции f по переменной x_ν . Применяя в (2.39) оценку (2.35) (так же, как в (2.36) и (2.37)), получаем:

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \left| \sum_{j=1}^4 \gamma_n^{(j)}(\delta, x; f) \right| \right\|_{L_1(T^2)} \leq C_2(\delta) \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_2(\delta). \quad (2.40)$$

В свою очередь, для второй группы слагаемых ($j = 5, 6, 7, 8$) справедлива оценка (см. (2.27)):

$$\sum_{j=5}^8 |\gamma_n^{(j)}(\delta, x; f)| \leq C_3(\delta) \|f\|_{L_1(T^2)}. \quad (2.41)$$

Окончательно, из оценок (2.40) и (2.41) (аналогично получению оценки (2.37)) получаем:

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n^{(2)}(\delta, x; f)| \right\|_{L_1(T^2)} \leq C_4(\delta) \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_4(\delta). \quad (2.42)$$

Из оценок (2.37) и (2.42) получаем оценку (2.35).

Предложение 2.4 доказано.

Предложение 2.4 доказывает вторую часть теоремы 1'.

Теорема 1' доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 для ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\mathcal{E}$. Пусть Ω – произвольное (непустое) открытое множество⁴ $\Omega \subset T^2$, $\mu\Omega < 4\pi^2$ ($\mu = \mu_2$ – мера Лебега на плоскости; в случае, когда $\mu\Omega = \mu T^2$, результат теоремы очевиден). И пусть $f \in L_1(T^2)$, $f(x) = 0$ на Ω .

Фиксируем произвольный вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \delta_j < \pi 10^{-12}$, $j = 1, 2$, и определим множество

$$\Omega(\delta) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, T^2 \setminus \Omega) \geq |\delta|\} \subset \Omega. \quad (2.43)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $\delta^0 \in \mathbb{R}^2$, $\delta_j^0 > 0$, $j = 1, 2$, такое, что

$$\mu(\Omega \setminus \Omega(\delta)) < \varepsilon \quad \text{при} \quad \delta : 0 < \delta_j \leq \delta_j^0, \quad j = 1, 2. \quad (2.44)$$

Имеем: $f(x + u) = 0$ при $x \in \Omega(\delta)$ и $|u_j| \leq \delta_j \leq \delta_j^0$, $j = 1, 2$. Следовательно, учитывая разложение (2.1), для таких δ частичную сумму $S_n(x; f; \mathcal{E})$ можно представить в виде:

$$S_n(x; f; \mathcal{E}) = \alpha_n(\delta, x; f; \mathcal{E}) \quad \text{при} \quad x \in \Omega(\delta), \quad 0 < \delta_j \leq \delta_j^0. \quad (2.45)$$

Обозначим $\Omega(\delta^0) = \Omega_\varepsilon$. В таком случае мы получаем: во-первых, из оценок (2.43) и (2.44) неравенство $\mu\Omega_\varepsilon > \mu\Omega - \varepsilon$, во-вторых, если

$$f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(T^2),$$

то, учитывая (2.45), из оценки (2.2) (теоремы 1') равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f; \mathcal{E}) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega_\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует оценка (0.4). И, наконец, в-третьих, если $f \in L(\log^+ L)^2(T^2)$, то, учитывая равенство (2.45), из оценки (2.3) получаем оценку (0.5), т.е.

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |S_n(x; f; \mathcal{E})| \right\|_{L_1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_\varepsilon.$$

Теорема 1 для $\Psi = \mathcal{E}$ доказана.

⁴Напомним, что в настоящем параграфе мы рассматриваем функции, заданные на квадрате $T^2 = [-\pi, \pi]^2$.

§3. Обобщенная локализация для двойных рядов Фурье–Уолша

В этом параграфе рассматривается система Уолша–Пэли W . Рассмотрим интегральное выражение для n -ой частичной суммы $S_n(x; f; W)$ двумерного ряда Фурье–Уолша:

$$S_n(x; f) = S_n(x; f; W) = \int_{I^2} f(x \dot{+} u) D_n(u) du, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2, \quad (3.1)$$

где $D_n(u) = D_{n_1}(u_1)D_{n_2}(u_2)$, а $D_{n_l}(u_l) = \sum_{j=0}^{n_l-1} w_j(u_l)$ – одномерное ядро Дирихле–Уолша, $l = 1, 2$. Докажем следующую теорему (являющуюся некоторой модификацией теоремы 1 для системы W).

ТЕОРЕМА 1''. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2) \in L_1(I^2)$, и пусть $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \delta_1, \delta_2 \leq 1$. Тогда справедливо равенство

$$S_n(x; f) = \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} f(x_1 \dot{+} u_1, x_2 \dot{+} u_2) D_{n_1}(u_1) D_{n_2}(u_2) du_1 du_2 + \alpha_n(\delta, x; f),$$

$$n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_1^2, \quad (3.2)$$

где $\alpha_n(\delta, x; f) = \alpha_n(\delta, x; f; W)$. Причем

1. если $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(I^2)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\delta, x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in I^2; \quad (3.3)$$

2. если $f \in L(\log^+ L)^2(I^2)$, то

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n(\delta, x; f)| \right\|_{L_1(I^2)} \leq C(\delta) \int_{I^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C(\delta), \quad (3.4)$$

где $C(\delta)$ – константа, не зависящая от функции $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \delta_1, \delta_2 \leq 1$, и представим интеграл (3.1) в виде

$$\begin{aligned} S_n(x; f; W) &= \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} f(x_1 \dot{+} u_1, x_2 \dot{+} u_2) D_{n_1}(u_1) D_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\ &\quad + \left\{ \int_0^{\delta_1} \int_{\delta_2}^1 + \int_{\delta_1}^1 \int_0^{\delta_2} \right\} f(x_1 \dot{+} u_1, x_2 \dot{+} u_2) D_{n_1}(u_1) D_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\ &\quad + \int_{\delta_1}^1 \int_{\delta_2}^1 f(x_1 \dot{+} u_1, x_2 \dot{+} u_2) D_{n_1}(u_1) D_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \\ &= J_n(\delta, x; f) + \sum_{j=1}^3 \gamma_n^{(j)}(\delta, x; f) = J_n(\delta, x; f) + \alpha_n(\delta, x; f), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$J_n(\delta, x; f) = \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} f(x_1 \dot{+} u_1, x_2 \dot{+} u_2) D_{n_1}(u_1) D_{n_2}(u_2) du_1 du_2,$$

$$n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_1^2. \quad (3.6)$$

Далее, докажем первую часть теоремы 1'', т.е. оценку (3.3). Пусть

$$f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L(I^2).$$

Положим

$$\mathcal{L}(f) = \int_{I^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)| \log^+ \log^+ |f(x)| + 1) dx$$

и

$$\tilde{\Phi}(L) = \{f \in L_1(I^2) : \mathcal{L}(f) < \infty\}. \quad (3.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$. Существует множество $P \subset I^2$ такое, что

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n(\delta, x; f)| \leq K_1 \max\{\mathcal{L}(f)^{2/5}, \mathcal{L}(f)\} \quad \text{при } x \in I^2 \setminus P \quad (3.8)$$

и

$$\mu P \leq K_0 [\mathcal{L}(f)]^{1/5}, \quad (3.9)$$

где K_j , $j = 0, 1$, — константы, не зависящие ни от функции f , ни от множества P , $\mu = \mu_2$ — мера Лебега на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим интегралы $\gamma_n^{(j)}(\delta, x; f)$, $j = 1, 2, 3$, в (3.5). В силу неравенства

$$|D_k(t)| \leq \frac{1}{t}, \quad t \in (0, 1), \quad k \in \mathbb{Z}_1^1, \quad (3.10)$$

получаем оценку для интеграла $\gamma_n^{(3)}$:

$$|\gamma_n^{(3)}(\delta, x; f)| \leq \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \|f\|_{L_1(I^2)}. \quad (3.11)$$

Оценим интеграл $\gamma_n^{(1)}(\delta, x; f)$ ($\gamma_n^{(2)}(\delta, x; f)$ оценивается аналогично). Учитывая (3.10) и свойство операции $\dot{+}$, получаем:

$$\begin{aligned} |\gamma_n^{(1)}(\delta, x; f)| &= \left| \int_0^{\delta_1} \int_{\delta_2}^1 f(x_1 \dot{+} u_1, x_2 \dot{+} u_2) D_{n_1}(u_1) D_{n_2}(u_2) du_1 du_2 \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta_2} \int_0^1 |\tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2)| du_2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2) \equiv \tilde{S}_{n_1}(x_1; f(\cdot, u_2)) = \int_0^{\delta_1} f(x_1 \dot{+} u_1, u_2) D_{n_1}(u_1) du_1. \quad (3.13)$$

Рассмотрим $\tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n_1}(x_1; f; u_2) &= \left\{ \int_0^1 - \int_{\delta_1}^1 \right\} f(x_1 \dot{+} u_1, u_2) D_{n_1}(u_1) du_1 \\ &= S_{n_1}(x_1; f; u_2) - \int_{\delta_1}^1 f(x_1 \dot{+} u_1, u_2) D_{n_1}(u_1) du_1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обозначим

$$S_*(x_1; f; u_2) = \sup_{n_1 \geq 1} |S_{n_1}(x_1; f; u_2)|. \quad (3.15)$$

Из оценок (3.12)–(3.14), учитывая обозначения (3.15), получаем, что для любого $x = (x_1, x_2) \in I^2$

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\gamma_n^{(1)}(\delta, x; f)| \leq \frac{1}{\delta_2} \int_0^1 S_*(x_1; f; u_2) du_2 + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \|f\|_{L_1(I^2)}. \quad (3.16)$$

Пусть $f \in \tilde{\Phi}(L)$ (см. (3.7)). На основании леммы §1 (см. оценки (1.6), (1.7)) существуют константы C_0, C_1 и множество $P \subset I^2$ такие, что $\mu P \leq C_0[\mathcal{L}(f)]^{1/5}$ и

$$\int_0^1 S_*(x_\nu; f; u_l) du_l \leq C_\nu \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\} \quad \text{при } l = 2, \quad \nu = 1 \quad (3.17)$$

для всех $x = (x_1, x_2) \in I^2 \setminus P$.

Учитывая (3.17), можем продолжить оценку в (3.16) так:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\gamma_n^{(1)}(\delta, x; f)| &\leq C_3(\delta_2) \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\} + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \|f\|_{L_1(I^2)} \\ &\leq C_4(\delta) \max\{[\mathcal{L}(f)]^{2/5}, \mathcal{L}(f)\}, \quad x \in I^2 \setminus P. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Используя оценку (3.17), для $l = 1, \nu = 2$, можно аналогично получить оценку для интеграла $\gamma_n^{(2)}$. В таком случае из (3.5), (3.11) и (3.18) получаем оценку (3.8).

Предложение 3.1 доказано.

Предложение 3.1 (оценки (3.8) и (3.9)) позволяет доказать (так же, как мы это делали в §2, см. предложение 2.3) оценку (3.3), что доказывает первую часть теоремы 1''.

Докажем вторую часть теоремы 1'', т.е. оценку (3.4). Пусть $f \in L(\log^+ L)^2(I^2)$. Из оценок для $\gamma_n^{(3)}, \gamma_n^{(1)}$ и $\gamma_n^{(2)}$ (см. (3.11), (3.16) и аналогичную оценку для $\gamma_n^{(2)}$) и определения α_n (3.5) получаем:

$$\begin{aligned} &\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |\alpha_n(\delta, x; f)| \right\|_{L_1(I^2)} \\ &\leq \frac{1}{\delta_2} \int_0^1 S_*(x_1; f; u_2) du_2 + \frac{1}{\delta_1} \int_0^1 S_*(x_2; f; u_1) du_1 + \frac{3}{\delta_1 \delta_2} \|f\|_{L_1(I^2)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $S_*(x_\nu; f; u_l) = \sup_{n_\nu \geq 1} |S_{n_\nu}(x_\nu; f; u_l)|, l, \nu = 1, 2, l \neq \nu$ (см. (3.13), (3.15)).

Далее, в работе П. Шелина [8] для любой функции $\varphi \in L(\log^+ L)^2(I^1)$ получена следующая оценка:

$$\left\| \sup_{n \geq 1} |S_n(x; \varphi; W)| \right\|_{L_1(I^1)} \leq K \int_0^1 |\varphi(x)| (\log^+ |\varphi(x)|)^2 dx + K, \quad (3.20)$$

где $K = \text{const}$, не зависящая от функции φ . Применяя в (3.19) оценку (3.20), аналогично тому, как это было сделано в §2 (см. предложение 2.4, оценки (2.34)–(2.42)), получаем оценку (3.4), что доказывает вторую часть теоремы 1''.

Теорема 1'' доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 для системы Уолша–Пэли W . Пусть Ω – произвольное (непустое) открытое множество, $\Omega \subset I^2$, $\mu\Omega < 1$ ($\mu = \mu_2$ – мера Лебега на плоскости).⁵ И пусть $f \in L_1(I^2)$ и

$$f(y) = 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (3.21)$$

Существует набор попарно непересекающихся кубов $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m, \dots\}$ такой, что открытое множество Ω представимо в виде:

$$\Omega = \bigcup_m Q_m = \bigcup_m (Q_m^{(1)} \times Q_m^{(2)}), \quad (3.22)$$

где

$$Q_m^{(\lambda)} = [j_m^{(\lambda)} \cdot 2^{-s_m}, (j_m^{(\lambda)} + 1) \cdot 2^{-s_m}) \subset [0, 1), \quad (3.23)$$

$$s_m \in \mathbb{Z}_1^1, j_m^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}_1^1, 0 \leq j_m^{(\lambda)} \leq 2^{s_m} - 1, \lambda = 1, 2.$$

Рассмотрим интеграл $J_n(\delta, x; f; W)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$, $n \in \mathbb{Z}_1^2$ и $x \in I^2$ (3.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть Q_{m_0} – произвольный куб из объединения (3.22), (3.23) и $\delta = (\delta^0, \delta^0) \in \mathbb{R}^2$, где $\delta^0 = 2^{-s_{m_0}-1}$. Тогда

$$J_n(\delta, x; f; W) = 0 \quad \text{при } x \in Q_{m_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in Q_{m_0}$, и пусть $V(x)$ – счетное множество тех $u \in I^2$, для которых не определена сумма $x \dot{+} u$. Учитывая вид Q_{m_0} – (3.22), (3.23), имеем:

$$x_\lambda \in Q_{m_0}^{(\lambda)} = [j_{m_0}^{(\lambda)} \cdot 2^{-s_{m_0}}, (j_{m_0}^{(\lambda)} + 1) \cdot 2^{-s_{m_0}}), \quad \lambda = 1, 2.$$

Следовательно, так как $0 \leq u_\lambda \leq \delta^0 = 2^{-s_{m_0}-1}$, $\lambda = 1, 2$, то (за исключением счетного множества значений u_1, u_2) имеем: $x_\lambda \dot{+} u_\lambda \in Q_{m_0}^{(\lambda)}$. В таком случае при $u \notin V(x)$ $x \dot{+} u = (x_1 \dot{+} u_1, x_2 \dot{+} u_2) \in Q_{m_0}$.

Отсюда, учитывая (3.21), имеем $f(x \dot{+} u) = 0$, если $x \in Q_{m_0}$, а вектор $u \in I^2 \setminus V(x)$ такой, что $0 \leq u_\lambda \leq \delta^0$, $\lambda = 1, 2$. В свою очередь, отсюда и из (3.6) получаем: $J_n(\delta, x; f; W) = 0$ при $x \in Q_{m_0}$.

Предложение 3.2 доказано.

Рассмотрим произвольный куб Q_m из объединения (3.22). Пусть $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, где $\delta_j = 2^{-s_m-1}$, $j = 1, 2$; используя разложение (3.2) для этого δ можем записать:

$$S_n(x; f; W) = J_n(\delta, x; f; W) + \alpha_n(\delta, x; f; W).$$

В таком случае, если $f \in L \log^+ L \log^+ L \log^+ L(I^2)$, то в силу предложения 3.2 и оценки (3.3) (теорема 1'') получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f; W) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in Q_m. \quad (3.24)$$

⁵ Справедливость теоремы в случае, когда $\mu\Omega = 1$, очевидна.

Если же $f \in L(\log^+ L)^2(I^2)$, то в силу предложения 3.2 и оценки (3.4) (теорема 1'') получаем:

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |S_n(x; f; W)| \right\|_{L_1(Q_m)} \leq C(\delta) \int_{I^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C(\delta). \quad (3.25)$$

Далее, так как соотношение (3.24) выполняется для любого куба Q_m в множестве Ω , то оно справедливо и для п.в. $x \in \Omega$ (если $f \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L$), т.е. первая часть теоремы 1 (для $\Psi = W$) доказана.

Докажем вторую часть. Пусть $f \in L(\log^+ L)^2(I^2)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует множество

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{m=1}^M Q_m \subset \Omega \quad \text{такое, что} \quad \mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon,$$

где $M = M(\varepsilon) = \text{const}$ (т.е. существует конечный набор кубов $\{Q_1, \dots, Q_M\} \subset \{Q_1, \dots, Q_m, \dots\}$, составляющих множество Ω в (3.22)). И так как неравенство (3.25) выполняется для любого куба Q_m в множестве Ω_ε , то из оценки (3.25) получаем оценку (0.5), т.е.

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |S_n(x; f; W)| \right\|_{L_1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \int_{I^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_\varepsilon.$$

Вторая часть теоремы 1 (для $\Psi = W$) доказана.

Теорема 1 для $\Psi = W$ доказана.

§ 4. Отсутствие обобщенной локализации на множествах, не являющихся плотными в I^2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. ⁶ Пусть $\Omega \subset I^2$ — произвольное измеримое множество, не плотное в I^2 , $\mu\Omega > 0$. Тогда существует прямоугольник $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset I^2$ такой, что

$$\mu(Q \cap \Omega) = 0 \quad \text{и} \quad \mu(W(Q) \cap \Omega) > 0, \quad (4.1)$$

где $W = W(Q) = W_1 \cup W_2$, $W_1 = (a_1, b_1) \times I^1$, $W_2 = I^1 \times (a_2, b_2)$.

Действительно, если для данного Q $\mu(W(Q) \cap \Omega) = 0$, то $\mu(W_1 \cap \Omega) = 0$, и, взяв в качестве Q прямоугольник W_1 , получим: $W(Q) = W(W_1) = I^2$. Следовательно, $\mu(W(W_1) \cap \Omega) > 0$ и для выбранного таким образом Q условия (4.1) выполнены.

В силу (4.1) хотя бы одно из множеств $W_1 \cap \Omega$ или $W_2 \cap \Omega$ имеет положительную меру. Пусть для определенности $\mu(W_1 \cap \Omega) > 0$. Обозначим

$$\Omega_0 = W_1 \cap \Omega \subset \Omega. \quad (4.2)$$

⁶ Конструкция контрпримеров, используемая в доказательстве этой теоремы, была предложена И. Л. Блошанским в [15] (см. также [12, теоремы 2 и 3]) для функций из $L_1(I^N)$ при $N = 2$ и $\mathbb{C}(I^N)$ при $N \geq 3$.

Имеем: $\mu\Omega_0 > 0$.

Далее, для каждой из систем $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$ построим функцию $f_\Psi(x)$, $f_\Psi(x) = 0$ при $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, вида

$$f_\Psi(x) = g_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) = g(x_1) \cdot \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2), \quad (4.3)$$

удовлетворяющую в случае $\Psi = \mathcal{E}$ оценкам (0.6) и (0.8), а в случае $\Psi = W$ — оценкам (0.7) и (0.8).

Итак, пусть $\Psi = \mathcal{E}$, и пусть $\Phi_\mathcal{E}(u)$, $u \in [0, \infty)$, — неубывающая функция такая, что $\Phi_\mathcal{E}(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда в качестве функции $g(x_1)$ в (4.3) возьмем функцию $g(x_1) \in \Phi_\mathcal{E}(L)(I^1)$, построенную Т. Кернером в [27] или С. В. Конягиным в [24], для которой одномерный тригонометрический ряд Фурье неограниченно расходится п.в., т.е.

$$\overline{\lim}_{n_1 \rightarrow \infty} |S_{n_1}(x_1; g; \mathcal{E})| = +\infty \text{ для п.в. } x_1 \in I^1. \quad (4.4)$$

В свою очередь, функции $\varphi_j(x_j)$, $j = 1, 2$, определим так:

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j \in (a_j, b_j), \\ 0, & x_j \in I^1 \setminus (a_j, b_j), \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (4.5)$$

Определенная таким образом функция $f = f_\mathcal{E}$ удовлетворяет двум (из трех) условий теоремы 2 (для $\Psi = \mathcal{E}$): $f \in \Phi_\mathcal{E}(L)(I^2)$ и $f(x) = 0$ при $x \in I^2 \setminus Q \supset \Omega$.

Докажем, что для функции $f = f_\mathcal{E}$ (4.3) справедлива оценка (0.8). Исследуем свойства функции g_1 . Положим $g_2 = g - g_1$. В силу (4.5) имеем: $g_2(x_1) = 0$ при $x_1 \in (a_1, b_1)$. Так как $g \in L_1(I^1)$, то, учитывая классический принцип локализации Римана и равенство $S_{n_1}(x_1; g) = S_{n_1}(x_1; g_1) + S_{n_1}(x_1; g_2)$, из (4.4) получаем (для $\Psi = \mathcal{E}$):

$$\overline{\lim}_{n_1 \rightarrow \infty} |S_{n_1}(x_1; g_1; \Psi)| = +\infty \text{ для п.в. } x_1 \in (a_1, b_1). \quad (4.6)$$

Рассмотрим функцию φ_2 , определенную в (4.5). Так как φ_2 — ненулевая функция, а $S_{n_2}(x_2; \varphi_2; \mathcal{E})$ — тригонометрические полиномы, то для всех номеров n_2 , начиная с некоторого номера,

$$S_{n_2}(x_2; \varphi_2; \mathcal{E}) \neq 0 \text{ для п.в. } x_2 \in I^1 \quad (4.7)$$

(множество $\{x_2\}$, где $S_{n_2}(x_2; \varphi_2; \mathcal{E}) = 0$, не более чем счетно).

В таком случае из (4.3), (4.6), (4.7) и (4.2) получаем оценку (0.8) (для $\Psi = \mathcal{E}$):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x; f_\Psi; \Psi)| = +\infty \text{ для п.в. } x \in \Omega_0, \quad n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_1^2. \quad (4.8)$$

Теорема 2 для тригонометрической системы доказана.

Рассмотрим теперь систему Уолша–Пэли W . Фиксируем произвольное ε , $0 < \varepsilon < 1$, и положим $\Phi_W(u) = u(\log^+ \log^+ u)^{1-\varepsilon}$. В этом случае рассмотрим

в качестве функции $g(x_1)$ в (4.3) функцию $g(x_1) \in \Phi_W(L)(I^1)$, построенную К. Муном в [28], с неограниченно расходящимся п.в. рядом Фурье–Уолша, т.е.

$$\overline{\lim}_{n_1 \rightarrow \infty} |S_{n_1}(x_1; g; W)| = +\infty \quad \text{для п.в. } x_1 \in I^1.$$

В свою очередь, функцию $\varphi_1(x_1)$ определим так же, как в (4.5), а функцию $\varphi_2(x_2)$ определим несколько иначе. Пусть a_2 и b_2 – двоично-рациональные числа (понятно, что это предположение существенно не меняет оценки (4.1) и (4.2), т.е. существование $\Omega_0 \subset \Omega$: $\mu\Omega_0 > 0$), фиксируем произвольное иррациональное число δ , $0 < \delta < (b_2 - a_2)/4$, и положим

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (a_2 + \delta, b_2 - 2\delta), \\ (t - a_2)/\delta & \text{при } t \in (a_2, a_2 + \delta], \\ (b_2 - t)/2\delta & \text{при } t \in [b_2 - 2\delta, b_2), \\ 0 & \text{при } t \in I^1 \setminus (a_2, b_2). \end{cases} \quad (4.9)$$

Таким образом определенная функция $f = f_W$ удовлетворяет двум (из трех) условий теоремы 2 (для $\Psi = W$): $f \in \Phi_W(L)(I^2)$, $f(x) = 0$ при $x \in I^2 \setminus Q \supset \Omega$.

Докажем, что для функции $f = f_W$ (4.3) справедлива оценка (0.8) (для $\Psi = W$). Рассмотрим более подробно свойства функции φ_2 , определенной в (4.9). В работе [29, лемма 1] доказано, что для почти каждого $x_2 \in I^1$ существует $k_0 = k_0(x_2) \in \mathbb{Z}_0^1$ такое, что

$$S_{2^{k+1}}(x_2; \varphi_2; W) \neq 0 \quad \text{при } k \geq k_0. \quad (4.10)$$

Далее, так же, как для тригонометрической системы, убеждаемся в справедливости оценки (4.6) для $\Psi = W$. В таком случае, учитывая (4.3), (4.6) и (4.10), имеем: для функции f_W справедлива оценка (4.8) для $\Psi = W$, т.е. оценка (0.8).

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Блошанский И. Л. Обобщенная локализация почти всюду и сходимость двойных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 1. С. 11–13.
2. Блошанский И. Л. Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153–168.
3. Блошанская С. К., Блошанский И. Л. Обобщенная и слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье–Уолша функций из L_p , $p \geq 1$ // Докл. АН. 1993. Т. 332. № 5. С. 549–552.
4. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135–137.
5. Hunt R. A. On the convergence of Fourier series // Proc. Conf. Edwardsville, 1967. Ill.: SIU Press. Carbondale, 1968. P. 235–255.
6. Billard P. Sur la convergence presque partout des series de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L_2([0, 1])$ // Studia Math. 1966–1967. V. 28. № 3. P. 363–388.
7. Hunt R. A. Almost everywhere convergence of Walsh–Fourier series of L_2 functions // Actes Congr. Int. Math. 1970. V. 2. P. 655–661.
8. Sjölin P. An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh–Fourier series // Ark. Mat. 1969. V. 7. № 6. P. 551–570.

9. Schipp F., Wade W.R., Simon P., Pal J. Walsh series: an introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akad. Kiado, 1990.
10. Fine N. J. On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65. № 3. P. 372–414.
11. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скеорцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.
12. Блошанский И. Л. Структура и геометрия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций из L_1 , равных нулю на заданном множестве // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 675–707.
13. Bloshanskii I. L. Generalized localization and convergence tests for double trigonometric Fourier series of functions from $L_p, p > 1$ // Anal. Math. 1981. V. 7. № 1. P. 3–36.
14. Блошанский И. Л. Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из $L_p, p \geq 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 243–282.
15. Блошанский И. Л. Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1991.
16. Блошанская С. К., Блошанский И. Л. Обобщенная локализация для кратных рядов Фурье–Уолша функций из $L_p, p \geq 1$ // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 21–36.
17. Sjölin P. Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Ark. Mat. 1971. V. 9. № 1. P. 65–90.
18. Moricz F. On the convergence of double orthogonal series // Anal. Math. 1976. V. 2. P. 287–304.
19. Fefferman C. On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 2. P. 191–195.
20. Гецадзе Р. Д. Непрерывная функция с расходящимся почти всюду рядом Фурье по системе Уолша–Пэли // Матем. сб. 1985. Т. 128. № 2. С. 269–286.
21. Antonov N. Yu. Convergence of Fourier series // East J. Approx. 1996. V. 2. № 2. P. 187–196.
22. Блошанский И. Л., Иванова О. К., Рослова Т. Ю. Обобщенная локализация и равносходимость разложений в двойной тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций из $L(\ln^+ L)^2$ // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 437–441.
23. Блошанская С. К., Блошанский И. Л. О справедливости обобщенной локализации для двойных рядов Фурье–Уолша функций из $L(\ln^+ L)^2$ // Межд. конф. по теории прил. функций. Тез. докл. Т. 1. Калуга, 1996. С. 34–36.
24. Konyagin S. V. On divergence of trigonometric Fourier series over cubes // Acta Sci. Math. (Szeged). 1995. V. 61. P. 305–329.
25. Soria F. On an extrapolation theorem of Carleson–Sjölin with applications to a.e. convergence of Fourier series // Studia Math. 1989. V. 94. P. 235–244.
26. Hunt R., Taibleson M. Almost everywhere convergence of Fourier series on the ring of integers of a local field // SIAM J. Math. Anal. 1971. V. 2. № 4. P. 607–625.
27. Körner T. W. Everywhere divergent Fourier series // Colloq. Math. 1981. V. 45. № 1. P. 103–118.
28. Moon K. N. On everywhere divergent Fourier–Walsh series of the class $L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 50. P. 309–314.
29. Блошанская С. К., Блошанский И. Л. Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье–Уолша функций из $L_p, p \geq 1$ // Труды МИРАН. 1996. Т. 214. С. 83–106.