Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, О проблеме малых шаров для эквивалентных гауссовских мер, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 5, 47–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:32:29

УДК 512.55

В. И. Богачев

О проблеме малых шаров для эквивалентных гауссовских мер

Пусть μ – центрированная гауссовская мера на линейном пространстве X с пространством Камерона–Мартина H , q – μ -измеримая полунорма, а Q – μ -измеримый многочлен второго порядка. В работе показано, что для существования предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(\exp Q | q \leq \varepsilon)$, где $\mathbb{E}$ – математическое ожидание относительно μ , достаточно, чтобы вторая производная $D_H^2 Q$ функции Q была ядерным оператором в H . Это условие является и необходимым для существования указанного предела для всех полунорм q . Обсуждаемая задача может быть переформулирована следующим образом: изучить $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu(q \leq \varepsilon) / \mu(q \leq \varepsilon)$ для гауссовских мер ν , эквивалентных μ .

Библиография: 23 названия.

В настоящей работе исследуется задача о существовании предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu(x : q(x) \leq \varepsilon)}{\mu(x : q(x) \leq \varepsilon)}, \quad (0.1)$$

где μ – центрированная гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X , ν – гауссовская мера, эквивалентная μ , а q – произвольная μ -измеримая норма (или полунорма) на X . Плотность Радона–Никодима меры ν относительно меры μ имеет вид $\exp Q$, где Q – μ -измеримый многочлен второй степени. Основной результат работы состоит в следующем. Положительный и конечный предел в (0.1) существует для всякой μ -измеримой нормы q на X в точности тогда, когда вторая производная Q вдоль пространства Камерона–Мартина $H = H(\mu)$, обозначаемая через $D_H^2 Q$, является ядерным оператором на H (вообще говоря, $D_H^2 Q$ – оператор Гильберта–Шмидта). Если $D_H^2 Q = A_1 - A_2$, где A_1 – неотрицательный оператор Гильберта–Шмидта на H с бесконечным следом, а A_2 – ядерный оператор на H , то предел в (0.1) равен нулю, а если $D_H^2 Q = A_2 - A_1$, то этот предел равен бесконечности. В остальных случаях всегда можно так подобрать норму q , что отношение в (0.1) не будет иметь определенного предела при стремлении ε к нулю. Данная задача обсуждалась многими авторами (см. [1]–[6] и имеющиеся там ссылки). Наиболее общий известный ранее результат был получен в [5], где было установлено существование предела в (0.1) при условии, равносильном ядерности $D_H^2 Q$ (см. пояснения ниже), и при дополнительном условии ограниченности множеств $\{q \leq \varepsilon\}$. В случае, когда меры μ и ν отличаются лишь средним, обсуждаемая проблема может быть сформулирована как задача о существовании функций Онзагера–Маклупа; ее положительное решение дано в [7], [8]. Отметим, что для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 96-15-96865, 97-01-00932), германского гранта 436 RUS 113/343/0(R), а также грантов INTAS 94-0378, INTAS-RFBR 95-0099.

многих конкретных мер μ и полунорм q известны довольно точные двусторонние оценки величин $\mu(q \leq \varepsilon)$ (см. [2], [3], [5], [9]–[12] и имеющиеся там ссылки). В этих случаях существование предела в (0.1) позволяет оценить и $\nu(q \leq \varepsilon)$.

Наконец, стоит заметить, что основной результат работы можно эквивалентным образом сформулировать в терминах последовательностей гауссовских случайных величин. А именно, пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ – совместно гауссовские центрированные случайные величины, причем ξ_n – стандартные независимые гауссовские случайные величины. Предположим, что случайная величина $q = \sup_n |\eta_n|$ конечна почти наверное и $\{q < \varepsilon\}$ имеет положительную вероятность для всякого $\varepsilon > 0$. Пусть c, c_n, α_n – вещественные числа, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty, \quad \alpha_n < \frac{1}{2}.$$

Пусть

$$Q = c + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\xi_n^2 - 1). \quad (0.2)$$

Отметим, что соответствующие ряды сходятся почти наверное и в среднем квадратическом. Положим $J_\varepsilon = E(\exp Q \mid q \leq \varepsilon)$. Тогда конечный и положительный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon$ существует при любом выборе q в точности тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. Если α_n^+ и α_n^- есть соответственно положительные и отрицательные элементы последовательности $\{\alpha_n\}$, то сходимость одного из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^-$ при расхождении второго приводит к тому, что упомянутый выше предел оказывается равным 0 или соответственно $+\infty$. Наконец, если оба ряда сходятся, то при подходящем выборе $\eta_n = t_n \xi_n$ величина J_ε не имеет определенного предела при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Я признателен А. М. Стёпину за полезные замечания и внимание к этой работе.

Пользуясь случаем, поздравляю П. Л. Ульянова с семидесятилетием и благодарю за постоянную поддержку.

§1. Обозначения и терминология

Далее символом X обозначается вещественное локально выпуклое пространство; топологически сопряженное к X будем обозначать через X^* , а борелевскую σ -алгебру X – через $\mathcal{B}(X)$. Лебеговское пополнение $\mathcal{B}(X)$ относительно меры μ на $\mathcal{B}(X)$ обозначается через $\mathcal{B}(X)_\mu$. Функции, измеримые относительно $\mathcal{B}(X)_\mu$, называются μ -измеримыми.

Если H – сепарабельное гильбертово пространство, то через $\mathcal{H}(H)$ обозначается пространство всех операторов Гильберта–Шмидта на H с нормой

$$\|A\|_{\mathcal{H}} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |Ae_n|_H^2 \right)^{1/2},$$

где $\{e_n\}$ – произвольный ортонормированный базис в H . Через $\mathcal{L}_{(1)}(H)$ обозначается класс ядерных операторов в H , т.е. операторов вида AB , где $A, B \in \mathcal{H}(H)$. Для всякого ядерного оператора A и всякого ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в H величина

$$\text{trace } A := \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n)_H$$

не зависит от $\{e_n\}$ и называется *следом* A . Если симметричный непрерывный линейный оператор A в H таков, что указанный выше ряд сходится для всякого ортонормированного базиса, то этот оператор — *ядерный*.

Всюду ниже термин “гауссовская мера” означает радоновскую гауссовскую меру на X , т.е. такую вероятностную меру γ на $\mathcal{B}(X)$, что для всякого $f \in X^*$ индуцированная мера $\gamma \circ f^{-1}$ на прямой является гауссовской (возможно вырожденной), а кроме того, для всякого борелевского множества $B \subset X$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\gamma(B \setminus K) < \varepsilon$. Впрочем, это дополнительное условие радоновости автоматически выполнено для большинства пространств, встречающихся в приложениях (например, сепарабельных банаховых или сепарабельных пространств Фреше). Более того, без ущерба для общности читатель может считать, что гауссовская мера γ , фигурирующая в формулировках ниже, является либо стандартной винеровской мерой, либо счетным произведением стандартных одномерных гауссовских мер на счетном произведении прямых $\mathbb{R}^\infty$. Приводимые ниже результаты остаются в силе и без предположения о радоновости гауссовских мер на локально выпуклых пространствах, если ограничиться рассмотрением счетно-порожденных σ -алгебр. Основные сведения о гауссовских мерах можно найти в [5] и [8].

Средним гауссовской меры γ на X называется такой вектор $a_\gamma \in X$, что

$$f(a_\gamma) = \int_X f(x) \gamma(dx) \quad \forall f \in X^*.$$

Гауссовская мера γ на X называется *центрированной*, если для всякого $f \in X^*$ мера $\gamma \circ f^{-1}$ является центрированной. Это равносильно тому, что $a_\gamma = 0$. Для всякой гауссовской случайной величины ξ будем обозначать через $\sigma(\xi)^2$ ее дисперсию, т.е. $\sigma(\xi)^2 = E|\xi - E\xi|^2$, где E — математическое ожидание. Для центрированной гауссовской меры γ через X_γ^* обозначается замыкание X^* в $L^2(\gamma)$. Элементы X_γ^* называются γ -измеримыми линейными функционалами.

Пространство Камерона–Мартин $H(\gamma)$ гауссовской меры γ на X определяется как совокупность всех таких векторов $h \in X$, что мера γ_h , определяемая равенством $\gamma_h(B) = \gamma(B - h)$, эквивалентна γ . Пусть всюду ниже γ — центрированная гауссовская мера. Известно, что

$$H(\gamma) = \{x \in X : |h|_H < \infty\},$$

где

$$|h|_H = \sup\{f(h) : f \in X^*, \|f\|_{L^2(\gamma)} \leq 1\}.$$

Кроме того, для каждого $h \in H(\gamma)$ существует единственный элемент $\hat{h} \in X_\gamma^*$, для которого

$$f(h) = (f, \hat{h})_{L^2(\gamma)} \quad \forall f \in X^*.$$

При этом $|h|_H = \|\hat{h}\|_{L^2(\gamma)}$. Пространство $H = H(\gamma)$ со скалярным произведением

$$(h, k)_H = (\hat{h}, \hat{k})_{L^2(\gamma)}$$

оказывается сепарабельным гильбертовым пространством, единичный шар которого компактен в X . Отображение $h \mapsto \hat{h}$ является изометрией $H(\gamma)$ и X_γ^* . Обратное отображение $R_\gamma: X_\gamma^* \rightarrow H(\gamma)$ называется ковариационным оператором меры γ . Отметим, что R_γ можно определить посредством равенства

$$f(R_\gamma g) = \int_X f(x)g(x) \gamma(dx), \quad f \in X^*, \quad g \in X_\gamma^*.$$

Каждый γ -измеримый линейный функционал g обладает собственно линейной (т.е. линейной в обычном смысле) модификацией g_0 ; при этом

$$g_0(k) = (R_\gamma g, k)_H \quad \forall k \in H. \quad (1.1)$$

Функция

$$f \mapsto \sigma(f)^2 = f(R_\gamma f) = \int_X f(x)^2 \gamma(dx)$$

на X^* называется *ковариацией меры* γ .

Отметим, что элемент $\hat{h}$ называется *измеримым линейным продолжением* функционала $k \mapsto (k, h)_H$ на H . Известно, что всякий непрерывный линейный оператор A в H обладает (единственным с точностью до эквивалентной модификации) измеримым линейным продолжением $\hat{A}$, т.е. $\hat{A}$ — определенное на линейном подпространстве полной меры линейное отображение, совпадающее с A на H , измеримое относительно пары σ -алгебр $\mathcal{B}(X)_\gamma$ и $\mathcal{B}(X)$ и обладающее тем свойством, что индуцированная мера $\gamma \circ \hat{A}^{-1}$ — радоновская гауссовская. Если A — оператор Гильберта–Шмидта (и только в этом случае), то $\hat{A}$ обладает версией, принимающей значения в H .

Один из важнейших результатов теории гауссовских мер состоит в том, что образ меры γ при отображении $\hat{A}$ является мерой, эквивалентной γ , в точности тогда, когда $AA^* - I$ есть оператор Гильберта–Шмидта и $A(H) = H$. При этом всякая центрированная гауссовская мера μ на X , эквивалентная γ , имеет такой вид. Точнее говоря, $\mu = \gamma \circ T^{-1}$, где T — измеримое линейное продолжение оператора вида $I + K$, где K — оператор Гильберта–Шмидта на H , не имеющий собственного числа -1 . Плотность Радоны–Никодима гауссовской меры ν на X , эквивалентной мере γ , имеет вид

$$\frac{d\nu}{d\gamma} = \exp Q,$$

где Q — γ -измеримый многочлен второго порядка, т.е. элемент пространства $\mathcal{P}_2(\gamma)$, определяемого как замыкание в $L^2(\gamma)$ совокупности многочленов вида $Q_n(f_1, \dots, f_n)$, где Q_n — многочлен второго порядка на $\mathbb{R}^n$ и $f_i \in X^*$. Аналогичным образом вводятся классы $\mathcal{P}_k(\gamma)$ γ -измеримых многочленов степени k как замыкания в $L^2(\gamma)$ совокупности многочленов степени k от элементов X^* . Известно, что то же самое множество получается, если вместо замыкания в $L^2(\gamma)$ брать замыкание в смысле сходимости по мере γ . Пространство $\mathcal{P}_k(\gamma)$ можно представить в виде прямой суммы взаимно ортогональных подпространств $\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_k$. При этом $\mathcal{X}_k$ определяется как ортогональное дополнение к $\mathcal{P}_{k-1}(\gamma)$ в $\mathcal{P}_k(\gamma)$. В этих обозначениях $\mathcal{X}_0$ — одномерное пространство констант, $\mathcal{X}_1 = X_\gamma^*$. Ортогональные проекторы на $\mathcal{X}_k$ обозначаются через I_k . Известно, что, хотя в определении измеримых многочленов участвует топологическое сопряженное,

фактически классы $\mathcal{X}_k$ не зависят от топологии в следующем смысле: если X линейно и непрерывно вложено в локально выпуклое пространство Y , а γ рассматривается как мера на Y , то классы $\mathcal{X}_k$ при этом не меняются.

Классы $\mathcal{X}_k$ входят в соболевские классы $W^{2,r}(\gamma)$ относительно меры γ (см. [8, гл. 5]); в частности, для их элементов определены производные $D_H F$ и $D_H^2 F$ вдоль $H = H(\gamma)$. Например, если последовательность многочленов F_j степени k от непрерывных линейных функционалов сходится в $L^2(\gamma)$ (или хотя бы по мере γ) к F , то производные Фреше функций F_j вдоль H (обозначаемые через $D_H F_j$) сходятся в пространстве $L^2(\gamma, H)$ H -значных отображений к некоторому отображению, обозначаемому через $D_H F$. Кроме того, вторые производные $D_H^2 F_j$ сходятся в $L^2(\gamma, \mathcal{H}(H))$ к $\mathcal{H}(H)$ -значному отображению $D_H^2 F$. Если $k = 2$, то $D_H^2 F$ почти всюду совпадает с некоторым постоянным оператором Гильберта–Шмидта на H .

Функция q на X называется γ -измеримой полунормой, если она γ -измерима и является полунормой в обычном смысле на некотором линейном подпространстве полной γ -меры. Если при этом ограничение q на $H(\gamma)$ является нормой, то q называется γ -измеримой нормой. Как показано в [13] (см. также [8, предложение 4.3.3]), для всякой γ -измеримой полунормы q существуют такие элементы $f_n \in X_\gamma^*$ и числа $\theta_n \geq 0$, что

$$q(x) = \sup_n [f_n(x) + \theta_n] \quad \gamma\text{-п.в.} \quad (1.2)$$

Ниже мы будем считать, что в этом равенстве измеримые линейные функционалы f_n представлены своими собственно линейными версиями (т.е. линейными на всем пространстве в обычном смысле). Мы будем рассматривать γ -измеримые нормы, удовлетворяющие условию

$$\gamma(x \in X : q(x) < \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.3)$$

Это условие естественно при рассмотрении отношения в (0.1); если оно не выполнено, то можно считать соответствующее отношение равным 1 при всех достаточно малых ε , что делает задачу тривиальной. При выполнении условия (1.3) в представлении (1.2) имеем $\theta_n \equiv 0$. Действительно, для каждого n имеем $f_n(x) + \theta_n \leq q(x)$ почти всюду, откуда в силу симметричности γ получаем $f_n(-x) + \theta_n \leq q(x)$, т.е. $\theta_n \leq q(x)$ почти всюду.

§2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе собраны вспомогательные результаты. Первые три леммы фактически хорошо известны, но для того чтобы пользоваться ими в приводимых формулировках, они снабжены доказательствами.

ЛЕММА 2.1. *Для всякого γ -измеримого многочлена второй степени Q существуют ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $H = H(\gamma)$ и вещественные числа c, c_n, α_n такие, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty, \quad (2.1)$$

$$Q(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{e}_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\hat{e}_n(x)^2 - 1) \quad \gamma\text{-п.в.}, \quad (2.2)$$

где оба ряда сходятся почти всюду и во всех $L^p(\gamma)$. Обратно, всякая функция Q указанного вида представляет собой γ -измеримый многочлен второго порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для всякого ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в H функции $\widehat{e}_n$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины на (X, γ) . Поэтому при любом выборе чисел, удовлетворяющих условию (2.1), ряды в (2.2) сходятся почти всюду. Это вытекает, например, из теоремы Колмогорова–Хинчина [14, гл. IV, §2, теорема 1]. Тогда имеет место и сходимости во всех $L^p(\gamma)$ (см. [8, следствие 5.6.5]). Этим доказана вторая часть леммы. Пусть теперь Q – γ -измеримый многочлен второй степени. Тогда его вторая производная $D_H^2 Q$ вдоль H в смысле соболевского класса $W^{2,1}(\gamma)$ (см. [8, гл. 5]) совпадает γ -п.в. с некоторым неслучайным симметричным оператором Гильберта–Шмидта K в H . По теореме Гильберта–Шмидта найдется такой ортонормированный базис $\{e_n\}$ в H , что $Ke_n = 2\alpha_n e_n$. Как отмечено выше, функция

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\widehat{e}_n^2 - 1)$$

корректно определена и является γ -измеримым многочленом второго порядка. При этом $D_H^2(Q - G) = 0$, откуда вытекает, что $Q - G \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$. Действительно, функция $I_2(Q - G)$ разлагается в ряд из взаимно ортогональных функций вида $c(\widehat{e}_i - 1)(\widehat{e}_j - 1)$. Поэтому равенство $D_H^2 I_2(Q - G) = 0$ возможно лишь в случае, когда все элементы этого разложения равны нулю. Остается воспользоваться тем, что всякий элемент $g \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ имеет вид

$$g = c + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \widehat{e}_n \quad \gamma\text{-п.в.}$$

для некоторого $c \in \mathbb{R}^1$ и некоторой числовой последовательности $(c_n) \in l^2$.

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин, а случайная величина Q определена равенством (0.2). Тогда случайная величина $\exp Q$ интегрируема в точности тогда, когда $\alpha_n < 1/2$ для всех n . При этом

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left(c + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\xi_n^2 - 1) \right) \right) \\ = \exp \left(c + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{1 - 2\alpha_n} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n)}{\sqrt{1 - 2\alpha_n}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Это проверяется непосредственными вычислениями с учетом того факта, что произведение в правой части (2.3) сходится при $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ и $\alpha_n < 1/2$.

ЛЕММА 2.2. Пусть γ – гауссовская мера на X , а Q – такой γ -измеримый многочлен второго порядка, что $\exp Q \in L^1(\gamma)$. Тогда мера

$$\mu = \left(\int_X \exp Q \, d\gamma \right)^{-1} \exp Q \cdot \gamma$$

является гауссовской.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как вытекает из леммы 2.1 и соотношения (2.3), существует такое $p > 1$, что $\exp Q \in L^p(\gamma)$. Возьмем произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $H(\gamma)$. Пусть Q_n – конечномерные приближения Q , построенные как условные математические ожидания относительно σ -алгебр, порожденных $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ (см. [8, следствие 3.4.5]). Тогда Q_n – экспоненциально γ -интегрируемые многочлены второй степени от $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$. Заметим, что многочлен второй степени на $\mathbb{R}^n$ имеет вид $F(x) = (Ax, x) + (x, v) + c$, где A – симметричный оператор, $v \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^1$. Такой многочлен экспоненциально интегрируем относительно стандартной гауссовской меры γ_n в точности тогда, когда $A < I/2$. Ясно, что в этом случае мера

$$\|\exp F\|_{L^1(\gamma_n)}^{-1} \exp F \cdot \gamma_n$$

– гауссовская. Это показывает, что меры

$$\nu_n = \|\exp Q_n\|_{L^1(\gamma)}^{-1} \exp Q_n \cdot \gamma$$

являются гауссовскими. Поскольку последовательность $\{Q_n\}$ сходится к Q почти всюду, а последовательность $\{\exp Q_n\}$ равномерно интегрируема ввиду оценки

$$\int_X \exp(pQ_n) d\gamma \leq \int_X \exp(pQ) d\gamma,$$

вытекающей из неравенства Йенсена для условных математических ожиданий, то меры ν_n сходятся к μ по вариации. Значит, μ – гауссовская мера.

Очевидным образом верно и в некотором смысле обратное к доказанной лемме утверждение.

ЛЕММА 2.3. Если μ – гауссовская мера, эквивалентная γ , то ее плотность Радона–Никодима является γ -измеримым многочленом второго порядка и имеет вид (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varrho = d\mu/d\gamma$. Беря, как и в предыдущей лемме, условные математические ожидания ϱ_n функции ϱ относительно σ -алгебр, порожденных $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$, получаем, что $\varrho_n \rightarrow \varrho$ почти всюду. Положим $P_n x = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$, $\mu_n = \mu \circ P_n^{-1}$, $\gamma_n = \gamma \circ P_n^{-1}$. Заметим, что $\varrho_n(x) = r_n(P_n(x))$ γ -п.в., где r_n есть плотность меры μ_n относительно γ_n . Действительно, для всякой ограниченной борелевской функции φ на $\mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(P_n x) \varrho_n(x) \gamma(dx) &= \int_X \varphi(P_n x) \varrho(x) \gamma(dx) = \int_X \varphi(P_n x) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \mu_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) r_n(y) \gamma_n(dy) \\ &= \int_X \varphi(P_n x) r_n(P_n x) \gamma(dx). \end{aligned}$$

Поскольку в конечномерном случае наше утверждение очевидно, то $\varrho_n = \exp F_n$, где F_n – многочлен второго порядка от $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$, т.е. F_n – γ -измеримый многочлен второго порядка. Последовательность $\{F_n\}$ сходится γ -почти всюду ввиду сходимости $\{\exp F_n\}$, поэтому ее предел есть также некоторый γ -измеримый многочлен второго порядка F , откуда $\varrho = \exp F$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Отметим, что если функция $Q \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_2$ неотрицательна, то в (2.2) имеем

$$\alpha_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty, \quad c - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \geq 0.$$

Действительно, условное математическое ожидание Q относительно σ -алгебры, порожденной $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$, совпадает с $c + \sum_{n=1}^m \alpha_n (\hat{e}_n^2 - 1)$ и неотрицательно, откуда утверждение вытекает немедленно, ибо многочлен

$$c + \sum_{n=1}^m \alpha_n (x_n^2 - 1)$$

на $\mathbb{R}^m$ почти всюду неотрицателен лишь в случае, когда числа α_n и $c - \sum_{n=1}^m \alpha_n$ неотрицательны. В частности, $D_H^2 Q$ является ядерным оператором. Это показывает, что функция $Q \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_2$ с производной $D_H^2 Q$, не являющейся ядерным оператором, не может быть записана в виде $Q_1 - Q_2$ с неотрицательными $Q_1, Q_2 \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_2$; в частности, так обстоит дело для $Q = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\hat{e}_n^2 - 1)$. Ясно, что условие $D_H^2 Q \in \mathcal{L}_{(1)}(H)$ также и достаточно для существования разложения в разность неотрицательных многочленов второго порядка. Действительно, можно положить

$$Q_1 = I_0(Q)^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ \xi_n^2,$$

где α_n^+ и α_n^- — неотрицательные и отрицательные собственные числа оператора $D_H^2 F$ в собственном базисе $\{e_n\}$ и $\xi_n = \hat{e}_n$.

Важный частный случай квадратичных форм, допускающих разложение в разность неотрицательных измеримых квадратичных форм, — непрерывные формы.

ЛЕММА 2.5. Пусть Q — квадратичная форма на X в обычном алгебраическом смысле, являющаяся секвенциально непрерывной (т.е. из сходимости $x_n \rightarrow x$ в X вытекает сходимость $Q(x_n)$ к $Q(x)$). Тогда существуют такие числа α_n и ортонормированный базис $\{\xi_n\}$ в X_γ^* , что $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ и $Q = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n^2$ п.в. При этом ограничение Q на $H = H(\gamma)$ имеет вид $(Sh, h)_H$, где $S = 2^{-1} D_H^2 Q$ — ядерный оператор в H с собственными числами α_n , и справедливо равенство

$$\int_X Q(x) \gamma(dx) = \frac{1}{2} \text{trace } D_H^2 Q. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует симметричная билинейная функция Ψ на X , для которой $Q(x) = \Psi(x, x)$. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H . Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \hat{e}_n(x) e_n = x$ для γ -п.в. $x \in X$ (см. [8, теорема 3.4.4]). В силу секвенциальной непрерывности Q получаем

$$Q(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q\left(\sum_{n=1}^m \hat{e}_n(x) e_n\right) \quad \text{п.в.} \quad (2.5)$$

Ясно, что

$$Q\left(\sum_{n=1}^m \hat{e}_n(x) e_n\right) = \sum_{n=1}^m Q(e_n) \hat{e}_n(x)^2 + 2 \sum_{n \neq k, n, k \leq m} \Psi(e_n, e_k) \hat{e}_n(x) \hat{e}_k(x).$$

Следовательно, квадратичные формы в (2.5) сходятся не только почти всюду, но и в $L^2(\gamma)$ (см. § 1), причем $Q \in \mathcal{P}_2(\gamma)$ и $D_H^2 Q$ – симметричный оператор Гильберта–Шмидта в H , который мы обозначим через $2S$. Пусть теперь $\{e_n\}$ – собственный базис S . Тогда $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(e_n) \hat{e}_n(x)^2$ п.в. Интегрируя это равенство с учетом соотношения

$$(2Se_n, e_n)_H = \partial_{e_n}^2 Q = 2Q(e_n),$$

получаем (2.4). Заметим, что $S \in \mathcal{L}_{(1)}(H)$, ибо значение $\sum_{n=1}^{\infty} (Se_n, e_n)_H$ – одно и то же для всех перестановок $\{e_n\}$.

Следует подчеркнуть, что не всякая непрерывная квадратичная форма Q на банаховом пространстве (в отличие от случая гильбертова пространства) может быть разложена в разность неотрицательных непрерывных квадратичных форм. Возьмем, например, последовательность таких норм q_n на плоскости, что форма $K(x, y) = x^2 - y^2$ ограничена по модулю единицей на единичном шаре U_n по норме q_n , а ее положительная часть принимает на U_n значение 4^n (в качестве U_n можно взять эллипсоиды с сильно вытянутыми осями вдоль биссектрисы первого и третьего квадрантов и сильно сжатыми осями вдоль биссектрисы второго и четвертого квадрантов). Возьмем в качестве X пространство последовательностей $z = (x_n, y_n)$ с нормой $\|z\| = \sup_n q_n((x_n, y_n))$, а в качестве Q форму $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(x_n^2 - y_n^2)$. Тогда Q нельзя разложить в разность неотрицательных непрерывных квадратичных форм. Более короткий, но менее наглядный пример можно извлечь из [15, упражнение 3г, с. 138]: возьмем рефлексивное банахово пространство Y , не являющееся линейно гомеоморфным гильбертову пространству, и на пространстве $Y \times Y^*$ положим $Q(y, y^*) = y^*(y)$.

Из сказанного выше явствует, что задача изучения предела в (0.1) равносильна задаче исследования предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma(\{q \leq \varepsilon\})} \int_{q \leq \varepsilon} \exp Q d\gamma \quad (2.6)$$

для центрированной гауссовской меры γ и γ -измеримого многочлена второго порядка Q (или, что также равносильно, случайной величины вида (0.2)).

§ 3. Основные результаты

ЛЕММА 3.1. Пусть γ – центрированная гауссовская мера на X , V – γ -измеримое выпуклое симметричное множество положительной меры, а функции $Q_1, Q_2 \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_2$ неотрицательны. Тогда

$$\int_X \exp(-Q_2) d\gamma \leq \frac{1}{\gamma(V)} \int_V \exp(Q_1 - Q_2) d\gamma \leq \int_X \exp Q_1 d\gamma. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\exp(-Q_2) \leq \exp(Q_1 - Q_2) \leq \exp Q_1$, то достаточно рассмотреть отдельно случаи, когда $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$. Пусть $Q_2 = 0$. Мы знаем, что

$$Q_1 = c + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n^2,$$

где

$$c \geq 0, \quad \alpha_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty,$$

а $\{\xi_n\}$ – ортонормированный базис в X_γ^* . Ясно, что можно считать число c равным нулю, а функцию $\exp Q_1$ интегрируемой (в противном случае утверждение тривиально). Мера

$$\nu := \|\exp Q_1\|_{L^1(\gamma)}^{-1} \exp Q_1 \cdot \gamma$$

является центрированной гауссовской ввиду леммы 2.2 и ее ковариация мажорирует ковариацию меры γ . Действительно, пусть $f \in X^*$. Тогда $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n$, где $(c_n) \in l^2$. Интегралы f^2 относительно мер ν и γ равны суммам соответствующих интегралов от $c_n^2 \xi_n^2$ ввиду независимости случайных величин ξ_n . Следовательно, утверждение сводится к одномерному случаю, в котором оно очевидно. Значит, $\nu(V) \leq \gamma(V)$ (см. [8, теорема 3.3.5]), что и утверждалось. Случай $Q_1 = 0$ аналогичен.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть γ – центрированная гауссовская мера на X , V – γ -измеримое выпуклое симметричное множество положительной меры и пусть $Q = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\xi_n^2 - 1)$, где $\alpha_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$, и $\{\xi_n\}$ – ортонормированная последовательность в X_γ^* . Тогда

$$\frac{1}{\gamma(V)} \int_V \exp Q \, d\gamma \leq \int_X \exp Q \, d\gamma. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда функция $\exp Q$ интегрируема, что соответствует условию $\alpha_n < 1/2$ для всех n . Если Q заменить на $Q_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n (\xi_n^2 - 1)$, то утверждение верно по предыдущей лемме. Теперь остается заметить, что $\exp Q_k \rightarrow \exp Q$ в $L^1(\gamma)$. Действительно, последовательность $\exp Q_k$ сходится почти всюду к $\exp Q$ и равномерно интегрируема, поскольку существует такое число $p > 1$, что $\sup_k \|\exp Q_k\|_{L^p(\gamma)} < \infty$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть γ – центрированная гауссовская мера на X , q – γ -измеримая норма и пусть функция $Q \in \mathcal{P}_2$ такова, что $D_H^2 Q$ – ядерный оператор (что равносильно существованию разложения $Q = f + Q_1 - Q_2$, где $f \in \mathcal{X}_1$ и $Q_1, Q_2 \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_2$ неотрицательны). Предположим, что функция $\exp Q$ интегрируема. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \exp Q(x) \, \gamma(dx) = \exp \left(I_0(Q) - \frac{1}{2} \operatorname{trace} D_H^2 Q \right), \quad (3.3)$$

где $V_\varepsilon = \{x : q(x) \leq \varepsilon\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция Q имеет представление (2.2). Можно считать, что $I_0(Q) - \frac{1}{2} \operatorname{trace} D_H^2 Q = 0$. Положим

$$Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ \widehat{e}_n^2, \quad Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- \widehat{e}_n^2,$$

где α_n^+ и α_n^- – положительные и отрицательные собственные числа $D_H^2 Q/2$ соответственно, причем $\alpha_n^+ \alpha_n^- = 0$ для всех n . Предположим сначала, что $f = 0$ и

$$\exp(8Q_1) \in L^1(\gamma).$$

Из условия вытекает, что $q(x) = \sup_n f_n(x)$ п.в., где $\{f_n\} \subset X_\gamma^*$ имеет плотную линейную оболочку в X_γ^* . В самом деле, если линейная оболочка $\{f_n\}$ не является плотной в X_γ^* , то найдется нетривиальный вектор $h \in H(\gamma)$ с $f_n(h) = 0$ для всех n , поскольку f_n — собственно линейные функционалы, а тогда $q(h) = 0$. Легко видеть, что наше утверждение верно, если Q_1 и Q_2 являются конечными суммами квадратов конечных линейных комбинаций функционалов f_n . Действительно, в этом случае $Q_1 \leq cq^2$ и $Q_2 \leq cq^2$ для некоторого $c > 0$ ввиду неравенства $|f_n| \leq q$, поэтому $\exp(-2c\varepsilon^2) \leq \exp(Q_1 - Q_2) \leq \exp(2c\varepsilon^2)$ на множестве $\{q \leq \varepsilon\}$. Кроме того, общий случай сводится к случаю $Q_2 = 0$. В самом деле, полагая

$$J_\varepsilon(\gamma, Q) = \frac{1}{\gamma(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \exp Q \, d\gamma$$

и вводя центрированные гауссовские меры

$$\nu := \|\exp(-Q_2)\|_{L^1(\gamma)}^{-1} \exp(-Q_2) \cdot \gamma,$$

получаем

$$J_\varepsilon(\gamma, Q_1 - Q_2) = \frac{J_\varepsilon(\nu, Q_1)}{J_\varepsilon(\nu, Q_2)},$$

поскольку

$$\gamma(V_\varepsilon) = \int_{V_\varepsilon} \exp(Q_2) \, d\nu \int_X \exp(-Q_2) \, d\gamma.$$

Заметим, что случайные величины ξ_n ортогональны в $L^2(\nu)$. Кроме того,

$$\|\xi_n\|_{L^2(\nu)}^2 = (1 + 2\beta_n)^{-1}.$$

Поэтому $Q_2 = \sum_{n=1}^\infty \beta_n (1 + 2\beta_n)^{-1} \zeta_n^2$, где $\{\zeta_n\}$ — ортонормированный базис в X_ν^* , т.е. Q_2 удовлетворяет исходным условиям и относительно меры ν .

Итак, обратимся к случаю, когда

$$Q_1 = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \xi_n^2,$$

где $\alpha_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n < \infty$ и $\{\xi_n\}$ — ортонормированная последовательность в X_γ^* . Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i^2$. Зафиксируем $q > 1$. По теореме Лебега существует такое n , что

$$\int_X \exp(2Q_1 - 2S_n) \, d\gamma \leq q^2.$$

Используя лемму 3.1 и тот факт, что $Q_1 - S_n \geq 0$, получаем оценку

$$\begin{aligned} 1 &\leq J_\varepsilon(\gamma, Q_1) = J_\varepsilon(\gamma, Q_1 - S_n + S_n) = \frac{1}{\gamma(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \exp S_n \exp(Q_1 - S_n) \, d\gamma \\ &\leq \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2S_n)} \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2Q_1 - 2S_n)} \\ &\leq \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2S_n)} \sqrt{\int_X \exp(2Q_1 - 2S_n) \, d\gamma} \leq q \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2S_n)}. \end{aligned}$$

В силу произвольности $q > 1$ эта оценка показывает, что достаточно доказать, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\gamma, 2S_n) = 1$. По индукции это сводится к случаю $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, поскольку мера $\nu := \|\exp(2S_{n-1})\|_{L^1(\gamma)}^{-1} \exp(2S_{n-1}) \cdot \gamma$ -центрированная гауссовская и

$$J_\varepsilon(\gamma, 2S_n) = J_\varepsilon(\nu, 2\alpha_n \xi_n^2) J_\varepsilon(\gamma, 2S_{n-1}).$$

Положим $\xi = \sqrt{2\alpha_n} \xi_n$. Тогда $\sigma(\xi)^2 < 1/8$ в силу интегрируемости $\exp(8Q_1)$. Опять зафиксируем $q > 1$. Найдем такой функционал η из линейной оболочки $\{f_n\}$, что

$$\sigma(\xi - \eta)^2 < \frac{q^2 - 1}{8q^2}.$$

Затем найдем такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$J_\varepsilon(\gamma, 4\eta^2) \leq q \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1).$$

Поскольку $\xi^2 \leq 2(\xi - \eta)^2 + 2\eta^2$, то при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ в силу оценки (3.2) получаем

$$\begin{aligned} 1 &\leq J_\varepsilon(\gamma, \xi^2) \leq J_\varepsilon(\gamma, 2(\xi - \eta)^2 + 2\eta^2) \leq \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 4(\xi - \eta)^2)} \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 4\eta^2)} \\ &\leq \sqrt{q \int_X \exp(4(\xi - \eta)^2) d\gamma} \leq (1 - 8\sigma(\xi - \eta)^2)^{-1/4} \sqrt{q} \leq q. \end{aligned}$$

В силу произвольности $q > 1$ при сделанных выше дополнительных предположениях утверждение доказано.

Случай, когда $f \neq 0$, сводится к случаю, рассмотренному выше. Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(\gamma, Q + f) - J_\varepsilon(\gamma, Q)| &= \left| \frac{1}{\gamma(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \exp Q (\exp f - 1) d\gamma \right| \\ &\leq \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2Q)} \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2f) - 2J_\varepsilon(\gamma, f) + 1} \\ &\leq \sqrt{\int_X \exp 2Q d\gamma} \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2f) - 2J_\varepsilon(\gamma, f) + 1}. \end{aligned}$$

Правая часть этой оценки стремится к нулю при стремлении ε к нулю в силу [8, следствие 4.4.5].

Наконец, освободимся от предположения об интегрируемости $\exp(8Q_1)$. Мы знаем, что найдется такое $\lambda > 1$, что функция $\exp(\lambda Q_1)$ γ -интегрируема. Функции $G(z, \varepsilon) = J_\varepsilon(\gamma, zQ)$ голоморфны по z при $0 < \operatorname{Re} z < \lambda$ и равномерно ограничены по $\varepsilon > 0$ и z с $0 < \operatorname{Re} z < \lambda$ ввиду оценки (3.1). Поскольку они сходятся к 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех достаточно малых действительных z , то сходимости имеет место для всех z из $[0, 1]$ ввиду теоремы Витали (см. [16, гл. V, § 5.2]).

Отметим один случай, в котором для вывода о существовании предела в (0.1) не требуется изучать собственные числа соответствующей формы.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть γ и q – те же, что и в предыдущей теореме, α_n – вещественные числа с $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$, $Q = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n^2$, где $\zeta_n \in X_\gamma^*$ и $\sigma(\zeta_n)^2 \leq 1$. Тогда предел в (3.3) равен 1. В частности, это верно для всякой секвенциально непрерывной квадратичной формы Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хотя первое утверждение можно усмотреть и из доказательства предыдущей теоремы, мы получим его из (3.3), проверив равенство (2.4) для нашей функции Q . Действительно, достаточно взять ортонормированный базис $\{e_j\}$ в H и заметить, что

$$\partial_h^2(\zeta_n^2) = 2(\widehat{h}, \zeta_n)_{L^2(\gamma)}^2$$

для всех $h \in H$. Поскольку $D_H^2 Q$ — ядерный оператор в силу замечания 2.4, то (2.4) вытекает из абсолютной сходимости двойного ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\widehat{e}_j, \zeta_n)_{L^2(\gamma)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|\zeta_n\|_{L^2(\gamma)}^2.$$

Второе утверждение непосредственно следует из леммы 2.5.

Комбинируя теорему 3.3 и следствие 3.2, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\gamma, Q) = 0,$$

если $Q = Q_1 + Q_2$, где Q_1 и Q_2 — γ -измеримые многочлены второго порядка, такие, что $D_H^2 Q_1$ — ядерный оператор, а оператор $D_H^2 Q_2$ неотрицателен и имеет бесконечный след. Действительно, в силу доказанного выше достаточно показать это для $Q_1 = 0$ и $Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\xi_n^2 - 1)$, где

$$\alpha_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Положим $S_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n (\xi_n^2 - 1)$. Предполагая, что функция $\exp(2Q_2)$ интегрируема, ввиду следствия 3.2 и неравенства Коши–Буняковского получаем

$$J_\varepsilon(\gamma, Q_2)^2 \leq J_\varepsilon(\gamma, 2S_k) J_\varepsilon(\gamma, 2Q_2 - 2S_k) \leq J_\varepsilon(\gamma, 2S_k) \int_X \exp(2Q_2) d\gamma.$$

Первый сомножитель в правой части стремится к $\exp(-\sum_{n=1}^k \alpha_n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, откуда и вытекает требуемое. Наконец, заметим, что без ущерба для общности можно считать функцию $\exp(2Q_2)$ интегрируемой, поскольку $\alpha_n \rightarrow 0$ и при достаточно больших k это предположение выполнено для $Q_2 - S_k$ вместо Q_2 и меры $\|\exp S_k\|_{L^1(\gamma)}^{-1} \exp S_k \cdot \gamma$ вместо γ .

Рассматривая квадратичные формы Q с неположительными операторами $D_H^2 Q$ не следового класса, получаем бесконечность в качестве предела $J_\varepsilon(\gamma, Q)$. Эти рассуждения можно резюмировать следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть γ — центрированная гауссовская мера на X и $Q \in \mathcal{P}_2$ — такой γ -измеримый многочлен второго порядка, что $D_H^2 Q$ имеет суммируемый (возможно, $\kappa - \infty$ или $+\infty$) след

$$\text{trace } D_H^2 Q = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^-,$$

где $2\alpha_n^+$ и $2\alpha_n^-$ соответственно положительные и отрицательные собственные числа $D_H^2 Q$, причем хотя бы один из этих двух рядов сходится к конечному числу. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \exp Q(x) \gamma(dx) = \exp \left(I_0(Q) - \frac{1}{2} \text{trace } D_H^2 Q \right). \quad (3.4)$$

Как мы сейчас увидим, условная сходимость ряда из собственных чисел $D_H^2 Q$ не влечет существование предела $J_\varepsilon(\gamma, Q)$.

ПРИМЕР 3.6. Если

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ (\xi_n^2 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- (\xi_n^2 - 1),$$

где $(\alpha_n) \in l^2$, $\alpha_n^+ > 0$, $\alpha_n^- < 0$, $\alpha_n^+ \alpha_n^- = 0$ для всех n и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^-| = \infty, \quad (3.5)$$

то для подходящей нормы q не существует определенного предела (конечного или бесконечного) величин $J_\varepsilon(\gamma, Q)$. Более того, можно так подобрать q , что $J_\varepsilon(\gamma, Q)$ будет осциллировать между 0 и ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения обозначений мы подробно рассмотрим лишь пример $\{\alpha_n\}$ и q , в котором имеются две различные предельные точки; в общем случае используется модификация этой конструкции.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ будет построена как последовательность конечных блоков $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,2m(n)}$, где $m(n) = n^2 2^{n+2}$, $\alpha_{n,j} = n^{-1} 2^{-n-2}$ и $\alpha_{n,m(n)+j} = -\alpha_{n,j}$ при $j = 1, \dots, m(n)$. Тогда $\sum_{j=1}^{m(n)} \alpha_{n,j} = n$ и $\sum_{j=1}^{2m(n)} \alpha_{n,j}^2 = 2^{-n-1}$. Мы найдем две последовательности положительных чисел $\varepsilon_n < 1$ и $c_{n,j}$, $j = 1, \dots, 2m(n)$, таких, что $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$, $c_{n,j} > nm(n)$ (это условие нужно для того, чтобы получить конечную норму) и, полагая

$$\begin{aligned} J_n(\varepsilon, c_{n,1}, \dots, c_{n,2m(n)}) \\ = \prod_{j=1}^{2m(n)} \frac{1}{\gamma_1([- \varepsilon c_{n,j}, \varepsilon c_{n,j}])} \int_{|t| \leq \varepsilon c_{n,j}} \exp(\alpha_{n,j} t^2 - \alpha_{n,j}) p(t) dt, \end{aligned}$$

где γ_1 — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^1$ с плотностью p , имеем

$$\begin{aligned} \left| J_n(\varepsilon_i, c_{n,1}, \dots, c_{n,2m(n)}) - \prod_{j=1}^{m(n)} \frac{1}{\sqrt{1 - 4\alpha_{n,j}^2}} \right| &\leq 2^{-n-1}, \quad i < 2n, \\ J_n(\varepsilon_{2n}, c_{n,1}, \dots, c_{n,2m(n)}) &< 2M e^{-n}, \\ |J_n(\varepsilon, c_{n,1}, \dots, c_{n,2m(n)}) - 1| &\leq 2^{-n-1} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_{2n+1}), \end{aligned}$$

где

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m(n)} \sqrt{1 + 4\alpha_{n,j}^2}.$$

Такие последовательности строятся индуктивно. Предположим, что мы уже построили ε_i , $i < 2n$, и $c_{k,i}$, $k < n$. Возьмем $R > nm(n)$ настолько большим, что для всякого $i < 2n$ справедливо неравенство

$$\left| J_n(\varepsilon_i, t_1, \dots, t_{n(m)}, s_1, \dots, s_{m(n)}) - \prod_{j=1}^{m(n)} \frac{1}{\sqrt{1 - 4\alpha_{n,j}^2}} \right| \leq 2^{-n-1} \quad \forall t_i, s_i \geq R.$$

Это возможно ввиду (2.3) и равенства $\sum_{j=1}^{2m(n)} \alpha_{n,j} = 0$. Далее, найдутся такие $\delta \in (0, R^{-1})$ и $r > \delta$, что при $\delta_i \equiv \delta$ и $r_i \equiv r$ имеем

$$J_n(\varepsilon, \delta_1, \dots, \delta_{m(n)}, r_1, \dots, r_{m(n)}) < 2e^{-n} \prod_{j=1}^{m(n)} \sqrt{1 + 4\alpha_{n,j}^2} < 2Me^{-n}. \quad (3.6)$$

Это возможно, ибо произведение первых $m(n)$ сомножителей в выражении для J_n стремится при $\delta \rightarrow 0$ к числу $\exp(-\sum_{j=1}^{m(n)} \alpha_{n,j})$, равному $\exp(-n)$, а произведение остальных $m(n)$ сомножителей согласно (2.3) стремится при $r \rightarrow +\infty$ к

$$\prod_{j=1}^{m(n)} \frac{\exp(\alpha_{n,j})}{\sqrt{1 + 2\alpha_{n,j}}} \leq \prod_{j=1}^{m(n)} \sqrt{1 + 4\alpha_{n,j}^2}.$$

Положим

$$\varepsilon_{2n} = \frac{\delta^2 \varepsilon_{2n-1}}{R}, \quad c_{n,j} = \frac{R}{\varepsilon_{2n-1} \delta}, \quad j = 1, \dots, m(n), \quad c_{n,j} = \frac{rR}{\delta^2 \varepsilon_{2n-1}}, \quad j = m(n) + 1, \dots, 2m(n).$$

При таком выборе имеем

$$\varepsilon_{2n} c_{n,j} = \delta \quad \text{при } j \leq m(n), \quad \varepsilon_{2n} c_{n,j} = r \quad \text{при } m(n) < j \leq 2m(n).$$

Наконец, возьмем $c \in (0, \varepsilon_{2n}]$ достаточно малым, чтобы получить

$$|J_n(\varepsilon, c_{n,1}, \dots, c_{n,2m(n)}) - 1| \leq 2^{-n-1} \quad \forall \varepsilon \in (0, c]. \quad (3.7)$$

Это возможно ввиду равенства $\sum_{j=1}^{2m(n)} \alpha_{n,j} = 0$. Остается положить $\varepsilon_{2n+1} = c/2$. Эта конструкция дает желаемый пример, если мы возьмем в качестве γ счетное произведение стандартных гауссовских мер на $\mathbb{R}^1$ и положим

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n^2 - 1), \quad q(x) = \sup_n |x_n / \lambda_n|,$$

где $\{\lambda_i\}$ — последовательность, образованная конечными блоками $c_{n,j}$, $j \leq 2m(n)$. Отметим, что $q < \infty$ почти всюду и $\gamma(q < \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ в силу нашего выбора λ_i . Последовательность $J_{\varepsilon_{2n}}(\gamma, Q)$ сходится к нулю, в то время как последовательность $J_{\varepsilon_{2n+1}}(\gamma, Q)$ сходится к положительному числу. В общем случае при выполнении условия (3.5) можно считать числа α_n^+ и $|\alpha_n^-|$ упорядоченными по убыванию и меньшими $1/2$. Выбрав подпоследовательности n_k и m_k так, что

$$-2^{-k} \leq \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^+ + \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_j^- \leq 2^{-k},$$

можно осуществить конструкцию, аналогичную изложенной выше и отличающуюся лишь усложнением обозначений. В частности, в правой части (3.6) вместо e^{-n} получим $\exp(-\sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^+)$, а в (3.7) вместо 1 получим $\exp(-\sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^+ - \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_j^-)$.

Понятно, что указанным образом можно добиться того, чтобы предельными точками $J_\varepsilon(\gamma, Q)$ были 0 и $+\infty$ (тогда $J_\varepsilon(\gamma, Q)$ будет осциллировать в $(0, \infty)$).

Отметим также, что меру γ можно рассматривать не только на счетном произведении прямых, но и на сепарабельном банаховом пространстве Z последовательностей $x = (x_n)$ с нормой $\|x\| = \sup_n |q_n x_n|$, удовлетворяющих условию $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n x_n| = 0$. При достаточно быстро убывающей последовательности положительных чисел q_n множества $\{q \leq \varepsilon\}$ окажутся компактными в Z . Из этого явствует, что предел в (0.1) может не существовать для эквивалентных гауссовских мер даже в случае компактных множеств $\{q \leq \varepsilon\}$. Объясняется это тем, что согласно сказанному выше (и вопреки сказанному в [5, с. 215]) не всегда соответствующая плотность Радона–Никодима удовлетворяет условию ядерности из теоремы 3.3. Подобные примеры осуществимы на всяком бесконечномерном банаховом пространстве (вообще на всяком локально выпуклом пространстве X , на котором есть гауссовская мера с бесконечномерным носителем), ибо Z можно вложить в X с помощью непрерывного инъективного линейного оператора. Ситуация, однако, изменится, если на X рассматривать заранее данную норму. Можно также фиксировать и гауссовскую меру, и норму. В этом случае получатся иные классы многочленов второго порядка, для которых существует обсуждаемый предел. Используя [6, предложение 8, с. 287, замечание, с. 288] (см. также [4]), можно заключить, что существуют центрированная гауссовская мера μ на $X = l^2$ и последовательность $(\alpha_n) \in l^2$ с $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n| = \infty$, для которых при $q(x) = \|x\|$ предел в (2.6) положителен и конечен.

Обратимся теперь к случаю, когда q – измеримая полунорма, не обязательно являющаяся нормой на H . В этом случае качественно получается такая же картина, лишь значения пределов могут быть иными (это имеет место уже для многочленов первого порядка, см. [8, § 4.4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть выполнены условия следствия 3.5 за исключением того, что теперь q – γ -измеримая полунорма, не обязательно являющаяся нормой на H . Тогда существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\gamma, Q)$, причем этот предел положителен и конечен, если $D_H^2 Q$ – ядерный оператор. В частности, если μ – гауссовская мера на X , для которой $d\mu/d\gamma = \exp Q$, то существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(\{q \leq \varepsilon\})}{\gamma(\{q \leq \varepsilon\})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраним обозначения теоремы 3.3. Кроме того, обозначим через Γ замкнутое линейное подпространство в $L^2(\gamma)$, порожденное последовательностью $\{f_n\}$. Как и выше, достаточно рассмотреть случай, когда $Q = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \xi_n^2$, где $\{\xi_n\}$ – ортонормированная последовательность в X_γ^* , $\alpha_n > 0$ и $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n < \infty$. Тогда

$$\xi_n = \zeta_n + \delta_n, \quad \zeta_n \in \Gamma, \quad \delta_n \perp \Gamma.$$

Заметим, что ряды $G_1 = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \zeta_n^2$ и $G_2 = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \delta_n^2$ сходятся почти всюду, ибо $E\zeta_n^2 \leq 1$ и $E\delta_n^2 \leq 1$. Ряд $G_3 = 2 \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \zeta_n \delta_n$ также сходится почти всюду. Предположим сначала, что $\exp(2G_1 + 2G_2) \in L^1(\gamma)$. Введем гауссовскую меру

$$\mu := \|\exp(G_1 + G_2)\|_{L^1(\gamma)}^{-1} \exp(G_1 + G_2) \cdot \gamma.$$

Используя независимость случайных величин q и G_2 на вероятностном пространстве (X, γ) , вытекающую из ортогональности δ_n всем f_j в $L^2(\gamma)$, получаем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\gamma, Q) &= \frac{\|\exp(G_1 + G_2)\|_{L^1(\gamma)}}{\gamma(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \exp(G_3) d\mu \\ &= J_\varepsilon(\mu, G_3) \frac{\mu(V_\varepsilon) \|\exp(G_1 + G_2)\|_{L^1(\gamma)}}{\gamma(V_\varepsilon)} \\ &= J_\varepsilon(\mu, G_3) J_\varepsilon(\gamma, G_1) \|\exp(G_2)\|_{L^1(\gamma)}. \end{aligned}$$

Поскольку G_1 является функцией $\{f_n\}$ и $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n < \infty$, то в силу следствия 3.4 второй сомножитель в правой части вышеприведенного равенства стремится к 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Покажем, что и первый сомножитель стремится к 1. Прежде всего заметим, что случайные величины ζ_n и δ_n являются независимыми гауссовскими и относительно меры μ . Это вытекает из их ортогональности, которую легко усмотреть из независимости случайных величин $\zeta_n \exp(G_1)$ и $\delta_n \exp(G_2)$ на (X, γ) . Если $\zeta = 4 \sum_{j=1}^k \alpha_j \zeta_j \delta_j$, то равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mu, \zeta) = 1 \quad (3.8)$$

вытекает из уже доказанного. Действительно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \zeta^k d\mu = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Для доказательства заметим, что ввиду независимости δ_i и $\{f_j\}$ и неравенства Коши–Буняковского проверка этого соотношения сводится к проверке равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \zeta_j^{2k} d\mu = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Это равенство следует из того, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mu, \zeta_j) = 1$ и функции ζ_j^{2k-1} имеют нулевые интегралы по множеству V_ε относительно меры μ . Таким образом, величины

$$s_k(\varepsilon) := \frac{1}{k! \mu(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} \zeta^k d\mu$$

стремятся к нулю при каждом $k \geq 1$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^m |s_k(\varepsilon)| \leq J_\varepsilon(\mu, \zeta) \leq J_\varepsilon(\mu, 2G_1 + 2G_2) \leq \int_X \exp(2G_1 + 2G_2) d\mu,$$

ибо $s_k(\varepsilon) = 0$ при нечетных k , что вытекает из того, что ζ_j и δ_i независимы относительно меры μ и их нечетные степени имеют равные нулю интегралы (относительно меры μ) по множеству V_ε . Таким образом, получаем (3.8).

Пусть теперь $q > 1$. По теореме Лебега найдется такое k , что

$$\int_X \exp \left[\sum_{j=k+1}^\infty 2\alpha_j (\zeta_j^2 + \delta_j^2) \right] d\mu < q.$$

Согласно доказанному выше найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ справедливы неравенства

$$J_\varepsilon\left(\mu, 4 \sum_{j=1}^k \alpha_j \zeta_j \delta_j\right) < q, \quad J_\varepsilon\left(\mu, -4 \sum_{j=1}^k \alpha_j \zeta_j \delta_j\right) < q.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\mu, G_3) &\leq \sqrt{J_\varepsilon\left(\mu, 4 \sum_{j=1}^k \alpha_j \zeta_j \delta_j\right)} \sqrt{J_\varepsilon\left(\mu, \sum_{j=k+1}^{\infty} 2\alpha_j (\zeta_j^2 + \delta_j^2)\right)} \\ &\leq \sqrt{q \int_X \exp\left[\sum_{j=k+1}^{\infty} 2\alpha_j (\zeta_j^2 + \delta_j^2)\right] d\mu} < q. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$J_\varepsilon(\mu, -G_3) \leq q.$$

Поскольку

$$1 = J_\varepsilon\left(\mu, \frac{1}{2}G_3 - \frac{1}{2}G_3\right) \leq \sqrt{J_\varepsilon(\mu, G_3)} \sqrt{J_\varepsilon(\mu, -G_3)},$$

то

$$J_\varepsilon(\mu, G_3) \geq q^{-1},$$

откуда и вытекает наше утверждение при сделанном выше дополнительном предположении об интегрируемости $\exp(2G_1 + 2G_2)$. В общем случае получаем существование предела $J_\varepsilon(\gamma, zQ)$ для всех достаточно малых положительных z . Кроме того, найдется такое $\lambda > 1$, что $\exp(\lambda Q) \in L^1(\gamma)$. Тогда в силу леммы 3.1 для всех z из полосы $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \lambda$ функции $f_\varepsilon(z) = J_\varepsilon(\gamma, zQ)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, равномерно ограничены. Применяя, как и выше, теорему Витали, завершаем доказательство.

Изложенное доказательство позволяет получить и явное выражение для предела $J_\varepsilon(\gamma, Q)$. Для этого обозначим через $\mathcal{F}$ σ -алгебру, порожденную последовательностью $\{f_n\}$, задающей полунорму q , а через $\mathbf{E}^{\mathcal{F}}$ — условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}$. Кроме того, обозначим через Δ σ -алгебру, порожденную ортогональным дополнением к $\{f_n\}$ в X_γ^* , а через $\mathbf{E}^\Delta$ — соответствующее условное математическое ожидание. Отметим, что если q — норма на H , то $\mathbf{E}^{\mathcal{F}} f = f$, а $\mathbf{E}^\Delta$ совпадает с математическим ожиданием относительно γ .

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Пусть выполнены условия предложения 3.7. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\gamma, Q) = \|\exp(\mathbf{E}^\Delta Q)\|_{L^1(\gamma)} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{trace} D_H^2 \mathbf{E}^{\mathcal{F}} Q\right). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Q не имеет линейного слагаемого, то (3.9) установлено в ходе доказательства предложения 3.7, ибо $\mathbf{E}^{\mathcal{F}} G_3 = \mathbf{E}^\Delta G_3 = 0$ и

$$\mathbf{E}^\Delta G_1 = (G_1, 1)_{L^2(\gamma)} = \frac{1}{2} \operatorname{trace} D_H^2 G_1 = \frac{1}{2} \operatorname{trace} D_H^2 \mathbf{E}^{\mathcal{F}} Q,$$

где G_2 и G_3 – рассмотренные выше функции. Воспользуемся обозначениями из этого доказательства и запишем Q в виде

$$Q = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n^2 = Q_1 + Q_2,$$

$$Q_1 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n^2, \quad Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \delta_n,$$

где $\{\xi_n\}$ – некоторый ортонормированный базис в X_γ^* , $\xi_n = \zeta_n + \delta_n$, ζ_n – ортогональная проекция ξ_n на замкнутое линейное подпространство Γ в X_γ^* , порожденное $\{f_n\}$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. Кроме того, $Q = f + Q_0$, где $f = I_1(Q)$ – линейная компонента. Существует такое $\lambda > 1$, что $\exp(\lambda Q_0) \in L^1(\gamma)$. Пусть $1 < \beta < \lambda$. Тогда в силу неравенства Гёльдера, примененного к паре чисел $p = \lambda/\beta$ и $q = p(p-1)^{-1}$, имеем

$$J_\varepsilon(\gamma, \beta Q) \leq J_\varepsilon(\gamma, \lambda Q_0)^{1/p} J_\varepsilon(\gamma, qf)^{1/q}.$$

Из леммы 3.1 вытекает равномерная ограниченность $J_\varepsilon(\gamma, \lambda Q_0)$ по $\varepsilon \in (0, 1]$, а [8, лемма 4.4.1] дает равномерную ограниченность $J_\varepsilon(\gamma, qf)$. Следовательно, голоморфные функции $f_\varepsilon(z) = J_\varepsilon(\gamma, Q)$, $\varepsilon \in (0, 1]$, равномерно ограничены в области $0 < \operatorname{Re} z < \beta$. В силу теоремы Витали достаточно показать, что при малых положительных z и $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $f_\varepsilon(z)$ стремятся к голоморфной функции

$$\|\exp(z \mathbf{E}^\Delta Q)\|_{L^1(\gamma)} \exp\left(-\frac{z}{2} \operatorname{trace} D_H^2 \mathbf{E}^\mathcal{F} Q\right).$$

Далее считаем, что $z \in [0, r]$, где $r \in (0, 1/2)$ таково, что $\exp(2rQ_1) \in L^1(\gamma)$ и $\exp(2rQ_2) \in L^1(\gamma)$. Отметим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\gamma, zQ_2) = 1 \quad \forall z \in [0, 2r]. \quad (3.10)$$

Действительно, $zQ_2 = l + G$, где

$$l = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta_n, \quad G = z \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n^2 + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \delta_n.$$

Введем центрированную гауссовскую меру $\nu := \|\exp G\|_{L^1(\gamma)}^{-1} \exp G \cdot \gamma$. Тогда $J_\varepsilon(\gamma, zQ_2) = J_\varepsilon(\nu, l) J_\varepsilon(\gamma, G)$. Первый сомножитель в правой части этого равенства стремится к 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ согласно [8, теорема 4.4.3], поскольку l принадлежит замкнутому линейному подпространству, порожденному функционалами, задающими полунорму q . Второй сомножитель стремится к 1 на основании доказанного выше. Введем теперь вероятностную меру

$$\gamma_\varepsilon := \gamma(V_\varepsilon)^{-1} I_{V_\varepsilon} \cdot \gamma.$$

Проинтегрируем по этой мере тождество

$$\exp(zQ) = \exp(zQ_1) + \exp(zQ_1)(\exp(zQ_2) - 1). \quad (3.11)$$

Ввиду независимости случайных величин Q_1 и q , вытекающей из ортогональности $\{\delta_i\}$ и $\{f_j\}$, интеграл от функции $\exp(zQ_1)$ совпадает с ее интегралом по мере γ . Интеграл от второго слагаемого в правой части (3.11) оценивается следующим образом с помощью неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} & \left| \int_X \exp(zQ_1) (\exp(zQ_2) - 1) d\gamma_\varepsilon \right| \\ & \leq \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2zQ_1)} \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2zQ_2) - 2J_\varepsilon(\gamma, zQ_2) + 1} \\ & = \sqrt{\|\exp(2zQ_1)\|_{L^1(\gamma)}} \sqrt{J_\varepsilon(\gamma, 2zQ_2) - 2J_\varepsilon(\gamma, zQ_2) + 1}. \end{aligned}$$

Ввиду (3.10) правая часть этой оценки стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Осталось заметить, что интеграл $\exp(zQ_1)$ по мере γ совпадает с правой частью (3.9) с функцией zQ вместо Q . Действительно, обозначая через $\mathbf{E}$ математическое ожидание относительно γ и пользуясь независимостью $\{\delta_n\}$ и $\{\zeta_n\}$, получаем

$$\mathbf{E}^\Delta Q = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{E} \zeta_n^2.$$

С другой стороны, как отмечалось в доказательстве следствия 3.4, при наших условиях справедливо равенство (2.4) для функции $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n^2$, что дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{E} \zeta_n^2 = \frac{1}{2} \operatorname{trace} D_H^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n^2 \right) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} D_H^2 \mathbf{E}^{\mathcal{F}} Q.$$

Отметим еще, что в (3.9) можно не привлекать $\mathbf{E}^{\mathcal{F}}$, поскольку

$$\operatorname{trace} D_H^2 \mathbf{E}^{\mathcal{F}} Q = \operatorname{trace} D_H^2 Q - \operatorname{trace} D_H^2 \mathbf{E}^\Delta Q.$$

Как показано в [3], для всякой строго положительной абсолютно непрерывной функции φ , имеющей производную ограниченной вариации на $[0, 1]$ и удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 \varphi(t)^{-2} dt = 1,$$

существует конечный положительный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P^W(x : |x(t)| \leq \varepsilon \varphi(t) \ \forall t \in [0, 1])}{P^W(x : \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)| \leq \varepsilon)}. \quad (3.12)$$

Этот результат можно вывести из доказанного выше. Для этого заметим, что числитель в левой части (3.12) представим в виде $P^W(x : q(Tx) \leq \varepsilon)$, где

$$Tx(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau'(t)}} x(\tau(t)),$$

причем τ – функция, обратная к

$$\beta(t) = \int_0^t \varphi(s)^{-2} ds. \quad (3.13)$$

Действительно, неравенство $|x(t)| \leq \varepsilon \varphi(t) \quad \forall t \in [0, 1]$ равносильно неравенству $|x(\tau(t))| \leq \varepsilon \varphi(\tau(t)) \quad \forall t \in [0, 1]$, а значит, неравенству $|x(\tau(t))|/\sqrt{\tau'(t)} \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1]$, ибо $\varphi(\tau(t)) = \sqrt{\tau'(t)}$ в силу правила дифференцирования обратной функции и (3.13). Как известно [18], мера $P^W \circ T^{-1}$ эквивалентна мере P^W . Этот факт вытекает из того, что оператор T на пространстве Камерона–Мартин H меры P^W имеет вид $T = U(I + K)$, где U – ортогональный оператор в H , а K – оператор Гильберта–Шмидта в H . Напомним, что H состоит из абсолютно непрерывных функций h , удовлетворяющих условиям $h(0) = 0$ и $h' \in L^2[0, 1]$. При этом $\|h\|_H = \|h'\|_{L^2[0, 1]}$. Как несложно убедиться, условие применимости теоремы 3.3 состоит в ядерности квадратичной формы $(Th, Th)_H - (h, h)_H$ на H . Непосредственные вычисления дают следующее представление:

$$(Th, Th)_H - (h, h)_H = \int_0^1 \psi(t)h(t)h'(t) dt + \int_0^1 \theta(t)h(t)h(t) dt,$$

где

$$\psi(t) = -\frac{\tau''(\beta(t))}{\tau'(\beta(t))^2}, \quad \theta(t) = \frac{1}{4} \frac{\tau''(\beta(t))^2}{\tau'(\beta(t))^4}.$$

Второй интеграл в правой части задает квадратичную форму, порождаемую некоторым ядерным оператором, поскольку эта форма является ограничением непрерывной формы на $C[0, 1]$ (см. лемму 2.5). Заметим, что $\tau'(\beta(t))\beta'(t) = 1$ и $\tau''(\beta(t))\beta'(t)^2 + \tau'(\beta(t))\beta''(t) = 0$, откуда $\tau''(\beta(t)) = 2\varphi'(t)\varphi(t)^3$. Если φ' имеет ограниченную вариацию, то такова же и ψ . Значит, первый интеграл является ограничением непрерывной квадратичной формы на $C[0, 1]$, что означает, что эта форма задается ядерным оператором на H . Следует отметить, однако, что в работе [2] анонсировано выражение для предела в (3.12) при более слабом условии квадратичной интегрируемости φ' .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. а) В работах [17], [19] для оценивания условных экспоненциальных моментов функций разных классов было предложено использовать так называемые неравенства корреляции типа

$$\gamma(A \cap B) \geq \gamma(A)\gamma(B),$$

известные для некоторых пар выпуклых симметричных множеств A и B (например, в качестве A можно взять любое выпуклое симметричное множество, а в качестве B – симметричную полосу вида $|f| \leq c$, где f – линейная функция; см. [20]). Эти неравенства использовались и в [5].

б) В бесконечномерном случае может не существовать нетривиального предела

$$\gamma(\varepsilon U)^{-1} \int_{\varepsilon U} f d\gamma$$

даже для единичного шара U в гильбертовом пространстве с гауссовской мерой γ и функции $f \in L^1(\gamma)$. Например, в [21] построены такие центрированная гауссовская мера γ на сепарабельном гильбертовом пространстве X и множество A положительной γ -меры, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma(A \cap B(x, \varepsilon))}{\gamma(B(x, \varepsilon))} = 0 \quad \gamma\text{-п.в.},$$

где $B(x, \varepsilon)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в x . В работах [21]–[23] можно найти и другие контрпримеры на эту тему.

Список литературы

1. *Сытая Г. Н.* Об асимптотике меры малых сфер для гауссовских процессов, эквивалентных броуновскому // Теория вероятн. и матем. статист. 1977. № 19. С. 128–133.
2. *Нагаев С. В.* Об асимптотике винеровской меры узкой полосы // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. № 3. С. 630.
3. *Новиков А. А.* Малые отклонения гауссовских процессов // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 291–301.
4. *Li W.* Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorm // J. Theoret. Probab. 1992. V. 5. P. 1–32.
5. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. Киев: ТВИМС, 1995.
6. *Linde W.* Comparison results for the small ball behavior of Gaussian random variables // Probability in Banach spaces / ed. J. Hoffmann-Jorgensen, J. Kuelbs, M. B. Marcus. V. 9. Boston: Birkhäuser, 1994. P. 273–297.
7. *Богачев В. И.* Функции Онзагера–Маклупа для гауссовских мер // Докл. АН. 1995. Т. 344. № 4. С. 439–441.
8. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Физматлит, 1997.
9. *Kuelbs J., Li W.* Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures // J. Funct. Anal. 1993. V. 116. № 1. P. 133–157.
10. *Shao Q.-M., Wang D.* Small ball probabilities of Gaussian fields // Probab. Theory Related Fields. 1995. V. 102. P. 511–517.
11. *Shi Z.* Small ball probabilities for a Wiener process under weighted sup-norms, with an application to the supremum of Bessel local times // J. Theoret. Probab. 1996. V. 9. № 4. P. 915–929.
12. *Stolz W.* Some small ball probabilities for Gaussian processes under nonuniform norms // J. Theoret. Probab. 1996. V. 9. № 3. P. 613–630.
13. *Cirolson B. S., Ibragimov I. A., Sudakov V. N.* Norms of Gaussian sample functions // Lect. Notes in Math. 1976. V. 550. P. 20–41.
14. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
15. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1984.
16. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
17. *Shepp L. A., Zeitouni O.* A note on conditional exponential moments and the Onsager-Machlup functional // Ann. Probab. 1992. V. 20. № 1. P. 652–654.
18. *Shepp L. A.* Radon–Nikodym derivatives of Gaussian measures // Ann. Math. Statist. 1966. V. 37. № 2. P. 321–354.
19. *Shepp L. A., Zeitouni O.* Exponential estimates for convex norms and some applications // Barcelona Seminar on Stochastic Analysis. Progr. Probab. V. 32. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 203–215.
20. *Šidák Z.* On multivariate normal probabilities of rectangles: their dependence on correlations // Ann. Math. Statist. 1968. V. 39. № 5. P. 1425–1434.
21. *Preiss D.* Gaussian measures and covering theorems // Comment. Math. Univ. Carolin. 1979. V. 20. № 1. P. 95–99.
22. *Preiss D.* Gaussian measures and the density theorems // Comment. Math. Univ. Carolin. 1981. V. 22. № 1. P. 181–193.
23. *Preiss D.* Differentiation of measures in infinitely dimensional spaces // Proc. Conf.: Topol. and Meas. III, Vitte/Hiddensee, Oct. 19–25, 1980. Part 2, Greifswald. Wissen. Beitrage d. Greifswald Univ., 1982. P. 201–207.