Общероссийский математический портал

А. И. Булгаков, Л. И. Ткач, Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 6, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:22:24

УДК 517.9

А. И. Булгаков, Л. И. Ткач

**Возмущение выпуклозначного оператора
многозначным отображением типа Гаммерштейна
с невыпуклыми образами и краевые задачи для
функционально-дифференциальных включений**

В пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ вектор-функций рассматривается функциональное включение, правая часть которого состоит из суммы выпуклозначного многозначного отображения и произведения линейного интегрального оператора и многозначного отображения с выпуклыми по переключению образами. Для данного включения получены оценки близости решения включения к наперед заданной непрерывной вектор-функции. На основе этих оценок изучается структура множества решений включения. Доказана теорема о плотности множества решений данного включения в множестве решений “овыпукленного” включения, а также для этого включения доказан “бэнг-бэнг” принцип. Затем эта теория применяется для исследования множеств решений краевых задач функционально-дифференциальных включений с невыпуклой правой частью.

Библиография: 37 названий.

В работе рассматривается включение, правая часть которого представляет собой сумму выпуклозначного отображения и многозначного оператора типа Гаммерштейна, не обладающего свойством выпуклости значений. Поэтому (см. [1]) оператор, порожденный правой частью такого включения, не является замкнутым, выпуклым оператором. В связи с этим традиционные методы исследований (теорема Какутани [2, гл. XVI, § 5], принцип сжимающих отображений [3, § 0.2]) здесь неприменимы. Изучение такого включения в работе проводится на основе теории непрерывных ветвей многозначных отображений с привлечением теоремы Майкла [4] и результата работы [5]. Для этого включения доказываются теоремы существования решений, а также изучается структура множества решений. Теория такого включения применяется затем для изучения краевых задач дифференциальных включений с многозначным вектор-функционалом.

Пусть Y – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; $U \subset Y$, $\overline{U}$ – замыкание множества U ; $\text{co } U$ – выпуклая оболочка множества U ; $\overline{\text{co}} U = \overline{\text{co } U}$; $\text{ext } U$ – замыкание множества крайних точек множества U ; $\|U\|_Y \equiv \sup\{\|x\| : x \in U\}$; 2^Y – множество всех непустых, ограниченных подмножеств пространства Y ; $\Omega(Y)$ – множество всех непустых, ограниченных, замкнутых, выпуклых подмножеств пространства Y ; $B_Y[u; \delta]$ – открытый шар пространства Y с центром в точке $u \in Y$ и радиусом δ . Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \subset Y$. Тогда

$$h_Y^+[\Phi_1; \Phi_2] \equiv \sup\{\rho_Y[y; \Phi_2] : y \in \Phi_1\},$$

где $\rho_Y[\cdot; \cdot]$ – расстояние между точкой и множеством;

$$h_Y[\Phi_1; \Phi_2] \equiv \max\{h_Y^+[\Phi_1; \Phi_2]; h_Y^+[\Phi_2; \Phi_1]\}$$

– хаусдорфово расстояние между множествами Φ_1 и Φ_2 ; $\Phi_1 + \Phi_2 = \{x + y : x \in \Phi_1, y \in \Phi_2\}$ – сумма множеств Φ_1 и Φ_2 .

Пусть X – банахово пространство, $U \subset X$. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi: U \rightarrow 2^Y$. Будем говорить, что Φ *полу непрерывно сверху (снизу) в точке* $x \in U$, если для любой последовательности $x_i \in U, i = 1, 2, \dots$, сходящейся к x в X , выполняется равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_Y^+[\Phi(x_i); \Phi(x)] = 0 \quad \left(\lim_{i \rightarrow \infty} h_Y^+[\Phi(x); \Phi(x_i)] = 0 \right).$$

Если отображение Φ полу непрерывно сверху (снизу) в каждой точке множества U , то будем говорить, что Φ *полу непрерывно сверху (снизу) на* U .

Пусть $\mathbb{R}^n$ – пространство n -мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a, b]$ – измеримое по Лебегу множество ($\mu(\mathcal{U}) > 0$, $\mu(\cdot)$ – мера Лебега). Введем следующие обозначения:

$L^n(\mathcal{U})$ – пространство функций $x: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с суммируемыми по Лебегу компонентами и нормой

$$\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)| ds;$$

$D^n[a, b]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{D^n} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_{L^n[a, b]};$$

$C^n[a, b]$ – пространство непрерывных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{C^n[a, b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\};$$

$C_+^1[a, b]$ – конус неотрицательных функций пространства $C^1[a, b]$.

Будем говорить, что множество $\Phi \subset L^n[a, b]$ *выпукло по переключению*, если для любых измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset [a, b]$ таких, что $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = [a, b]$, и любых $x, y \in \Phi$ справедливо включение $\chi(\mathcal{U}_1)x + \chi(\mathcal{U}_2)y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим через $\Pi[L^n[a, b]]$ ($\Omega(\Pi[L^n[a, b]])$) множество всех непустых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению (всех непустых, выпуклых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению) подмножеств из $L^n[a, b]$.

Отметим, что понятие выпуклого и выпуклого по переключению множеств суть два независимых понятия.

Далее измеримость множеств понимаем по Лебегу, измеримость многозначных отображений – в смысле [3, гл. 8, § 8.1]. Непрерывность многозначных отображений везде понимаем по Хаусдорфу.

§1. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами

Рассмотрим в пространстве $C^n[a, b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \quad (1)$$

где многозначный оператор $\Psi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(C^n[a, b])$ компактен, а многозначное отображение $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$ обладает следующим свойством: для каждого ограниченного множества $\mathcal{B} \subset C^n[a, b]$ образ $\Phi(\mathcal{B})$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Линейный непрерывный интегральный оператор $V: L^n[a, b] \rightarrow C^n[a, b]$ определен равенством

$$(Vz)(t) = \int_a^b V(t, s)z(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (2)$$

и переводит каждое слабо компактное в $L^n[a, b]$ множество в компактное в $C^n[a, b]$.

Под *решением включения* (1) будем понимать такой элемент $x \in C^n[a, b]$, для которого справедливо включение (1). Таким образом, каждому решению x включения (1) соответствуют такие $v \in C^n[a, b]$ и $z \in L^n[a, b]$, что $v \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$ и $x = v + Vz$. Пусть $H(H(U))$ – множество всех решений (принадлежащих множеству U) включения (1).

Отметим, что многозначные операторы Ψ и Φ , вообще говоря, могут быть и не вольтерровыми операторами. Кроме того, значения $\Phi(x)$ в включении (1) не предполагаются выпуклыми множествами, поэтому образ $V\Phi(x)$ в (1), вообще говоря, не только не является выпуклым, но и замкнутым множеством пространства $C^n[a, b]$. И, следовательно, оператор, порожденный правой частью включения (1), не замкнут.

1.1. Возмущенное включение с ядром оператора V , представляющим некоторое множество, содержащее нуль. Здесь предполагается, что ядро оператора V , вообще говоря, может состоять не только из нулевого элемента.

Пусть оператор $\mathfrak{M}: C^n[a, b] \rightarrow 2^{C^n[a, b]}$ определен равенством

$$\mathfrak{M}(x) = \Psi(x) + V\Phi(x). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть U – такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, что $\mathfrak{M}(U) \subset U$. И пусть отображения Ψ, Φ непрерывны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых функций $r \in C^n[a, b]$ и $w \in L^n[a, b]$ существует решение $x \in U$ включения (1) и существуют $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, удовлетворяющие равенству $x = v + Vz$, которые обладают следующими свойствами:

$$\|r - v\|_{C^n[a, b]} \leq \rho_{C^n[a, b]}[r; \Psi(x)] + \varepsilon; \quad (4)$$

для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|w - z\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \rho_{L^n(\mathcal{U})}[w; \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}). \quad (5)$$

Если $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$ непрерывно, то согласно [5] для числа $\varepsilon > 0$ и функции $w \in L^n[a, b]$ существует непрерывное отображение $g: U \rightarrow L^n[a, b]$, удовлетворяющее для любого $y \in U$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ включению $g(y) \in \Phi(y)$ и неравенству

$$\|w - g(y)\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \rho_{L^n(\mathcal{U})}[w; \Phi(y)] + \varepsilon \mu(\mathcal{U}). \quad (6)$$

Далее, рассмотрим отображения $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $\Psi_\varepsilon: U \rightarrow \Omega(C^n[a, b])$, определенные равенствами

$$\rho(y) = \rho_{C^n[a, b]}[r; \Psi(y)], \quad \Psi_\varepsilon(y) = \overline{\Psi(y) \cap B_{C^n[a, b]}[r; \rho(y) + \varepsilon]}.$$

В силу непрерывности Ψ отображение ρ непрерывно, а отображение Ψ_ε полунепрерывно снизу (см. [6, гл. 0, § 3]). Поэтому согласно теореме Майкла (см. [4]) существует такое непрерывное отображение $f: U \rightarrow C^n[a, b]$, что для любого $y \in U$ выполняется включение $f(y) \in \Psi_\varepsilon(y)$. Отсюда согласно определению оператора Ψ_ε отображение f обладает следующим свойством: для любого $y \in U$ выполняется неравенство

$$\|r - f(y)\|_{C^n[a, b]} \leq \rho_{C^n[a, b]}[r; \Psi(y)] + \varepsilon. \quad (7)$$

Далее, пусть непрерывный оператор $K: U \rightarrow C^n[a, b]$ определен равенством

$$K(y) = f(y) + Vg(y).$$

Так как согласно условию теоремы справедливы вложения $K(U) \subset \mathfrak{M}(U) \subset U$, то в силу теоремы Шаудера уравнение

$$x = f(x) + Vg(x) \quad (8)$$

имеет решение, принадлежащее множеству U . Решение уравнения (8) является решением включения (1). Далее, положив в неравенстве (6) $g(x) = z$, а в неравенстве (7) $f(x) = v$ и обозначив $y = x$, получим, что решение x удовлетворяет неравенствам (4), (5).

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Пусть отображение $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$. Согласно доказанному для каждого $i = 1, 2, \dots$ существует решение $x_i \in U$ включения (1) и существуют $v_i \in \Psi(x_i)$ и $z_i \in \Phi(x_i)$, удовлетворяющие равенству $x_i = v_i + Vz_i$. Причем для функции v_i выполняется неравенство (4) при $v = v_i$ и $\varepsilon = 1/i$, а для функции z_i для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство (5) при $z = z_i$ и $\varepsilon = 1/i$. Так как последовательности $\{x_i\}$, $\{v_i\}$ компактны в $C^n[a, b]$, а последовательность $\{z_i\}$ слабо компактна в $L^n[a, b]$, то, не уменьшая общности, будем считать, что $x_i \rightarrow x$, $v_i \rightarrow v$ в $C^n[a, b]$, а $z_i \rightarrow z$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. В силу того, что при любом $t \in [a, b]$ $(Vz_i)(t) \rightarrow (Vz)(t)$ при $i \rightarrow \infty$ (см. [2, гл. VIII, § 3, п. 3.4]), имеем $x = v + Vz$. Так как отображение Ψ непрерывно, то $v \in \Psi(x)$. Далее, поскольку Φ непрерывно выпуклозначно и замкнуто в $L^n[a, b]$, то $z \in \Phi(x)$ (см. [3, гл. III, § 3.1, п. 3.1.2]). Следовательно, x — решение включения (1).

Покажем, что для решения x выполняются равенства (4), (5) при $\varepsilon = 0$. Прежде всего, равенство (4) получается непосредственно предельным переходом. Далее, покажем, что для решения выполняется и неравенство (5) при $\varepsilon = 0$. Действительно, так как $z_i \rightarrow z$ слабо в $L^n[a, b]$, то согласно [3, гл. 3, §3.1, п. 3.1.2] для каждого $m = 1, 2, \dots$ найдутся такие числа $i(m)$, $\lambda_j^m \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, i(m)$, что $\sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m = 1$ и последовательность $\{\beta_m = \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m z_{j+m}\}$ сходится к z в пространстве $L^n[a, b]$. Отсюда получаем

$$\|w - z\|_{L^n[a, b]} \leq \|z - \beta_m\|_{L^n[a, b]} + \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m \|z_{j+m} - w\|_{L^n[a, b]}.$$

В силу выбора последовательности $\{z_i\}$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \|w - z\|_{L^n[a, b]} &\leq \|z - \beta_m\|_{L^n[a, b]} \\ &+ \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m \rho_{L^n[a, b]}[w; \Phi(x_{j+m})] + (b - a) \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m \frac{1}{j + m}. \end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем равенство

$$\|w - z\|_{L^n[a, b]} = \rho_{L^n[a, b]}[w; \Phi(x)].$$

Из включения $\Phi(x) \in \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$ вытекает, что последнее равенство выполняется и для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$. Теорема доказана.

Будем говорить, что для непрерывного оператора $\mathfrak{A}^*: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$ *сходятся последовательные приближения*, если для любой функции $y_0 \in C_+^1[a, b]$, удовлетворяющей неравенству $y_0 \leq \mathfrak{A}^* y_0$, последовательные приближения $y_{i+1} = \mathfrak{A}^* y_i$, $i = 0, 1, \dots$, сходятся в пространстве $C^1[a, b]$ к функции y , не зависящей от функции y_0 .

Будем говорить, что отображение Ψ и произведение $V\Phi$ обладают *свойством* $(V\Gamma_1; P_1)^\nu$ *на множестве* $U \subset C^n[a, b]$, если найдутся изотонные непрерывные операторы $\Gamma_1: C_+^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ и $P_1: C_+^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие следующим условиям: для любых $x, y \in U$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ для отображения Γ_1 выполняется неравенство

$$h_{L^1(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \leq \|\Gamma_1 Z(x - y)\|_{L^1(\mathcal{U})}; \quad (9)$$

для любых $x, y \in U$ для отображения P_1 выполняется оценка

$$h_{C^n[a, b]}[\Psi(x); \Psi(y)] \leq P_1(Z(x - y)); \quad (10)$$

для непрерывного оператора $\mathfrak{A}_1: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$, определенного равенством

$$(\mathfrak{A}_1 z)(t) = \int_a^b |V(t, s)| (\Gamma_1 z)(s) ds + P_1(z) + \nu(t), \quad (11)$$

сходятся последовательные приближения. Здесь $|V(t, s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $(n \times n)$ -матрицы $V(t, s)$ в представлении (2), $\nu \in C_+^1[a, b]$, а отображение $Z: C^n[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$ определено соотношением

$$(Zx)(t) = |x(t)|, \quad t \in [a, b]. \quad (12)$$

Если $U = C^n[a, b]$, то в этом случае будем говорить, что отображение Ψ и произведение $V\Phi$ обладают *свойством* $(V\Gamma_1; P_1)^\nu$.

Рассмотрим в пространстве $C^1[a, b]$ уравнение

$$\xi_\nu(t) = \int_a^b |V(t, s)|(\Gamma_1 \xi_\nu)(s) ds + P_1(\xi_\nu) + \nu(t). \quad (13)$$

Пусть $q \in C^n[a, b]$ и $w_0 \in L^n[a, b]$. Представим функцию q в виде равенства

$$q = r_0 + Vw_0 + e, \quad (14)$$

где $r_0 \in \Psi(q)$, $e = q - r_0 - Vw_0$. Пусть функция $\varkappa \in L^1[a, b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q)] \leq \int_{\mathcal{U}} \varkappa(s) ds, \quad (15)$$

а функция $\nu_\varepsilon \in C_+^1[a, b]$ для любого $t \in [a, b]$ определена соотношением

$$\nu_\varepsilon(t) = \int_a^b |V(t, s)|(\varepsilon + \varkappa(s)) ds + \varepsilon + |e(t)|, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (16)$$

где $|V(t, s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $(n \times n)$ -матрицы $V(t, s)$ в представлении (2), e – функция в правой части равенства (14).

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_1; P_1)^{\nu_\varepsilon}$ на множестве $U \subset C^n[a, b]$, где функция ν_ε определена равенством (16), $\varepsilon \geq 0$, и пусть $q \in U$. Тогда для каждого решения $x \in U$ ($x = v + Vz$, $v \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$) включения (1), удовлетворяющего неравенству (4) и при любом измеримом множестве $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяющего неравенству (5), в которых $r = r_0$ и $w = w_0$, выполняются следующие оценки: при любом $t \in [a, b]$ $|x(t) - q(t)| \leq \xi_\varepsilon(t)$;

$$\|v - r_0\|_{C^n[a, b]} \leq P_1(\xi_\varepsilon) + \varepsilon; \quad (17)$$

при почти всех $t \in [a, b]$

$$|z(t) - w_0(t)| \leq \varepsilon + \varkappa(t) + (\Gamma_1 \xi_\varepsilon)(t), \quad (18)$$

где ξ_ε – решение уравнения (13) при $\nu = \nu_\varepsilon$, для функций q , r_0 , w_0 имеет место представление (14), а Γ_1 , P_1 , $\varkappa$ удовлетворяют неравенствам (9), (10), (15), соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x ($x = v + Vz$, $v \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$) – решение включения (1), удовлетворяющее неравенству (4) и при любом измеримом множестве $U \subset [a, b]$ удовлетворяющее неравенству (5), в которых $r = r_0$, $w = w_0$ и $\varepsilon \geq 0$, где r_0 , w_0 – функции в представлении (14). Тогда из неравенства (5) для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ вытекает соотношение

$$\|z - w_0\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \rho_{L^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q)] + h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(q)] + \varepsilon \mu(\mathcal{U}). \quad (19)$$

Согласно (9) имеем неравенство

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(q)] \leq \int_{\mathcal{U}} \Gamma_1(Z(x - q))(s) ds. \quad (20)$$

Следовательно, из неравенств (15), (19), (20) при любом измеримом множестве $\mathcal{U} \subset [a, b]$ получаем оценку

$$\|z - w_0\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \int_{\mathcal{U}} (\varepsilon + \varkappa(s)) ds + \int_{\mathcal{U}} (\Gamma_1 Z(x - q))(s) ds.$$

Отсюда в силу произвольности множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ при почти всех $t \in [a, b]$ получаем соотношение

$$|z(t) - w_0(t)| \leq \varepsilon + \varkappa(t) + \Gamma_1(Z(x - q))(t). \quad (21)$$

Из неравенств (4), (10) следует оценка

$$\|v - r_0\|_{C^n[a, b]} \leq \rho_{\mathbb{R}^n}[r_0; \Psi(x)] + \varepsilon \leq h_{\mathbb{R}^n}[\Psi(q); \Psi(x)] + \varepsilon \leq P_1(Z(x - q)) + \varepsilon. \quad (22)$$

Далее, рассмотрим равенство

$$x(t) - q(t) = v(t) - r_0(t) + \int_a^b V(t, s)(z(s) - w_0(s)) ds - e(t). \quad (23)$$

Из представления (23) при любом $t \in [a, b]$ вытекает неравенство

$$|x(t) - q(t)| \leq |v(t) - r_0(t)| + \int_a^b |V(t, s)| |z(s) - w_0(s)| ds + |e(t)|.$$

Отсюда согласно оценкам (21), (22) при любом $t \in [a, b]$ имеем соотношение

$$Z(x - q)(t) \leq \int_a^b |V(t, s)| \Gamma_1(Z(x - q))(s) ds + P_1(Z(x - q)) + \nu_\varepsilon(t), \quad (24)$$

где ν_ε , Z определены равенствами (16), (12), соответственно. Так как последовательные приближения оператора $\mathfrak{A}_1$, определенного равенством (11) при $\nu = \nu_\varepsilon$, сходятся, то при любом $t \in [a, b]$ выполняется оценка $|x(t) - q(t)| \leq \xi_\varepsilon(t)$. В силу последнего неравенства и изотонности отображений Γ_1 и P_1 из неравенств (21), (22) получаем неравенства (17), (18). Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть U – такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, что $\mathfrak{M}(U) \subset U$, где оператор $\mathfrak{M}$ определен равенством (3). Пусть оператор Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_1; P_1)^{\nu_\varepsilon}$ на множестве U , где функция ν_ε определена равенством (16), $\varepsilon > 0$, и пусть функция q , принадлежащая U , может быть представлена равенством (14). Тогда существует решение x включения (1) и существуют $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, удовлетворяющие равенству $x = v + Vz$, для которых при любом $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x(t) - q(t)| \leq \xi_\varepsilon(t)$, справедлива оценка (17) и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место соотношение (18), где ξ_ε – решение уравнения (13) при $\nu = \nu_\varepsilon$.

Если $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что следствие 1 дает несколько больше, чем просто условия существования решения включения (1). Оно дает способ нахождения приближенного решения путем подбора функции $q \in C^n[a, b]$. При этом функция ξ_ε , зависящая от функций $q, r_0 \in C^n[a, b]$ и $w_0 \in L^n[a, b]$, дает оценку погрешности приближенного решения (функции q) включения (1).

Приведем достаточные условия существования выпуклого, ограниченного, замкнутого множества $U \subset C^n[a, b]$, для которого справедливо вложение $\mathfrak{M}(U) \subset U$.

Пусть отображение $\tilde{\Psi}: [a, b] \times C^n[a, b] \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ определено равенством

$$\tilde{\Psi}(t, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists z \in \Psi(x), y = z(t)\}. \quad (25)$$

Будем говорить, что отображение Ψ и произведение $V\Phi$ обладают *свойством* $(V\Gamma_2; P_2)$, если найдутся изотонные непрерывные операторы $\Gamma_2: C_+^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ и $P_2: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$, удовлетворяющие следующим условиям: для любого $x \in C^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \|\Gamma_2 Z(x)\|_{L^1(\mathcal{U})}; \quad (26)$$

для любого $t \in [a, b]$ и любого $x \in C^n[a, b]$ выполняется оценка

$$\|\tilde{\Psi}(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq P_2(Z(x))(t); \quad (27)$$

для непрерывного оператора $\mathfrak{A}_2: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$, определенного равенством

$$(\mathfrak{A}_2 z)(t) = \int_a^b |V(t, s)| (\Gamma_2 z)(s) ds + P_2(z)(t), \quad (28)$$

сходятся последовательные приближения.

Здесь $|V(t, s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $(n \times n)$ -матрицы $V(t, s)$ в представлении (2), отображения Z и $\tilde{\Psi}$ определены равенствами (12) и (25), соответственно.

Пусть $\omega \in C^1[a, b]$ – неподвижная точка оператора $\mathfrak{A}_2$, определенного равенством (28), и пусть непрерывное отображение $W: C^n[a, b] \rightarrow C^n[a, b]$ задано соотношением

$$(Wx)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } |x(t)| \leq \omega(t), \\ \frac{x(t)}{|x(t)|} \omega(t), & \text{если } |x(t)| > \omega(t). \end{cases} \quad (29)$$

ЛЕММА 1. Пусть оператор Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_2; P_2)$. Тогда множество $U = \overline{\text{co}}\mathfrak{M}(W(C^n[a, b]))$ – выпуклый компакт пространства $C^n[a, b]$, для которого справедливо вложение $\mathfrak{M}(U) \subset U$, операторы W и $\mathfrak{M}$ определены равенствами (29) и (3), соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, согласно определению оператора W множество $W(C^n[a, b])$ ограничено, поэтому множество U – выпуклый компакт в $C^n[a, b]$. Далее, пусть $y \in \text{co}\mathfrak{M}(W(C^n[a, b]))$. Тогда найдутся такие числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, и элементы $z_i \in \mathfrak{M}(W(C^n[a, b]))$, $i = 1, 2, \dots, m$, для которых справедливо равенство

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i. \quad (30)$$

Согласно определению оператора $\mathfrak{M}$ для каждого z_i , $i = 1, 2, \dots, m$, найдется $p_i \in C^n[a, b]$, что $z_i \in \Psi(W(p_i)) + V\Phi(W(p_i))$. Поэтому для каждого z_i , $i = 1, 2, \dots, m$, найдутся $z_i^1 \in \Psi(W(p_i))$ и $z_i^2 \in \Phi(W(p_i))$, что

$$z_i = z_i^1 + Vz_i^2. \quad (31)$$

Следовательно, согласно свойствам $(V\Gamma_2; P_2)$ для каждого $t \in [a, b]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |z_i^1(t)| &\leq P_2(ZW(p_i))(t) \leq P_2(\omega)(t), \\ |(Vz_i^2)(t)| &\leq \int_a^b |V(t, s)| \Gamma_2(ZW(p_i))(s) ds \leq \int_a^b |V(t, s)| (\Gamma_2\omega)(s) ds. \end{aligned}$$

Из равенства (31) и полученных оценок для любого $t \in [a, b]$ вытекает соотношение

$$|z_i(t)| \leq \int_a^b |V(t, s)| (\Gamma_2\omega)(s) ds + P_2(\omega)(t) = (\mathfrak{A}_2\omega)(t) = \omega(t), \quad (32)$$

так как ω – неподвижная точка оператора $\mathfrak{A}_2$, определенного равенством (28). Из равенства (30) и оценки (32) для любого $t \in [a, b]$ получаем соотношение $|y(t)| \leq \omega(t)$. Поэтому для любого $y \in \overline{\text{co}}\mathfrak{M}(W(C^n[a, b])) = U$ и для любого $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|y(t)| \leq \omega(t)$. Отсюда и из определения оператора W (см. (29)) следует вложение $U \subset W(C^n[a, b])$. Поэтому $\mathfrak{M}(U) \subset U$. Лемма доказана.

Таким образом, из леммы 1 и следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть оператор Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойствами $(V\Gamma_1; P_1)^{\nu_\varepsilon}$ и $(V\Gamma_2; P_2)$, где функция ν_ε определена равенством (16), $\varepsilon > 0$, и пусть функция $q \in C^n[a, b]$ может быть представлена равенством (14). Тогда существует решение x включения (1) и существуют $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, удовлетворяющие равенству $x = v + Vz$, для которых при любом

$t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x(t) - q(t)| \leq \xi_\varepsilon(t)$, справедлива оценка (17) и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место соотношение (18), где ξ_ε – решение уравнения (13) при $\nu = \nu_\varepsilon$.

Если $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Будем говорить, что функция $x \in C^n[a, b]$ является квазирешением включения (1), если существует $v \in \Psi(x)$ и последовательность $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что $y_i = v + Vw_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть $\mathcal{H}$ – множество всех квазирешений включения (1).

Определим отображение $\text{co}\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(L^n[a, b])$ равенством

$$(\text{co}\Phi)(x) = \overline{\text{co}}(\Phi(x)).$$

Рассмотрим включение

$$x \in \Psi(x) + V \text{co}\Phi(x). \quad (33)$$

Пусть H_{co} ($H_{\text{co}}(U)$) – множество всех решений (принадлежащих множеству U) включения (33).

ТЕОРЕМА 3. Справедливо следующее: $H_{\text{co}} = \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $H_{\text{co}} \subset \mathcal{H}$. Пусть $x \in H_{\text{co}}$. Тогда найдутся функции $v \in \Psi(x)$ и $w \in \text{co}\Phi(x)$ такие, что выполняется равенство $x = v + Vw$. Согласно [1] для функции w найдется такая последовательность $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots$, что $w_i \rightarrow w$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Это означает, что при любом $t \in [a, b]$

$$y_i(t) = v(t) + (Vw_i)(t) \rightarrow x(t) = v(t) + (Vw)(t)$$

(см. [2, гл. VIII, §3, п. 3.4]). Так как последовательность $\{Vw_i\}$ компактна в $C^n[a, b]$, то можно считать, что $y_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, $H_{\text{co}} \subset \mathcal{H}$.

Докажем теперь вложение $\mathcal{H} \subset H_{\text{co}}$. Пусть $x \in \mathcal{H}$. Тогда найдется $v \in \Psi(x)$ и последовательность $w_i \in \Phi(x)$ такие, что $y_i = v + Vw_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Поскольку последовательность $\{w_i\}$ слабо компактна в $L^n[a, b]$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $w_i \rightarrow w$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$ для некоторого $w \in L^n[a, b]$. Так как $w_i \in \text{co}\Phi(x)$, то $w \in \text{co}\Phi(x)$ (см. [3, гл. III, §3.1, п. 3.1.2]) и $x = v + Vw$, т.е. $x \in H_{\text{co}}$. Следовательно, $\mathcal{H} \subset H_{\text{co}}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что теорема 3 справедлива без предположения какой-либо непрерывности операторов Ψ и Φ .

Будем говорить, что отображение $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$ *ослабленно замкнуто* в $x \in C^n[a, b]$, если для любой последовательности $x_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$ и для любой последовательности $y_i \in \Phi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющей условию $y_i \rightarrow y$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$, выполняется включение $y \in \Phi(x)$. Если отображение Φ *ослабленно замкнуто* в каждой точке множества U , то будем говорить, что отображение Φ *ослабленно замкнуто на U* .

ЛЕММА 2. Если отображение $\text{co}\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(L^n[a, b])$ полунепрерывно сверху на множестве $U \subset C^n[a, b]$, то отображение $\text{co}\Phi$ ослабленно замкнуто на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $x_i \in U$, $x_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$, $i \rightarrow \infty$, и последовательность $y_i \in \text{co}\Phi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, при $i \rightarrow \infty$ слабо сходится в пространстве $L^n[a, b]$ к y . Пусть $\tilde{y}_i \in \text{co}\Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяет равенству

$$\|y_i - \tilde{y}_i\|_{L^n[a, b]} = \rho_{L^n[a, b]}[y_i; \text{co}\Phi(x)].$$

Согласно полунепрерывности сверху отображения $\text{co}\Phi$ $y_i - \tilde{y}_i \rightarrow 0$ в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как множество $\overline{\text{co}}(\Phi(x))$ замкнуто в слабой топологии пространства $L^n[a, b]$ (см. [3, гл. III, §3.1, п. 3.1.2]), то $y \in \text{co}\Phi(x)$.

Из леммы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 4. Пусть U – такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, что $\mathfrak{M}(U) \subset U$, где оператор $\mathfrak{M}$ определен равенством (3). И пусть отображения Ψ , $\text{co}\Phi$ полунепрерывны сверху или снизу на U . Тогда $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многозначное отображение

$$\mathfrak{M}_{\text{co}}: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(C^n[a, b])$$

определено равенством

$$\mathfrak{M}_{\text{co}}(x) = \Psi(x) + V \text{co}\Phi(x). \quad (34)$$

Покажем, что $\mathfrak{M}_{\text{co}}(U) \subset U$. Действительно, пусть $x \in U$ и $z \in \Psi(x) + V \text{co}\Phi(x)$. Тогда найдутся такие $z_1 \in \Psi(x)$ и $z_2 \in \text{co}\Phi(x)$, что выполняется равенство

$$z = z_1 + V z_2. \quad (35)$$

Так как $z_2 \in \text{co}\Phi(x)$, то найдутся числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяющие равенству $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, и элементы $z_2^i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, для которых справедливо соотношение

$$z_2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_2^i. \quad (36)$$

Так как $z_1 + z_2^i \in \mathfrak{M}(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, то $z_1 + z_2^i \in U$, $i = 1, 2, \dots, m$. Поэтому из выпуклости множества U и равенств (35), (36) следует, что $z \in U$. Отсюда согласно непрерывности оператора V и замкнутости множества U для любого $x \in U$ получаем вложение $\mathfrak{M}_{\text{co}}(x) \subset U$, т.е. $\mathfrak{M}_{\text{co}}(U) \subset U$.

Далее, пусть отображения Ψ и $\text{co}\Phi$ полунепрерывны сверху на U . Тогда согласно лемме 2 оператор $\mathfrak{M}_{\text{co}}$, определенный равенством (34), замкнут на U . Поэтому согласно доказанному вложению $\mathfrak{M}_{\text{co}}(U) \subset U$ и теореме Какутани (см. [2, гл. XVI, §5]) включение (33) имеет решение. Поэтому в силу теоремы 3 $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

Пусть теперь отображение Ψ полунепрерывно снизу на U , а отображение $\text{co}\Phi$ полунепрерывно сверху. Тогда согласно теореме Майкла (см. [4]) существует непрерывное отображение $f: U \rightarrow C^n[a, b]$, для любого $x \in U$ удовлетворяющее

условию $f(x) \in \Psi(x)$. Рассмотрим отображение $\widetilde{\mathfrak{M}}: U \rightarrow \Omega(C^n[a, b])$, определенное равенством

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(x) = f(x) + V \operatorname{co} \Phi(x).$$

Согласно лемме 2 оператор $\widetilde{\mathfrak{M}}$ замкнут, поэтому опять согласно теореме Какутани и теореме 3 множество $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

Аналогично рассматривается случай, когда отображение Ψ полунепрерывно сверху, а отображение $\operatorname{co} \Phi$ полунепрерывно снизу или полунепрерывно сверху. Теорема доказана.

Из теоремы 4 и леммы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть оператор Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_2; P_2)$, и отображения Ψ , $\operatorname{co} \Phi$ полунепрерывны снизу или сверху на $C^n[a, b]$. Тогда $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

Пусть отображение $F: [a, b] \times C^n[a, b] \rightarrow \operatorname{compr}[\mathbb{R}^n]$ обладает следующим свойством: при каждом фиксированном $x \in C^n[a, b]$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо и удовлетворяет равенству

$$\Phi(x) = \{y \in L^n[a, b] : y(t) \in F(t, x) \text{ при п.в. } t \in [a, b]\}.$$

Такое отображение существует (см. [1]). Далее, отображение $\operatorname{ext} \Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$ определено равенством

$$(\operatorname{ext} \Phi)(x) = \{y \in L^n[a, b] : y(t) \in \overline{\operatorname{ext}}(\overline{\operatorname{co}} F(t, x)) \text{ при п.в. } t \in [a, b]\}. \quad (37)$$

Отметим, что согласно [1] при каждом $x \in C^n[a, b]$ множество $(\operatorname{ext} \Phi)(x)$, определенное равенством (37), – минимальное по включению, выпуклое по переключению, замкнутое в пространстве $L^n[a, b]$ множество, содержащееся в множестве $\Phi(x)$ и удовлетворяющее условию

$$\overline{\operatorname{co}}((\operatorname{ext} \Phi)(x)) = \overline{\operatorname{co}}(\Phi(x)). \quad (38)$$

Рассмотрим в пространстве $C^n[a, b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V(\operatorname{ext} \Phi)(x). \quad (39)$$

Пусть $\mathcal{H}_{\operatorname{ext}}$ – множество всех квазирешений включения (39) и пусть $H_{\operatorname{ext}}(H_{\operatorname{ext}}(U))$ – множество всех решений (принадлежащих множеству U) включения (39).

Из равенства (38), теорем 3, 4 вытекают

СЛЕДСТВИЕ 4. Справедливо следующее: $H_{\operatorname{co}} = \mathcal{H}_{\operatorname{ext}}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть U – такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, что $\mathfrak{M}(U) \subset U$, где оператор $\mathfrak{M}$ определен равенством (3). И пусть отображения Ψ , $\operatorname{co} \Phi$ полунепрерывны сверху или снизу на U . Тогда $\mathcal{H}_{\operatorname{ext}} \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть оператор Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством $(V\Gamma_2; P_2)$, и пусть отображения Ψ , $\text{co}\Phi$ полунепрерывны снизу или сверху на U . Тогда $\mathcal{H}_{\text{ext}} \neq \emptyset$.

Будем говорить, что отображение Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством A на множестве $U \subset C^n[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\nu \in C^1_+[a, b]$, удовлетворяющего неравенству $\|\nu\|_{C^1[a, b]} \leq \delta$, выполняется свойство $(V\Gamma_1, P_1)^\nu$ на множестве U , в котором для отображений Γ_1 и P_1 справедливы равенства $\Gamma_1(0) = 0$, $P_1(0) = 0$, а решение уравнения (13) удовлетворяет неравенству $\|\xi_\nu\|_{C^1[a, b]} < \varepsilon$. Если $U = C^n[a, b]$, то в этом случае будем говорить, что отображение Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством A .

ТЕОРЕМА 5. Пусть U – такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, что $\mathfrak{M}(U) \subset U$, где отображение $\mathfrak{M}$ определено равенством (3). Далее, пусть оператор Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством A на множестве U . Тогда $\overline{H(U)} = H_{\text{co}}(U)$, где $\overline{H(U)}$ – замыкание множества $H(U)$ в пространстве $C^n[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Phi(x) \subset \text{co}\Phi(x)$, то $H(U) \subset H_{\text{co}}(U)$. Поскольку $H_{\text{co}}(U)$ – замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, то остается показать, что $H_{\text{co}} \subset \overline{H(U)}$.

Пусть $x \in H_{\text{co}}(U)$. Согласно теореме 3 x – квазирешение включения (1). Поэтому для x найдется $v \in \Psi(x)$ и последовательность $w_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что последовательность $y_i = v + Vw_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$.

Пусть для каждого $i = 1, 2, \dots$ функция $\overline{v}_i \in \Psi(y_i)$ определена равенством

$$\|v - \overline{v}_i\|_{C^n[a, b]} = \rho_{C^n[a, b]}[v; \Psi(y_i)].$$

Очевидно, что $\overline{v}_i \rightarrow v$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ запишем y_i в виде

$$y_i = \overline{v}_i + Vw_i + e_i, \quad (40)$$

где $e_i = v - \overline{v}_i$. Так как отображение Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойством A на множестве U и так как $y_i \in U$, $i = 1, 2, \dots$ ($\mathfrak{M}(U) \subset U$), то для любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a, b]$ выполняется оценка

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[w_i; \Phi(y_i)] \leq h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y_i)] \leq \int_{\mathcal{U}} (\Gamma_1(Z(x - y_i)))(s) ds, \quad (41)$$

где Z определено равенством (12). Из неравенства (41) и следствия 1 вытекает, что для каждой функции y_i , $i = 1, 2, \dots$, которая может быть представлена в виде (40), найдется решение включения (1) $x_i \in U$, для которого при любом $t \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|x_i(t) - y_i(t)| \leq \xi_i(t), \quad (42)$$

где ξ_i – решение уравнения (13) с функцией $\nu = \nu_i$, при любом $t \in [a, b]$ определенной равенством

$$\nu_i(t) = \int_a^b |V(t, s)| \left(\frac{1}{i} + \Gamma_1(Z(x - y_i))(s) \right) ds + \frac{1}{i} + |e_i(t)|,$$

где $e_i = v - \overline{v}_i$. Так как отображение Γ_1 непрерывно и удовлетворяет равенству $\Gamma_1(0) = 0$, то $\nu_i \rightarrow 0$ в $C^1[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда и из определения свойства А вытекает, что $\xi_i \rightarrow 0$ в $C^1[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, из неравенства (42) получаем, что $x_i - y_i \rightarrow 0$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому $x_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, $H_{\text{co}}(U) \subset \overline{H(U)}$. Теорема доказана.

Из леммы 1 и теоремы 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть оператор Ψ и произведение $V\Phi$ обладают свойствами А и $(V\Gamma_2; P_2)$. Тогда $\overline{H} = H_{\text{co}}$, где $\overline{H}$ – замыкание множества H в пространстве $C^n[a, b]$.

1.2. Возмущенное включение с разложимым множеством решений и ядром оператора V , состоящим только из нулевого элемента. Здесь предполагается, что ядро оператора V состоит только из нулевого элемента, а также предполагается, что множество решений включения (33) H_{co} или $H_{\text{co}}(U)$ разложимы (определение см. ниже). В этом случае удастся установить более тонкое утверждение, чем теорема 5.

Будем говорить, что множество $H_{\text{co}}(H_{\text{co}}(U))$ разложимо по многозначным отображениям Ψ , соФ или просто разложимо, если каждое решение $x \in H_{\text{co}}(H_{\text{co}}(U))$ однозначно представимо в виде

$$x = v + Vz, \quad (43)$$

где $v \in \Psi(x)$, $z \in (\text{соФ})(x)$.

Далее, определим отображение $\sigma: H_{\text{co}} \rightarrow C^n[a, b]$ равенством $\sigma(x) = v$, где функция $v \in C^n[a, b]$ определена представлением (43). Обозначим через $V^{-1}(y)$ прообраз элемента $y \in C^n[a, b]$ оператора V . Зафиксируем некоторое отображение $g: H_{\text{co}}(U) \rightarrow L^n[a, b]$ и рассмотрим функционал $\eta: H_{\text{co}}(U) \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенный соотношением

$$\eta(x) = \eta(x, g(x)) = \|V^{-1}(x - \sigma(x)) - g(x)\|_{L^n[a, b]}. \quad (44)$$

Отметим, что если $x \in H_{\text{co}}(U)$, то прообраз $V^{-1}(x - \sigma(x)) \neq \emptyset$ и состоит из единственного элемента в силу условия $V^{-1}(0) = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $U \subset C^n[a, b]$ – ограниченное, замкнутое множество, и пусть многозначные отображения $\Psi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(C^n[a, b])$, соФ: $C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$ полунепрерывны сверху на U , а оператор $g: H_{\text{co}}(U) \rightarrow L^n[a, b]$ непрерывен. Тогда функционал η полунепрерывен снизу на $H_{\text{co}}(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что множество $\{x \in H_{\text{co}}(U) : \eta(x) \leq \tau\}$ замкнуто для любого $\tau \geq 0$. Прежде всего, в силу леммы 2 и замкнутости отображения Ψ множество $H_{\text{co}}(U)$ замкнуто. Далее, пусть последовательность $\{x_i\} \subset H_{\text{co}}(U)$ такова, что $x_i \rightarrow x \in H_{\text{co}}(U)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$ и $\eta(x_i) \leq \tau$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Обозначим $z_i = V^{-1}(x_i - \sigma(x_i)) \in \text{соФ}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Не уменьшая общности, можно считать, что последовательность $\{z_i\}$ сходится слабо в $L^n[a, b]$ к некоторому элементу $z_0 \in L^n[a, b]$. Покажем, что $z_0 = V^{-1}(x - \sigma(x))$. Пусть $\sigma(x_i) \rightarrow v$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как для любого $i = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$x_i = \sigma(x_i) + Vz_i$, то, переходя в этом равенстве к пределу и учитывая, что при любом $t \in [a, b]$ $(Vz_i)(t) \rightarrow (Vz_0)(t)$ при $i \rightarrow \infty$ (см. [2, гл. VIII, § 3, п. 3.4]), получаем соотношение $x = v + Vz_0$, где $v \in \Psi(x)$, $z_0 \in \text{co}\Phi(x)$ (см. лемму 2). Отсюда в силу определения отображения σ справедливо равенство $x = \sigma(x) + Vz_0$, т.е. $z_0 = V^{-1}(x - \sigma(x))$.

Для любого $i = 1, 2, \dots$ введем функцию $\alpha_i \in L^1[a, b]$, определенную равенством $\alpha_i(t) = |z_i(t) - g(x_i)(t)|$. Так как последовательность $\{z_i\}$ сходится слабо в $L^n[a, b]$ к z_0 при $i \rightarrow \infty$, а отображение g непрерывно, то последовательность $\{\alpha_i\}$ слабо компактна. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что последовательность α_i сходится слабо к некоторому элементу $\alpha \in L^1[a, b]$. Тогда согласно [3, гл. III, § 3.1, п. 3.1.2] для каждого $m = 1, 2, \dots$ найдутся такие числа $i(m)$, $\lambda_j^m \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, i(m)$, что $\sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m = 1$ и последовательность $\{\beta_m = \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m \alpha_{j+m}\}$ сходится к α в пространстве $L^n[a, b]$. Ниже, не уменьшая общности, будем считать, что $\beta_m \rightarrow \alpha$, $g(x_m) \rightarrow g(x)$ почти всюду на $[a, b]$ при $m \rightarrow \infty$. Для любого $m = 1, 2, \dots$ функции $y_m, p_m \in L^n[a, b]$ определим равенствами

$$y_m(t) = \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m z_{j+m}(t), \quad p_m(t) = \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m g(x_{j+m})(t). \quad (45)$$

Из определений функций y_m, p_m при почти всех $t \in [a, b]$ получаем оценку

$$|y_m(t) - p_m(t)| \leq \sum_{j=1}^{i(m)} \lambda_j^m |z_{j+m}(t) - g(x_{j+m})(t)| = \beta_m(t). \quad (46)$$

Таким образом, из неравенства (46) при почти всех $t \in [a, b]$ следует включение

$$y_m(t) \in \overline{B_{\mathbb{R}^n}[p_m(t), \beta_m(t)]}. \quad (47)$$

Из второго равенства (45) вытекает, что $p_m \rightarrow g(x)$ почти всюду на $[a, b]$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому по построению при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_{\mathbb{R}^n} [\overline{B_{\mathbb{R}^n}[p_m(t), \beta_m(t)]}; \overline{B_{\mathbb{R}^n}[g(x)(t), \alpha(t)]}] = 0. \quad (48)$$

Пусть для каждого $m = 1, 2, \dots$ функции $\tilde{y}_m \in L^n[a, b]$ при почти всех $t \in [a, b]$ удовлетворяют включению $\tilde{y}_m(t) \in \overline{B_{\mathbb{R}^n}[g(x)(t), \alpha(t)]}$ и соотношению

$$|\tilde{y}_m(t) - y_m(t)| = \rho_{\mathbb{R}^n} [y_m(t); \overline{B_{\mathbb{R}^n}[g(x)(t), \alpha(t)]}].$$

Из определения функций $\tilde{y}_m$ и равенства (48) следует, что при почти всех $t \in [a, b]$ $|\tilde{y}_m(t) - y_m(t)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Так как из первого равенства (45) вытекает, что $y_m \rightarrow z_0$ слабо в $L^n[a, b]$ при $m \rightarrow \infty$, то и $\tilde{y}_m \rightarrow z_0$ слабо в $L^n[a, b]$ при $m \rightarrow \infty$. А так как множество $\overline{B_{\mathbb{R}^n}[g(x)(t), \alpha(t)]}$ выпукло, то при почти всех $t \in [a, b]$ справедливо включение $z_0(t) \in \overline{B_{\mathbb{R}^n}[g(x)(t), \alpha(t)]}$, т.е. для z_0 при почти всех $t \in [a, b]$

выполняется оценка $|z_0(t) - g(x)(t)| \leq \alpha(t)$. Отсюда согласно определению функций α_i , $i = 1, 2, \dots$, получаем соотношение

$$\int_a^b |z_0(t) - g(x)(t)| dt \leq \int_a^b \alpha(t) dt = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b \alpha_i(t) dt \leq \tau.$$

Следовательно, $\eta(x) \leq \tau$, а это означает, что множество $\{x \in H_{\text{co}}(U) : \eta(x) \leq \tau\}$ замкнуто и поэтому функционал η полунепрерывен снизу. Лемма доказана.

Рассмотрим функционал $\Theta: H_{\text{co}}(U) \rightarrow \mathbb{R}^1$, заданный равенством

$$\Theta(x) = \Theta(x, g(x)) = \rho_{L^n[a, b]}[g(x); (\text{ext } \Phi)(x)]. \quad (49)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть U – такое выпуклое, ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, что $\mathfrak{M}(U) \subset U$, где оператор $\mathfrak{M}$ определен равенством (3). И пусть отображение Ψ и произведение $V \text{ со } \Phi$ обладают свойством А на множестве U . Тогда $H_{\text{ext}}(U) \neq \emptyset$ и $\overline{H_{\text{ext}}(U)} = H_{\text{co}}(U)$, где $\overline{H_{\text{ext}}(U)}$ – замыкание множества $H_{\text{ext}}(U)$ в пространстве $C^n[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\overline{H_{\text{ext}}(U)} = H_{\text{co}}$. Отметим, что из последнего равенства вытекает, что $H_{\text{ext}} \neq \emptyset$, так как множество $H_{\text{co}} \neq \emptyset$ (см. теорему 1). Отметим также, что из определения отображения $\text{ext } \Phi$ (см. (37)) следует вложение $(\text{ext } \Phi)(x) \subset \Phi(x)$, поэтому $H_{\text{ext}}(U) \subset H(U) \subset H_{\text{co}}(U)$.

Пусть $\{u_m\} \subset L^n[a, b]$ – последовательность, плотная в $\text{со } \Phi(H_{\text{co}}(U))$. Для каждой $m, i = 1, 2, \dots$ определим отображения $\rho_m: H_{\text{co}}(U) \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $\Phi_{mi}: H_{\text{co}}(U) \rightarrow \Omega(L^n[a, b])$ равенствами

$$\rho_m(x) = \rho_{L^n[a, b]}[u_m; \overline{\text{со } \Phi}(x)], \quad \Phi_{mi} = \overline{\text{со } \Phi(x) \cap B_{L^n[a, b]}[u_m; \rho_m(x) + i^{-1}]}.$$

Так как произведение $V \text{ со } \Phi$ обладает свойством А, то отображение $\text{со } \Phi$ непрерывно на U . Поэтому на $H_{\text{co}}(U)$ непрерывны функционалы ρ_m , $m = 1, 2, \dots$. Отсюда согласно [6, гл. 0, § 3] отображения Φ_{mi} , $m, i = 1, 2, \dots$, полунепрерывны снизу на $H_{\text{co}}(U)$. Следовательно, согласно теореме Майкла [4] у Φ_{mi} существуют непрерывные ветви $g_{mi}: H_{\text{co}}(U) \rightarrow L^n[a, b]$, $m, i = 1, 2, \dots$.

Покажем, что последовательность $\{g_{mi}\}$ плотна в $\text{со } \Phi(x)$ при любом $x \in H_{\text{co}}(U)$. Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$, $x \in H_{\text{co}}(U)$, $u \in \overline{\text{со } \Phi}(x)$ и выберем такие $m, i = 1, 2, \dots$, что выполняются неравенства $\|u_m - u\|_{L^n[a, b]} \leq 1/i \leq \varepsilon/4$. Тогда $u \in \overline{B_{L^n[a, b]}[u_m; \rho_m(x) + i^{-1}]}$, причем согласно выбору чисел m, i выполняется оценка $\rho_m(x) + 1/i \leq \varepsilon/2$ и, следовательно, $\|u - g_{mi}\|_{L^n[a, b]} < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{g_{mi}\}$ плотна в $\text{со } \Phi(x)$ при любом $x \in H_{\text{co}}(U)$.

Далее последовательность $\{g_{mi}\}$ будем обозначать через $\{g_m\}$, а последовательности функционалов $\{\eta(\cdot, g_m(\cdot))\}$, $\{\Theta(\cdot, g_m(\cdot))\}$, определенные, соответственно, равенствами (44), (49) при $g = g_m$, $m = 1, 2, \dots$, через $\{\eta_m\}$, $\{\Theta_m\}$.

Для каждого $m, i = 1, 2, \dots$ определим множества H_{mi}^1, H_m, H_{mi} , содержащиеся в $H_{\text{co}}(U)$, следующим образом:

$$H_{mi}^1 = \left\{ x \in H_{\text{co}}(U) : \Theta_m(x) \geq \frac{1}{i} \right\}, \quad (50)$$

$$H_m = \left\{ x \in H_{\text{co}}(U) : \eta_m(x) \leq \frac{1}{2} \Theta_m(x) \right\},$$

$$H_{mi} = H_{mi}^1 \cap H_m. \quad (51)$$

Покажем, что множества H_{mi} замкнуты для любых $m, i = 1, 2, \dots$. Прежде всего, согласно лемме 10 из [1] функционал Θ_m полунепрерывен сверху на $H_{co}(U)$. Поэтому множества H_{mi}^1 замкнуты при любых $m, i = 1, 2, \dots$.

Теперь покажем, что множество H_m замкнуто для любого $m = 1, 2, \dots$. Пусть последовательность $\{x_i\} \subset H_m$ такова, что $x_i \rightarrow x \in H_{co}(U)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда согласно лемме 3 и лемме 10 из [1] получаем неравенства

$$\eta_m(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \eta_m(x_i) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sup \Theta_m(x_i) \leq \frac{1}{2} \Theta_m(x).$$

Следовательно, $x \in H_m$ (см. (50)) и множество H_m замкнуто. Таким образом, замкнуто и множество H_{mi} при любых $m, i = 1, 2, \dots$ (см. (51)).

Далее, покажем, что множество $H_{co} \setminus H_{mj}$ плотно в $H_{co}(U)$ для любых $m, j = 1, 2, \dots$. Для этого достаточно показать, что $H_{mj} \subset \overline{H_{co}(U) \setminus H_{mj}}$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x \in H_{mj}$ зафиксированы. Покажем, что найдется такой $y \in H_{co} \setminus H_{mj}$, для которого выполняется неравенство $\|x - y\|_{C^n[a, b]} < \varepsilon$.

Прежде всего, согласно следствию 4 и определению квазирешения включения (39) для выбранного $x \in H_{mj}$ найдется $v \in \Psi(x)$ и последовательность $z_i \in (\text{ext } \Phi)(x)$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что $y_i = v + Vz_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Отметим, что в силу условия теоремы $y_i \in U$, $i = 1, 2, \dots$. Покажем, что в определении последовательности y_i , $i = 1, 2, \dots$, функция $v = \sigma(x)$ (определение отображения σ см. выше). Действительно, не уменьшая общности, можно считать, что $z_i \rightarrow z_0 \in \text{co}\Phi(x)$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому $x = v + Vz_0$ и, следовательно, в силу определения разложимости множества $H_{co}(U)$ и определения отображения σ получаем равенство $\sigma(x) = v$. Таким образом, для каждого $i = 1, 2, \dots$ $y_i = \sigma(x) + Vz_i$.

Далее, пусть для любого $i = 1, 2, \dots$ функция $\tilde{y}_i \in \Psi(y_i)$ удовлетворяет равенству

$$\|\sigma(x) - \tilde{y}_i\|_{C^n[a, b]} = \rho_{C^n[a, b]}[\sigma(x); \Psi(y_i)].$$

Так как отображение Ψ непрерывно на U , то из определения последовательности $\tilde{y}_i$, $i = 1, 2, \dots$, следует, что $\tilde{y}_i \rightarrow \sigma(x)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$.

Представим для любого $i = 1, 2, \dots$ функцию y_i в виде

$$y_i = \tilde{y}_i + Vz_i + e_i,$$

где $e_i = \sigma(x) - \tilde{y}_i$. Отметим, что $e_i \rightarrow 0$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как отображение Ψ и произведение $V \text{co}\Phi$ обладают свойством А на множестве U , то из неравенства (9) для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется оценка

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[z_i; \text{co}\Phi(y_i)] \leq h_{L^n(\mathcal{U})}[\text{co}\Phi(x); \text{co}\Phi(y_i)] \leq \int_{\mathcal{U}} (\Gamma_1(Z(x - y_i)))(s) ds, \quad (52)$$

где Z определено равенством (12). Из неравенств (52), а также из следствия 1 вытекает, что для каждой пары функций (y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots$, найдется решение $x_i = \sigma(x_i) + Vz_i$, $\sigma(x_i) \in \Psi(x_i)$, $\bar{z}_i \in \text{co}\Phi(x_i)$, которое обладает следующим свойством: при любом $t \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|x_i(t) - y_i(t)| \leq \xi_i(t) \quad (53)$$

и при почти всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|z_i(t) - \overline{z_i}(t)| \leq \Gamma_1(Z(x - y_i))(t) + (\Gamma_1 \xi_i)(t), \quad (54)$$

где ξ_i – решение уравнения (13) с функцией $\nu = \nu_i$, при любом $t \in [a, b]$ определенной равенством

$$\nu_i(t) = \int_a^b |V(t, s)| (\Gamma_1(Z(x - y_i)))(s) ds + |e_i(t)|.$$

Так как отображение Γ_1 непрерывно и удовлетворяет равенству $\Gamma_1(0) = 0$, то $\nu_i \rightarrow 0$ в $C^1[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда и из определения свойства А вытекает, что $\xi_i \rightarrow 0$ в $C^1[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, согласно неравенству (54) получаем $z_i - \overline{z_i} \rightarrow 0$ в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как при каждом $i = 1, 2, \dots$ $z_i \in (\text{ext } \Phi)(x)$, то для каждого $i = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\rho_{L^n[a, b]}[\overline{z_i}; (\text{ext } \Phi)(x)] \leq \|z_i - \overline{z_i}\|_{L^n[a, b]}.$$

Это означает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{L^n[a, b]}[\overline{z_i}; (\text{ext } \Phi)(x)] = 0. \quad (55)$$

Так как $x \in H_{mj}$, то $\Theta(x) > 0$ (см. (49)–(51)). Отсюда и согласно равенству (55) найдутся такие числа $\delta > 0$ и i_1 , что при всех $i \geq i_1$ справедлива оценка

$$\rho_{L^n[a, b]}[\overline{z_i}; (\text{ext } \Phi)(x)] < \frac{1}{2} \Theta_m(x) - \delta.$$

Поэтому при всех $i \geq i_1$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \Theta_m(x) &\leq \|\overline{z_i} - g_m(x)\|_{L^n[a, b]} + \rho_{L^n[a, b]}[\overline{z_i}; (\text{ext } \Phi)(x)] \\ &< \|\overline{z_i} - g_m(x)\|_{L^n[a, b]} + \frac{1}{2} \Theta_m(x) - \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $i \geq i_1$ имеем оценку

$$\|\overline{z_i} - g_m(x)\|_{L^n[a, b]} > \frac{1}{2} \Theta_m(x) + \delta.$$

Следовательно, при всех $i \geq i_1$ справедливо соотношение

$$\overline{z_i} \notin \overline{B_{L^n[a, b]}[g_m(x); \frac{1}{2} \Theta_m(x) + \delta]}. \quad (56)$$

В силу непрерывности g_m и полунепрерывности сверху функционала Θ_m существует такое число i_2 , что при всех $i \geq i_2$ выполняется вложение

$$\overline{B_{L^n[a, b]}[g_m(x_i); \frac{1}{2} \Theta_m(x_i)]} \subset \overline{B_{L^n[a, b]}[g_m(x); \frac{1}{2} \Theta_m(x) + \delta]}. \quad (57)$$

Поэтому из (56), (57) при всех $i \geq \max\{i_1; i_2\}$ получаем

$$\overline{z_i} \notin \overline{B_{L^n[a, b]}[g_m(x_i); \frac{1}{2} \Theta_m(x_i)]},$$

т.е. при всех $i \geq \max\{i_1; i_2\}$ выполняется оценка $\eta(x_i) > \frac{1}{2}\Theta_m(x_i)$. Это означает, что $x_i \notin H_m$ (см. (50)). И поэтому $x_i \notin H_{mj}$ при всех $i \geq \max\{i_1; i_2\}$ (см. (51)). Так как $\xi_i \rightarrow 0$ в $C^1[a, b]$, а $y_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$, то из неравенства (53) вытекает, что $x_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому за $y \notin H_{mj}$ можно взять такой элемент $x_{\bar{i}}, \bar{i} \geq \max\{i_1; i_2\}$, для которого выполняется неравенство $\|x - x_{\bar{i}}\|_{C^n[a, b]} < \varepsilon$. Таким образом, $H_{mj} \subset \overline{H_{co}(U) \setminus H_{mj}}$ и множество $H_{co}(U) \setminus H_{mj}$ плотно в $H_{co}(U)$.

Далее, покажем, что справедливо вложение

$$\bigcap_{m,j=1}^{\infty} [H_{co}(U) \setminus H_{mj}] \subset H_{ext}(U). \quad (58)$$

Действительно, пусть $x \in H_{co}(U) \setminus H_{ext}(U)$ и $x = \sigma(x) + Vz$, $\sigma(x) \in \Psi(x)$, $z \in co\Phi(x)$. Тогда $z \notin (ext \Psi)(x)$ и, следовательно, $\rho_{L^n[a, b]}[z; (ext \Phi)(x)] = \gamma > 0$. Покажем, что $x \in H_{mi}$ при $1/i \leq \frac{2}{3}\gamma$ и при m , для которого выполняется неравенство

$$\eta_m(x) < \frac{\gamma}{3}, \quad (59)$$

где $\eta_m(x) = \|z - g_m(x)\|_{L^n[a, b]}$, $z = V^{-1}(x - \sigma(x))$. Такое m существует, поскольку по построению последовательность $\{g_m(x)\}$ плотна в $co\Phi(x)$. Согласно определению функционала Θ_m (см. (49)) и неравенству (59) получаем оценку

$$\gamma \leq \|g_m(x) - z\|_{L^n[a, b]} + \Theta_m(x) < \frac{\gamma}{3} + \Theta_m(x).$$

Отсюда получаем неравенство

$$\Theta_m(x) > \frac{2}{3}\gamma. \quad (60)$$

Из оценок (59), (60) вытекает соотношение $\eta_m(x) < \frac{1}{2}\Theta_m(x)$. Это означает, что $x \in H_m$ (см. (49)). Кроме того, так как $1/i \leq \frac{2}{3}\gamma$, то из (60) следует неравенство $\Theta_m(x) > 1/i$, т.е. $x \in H_{mj}^1$ (см. (50)) и поэтому $x \in H_{mi}$ (см. (51)). Таким образом,

$$x \notin \bigcap_{m,i=1}^{\infty} [H_{co}(U) \setminus H_{mi}]$$

и поэтому вложение (58) справедливо.

Так как множество $H_{co}(U)$ замкнуто, то, применяя теорему Бэра о категориях (см. [7, гл. I, 2]) к последовательности открытых плотных в $H_{co}(U)$ множеств $H_{co}(U) \setminus H_{mi}$, получаем соотношение

$$\overline{\bigcap_{m,i=1}^{\infty} [H_{co}(U) \setminus H_{mi}]} = H_{co}(U). \quad (61)$$

Из соотношений (58) и (61) вытекает, что $H_{co}(U) = \overline{H_{ext}(U)}$. Теорема доказана.

Из теоремы 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть отображение Ψ и произведение $V co\Phi$ обладают свойствами A и $(V\Gamma_2; P_2)$. Тогда $H_{ext} \neq \emptyset$ и $\overline{H_{ext}} = H_{co}$, где $\overline{H_{ext}}$ — замыкание множества H_{ext} в пространстве $C^n[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что утверждения в §1 обобщают и уточняют результаты работ [1], [5], [8]–[14] по интегральным и дифференциальным включениям.

§ 2. Краевые задачи дифференциальных включений с многозначным вектор-функционалом

Здесь применяется рассмотренная в § 1 теория для исследования свойств решений краевых задач для дифференциальных включений с невыпуклой правой частью и выпуклозначным вектор-функционалом.

2.1. Функционально-дифференциальные включения. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x), \quad lx \in \varphi(x), \quad (62)$$

где $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$, $\varphi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^n)$ – многозначные отображения; $l: D^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}: D^n[a, b] \rightarrow L^n[a, b]$ – линейные непрерывные операторы. Пусть оператор $\Lambda: L^n[a, b] \rightarrow D^n[a, b]$ определен равенством

$$(\Lambda z)(t) = \int_a^t z(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Запишем отображение $\mathcal{L}$ в виде (см. [16, гл. I, § 1.2])

$$\mathcal{L}x = Q\dot{x} + A(\cdot)x(a), \quad (63)$$

где оператор $Q: L^n[a, b] \rightarrow L^n[a, b]$ (главная часть оператора $\mathcal{L}$ в представлении (63)) определяется равенством $Q = \mathcal{L}\Lambda$, каждый столбец $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$ представляет собой результат применения оператора $\mathcal{L}$ к соответствующему столбцу единичной матрицы: $A(t) = (\mathcal{L}E)(t)$. Будем предполагать, что оператор Q имеет обратный и обратный оператор $Q^{-1}: L^n[a, b] \rightarrow L^n[a, b]$ непрерывен. Отметим, что этот класс линейных отображений содержит линейные дифференциальные операторы вида $(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) + P(t)x(t)$, где $P(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы с суммируемыми на $[a, b]$ элементами или дифференциальные отображения с операторами внутренней суперпозиции, или интегро-дифференциальные операторы и др. (см. [16, гл. I, § 1.2]).

Под *решением задачи* (62) будем понимать такую функцию $x \in D^n[a, b]$, которая удовлетворяет и первому, и второму включениям в (62).

Далее, будем предполагать, что линейная однородная задача

$$\mathcal{L}x = 0, \quad lx = 0 \quad (64)$$

имеет только нулевое решение. В этом случае согласно [16, гл. III, § 3.1] существует непрерывный оператор Грина $G: L^n[a, b] \rightarrow D^n[a, b]$, определенный равенством

$$(Gz)(t) = \int_a^b G(t, s)z(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (65)$$

который для произвольного $z \in L^n[a, b]$ решение $x \in D^n[a, b]$ краевой задачи

$$\mathcal{L}x = z, \quad lx = 0 \quad (66)$$

представляет в виде $x = Gz$ и, наоборот, каждое значение Gz – решение задачи (66).

ЛЕММА 4. Краевая задача (62) эквивалентна интегральному включению

$$x \in X(\cdot)\varphi(x) + G\Phi(x), \quad (67)$$

где $X(\cdot)$ – фундаментальная матрица решений первого уравнения (64), удовлетворяющая условию $l(X) = E$ (E – единичная матрица, матрица $l(X)$ представляет собой результат применения вектор-функционала l к соответствующему столбцу матрицы X). Множество решений включения (67) разложимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть x – решение включения (67). Тогда найдутся $c \in \varphi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, для которых справедливо равенство $x = X(\cdot)c + Gz$. Поэтому из выше приведенного свойства оператора Грина получаем, что $x - X(\cdot)c$ удовлетворяет равенствам $\mathcal{L}(x - X(\cdot)c) = z$, $l(x - X(\cdot)c) = 0$. Так как $X(\cdot)$ – фундаментальная матрица решений первого уравнения (64), удовлетворяющая условию $l(X) = E$, то $\mathcal{L}x = z$ и $lx = c$, т.е. x – решение задачи (62). Обратное утверждение доказывается аналогично.

Докажем теперь, что множество решений включения (67) разложимо (см. п. 1.2). Предположим противное, т.е. для решения x включения (67) найдутся такие $c_1, c_2 \in \varphi(x)$ и $z_1, z_2 \in \Phi(x)$, для которых справедливы равенства

$$x = X(\cdot)c_1 + Gz_1 = X(\cdot)c_2 + Gz_2.$$

Отсюда получаем, что $X(c_1 - c_2) = G(z_1 - z_2)$ – решение задачи (66) для $z = z_2 - z_1$. Поэтому $l(X(\cdot)(c_1 - c_2)) = 0$ и отсюда вытекает, что $c_1 = c_2$. Следовательно, $G(z_2 - z_1) = 0$ и поэтому $z_1 = z_2$. Таким образом, множество решений включения (67) разложимо. Лемма доказана.

Далее, в силу леммы 4, а также известных свойств оператора $G: L^n[a, b] \rightarrow C^n[a, b]$ (см. [16, гл. III, §3.1]) включение (67) удовлетворяет условиям, при которых рассматривалось включение (1). В связи с этим рассмотрим свойства решений задачи (62), вытекающие из изложенной в §1 теории.

Будем говорить, что многозначный функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают *свойством* $(G\tilde{\Gamma}_1; \tilde{P}_1)^\nu$, если найдутся непрерывные изотонные отображения $\tilde{\Gamma}_1: C_+^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ и $\tilde{P}_1: C_+^1[a, b] \rightarrow [0; \infty)$, удовлетворяющие следующим условиям:

для любых $x, y \in C^n[a, b]$ и для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ для отображения Φ выполняется неравенство (9), в котором $\Gamma_1 \equiv \tilde{\Gamma}_1$;

для любых $x, y \in C^n[a, b]$ для отображения $\tilde{P}_1$ выполняется оценка

$$h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(x); \varphi(y)] \leq \tilde{P}_1(Z(x - y));$$

для непрерывного оператора $\tilde{\mathfrak{A}}_1: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$, определенного равенством

$$\tilde{\mathfrak{A}}_1(y)(t) = \int_a^b |G(t, s)|(\tilde{\Gamma}_1 y)(s) ds + \lambda \tilde{P}_1(y) + \nu(t),$$

сходятся последовательные приближения, где $\lambda = \max\{|X(t)| : t \in [a, b]\}$, $|G(t, s)|$, $|X(t)|$ – согласованные с пространством $\mathbb{R}^n$ нормы $(n \times n)$ -матриц $G(t, s)$ (в представлении (65)) и фундаментальной $X(t)$, соответственно, $\nu \in C_+^1[a, b]$, отображение Z определено равенством (12).

Будем говорить, что многозначный функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают *свойством* $(G\tilde{\Gamma}_2; \tilde{P}_2)$, если найдутся непрерывные изотонные отображения $\tilde{\Gamma}_2 : C_+^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ и $\tilde{P}_2 : C_+^1[a, b] \rightarrow [0; \infty)$, удовлетворяющие следующим условиям:

для любого $x \in C^n[a, b]$ и для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ для отображения Φ выполняется неравенство (26), в котором $\Gamma_2 \equiv \tilde{\Gamma}_2$;

для любого $x \in C^n[a, b]$ для отображения $\tilde{P}_2$ выполняется оценка

$$\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \tilde{P}_2(Z(x));$$

для непрерывного оператора $\tilde{\mathfrak{A}}_2 : C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$, определенного равенством

$$\tilde{\mathfrak{A}}_2(y)(t) = \int_a^b |G(t, s)|(\tilde{\Gamma}_2 y)(s) ds + |X(t)|\tilde{P}_2(y),$$

сходятся последовательные приближения, где $|G(t, s)|$, $|X(t)|$ – согласованные с пространством $\mathbb{R}^n$ нормы $(n \times n)$ -матриц $G(t, s)$ (в представлении (65)) и фундаментальной $X(t)$, соответственно, отображение Z определено равенством (12).

Рассмотрим в пространстве $C^1[a, b]$ уравнение

$$\xi_\nu(t) = \int_a^b |G(t, s)|(\tilde{\Gamma}_1 \xi_\nu)(s) ds + \lambda \tilde{P}_1(\xi_\nu) + \nu(t), \quad (68)$$

где число λ , функции $|G(t, s)|$, $\nu(t)$, отображения $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{P}_1$ определены выше. Согласно свойству $(G\tilde{\Gamma}_1; \tilde{P}_1)^\nu$ решение уравнения (68) существует.

Пусть $\tilde{q} \in C^n[a, b]$ и $w_0 \in L^n[a, b]$. Представим функцию $\tilde{q}$ равенством

$$\tilde{q} = X(\cdot)r_0 + Gw_0 + e, \quad (69)$$

где $r_0 \in \varphi(\tilde{q})$, $e = \tilde{q} - X(\cdot)r_0 - Gw_0$ (матрица $X(\cdot)$ удовлетворяет лемме 4). Пусть, далее, функция $\varkappa \in L^1[a, b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяет неравенству (15), а функция $\nu_\varepsilon \in C_+^1[a, b]$ для любого $t \in [a, b]$ определена соотношением

$$\nu_\varepsilon(t) = \int_a^b |G(t, s)|(\varepsilon + \varkappa(s)) ds + \varepsilon + |e(t)|, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (70)$$

где $|G(t, s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $(n \times n)$ -матрицы $G(t, s)$ в представлении (65), а e – функция в правой части равенства (69).

Из леммы 4 и следствия 2 вытекает

ТЕОРЕМА 7. Пусть многозначный функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают свойствами $(G\tilde{\Gamma}_1; \tilde{P}_1)^{\nu_\varepsilon}$, $(G\tilde{\Gamma}_2; \tilde{P}_2)$, где функция ν_ε определена равенством (70). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует решение x задачи (62), для которого при любом $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x(t) - \tilde{q}(t)| \leq \xi_\varepsilon(t)$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка $|(\mathcal{L}x)(t) - w_0(t)| \leq \varepsilon + \kappa(t) + \tilde{\Gamma}_1(\xi_\varepsilon)(t)$, а также справедливо соотношение $\|X(\cdot)(r_0 - lx)\|_{C^n[a, b]} \leq \lambda \tilde{P}_1(\xi_\varepsilon) + \varepsilon$, где функции $\tilde{q}, w_0$, вектор r_0 представимы равенством (69), ξ_ε – решение уравнения (68) при $\nu = \nu_\varepsilon$, отображение $\tilde{\Gamma}_1$ удовлетворяет неравенству (9) при $\Gamma_1 \equiv \tilde{\Gamma}_1$, функция κ удовлетворяет оценке (15), матрица $X(\cdot)$ удовлетворяет лемме 4, число λ определено выше.

Если $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Будем говорить, что многозначный функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают свойством В, если выполняются следующие условия:

найдется неотрицательная функция $\beta \in L^1[a, b]$ такая, что для любых $x, y \in C^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \leq \int_{\mathcal{U}} \beta(s) ds \|x - y\|_{C^n[a, b]}; \quad (71)$$

найдется число $\alpha \geq 0$ такое, что для любых $x, y \in C^n[a, b]$ функционал φ удовлетворяет неравенству

$$h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(x); \varphi(y)] \leq \alpha \|x - y\|_{C^n[a, b]}; \quad (72)$$

для функции $\beta \in L^1[a, b]$ и числа $\alpha \geq 0$ справедливо соотношение

$$\max_{t \in [a, b]} \int_a^b |G(t, s)| \beta(s) ds + \alpha \lambda < 1, \quad (73)$$

где число λ , норма $(n \times n)$ -матрицы $|G(t, s)|$ определены выше.

Рассмотрим в пространстве $C^1[a, b]$ уравнение

$$\tilde{\xi}_\nu(t) = \left(\int_a^b |G(t, s)| \beta(s) ds + \alpha \lambda \right) \|\tilde{\xi}_\nu\|_{C^1[a, b]} + \nu(t), \quad (74)$$

где функция $\nu \in C^1[a, b]$, число λ определено выше, функция $\beta \geq 0$ и число α удовлетворяют неравенствам (71), (72), соответственно. Отметим, что согласно неравенству (73) уравнение (74) имеет решение для любой функции $\nu \in C^1_+[a, b]$.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть многозначный функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают свойством В. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует решение x задачи (62), для которого при любом $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x(t) - \tilde{q}(t)| \leq \xi_\varepsilon(t)$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка $|(\mathcal{L}x)(t) - w_0(t)| \leq \varepsilon + \kappa(t) + \beta(t) \|\tilde{\xi}_\varepsilon\|_{C^1[a, b]}$, а также справедливо соотношение $\|X(\cdot)(r_0 - lx)\|_{C^n[a, b]} \leq \lambda \|\tilde{\xi}_\varepsilon\|_{C^1[a, b]} + \varepsilon$, где функции $\tilde{q}, w_0$, вектор r_0 представимы равенством (69), ξ_ε – решение уравнения (74) при $\nu = \nu_\varepsilon$,

которая определена равенством (70), функции α , β удовлетворяют неравенствам (15), (71), соответственно, матрица $X(\cdot)$ удовлетворяет лемме 4, число λ определено выше.

Если $\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Phi(0) \in \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$, то найдется такая неотрицательная функция $\tau \in L^1[a, b]$, что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(0)\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \int_{\mathcal{U}} \tau(s) ds.$$

Отсюда согласно неравенству (71) для любого $x \in C^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} &= h_{L^n(\mathcal{U})}[0; \Phi(x)] \leq \|\Phi(0)\|_{L^n(\mathcal{U})} + h_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(0); \Phi(x)] \\ &\leq \|\widehat{\Gamma}_2(Z(x))\|_{L^1(\mathcal{U})}, \end{aligned}$$

где $\widehat{\Gamma}_2(Z(x))(t) = \tau(t) + \beta(t)\|x\|_{C^n[a, b]}$. Далее, в силу неравенства (73) для отображения $\widehat{\mathfrak{A}}_2: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$, заданного равенством

$$(\widehat{\mathfrak{A}}_2 z)(t) = \int_a^b |G(t, s)|(\widehat{\Gamma}_2 z)(s) ds + |X(t)|\widehat{P}_2(z),$$

где $\widehat{P}_2(z) = \alpha\|z\|_{C^1[a, b]}$, сходятся последовательные приближения. Поэтому функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают свойством $(G\widehat{\Gamma}_2; \widehat{P}_2)$ при $\widehat{\Gamma}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ и $\widehat{P}_2 = \widehat{P}_2$.

У оператора, определенного правой частью уравнения (74), в силу неравенства (73) сходятся последовательные приближения для любой функции $\nu \in C_+^1[a, b]$. Поэтому функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают свойством $(G\widehat{\Gamma}_1; \widehat{P}_1)^{\nu_\varepsilon}$, в котором отображения $\widehat{\Gamma}_1: C_+^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ и $\widehat{P}_1: C_+^1[a, b] \rightarrow [0; \infty)$ определены соотношениями $(\widehat{\Gamma}_1 z)(t) = \beta(t)\|z\|_{C^1[a, b]}$, $(\widehat{P}_1 z) = \alpha\|z\|_{C^1[a, b]}$. Таким образом, функционал φ и произведение $G\Phi$ удовлетворяют условиям теоремы 7. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\mathcal{L}x = \dot{x}$, $lx = x(a)$, $\varphi(x) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Φ – оператор Немыцкого, то оценки, установленные в теореме 7 и следствии 9, аналогичны оценкам, опубликованным в работах [17]–[20].

Рассмотрим вместе с задачей (62) и задачи

$$\mathcal{L}x \in \text{co}\Phi(x), \quad lx \in \varphi(x), \quad (75)$$

$$\mathcal{L}x \in (\text{ext}\Phi)(x), \quad lx \in \varphi(x), \quad (76)$$

где многозначный оператор $\text{ext}\Phi: C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$ определен равенством (37). Пусть H^1 , H_{co}^1 , H_{ext}^1 – множество всех решений задач (62), (75), (76), соответственно.

Будем говорить, что многозначный функционал φ и произведение $G\Phi$ обладают свойством С, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любой $\nu \in C^1_+[a, b]$, удовлетворяющей неравенству $\|\nu\|_{C^1[a, b]} \leq \delta$, выполняется свойство $(G\tilde{\Gamma}_1; \tilde{P}_1)^\nu$, в котором для отображений $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{P}_1$, справедливы равенства $\tilde{\Gamma}_1(0) = 0, \tilde{P}_1(0) = 0$, а решение уравнения (68) ξ_ν удовлетворяет неравенству $\|\xi_\nu\|_{C^1[a, b]} < \varepsilon$.

Так как согласно лемме 4 задачи (75), (76) эквивалентны включениям

$$x \in X(\cdot)\varphi(x) + G(\text{co}\Phi(x)), \quad x \in X(\cdot)\varphi(x) + G((\text{ext } \Phi)(x)),$$

где G – оператор Грина, $X(\cdot)$ – фундаментальная матрица решений первого уравнения (64), которые определены выше, то из леммы 4 и следствия 2 вытекает

ТЕОРЕМА 8. Пусть многозначный функционал φ и произведение $G\text{co}\Phi$ обладают свойствами С и $(G\tilde{\Gamma}_2; \tilde{P}_2)$. Тогда $H^1_{\text{ext}} \neq \emptyset$ и $\overline{H^1_{\text{ext}}} = \overline{H^1} = \overline{H^1_{\text{co}}}$, где $\overline{H^1_{\text{ext}}}, \overline{H^1}$ – замыкания множеств H^1_{ext}, H^1 в пространстве $C^n[a, b]$, соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть многозначный функционал φ и произведение $G\text{co}\Phi$ обладают свойством В. Тогда $H^1_{\text{ext}} \neq \emptyset$ и $\overline{H^1_{\text{ext}}} = \overline{H^1} = H^1_{\text{co}}$, где $\overline{H^1_{\text{ext}}}, \overline{H^1}$ – замыкания множеств H^1_{ext}, H^1 в пространстве $C^n[a, b]$, соответственно.

Действительно, пусть $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ – решения уравнения (74) при $\nu = \nu_1$ и $\nu = \nu_2$, соответственно. Тогда из неравенства (73) вытекает оценка

$$\|\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2\|_{C^1[a, b]} \leq \frac{\|\nu_1 - \nu_2\|_{C^1[a, b]}}{1 - \zeta},$$

где $\zeta = \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |G(t, s)|\beta(s) ds + \alpha\lambda, |G(t, s)|, \beta(s)$, числа α, λ определены выше.

Поэтому решение уравнения (74) непрерывно зависит от параметра $\nu \in C^1_+[a, b]$. Следовательно, функционал φ и произведение $G\text{co}\Phi$ обладают свойством С.

Кроме того, из доказательства следствия 9 вытекает, что функционал φ и произведение $G\text{co}\Phi$ обладают свойством $(G\tilde{\Gamma}_2; \tilde{P}_2)$. Таким образом, следствие 10 удовлетворяет условиям теоремы 8.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что известные результаты о плотности множеств решений дифференциальных включений с невыпуклой и овыпукленной правыми частями и о “бэнг-бэнг” принципе (см. обзоры и монографии [21]–[27], а также работы [28]–[36]) касаются только задачи Коши для дифференциальных включений и предполагают в той или иной форме вольтерровость отображений $\mathcal{L}$ и Φ . В теореме 8 и следствии 10 вольтерровость этих отображений не предполагается. Кроме того, эти утверждения распространяют результаты работ [1], [5], [9], [15] на случай, когда линейный вектор-функционал возмущен многозначным вектор-функционалом φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что следствие 10 устанавливает, что для любого оператора Грина G , определенного равенством (65), и фундаментальной матрицы $X(\cdot)$ решений первого уравнения (64) найдутся достаточно малые функция

$\beta \in L^1[a, b]$ и число $\alpha \geq 0$, удовлетворяющие неравенствам (71), (72), соответственно, для которых справедливо равенство $\overline{H_{\text{ext}}^1} = H_{\text{co}}$. То есть, другими словами, если задача (64) имеет только нулевое решение, то “бэнг-бэнг” принцип является устойчивым свойством относительно “малых” липшицевых возмущений, вызванных многозначным отображением Φ и многозначным вектор-функционалом φ .

2.2. Дифференциальные включения с многозначным оператором Немыцкого. В этом случае можно получить мажорантные неравенства, параметры которых иногда представляют собой решения линейных интегральных уравнений.

Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad lx \in \varphi(x), \quad (77)$$

где линейные непрерывные операторы $\mathcal{L}: D^n[a, b] \rightarrow L^n[a, b]$, $l: D^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $\varphi: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям п. 2.1. Многозначная функция $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет следующим условиям:

найдется неотрицательная функция $\beta \in L^1[a, b]$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbb{R}^n}[F(t, x); F(t, y)] \leq \beta(t)|x - y|; \quad (78)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо; функция $\|F(t, 0)\|_{\mathbb{R}^n}$ суммируема.

Напомним, что оператор Немыцкого $N: C^n[a, b] \rightarrow \Pi[L^n[a, b]]$, порожденный функцией F , определяется равенством

$$Nx = \{y \in L^n[a, b] : y(t) \in F(t, x(t)) \text{ при п.в. } t \in [a, b]\}.$$

Будем говорить, что многозначный функционал φ и произведение GN обладают *свойством $\tilde{C}^\nu$* , если найдется число $\alpha \geq 0$ такое, что для любых $x, y \in C^n[a, b]$ функционал φ удовлетворяет неравенству (72), для непрерывного оператора $\mathfrak{A}: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$, определенного равенством

$$(\tilde{\mathfrak{A}}z)(t) = \int_a^b |G(t, s)|\beta(s)z(s) ds + \alpha\lambda\|z\|_{C^1[a, b]} + \nu(t), \quad (79)$$

сходятся последовательные приближения. Здесь функция $\beta \in L^1[a, b]$ и число α удовлетворяют неравенствам (78) и (72), соответственно, $\lambda = \max\{|X(t)| : t \in [a, b]\}$, $|G(t, s)|$, $|X(t)|$ – согласованные с пространством $\mathbb{R}^n$ нормы $(n \times n)$ -матриц $G(t, s)$ (в представлении (65)) и фундаментальной матрицы решений $X(\cdot)$ первого уравнения (64), соответственно, $\nu \in C_+^1[a, b]$.

Пусть оператор $\mathfrak{A}: C_+^1[a, b] \rightarrow C_+^1[a, b]$ определен равенством (79) при $\nu = 0$. Отметим, что если функционал φ представляет собой постоянное множество из $\mathbb{R}^n$, то в этом случае $\alpha = 0$ и тогда оператор $\mathfrak{A}$ представляет собой линейный интегральный оператор. Поэтому в этом случае, если спектральный радиус оператора $\mathfrak{A}$ меньше 1, то для оператора $\mathfrak{A}$, определенного равенством (79) (при $\alpha = 0$),

сходятся последовательные приближения для любой функции $\nu \in C_+^1[a, b]$. Если $\alpha > 0$ в свойстве $\tilde{C}^\nu$, то в этом случае последовательные приближения оператора $\tilde{\mathfrak{A}}$ сходятся, если, например, выполняется неравенство (73), в котором функция β и произведение $\alpha\lambda$ определено в условии $\tilde{C}^\nu$.

Рассмотрим в пространстве $C^1[a, b]$ уравнение

$$\psi_\nu(t) = \int_a^b |G(t, s)| \beta(s) \psi_\nu(s) ds + \alpha \lambda \|\psi_\nu\|_{C^1[a, b]} + \nu(t). \quad (80)$$

Пусть функция $\tilde{\nu} \in C_+^1[a, b]$ определена равенством

$$\tilde{\nu}(t) = \int_a^b |G(t, s)| \|F(t, 0)\|_{\mathbb{R}^n} dt, \quad (81)$$

где $|G(t, s)|$ определена выше.

ТЕОРЕМА 9. Пусть функционал φ и произведение GN обладают свойствами $\tilde{C}^{\nu_\varepsilon}$ и $\tilde{C}^{\tilde{\nu}}$, где функция ν_ε определена равенством (70) с функцией $\varkappa$, удовлетворяющей неравенству (15) при $\Phi \equiv N$, а функция $\tilde{\nu}$ определена равенством (81). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует решение x задачи (62), для которого при любом $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x(t) - \tilde{q}(t)| \leq \psi_\varepsilon(t)$, при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка $|(\mathcal{L}x)(t) - w_0(t)| \leq \varepsilon + \varkappa(t) + \beta(t)\psi_\varepsilon(t)$, а также справедливо соотношение $\|X(\cdot)(r_0 - lx)\|_{C^n[a, b]} \leq \lambda \|\psi_\varepsilon\|_{C^1[a, b]} + \varepsilon$, где матрица $X(\cdot)$ удовлетворяет лемме 4, число λ определено выше, функции $\tilde{q}, w_0$, вектор r_0 представимы равенством (69), ψ_ε – решение уравнения (80) при $\nu = \nu_\varepsilon$, функция β удовлетворяет оценке (78), а для функции $\varkappa$ справедливо соотношение (15), в котором $\Phi \equiv N$.

Если $N: C^n[a, b] \rightarrow \Omega(\Pi[L^n[a, b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Действительно, в силу неравенства (78) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ получаем оценку

$$\|F(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|F(t, 0)\|_{\mathbb{R}^n} + \beta(t)|x|.$$

Далее, так как для оператора $\tilde{\mathfrak{A}}$, определенного равенством (79) при $\nu = \tilde{\nu}$ (функция $\tilde{\nu}$ задана равенством (81)), сходятся последовательные приближения, то функционал φ и произведение GN обладают свойством $(G\tilde{\Gamma}_2; \tilde{P}_2)$, в котором $\tilde{\Gamma}_2$ и $\tilde{P}_2$ определены равенствами $(\tilde{\Gamma}_2 z)(t) = \|F(t, 0)\|_{\mathbb{R}^n} + \beta(t)z(t)$, $\tilde{P}_2 z = \alpha \|z\|_{C^1[a, b]}$. Таким образом, теорема 9 удовлетворяет условиям теоремы 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что если $\mathcal{L}x = \dot{x}$ и задача (77) – задача Коши ($lx = x(a)$, $\varphi(x) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$), то в этом случае задача (64) имеет вид $\dot{x} = 0$, $x(a) = 0$. Поэтому матрица $G(t, s)$, которая порождает оператор Грина задачи Коши, определяется равенствами $G(t, s) = E$ при $a \leq s \leq t \leq b$ и $G(t, s) = 0$ при $a \leq t < s \leq b$, где E – единичная матрица, а 0 – нулевая матрица. И, следовательно, в этом случае оператор $\tilde{\mathfrak{A}}$, заданный равенством (79), в котором $\alpha = 0$ и $\nu = 0$, представляет собой оператор Вольтерра, у которого спектральный радиус

равен 0 для любой функции $\beta \in L^1[a, b]$, удовлетворяющей неравенству (78). Поэтому теорема 9 содержит в себе результат А. Ф. Филиппова с точностью до $\varepsilon > 0$ (см. [18]).

Рассмотрим краевые задачи

$$(\mathcal{L}x)(t) \in \overline{\text{co}}(F(t, x(t))), \quad t \in [a, b], \quad lx \in \varphi(x), \quad (82)$$

$$(\mathcal{L}x)(t) \in \overline{\text{ext}}(\overline{\text{co}}F(t, x(t))), \quad t \in [a, b], \quad lx \in \varphi(x). \quad (83)$$

Пусть $H^2, H_{\text{co}}^2, H_{\text{ext}}^2$ – множество всех решений задачи (77), (82), (83), соответственно. Пусть M – многозначный оператор Немыцкого, порожденный функцией $\text{co } F$.

Будем говорить, что функционал φ и произведение GN обладают *свойством $\tilde{C}$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой $\nu \in C_+^1[a, b]$, удовлетворяющей неравенству $\|\nu\|_{C^1[a, b]} \leq \delta$, выполняется свойство $\tilde{C}^\nu$, причем решение уравнения (80) ψ_ν удовлетворяет неравенству $\|\psi_\nu\|_{C^1[a, b]} \leq \varepsilon$.

Отметим, что, если в свойстве $\tilde{C}^\nu$ $\alpha = 0$ (т.е. в этом случае φ – постоянное множество из $\mathbb{R}^n$), то функционал φ и произведение GN обладают свойством $\tilde{C}$, если спектральный радиус оператора $\tilde{\mathfrak{A}}$, заданный равенством (79), в котором $\alpha = 0$, $\nu = 0$, меньше 1. Если в свойстве $\tilde{C}^\nu$ $\alpha > 0$, то многозначный функционал φ и произведение GN обладают свойством $\tilde{C}$, если, например, выполняется неравенство (73).

Из теоремы 8 вытекает

ТЕОРЕМА 10. Пусть многозначный функционал φ и произведение GM обладают свойствами $\tilde{C}$ и $\tilde{C}^{\tilde{\nu}}$, где функция $\tilde{\nu}$ определена равенством (81). Тогда $H_{\text{ext}}^2 \neq \emptyset$, $\overline{H_{\text{ext}}^2} = \overline{H^2} = H_{\text{co}}^2$, где $\overline{H_{\text{ext}}^2}$, $\overline{H^2}$ – замыкания множеств H_{ext}^2 , H^2 в пространстве $C^n[a, b]$, соответственно.

Список литературы

1. Булгаков А. И. Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к крайвым задачам дифференциальных включений // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 10. С. 63–86.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
4. Michael E. A. Selected selection theorems // Amer. Math. Monthly. 1956. V. 4. P. 233–236.
5. Булгаков А. И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371–379.
6. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1985.
7. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
8. Булгаков А. И. Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных включений с невыпуклой правой частью // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь: ППИ, 1991. С. 28–57.
9. Булгаков А. И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. II, III // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 4. С. 566–571; № 5. С. 739–746.

10. Булгаков А. И., Васильева И. В. Существование решений включения Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Вестник ТГУ. 1996. Т. 1. № 2. С. 95–98.
11. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
12. Ляпин Л. Н. Множественнозначные отображения в теории интегральных уравнений с разрывным оператором // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 8. С. 1511–1519.
13. Ляпин Л. Н. Непрерывные решения интегральных включений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 2048–2055.
14. Ирисов А. Е., Тонкова В. С., Тонков Е. Л. Периодические решения дифференциального включения // Нелинейные колебания и теория управления. № 2. Ижевск: УдГУ, 1978. С. 3–15.
15. Ирисов А. Е., Тонков Е. Л. О замыкании множества периодических решений дифференциального включения // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 32–38.
16. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
17. Pliš A. On trajectories of orientor fields // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 1965. V. 13. № 8. P. 571–573.
18. Филиппов А. Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. № 3. С. 16–26.
19. Чугунов П. И. Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы // Прикладная математика и пакеты прикладных программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР, 1980. С. 155–179.
20. Толстоногов А. А., Чугунов П. И. О множестве решений дифференциального включения в банаховом пространстве // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 6. С. 144–159.
21. Благодатский В. И. Некоторые результаты по теории дифференциальных включений // Summer School on Ordinary Differential Equations. Czechoslovakia, Brno, 1974. Part II. P. 29–67.
22. Благодатский В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
23. Благодатский В. И. Теория дифференциальных включений. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1979.
24. Борисович Б. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Многозначные отображения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1982. С. 127–231.
25. Половинкин Е. С. Теория многозначных отображений. М.: МФТИ, 1982.
26. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
27. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
28. Булгаков А. И. Функционально-дифференциальные включения с невыпуклой правой частью // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 11. С. 1872–1878.
29. Суслов С. И. Нелинейный бэнг-бэнг принцип I. Конечномерный случай // Препринт. № 11. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1989.
30. Суслов С. И. Нелинейный бэнг-бэнг принцип II. Бесконечномерный случай // Препринт. № 12. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1989.
31. Bressan A. On a bang-bang principle for nonlinear systems // Boll. Un. Mat. Ital. A(7). 1980. V. 1. P. 53–59.
32. Hermes H. On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. № 3. P. 535–542.
33. Hermes H. The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$ // Adv. Math. 1970. V. 4. № 2. P. 149–169.
34. Olech C. Lexicographical order, range of integrals and “Bang-bang” principle // Mathematical theory of control. New York: Acad. Press, 1967. P. 35–45.

- 35. *Paparg Georgiou N. S.* Functional-differential unclussions in Banach spaces with nonconvex right hand side // Funkcial. Ekvac. 1989. V. 32. P. 145–156.
- 36. *Pianigiani G.* On the fundamental theory of multivalued differential equations // J. Differential Equations. 1977. V. 25. № 1. P. 30–38.
- 37. *Толстоногов А. А., Финогенко И. А.* О решениях дифференциального включения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 2 (10). С. 199–230.

Тамбовский государственный университет

Поступила в редакцию
30.12.1996 и 12.02.1997