Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Чистяков, К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 5, 153–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:50:52

УДК 517.518.24+515.124

В. В. Чистяков

К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной

В работе изучаются (многозначные) отображения ограниченной вариации в смысле Жордана, определенные на подмножестве вещественной прямой, со значениями в метрических или линейных нормированных пространствах. Устанавливается теорема о структуре таких отображений (более общая, чем разложение Жордана), приводятся свойства непрерывности и формулы для скачков, а также доказывается аналог принципа выбора Хелли. Показано, что компактное многозначное отображение со значениями в банаховом пространстве, являющееся отображением ограниченной вариации (липшицевым, абсолютно непрерывным отображением), имеет однозначную селекцию ограниченной вариации (соответственно липшицеву, абсолютно непрерывную селекцию).

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе доказываются новые теоремы о селекциях многозначных отображений ограниченной вариации на вещественной прямой со значениями в метрических или нормированных пространствах. Для этого проведено более детальное изучение отображений $f: E \rightarrow X$, где E — непустое подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$ и X — метрическое пространство. Понятие полной вариации (по Жордану) такого отображения вводится почти без изменений по сравнению с классической ситуацией, когда $X = \mathbb{R}$ (см. § 2). Если $X = \mathbb{R}$, любую функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности двух неубывающих ограниченных функций на E (разложение Жордана), что неприменимо в случае, когда X — метрическое пространство. Тем не менее, в самой общей ситуации мы устанавливаем критерий (теорема 3.1) о том, что $f: E \rightarrow X$ есть отображение ограниченной вариации тогда и только тогда, когда оно представимо в виде композиции $f = g \circ \varphi$, где $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ — неубывающая ограниченная функция, а g — отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой Липшица ≤ 1 и действующее из образа φ в пространство X .

Кроме многочисленных следствий, наше разложение отображений ограниченной вариации позволяет доказать аналог классического принципа выбора Хелли из теории функций вещественной переменной [1, гл. VIII, § 4]: бесконечное семейство отображений на отрезке прямой равномерно ограниченной вариации со значениями в фиксированном компактном подмножестве банахова пространства содержит

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00278).

поточечно сходящуюся последовательность, предел которой является отображением ограниченной вариации.

Возможность выбора селекций с заданными свойствами у многозначных отображений является трудной задачей. Приведенный критерий для отображений ограниченной вариации и принцип выбора Хелли позволяют выделить селекцию ограниченной вариации у компактного многозначного отображения на отрезке прямой со значениями в банаховом пространстве, если это отображение само имеет ограниченную вариацию относительно метрики Хаусдорфа. Параллельно показано, что непрерывные по Липшицу и абсолютно непрерывные относительно метрики Хаусдорфа компактные многозначные отображения обладают селекциями с теми же свойствами. Отмеченные результаты о селекциях являются в определенном смысле неулучшаемыми (подробнее см. замечание после теоремы 6.1).

План работы – следующий. В § 2 приводятся основные свойства отображений ограниченной вариации. В § 3 доказывается теорема о структуре отображений ограниченной вариации. В § 4 изучаются свойства непрерывности и приводятся формулы скачков для таких отображений, а в § 5 устанавливается аналог принципа выбора Хелли. Наконец, в § 6 доказывается теорема о существовании селекций для многозначных отображений ограниченной вариации.

Я признателен С. А. Вахрамееву за предложения, способствовавшие улучшению первоначального варианта текста, а также приношу благодарность М. И. Сумину и О. Е. Галкину за интересные обсуждения.

Работа посвящена П. Л. Ульянову в связи с его семидесятилетием.

§ 2. Основные свойства вариации

В этой статье будут использоваться следующие обозначения: $E \subset \mathbb{R}$ – непустое множество, $E_t^- = \{s \in E \mid s \leq t\}$ и $E_t^+ = \{s \in E \mid t \leq s\}$ для $t \in E$, $E_a^b = \{s \in E \mid a \leq s \leq b\}$ для $a, b \in E$, $a \leq b$, X – метрическое пространство с метрикой $d = d(\cdot, \cdot)$, X^E – множество всех отображений $f: E \rightarrow X$ из E в X . Если $f \in X^E$, обозначим через $\omega(f, E) = \sup\{d(f(t), f(s)) \mid t, s \in E\}$ – диаметр образа $f(E)$ или колебание f на множестве E . Для двух отображений $f: E \rightarrow X$ и $\varphi: E_1 \rightarrow E$ их композиция $f \circ \varphi: E_1 \rightarrow X$ определяется обычным образом: $(f \circ \varphi)(\tau) = f(\varphi(\tau))$ для всех $\tau \in E_1$. Запись $P := Q$ или $Q =: P$ означает, что выражение P определено посредством выражения Q .

Обозначим через

$$\mathcal{T}(E) = \{T = \{t_i\}_{i=0}^m \subset E \mid m \in \mathbb{N}, t_{i-1} \leq t_i, i = 1, \dots, m\}$$

множество всех разбиений E конечными упорядоченными наборами точек из E . Для отображения $f: E \rightarrow X$ и разбиения $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ положим

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1})) \quad (2.1)$$

и продолжим эту величину на все множество E по правилу:

$$V(f, E) = \sup\{V(f, T) \mid T \in \mathcal{T}(E)\}. \quad (2.2)$$

Величина $V(f, E) \in [0, \infty]$ называется *полной вариацией (по Жордану)* отображения f на множестве E . Если она конечна, f называется *отображением ограниченной вариации на E* (будем также говорить, что f имеет ограниченную вариацию на E). Если A есть непустое подмножество E , мы полагаем $V(f, A) = V(f|_A, A)$, где $f|_A$ есть сужение f на множество A . По определению считаем, что $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ и $V(f, \emptyset) = 0$, где $\emptyset$ есть пустое множество. Функционал $V: X^E \times 2^E \rightarrow [0, \infty]$ называется *функционалом вариации* (или просто *вариацией*).

Приведенное определение $V(f, E)$ – классическое, и принадлежит К. Жордану (см., например, [2, гл. 4, § 9]). Отметим, что оно пригодно для отображений, определенных на любом линейно упорядоченном множестве E . Многие результаты настоящей работы справедливы и в случае, когда $\leq$ есть линейное упорядочивание на множестве E .

Если выражение под знаком суммы в (2.1) возвести в степень $p > 1$, то равенство (2.2) даст определение вариации отображения f на множестве E в смысле Винера [3]. Свойства вариации по Винеру недавно подробно изучались в работе [4]. Во многом они не схожи со свойствами вариации по Жордану (формально при $p = 1$). Если же определить величину в (2.1) как $\sum_{i=1}^m \Phi(d(f(t_i), f(t_{i-1})))$, где $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ есть возрастающая непрерывная функция, $\Phi(0) = 0$, то из (2.2) получим понятие вариации отображения f в смысле Янга [5]. Понятие вариации по Янгу предполагается изучить в последующих работах.

В данной работе мы представляем результаты с одной стороны усиливающие и дополняющие некоторые результаты работы [6], а с другой – справедливые для отображений ограниченной вариации по Жордану, но не имеющие аналогов для отображений ограниченной вариации по Винеру и Янгу. Приводимые ниже свойства вариации $V(\cdot, \cdot)$ являются почти “аксиоматическими” (см. также [7, § 2.10] и [6, § 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $f: E \rightarrow X$ – произвольное отображение. Имеем:

- (V1) если $t, s \in E$, то $d(f(t), f(s)) \leq \omega(f, E) \leq V(f, E)$ (минимальность);
- (V2) если $A \subset B \subset E$, то $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$ и $V(f, A) \leq V(f, B)$ (монотонность);
- (V3) если $t \in E$, то $V(f, E) = V(f, E_t^-) + V(f, E_t^+)$ (аддитивность);
- (V4) если $E_1 \subset \mathbb{R}$ и $\varphi: E_1 \rightarrow E$ – (не обязательно строго) монотонная функция, то $V(f, \varphi(E_1)) = V(f \circ \varphi, E_1)$ (замена переменной в вариации);
- (V5) $V(f, E) = \sup\{V(f, E_a^b) \mid a, b \in E, a \leq b\}$ (регулярность);
- (V6₁) если $s = \sup E \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $s \notin E$, то $V(f, E) = \lim_{E \ni t \rightarrow s} V(f, E_t^-)$;
- (V6₂) если $i = \inf E \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и $i \notin E$, то $V(f, E) = \lim_{E \ni t \rightarrow i} V(f, E_t^+)$;
- (V7) если последовательность отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^E$ поточечно в метрике d сходится к отображению $f \in X^E$ при $n \rightarrow \infty$, то справедливо неравенство: $V(f, E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(f_n, E)$ (полунепрерывность снизу).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (V1) и (V2) вытекают непосредственно из определений.

(V3) Пусть $\mathcal{T}_t(E)$ – множество тех разбиений из $\mathcal{T}(E)$, которые содержат точку t . Любое разбиение T из $\mathcal{T}_t(E)$ однозначно представимо в виде $T = T^- \cup T^+$, где $T^- \in \mathcal{T}_t(E_t^-)$ и $T^+ \in \mathcal{T}_t(E_t^+)$, и наоборот. При этом в силу (2.1) имеем:

$$V(f, T) = V(f, T^-) + V(f, T^+),$$

откуда получаем равенство множеств:

$$\{V(f, T) \mid T \in \mathcal{T}_t(E)\} = \{V(f, T^-) \mid T^- \in \mathcal{T}_t(E_t^-)\} + \{V(f, T^+) \mid T^+ \in \mathcal{T}_t(E_t^+)\}.$$

Осталось привлечь равенство $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, где $A, B \subset [0, \infty)$, а затем предложение 2.2, которое приводится ниже.

(V4) Пусть для определенности φ не убывает. Достаточно заметить, что если $T_1 = \{\tau_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E_1)$, то $T := \{t_i := \varphi(\tau_i)\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(\varphi(E_1))$ в силу монотонности φ , а также, что если $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(\varphi(E_1))$, $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, m$, так что для некоторых $\tau_i \in E_1$ имеем $t_i = \varphi(\tau_i)$, то опять же в силу монотонности φ множество $T_1 := \{\tau_i\}_{i=0}^m$ образует разбиение множества E_1 , причем в обоих случаях

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^m d(f(\varphi(\tau_i)), f(\varphi(\tau_{i-1}))) = V(f \circ \varphi, T_1).$$

(V5) В силу (V2) ясно, что левая часть не меньше, чем правая. С другой стороны, для любого числа $\alpha < V(f, E)$ по определению (2.2) найдется разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ такое, что $V(f, T) \geq \alpha$, но $T \in \mathcal{T}(E_{t_0}^{t_m})$, откуда $V(f, E_{t_0}^{t_m}) \geq V(f, T) \geq \alpha$, что и требовалось.

(V6) Установим, например, (V6₁). Так как $s \notin E$, то s есть предельная точка множества E . Функция $E \ni t \mapsto V(f, E_t^-) \in [0, \infty]$ не убывает в силу (V2), поэтому написанный предел существует в $[0, \infty]$, и очевидно, что он $\leq V(f, E)$. С другой стороны, для любого $\alpha < V(f, E)$ в силу (V5) существуют $a, b \in E$, $a \leq b < s$, такие, что $V(f, E_a^b) \geq \alpha$, откуда при любом $t \in E \cap [b, s) \neq \emptyset$ получаем, что $V(f, E_t^-) \geq V(f, E_a^b) \geq \alpha$, следует и равенство в (V6₁).

(V7) Пусть число $\alpha < V(f, E)$. В силу (2.2) для $\alpha < \beta < V(f, E)$ найдется разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ такое, что $V(f, E) \geq \beta$. В силу поточечной сходимости f_n к f существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$d(f_n(t), f(t)) \leq \delta := (\beta - \alpha)/2m \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall t \in T,$$

откуда вытекает, что при всех $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \beta &\leq V(f, T) = \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1})) \\ &\leq \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f_n(t_i)) + \sum_{i=1}^m d(f_n(t_i), f_n(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^m d(f_n(t_{i-1}), f(t_{i-1})) \\ &\leq m\delta + V(f_n, E) + m\delta = V(f_n, E) + (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Следовательно, $\inf_{n \geq n_0} V(f_n, E) \geq \alpha$, и тем более, $\liminf_{n \rightarrow \infty} V(f_n, E) \geq \alpha$. Остается устремить α к $V(f, E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для отображения $f: E \rightarrow X$ величина $V(f, E)$ из (2.2) не изменится, если при вычислении в ней супремума вместо всех разбиений $\mathcal{T}(E)$ ограничиться рассмотрением только тех из них $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$, у которых среди точек $\{t_i\}_{i=0}^m$ имеется конечное число заранее фиксированных. Иными словами, если разбиение $T_0 \in \mathcal{T}(E)$ фиксировано, и мы положим $\mathcal{T}_{T_0}(E) = \{T = T_0 \cup T_1 \mid T_1 \in \mathcal{T}(E)\}$, то

$$V(f, E) = \sup\{V(f, T) \mid T \in \mathcal{T}_{T_0}(E)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{T}_{T_0} \subset \mathcal{T}(E)$, то левая часть в последнем равенстве не меньше, чем правая. С другой стороны, если $T_1 \in \mathcal{T}(E)$ произвольно, то $T_1 \subset T_0 \cup T_1 \in \mathcal{T}_{T_0}(E)$, поэтому

$$V(f, T_1) \leq V(f, T_0 \cup T_1) \leq \sup\{V(f, T) \mid T \in \mathcal{T}_{T_0}(E)\};$$

значит, левая часть не больше, чем правая, и равенство установлено.

В частности, если $E = [a, b]$ есть отрезок, $f: [a, b] \rightarrow X$ и

$$\mathcal{T}_a^b = \{T = \{t_i\}_{i=0}^m \subset [a, b] \mid m \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\},$$

то в силу предложения 2.2 имеем:

$$V_a^b(f) := \sup\{V(f, T) \mid T \in \mathcal{T}_a^b\} = V(f, [a, b]).$$

§3. Структурная теорема

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: E \rightarrow X$ называется *липшицевым*, если найдется постоянная $C \geq 0$ такая, что $d(f(t), f(s)) \leq C|t - s|$ для всех $t, s \in E$. Наименьшее число C , удовлетворяющее указанному неравенству, называется *константой Липшица* отображения f и обозначается через $\text{Lip}(f)$.

Отображение $g: E \rightarrow X$ называется *натуральным*, если $V(g, E_a^b) = b - a$ для всех $a, b \in E$, $a \leq b$. Натуральное отображение $g: E \rightarrow X$ является липшицевым с константой Липшица $\text{Lip}(g) \leq 1$, поскольку в силу (V1) имеем:

$$d(g(t), g(s)) \leq V(g, E_t^s) = s - t, \quad t, s \in E, \quad t \leq s.$$

Отображение $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *абсолютно непрерывным*, если существует (произвольная) функция $\delta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого конечного набора $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^N$ непересекающихся подинтервалов в $[a, b]$ из условия $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \delta(\varepsilon)$ вытекает, что $\sum_{n=1}^N d(f(b_n), f(a_n)) \leq \varepsilon$. Такие отображения f мы будем также называть $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывными.

Ясно, что липшицево отображение $f: [a, b] \rightarrow X$ является $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывным (например, при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \text{Lip}(f)$, $\varepsilon > 0$), а $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывное отображение имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ (доказательство последнего утверждения – стандартное).

Главный результат настоящего параграфа – следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *Отображение $f: E \rightarrow X$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда найдутся неубывающая ограниченная функция $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ и натуральное отображение $g: \varphi(E) \rightarrow X$ (и, значит, g – липшицево с константой $\text{Lip}(g) \leq 1$) такие, что $f = g \circ \varphi$ на E .*

Более того, если f – липшицево (соответственно $E = [a, b]$ и f – абсолютно непрерывно), то φ также липшицева (соответственно абсолютно непрерывна).

Доказательство этой теоремы содержится в следующих двух леммах. Первая из них (достаточность) дает множество типичных примеров отображений ограниченной вариации.

ЛЕММА 3.2. *Пусть $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция, $g: \varphi(E) \rightarrow X$ – липшицево отображение и $f = g \circ \varphi$. Тогда*

- (а) *если φ монотонна и ограничена, то f имеет ограниченную вариацию на E , причем $V(f, E) \leq \text{Lip}(g) \cdot \omega(\varphi, E)$;*
- (б) *если φ липшицева функция, то f – липшицево отображение на E , причем $\text{Lip}(f) \leq \text{Lip}(g) \cdot \text{Lip}(\varphi)$;*
- (с) *если $E = [a, b]$ и φ абсолютно непрерывна, то f – абсолютно непрерывное отображение на $[a, b]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Предположим для определенности, что φ неубывающая. Поскольку

$$\varphi(E \cap [a, b]) = \varphi(E) \cap [\varphi(a), \varphi(b)], \quad a, b \in E, \quad a \leq b, \quad (3.1)$$

то в силу (V4) имеем:

$$V(f, E_a^b) = V(g \circ \varphi, E_a^b) = V(g, \varphi(E_a^b)) = V(g, \varphi(E)_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}).$$

Если $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ есть разбиение множества в (3.1), то

$$V(g, T) \leq \text{Lip}(g) \cdot \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \leq \text{Lip}(g) \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)),$$

откуда

$$V(f, E_a^b) \leq \text{Lip}(g) \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)) \quad \forall a, b \in E, \quad a \leq b.$$

Из свойства (V5), монотонности и ограниченности φ получаем:

$$V(f, E) \leq \text{Lip}(g) \cdot \left(\sup_{t \in E} \varphi(t) - \inf_{t \in E} \varphi(t) \right) = \text{Lip}(g) \cdot \omega(\varphi, E) < \infty.$$

Для невозрастающей функции φ доказательство аналогично.

(б) Для $t, s \in E$ имеем:

$$\begin{aligned} d(f(t), f(s)) &= d(g(\varphi(t)), g(\varphi(s))) \\ &\leq \text{Lip}(g) \cdot |\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \text{Lip}(g) \cdot \text{Lip}(\varphi) \cdot |t - s|. \end{aligned}$$

(с) Если $a \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_N < b_N \leq b$, то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N d(f(b_n), f(a_n)) &= \sum_{n=1}^N d(g(\varphi(b_n)), g(\varphi(a_n))) \\ &\leq \text{Lip}(g) \sum_{n=1}^N |\varphi(b_n) - \varphi(a_n)|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если $\varphi - \delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывная функция, то положим

$$\delta_1(\varepsilon) = \delta(\varepsilon / \max\{1, \text{Lip}(g)\}), \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда для $\varepsilon > 0$ из условия $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \delta_1(\varepsilon)$ и неравенства (3.2) вытекает, что $\sum_{n=1}^N d(f(b_n), f(a_n)) \leq \varepsilon$, т.е. f есть $\delta_1(\cdot)$ -абсолютно непрерывное отображение на $[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если в лемме 3.2(a) отображение g натурально, то имеем: $V(f, E_a^b) = |\varphi(b) - \varphi(a)|$ для $a, b \in E$, $a \leq b$, а потому $V(f, E) = \omega(\varphi, E)$. В частности, если $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная ограниченная функция, то, полагая в лемме 3.2(a) $X = \mathbb{R}$, $\varphi = f$ и $g(s) = s$ для $s \in f(E)$, найдем, что $V(f, E) = \omega(f, E) < \infty$.

2) Если $f: E \rightarrow X$ — липшицево отображение и $E \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество, то

$$V(f, E) \leq \text{Lip}(f) \cdot (\sup E - \inf E). \quad (3.3)$$

Чтобы увидеть это, в лемме 3.2(a) достаточно положить $\varphi(t) = t$ для $t \in E$ и $g = f$.

Вторая лемма (необходимость) представляет каноническое разложение отображения ограниченной вариации.

ЛЕММА 3.3. Пусть $f: E \rightarrow X$ — отображение ограниченной вариации. Тогда найдется неубывающая ограниченная (неотрицательная) функция $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ и натуральное отображение $g: E_1 = \varphi(E) \rightarrow X$ такие, что

- (a) $f = g \circ \varphi$ на E ;
- (b) $g(E_1) = f(E)$ в X ;
- (c) $V(g, E_1) = V(f, E)$.

Если, в дополнение, f — липшицево отображение, то φ можно выбрать липшицевой с константой $\text{Lip}(\varphi) \leq \text{Lip}(f)$, а если $E = [a, b]$ и $f - \delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывное отображение, то φ можно выбрать $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Положим $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$ для $t \in E$. Тогда функция $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ корректно определена, ограничена ($\varphi(t) \leq V(f, E)$), неотрицательна и не убывает на E благодаря (V2). Для $\tau \in E_1$ обозначим через $\varphi^{-1}(\tau) = \{t \in E \mid \varphi(t) = \tau\}$ обратный прообраз одноточечного множества $\{\tau\}$ при отображении φ . Теперь определим искомое отображение $g: E_1 \rightarrow X$ следующим образом: если $\tau \in E_1$, положим

$$g(\tau) = f(t) \quad \text{для любой точки } t \in \varphi^{-1}(\tau). \quad (3.4)$$

Это корректно, т.е. $f(t)$ — один и тот же элемент из X для всех $t \in \varphi^{-1}(\tau)$, поскольку ввиду (V1) и (V3) имеем:

$$d(f(s), f(t)) \leq V(f, E_t^s) = \varphi(s) - \varphi(t), \quad t \in E, \quad s \in E_t^+; \quad (3.5)$$

таким образом, если $t, s \in \varphi^{-1}(\tau)$ и $t \leq s$, то $\varphi(t) = \tau = \varphi(s)$, а потому $f(t) = f(s)$.

Представление f из (а) теперь вытекает из (3.4), так как если $t \in E$, то t принадлежит $\varphi^{-1}(\tau)$, где $\tau := \varphi(t) \in E_1$, поэтому в силу (3.4) имеем: $f(t) = g(\tau) = g(\varphi(t)) = (g \circ \varphi)(t)$. Утверждения (б) и (с) являются следствиями (а) и (V4).

Осталось проверить, что g — натуральное отображение. Подобно (3.1) имеем:

$$(E_1)_\tau^- = \varphi(E_t^-) \quad \text{для любых } \tau \in E_1 \text{ и } t \in \varphi^{-1}(\tau),$$

поэтому ввиду (V4) находим, что

$$V(g, (E_1)_\tau^-) = V(g, \varphi(E_t^-)) = V(g \circ \varphi, E_t^-) = V(f, E_t^-) = \varphi(t) = \tau.$$

Следовательно, если $\alpha, \beta \in E_1$, $\alpha \leq \beta$, то в силу (V3) заключаем, что

$$V(g, (E_1)_\alpha^\beta) = V(g, (E_1)_\beta^-) - V(g, (E_1)_\alpha^-) = \beta - \alpha.$$

2. Покажем, что если $f: E \rightarrow X$ — липшицево, то функция φ , определенная в шаге 1, также липшицева. Для $t, s \in E$, $s \leq t$, в силу (V3) получаем:

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = V(f, E_t^-) - V(f, E_s^-) = V(f, E_s^t) \leq \text{Lip}(f) \cdot (t - s).$$

Последнее неравенство вытекает из того, что для любого $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E_s^t)$ имеем:

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1})) \leq \text{Lip}(f) \cdot (t_m - t_0) \leq \text{Lip}(f) \cdot (t - s).$$

3. Пусть теперь $f: [a, b] \rightarrow X$ — $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывное отображение и $\varphi(t) = V_a^t(f)$, $t \in [a, b]$. Покажем, что φ также $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывна.

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию для любого набора точек $a \leq t_{11} < t_{12} \leq \dots \leq t_{N1} < t_{N2} \leq b$ таких, что $\sum_{n=1}^N (t_{n2} - t_{n1}) \leq \delta(\varepsilon)$, вытекает, что

$$\sum_{n=1}^N d(f(t_{n2}), f(t_{n1})) \leq \varepsilon.$$

Зафиксируем такой набор точек $a \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_N < b_N \leq b$, что $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \delta(\varepsilon)$. Для каждого $n = 1, \dots, N$ и $k \in \mathbb{N}$ пусть $T_n = \{t_{n,i}\}_{i=0}^{m_n}$ есть разбиение отрезка $[a_n, b_n]$ такое, что

$$V_{a_n}^{b_n}(f) \leq V(f, T_n) + (\varepsilon/Nk).$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{m_n} (t_{n,i} - t_{n,i-1}) = \sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \delta(\varepsilon),$$

то имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| &= \sum_{n=1}^N V_{a_n}^{b_n}(f) \leq \sum_{n=1}^N V(f, T_n) + (\varepsilon/k) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{m_n} d(f(t_{n,i}), f(t_{n,i-1})) + (\varepsilon/k) \leq \varepsilon + (\varepsilon/k). \end{aligned}$$

В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ из последнего неравенства заключаем, что из неравенства $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \delta(\varepsilon)$ вытекает, что $\sum_{n=1}^N |\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| \leq \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Отметим, что отображение g из доказательства леммы 3.3 обладает свойством: если $\alpha, \beta \in E_1$ и $t \in \varphi^{-1}(\alpha)$, $s \in \varphi^{-1}(\beta)$, то $d(g(\alpha), g(\beta)) = d(f(t), f(s))$.

2) В случае, когда функция $\varphi: E \rightarrow E_1$ строго возрастает, она является биекцией, так что равенство $f = g \circ \varphi$ на E эквивалентно равенству $g = f \circ \varphi^{-1}$ на E_1 , где $\varphi^{-1}: E_1 \rightarrow E$ — обратная функция к φ .

3) Для вещественнозначных функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место также *разложение Жордана*: функция f имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она представляется в виде разности двух неубывающих ограниченных функций на E . Достаточность вытекает из того, что монотонная ограниченная функция имеет ограниченную вариацию (см. замечание 1) после леммы 3.2) и разность двух таких функций — снова функция ограниченной вариации. Необходимость вытекает из равенства $f = \varphi - (\varphi - f)$, где $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$, $t \in E$, и неравенства (3.5), так как если $t, s \in E$, $t \leq s$, то $f(s) - f(t) \leq \varphi(s) - \varphi(t)$ или $(\varphi - f)(t) \leq (\varphi - f)(s)$. Таким образом, разложение Жордана — это весьма специфическая особенность вещественнозначных функций.

Ниже мы вкратце остановимся на алгебраическом аспекте конструкции натурального отображения g из леммы 3.3. Его построение восходит к понятию *факторизации отображения*. Отображение $\varphi: E \rightarrow E_1$ индуцирует отношение эквивалентности на E : $t \sim s$ в $E \iff \varphi(t) = \varphi(s)$ в E_1 . Обозначим через $\bar{t} = \{s \in E \mid s \sim t\}$ класс эквивалентности элемента $t \in E$ в фактормножестве $E/\varphi := E/\sim$ по этому отношению эквивалентности, и пусть $\pi: E \rightarrow E/\varphi$ — каноническая сюръекция, определенная равенством $\pi(t) = \bar{t}$ для $t \in E$. Тогда $\bar{t} = \varphi^{-1}(\tau)$, где $\tau := \varphi(t) \in \varphi(E)$, и если мы положим $\bar{\varphi}(\bar{t}) = \varphi(s)$ для $s \in \bar{t}$, или, что то же, $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$, то отображение $\bar{\varphi}: E/\varphi \rightarrow E_1$ корректно определено и называется *факторизацией* φ . Другими словами, мы полагаем $\bar{\varphi}(\varphi^{-1}(\tau)) = \tau$ для $\tau \in \varphi(E)$, так что φ (всегда) инъективно. Вообще говоря, $\bar{\varphi}$ не сюръективно, но если сюръективна φ , как в лемме 3.3, то этим же свойством обладает и $\bar{\varphi}$, а значит, биекция $\bar{\varphi}$ имеет обратное отображение $\bar{\varphi}^{-1}: E_1 \rightarrow E/\varphi$, которое задается равенством $\bar{\varphi}^{-1}(\tau) = \varphi^{-1}(\tau)$ для $\tau \in E_1 = \varphi(E)$.

Если задано еще одно отображение $f: E \rightarrow X$ (нарисуйте диаграмму), определим $\hat{f}: E/\varphi \rightarrow X$ равенством $\hat{f}(\bar{t}) = f(s)$ для $\bar{t} \in E/\varphi$ и $s \in \bar{t}$, так что $\hat{f} \circ \pi = f$. Отображение $\hat{f}$ определено корректно, только если из того, что $t, s \in E$ и $t \sim s$ вытекает $f(t) = f(s)$ в X , а это выполнено в лемме 3.3 благодаря неравенству (3.5).

Если теперь $g := \hat{f} \circ \bar{\varphi}^{-1}: E_1 \rightarrow X$, то $\hat{f} = g \circ \bar{\varphi}$, и мы получаем “характеристическое” представление из леммы 3.3(а):

$$f = \hat{f} \circ \pi = (g \circ \bar{\varphi}) \circ \pi = g \circ (\bar{\varphi} \circ \pi) = g \circ \varphi.$$

Различие отображений f и g теперь хорошо видно из их разложений:

$$f = \hat{f} \circ \pi = \hat{f} \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi \quad \text{и} \quad g = \hat{f} \circ \bar{\varphi}^{-1}. \quad (3.6)$$

Отметим, что если $\varphi: E \rightarrow E_1$ строго возрастает, то φ — биекция, а потому $E/\varphi = E$, $\bar{\varphi} = \varphi$, $\hat{f} = f$ и $g = f \circ \varphi^{-1}$.

Рассмотрим еще один аспект конструкции натурального отображения g с точки зрения непрерывности входящих в разложения (3.6) отображений. Начнем с общих замечаний. Если E — некоторое топологическое пространство, $\sim$ есть некоторое отношение эквивалентности на E , $E/\sim$ — фактормножество E по этому отношению эквивалентности и $\pi: E \rightarrow E/\sim$ — каноническая сюръекция, то в $E/\sim$ можно ввести (фактор)топологию следующим образом: множество $U \subset E/\sim$ называется *открытым*, если его прообраз $\pi^{-1}(U) \subset E$ открыт. Множество $E/\sim$ с введенной в нем фактортопологией называется *факторпространством* пространства E . По самому определению топологии в $E/\sim$ отображение $\pi: E \rightarrow E/\sim$ является непрерывным. Имеет место следующее (общее) утверждение: если G — топологическое пространство, то отображение $\gamma: E/\sim \rightarrow G$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\gamma \circ \pi: E \rightarrow G$ непрерывна. (Вообще говоря, из непрерывности композиции двух отображений, одно из которых непрерывно, не всегда следует непрерывность второго отображения.) Действительно, пусть $\gamma \circ \pi$ непрерывна и $W \subset G$ открыто, тогда множество $\pi^{-1}(\gamma^{-1}(W)) = (\gamma \circ \pi)^{-1}(W)$ открыто в E в силу непрерывности $\gamma \circ \pi$, а потому $\gamma^{-1}(W)$ открыто в $E/\sim$ в силу определения фактортопологии. Обратное утверждение очевидно, так как композиция двух непрерывных отображений всегда непрерывна.

Пусть теперь $f: E \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Из теоремы 4.3(а) следует, что тогда и $\varphi: E \rightarrow E_1$ непрерывна. Следовательно, отображения $\bar{\varphi}: E/\varphi \rightarrow E_1$ и $\hat{f}: E/\varphi \rightarrow X$ непрерывны, так как непрерывны отображения $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ и $f = \hat{f} \circ \pi$. Однако, факторизация $\bar{\varphi}$ отображения φ , являясь инъективным (биективным в лемме 3.3) и непрерывным отображением, не всегда является гомеоморфизмом, т.е. обладает непрерывным обратным $\bar{\varphi}^{-1}: E_1 \rightarrow E/\varphi$. Тем не менее, в лемме 3.3 отображение $g: E_1 \rightarrow X$ непрерывно (и даже липшицево). Если E — отрезок и $\varphi: E \rightarrow E_1$ — гомеоморфизм (т.е. φ строго возрастает), то $E/\varphi = E$ и $\bar{\varphi} = \varphi$, так что $\bar{\varphi}$ — гомеоморфизм; если же φ не является гомеоморфизмом (когда φ не возрастает строго), то $\bar{\varphi}^{-1}$ может не быть непрерывным, и основные “искажения” в g по сравнению с f проистекают в результате действия именно этого отображения.

§ 4. Свойства непрерывности и формулы скачков

В этом параграфе мы предполагаем, что X — метрическое пространство с метрикой d , $f: E \rightarrow X$ — фиксированное отображение ограниченной вариации, а функция $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ задана равенством $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$ для $t \in E$. Мы установим свойства непрерывности отображения ограниченной вариации f , а также формулы, связывающие скачки f со скачками ее функции вариации φ .

Множество всех предельных точек для множества $E \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через E' . Для $t \in E$ мы полагаем $E_t^{-'} = (E_t^-)'$ и $E_t^{+'} = (E_t^+)'$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $t \in E$.

- (а) Если $t \in E_t^{\pm'}$, то $d(f(t), f(s))$ имеет предел в $[0, \infty)$ при $E \ni s \rightarrow t \pm 0$. Более того, если X полное, то при $E \ni s \rightarrow t \pm 0$ отображение $f(s)$ имеет односторонний предел в X , обозначаемый через $f(t\pm)$, и величина $d(f(s), f(t))$ стремится к $d(f(t\pm), f(t))$.
- (б) Если $t \in E_t^{-'} \cap E_t^{+'}$, то при $E \ni a \rightarrow t - 0$, $E \ni b \rightarrow t + 0$ величина $d(f(b), f(a))$ имеет предел в $[0, \infty)$, а если, к тому же, X полное, то $d(f(b), f(a))$ стремится к $d(f(t+), f(t-))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $t \in E$ — предельная точка E_t^- . Если $s_1, s_2 \in E$, $s_1 \leq s_2 < t$, то в силу (V1) и (V3) имеем:

$$\begin{aligned} |d(f(t), f(s_1)) - d(f(t), f(s_2))| &\leq d(f(s_1), f(s_2)) \leq V(f, E_{s_1}^{s_2}) \\ &= V(f, E_{s_2}^-) - V(f, E_{s_1}^-) = \varphi(s_2) - \varphi(s_1). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Так как функция φ неубывающая и ограниченная, то предел $\lim_{E \ni s \rightarrow t-0} \varphi(s)$, обозначаемый через $\varphi(t-)$, существует в $[0, \infty)$ и равен $\sup\{\varphi(s) \mid s \in E_t^-, s \neq t\}$. Теперь существование предела $d(f(t), f(s))$ при $E \ni s \rightarrow t - 0$ вытекает из (4.1) и критерия Коши в $\mathbb{R}$.

Пусть теперь X полное. Как и в (4.1), для $s_1, s_2 \in E$, $s_1 \leq s_2 < t$, имеем: $d(f(s_1), f(s_2)) \leq \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$, так что существование предела слева $f(t-) \in X$ вытекает из критерия Коши в полном метрическом пространстве X . Остается заметить, что

$$|d(f(t), f(t-)) - d(f(t), f(s))| \leq d(f(t-), f(s)) \rightarrow 0 \quad \text{при } E \ni s \rightarrow t - 0.$$

Если $t \in E$ — предельная точка E_t^+ , рассуждения вполне аналогичны.

- (б) Устанавливается аналогично (а), если учесть, что для $a_1, a_2, b_1, b_2 \in E$, $a_1 \leq a_2 < t < b_1 \leq b_2$:

$$\begin{aligned} |d(f(b_1), f(a_1)) - d(f(b_2), f(a_2))| &\leq d(f(b_1), f(b_2)) + d(f(a_1), f(a_2)) \\ &\leq \varphi(b_2) - \varphi(b_1) + \varphi(a_2) - \varphi(a_1), \end{aligned}$$

а также, что (в случае, когда X — полное метрическое пространство)

$$|d(f(t+), f(t-)) - d(f(b), f(a))| \leq d(f(t+), f(b)) + d(f(t-), f(a)) \rightarrow 0$$

при $E \ni a \rightarrow t - 0$, $E \ni b \rightarrow t + 0$.

ЛЕММА 4.2. Для $t \in E$ имеют место следующие равенства:

- (а) если $t \in E_t^{-'}$, то $\varphi(t) - \varphi(t-) = \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} d(f(t), f(s))$;
- (б) если $t \in E_t^{+'}$, то $\varphi(t+) - \varphi(t) = \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} d(f(s), f(t))$;
- (с) если $t \in E_t^{-'} \cap E_t^{+'}$, то $\lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} V(f, E_a^b \setminus t) = \lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} d(f(b), f(a)).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности мы установим (б) и (с), поскольку (а) доказывается аналогично и несколько проще, чем (б).

(б) Переходя в неравенстве (3.5) к пределу при $E \ni s \rightarrow t+0$ и учитывая лемму 4.1 (а), получим: $\lim_{E \ni s \rightarrow t+0} d(f(s), f(t)) \leq \varphi(t+) - \varphi(t)$. Чтобы доказать обратное неравенство, достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t_0 = t_0(\varepsilon) \in E$, $t_0 > t$, такое, что

$$\varphi(s) - \varphi(t) \leq d(f(s), f(t)) + \varepsilon \quad \forall s \in E_t^{t_0}. \quad (4.2)$$

Действительно, переходя к пределу при $E \ni s \rightarrow t+0$ в (4.2), найдем, что

$$\varphi(t+) - \varphi(t) \leq \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} d(f(s), f(t)) + \varepsilon,$$

и остается учесть произвольность $\varepsilon > 0$.

Докажем (4.2). Поскольку $V(f, E_t^+) \leq V(f, E) < \infty$ в силу (V2), для $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E_t^+)$, где $t < t_0$, такое, что

$$V(f, E_t^+) \leq d(f(t_0), f(t)) + V(f, T) + \varepsilon.$$

Замечая, что в действительности $T \in \mathcal{T}(E_{t_0}^+)$ и применяя (V1) и (V3), для всех $s \in E_t^{t_0}$ имеем:

$$\begin{aligned} V(f, E_t^+) &\leq d(f(t_0), f(s)) + d(f(s), f(t)) + V(f, E_{t_0}^+) + \varepsilon \\ &\leq V(f, E_s^{t_0}) + d(f(s), f(t)) + V(f, E_{t_0}^+) + \varepsilon \\ &= V(f, E_s^+) + d(f(s), f(t)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, снова применяя (V3), найдем, что

$$V(f, E_s^-) - V(f, E_t^-) = V(f, E_t^+) - V(f, E_s^+) \leq d(f(s), f(t)) + \varepsilon,$$

а последнее неравенство и есть (4.2).

(с) 1. Здесь мы покажем, что, во-первых,

$$d(f(b), f(a)) \leq V(f, E_a^b \setminus t) \quad \forall a \in E_t^-, \quad \forall b \in E_t^+, \quad a < t < b, \quad (4.3)$$

и во-вторых, что

для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $a_0 = a_0(\varepsilon)$, $b_0 = b_0(\varepsilon) \in E$, $a_0 < t < b_0$, такие, что

$$V(f, E_a^b \setminus t) \leq d(f(b), f(a)) + \varepsilon \quad \forall a \in E_{a_0}^t \setminus t, \quad \forall b \in E_t^{b_0} \setminus t. \quad (4.4)$$

Неравенство (4.3) сразу вытекает из (V1). Чтобы доказать (4.4), зафиксируем $\varepsilon > 0$, и по определению вариации $V(f, E \setminus t)$, которая $\leq V(f, E) < \infty$, рассмотрим разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E \setminus t)$ такое, что

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} < t < t_k \leq \dots \leq t_{m-1} \leq t_m \text{ для некоторого } 1 \leq k \leq m$$

и

$$V(f, E \setminus t) \leq V(f, T) + \varepsilon = \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1})) + \varepsilon.$$

Полагая $T_1 = \{t_i\}_{i=0}^{k-1}$, $T_2 = \{t_i\}_{i=k}^m$, $a_0 = t_{k-1}$, $b_0 = t_k$, и замечая, что $T_1 \cup \{a\} \in \mathcal{T}(E_a^-)$ и $T_2 \cup \{b\} \in \mathcal{T}(E_b^+)$ для $a, b \in E$, $a_0 \leq a < t < b \leq b_0$, получим:

$$\begin{aligned} V(f, E \setminus t) &\leq V(f, T_1) + d(f(t_k), f(t_{k-1})) + V(f, T_2) + \varepsilon \\ &\leq V(f, T_1) + d(f(a), f(t_{k-1})) \\ &\quad + d(f(b), f(a)) + d(f(t_k), f(b)) + V(f, T_2) + \varepsilon \\ &\leq V(f, E_a^-) + d(f(b), f(a)) + V(f, E_b^+) + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу (V3) находим, что

$$V(f, E \setminus t) = V(f, E_a^-) + V(f, E_a^b \setminus t) + V(f, E_b^+), \quad (4.5)$$

и это равенство вместе с последними выкладками дает (4.4).

2. Теперь заметим, что предел слева в (с) существует, поскольку в пределе при $E \ni a \rightarrow t-0$, $E \ni b \rightarrow t+0$, имеем:

$$V(f, E_a^b \setminus t) \rightarrow \inf \{V(f, E_a^b \setminus t) \mid a \in E_t^-, b \in E_t^+, a < t < b\} \in [0, \infty). \quad (4.6)$$

Устремляя в неравенствах (4.3) и (4.4) $E \ni a \rightarrow t-0$, $E \ni b \rightarrow t+0$ и учитывая лемму 4.1(b), приходим к неравенствам:

$$\lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} d(f(b), f(a)) \leq \lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} V(f, E_a^b \setminus t) \leq \lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} d(f(b), f(a)) + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то (с) доказано.

ТЕОРЕМА 4.3. (а) *Отображение ограниченной вариации f непрерывно справа в точке $t \in E \setminus \{\sup E\}$ (соответственно слева в точке $t \in E \setminus \{\inf E\}$) тогда и только тогда, когда его функция вариации φ обладает этим же свойством в точке t .*

(б) *Отображение ограниченной вариации f непрерывно на E за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек из E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Если t — изолированная (т.е. не предельная) точка множества E , то утверждение очевидно. Если $t \in E'$, то $t \in E_t^{-'}$ или $t \in E_t^{+'}$; в этом случае утверждение (а) вытекает из леммы 4.2(а), (б).

(б) Неубывающая ограниченная функция φ имеет на E не более чем счетное множество точек разрыва, а в силу (а) множества точек разрыва отображения f и функции φ совпадают.

ЛЕММА 4.4. Пусть $t \in E$. Имеем:

- (а) если $t \in E_t^{-'}$, то $V(f, E_t^-) - V(f, E_t^- \setminus t) = \varphi(t) - \varphi(t-) = \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} V(f, E_s^t)$;
- (б) если $t \in E_t^{+'}$, то $V(f, E_t^+) - V(f, E_t^+ \setminus t) = \varphi(t+) - \varphi(t) = \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} V(f, E_t^s)$;
- (с) f непрерывно слева в точке $t \in E_t^{-'}$ (соответственно справа в точке $t \in E_t^{+'}$) тогда и только тогда, когда $V(f, E_t^-) = V(f, E_t^- \setminus t)$ (соответственно, когда $V(f, E_t^+) = V(f, E_t^+ \setminus t)$);

здесь $\varphi(t\pm) = \lim_{E \ni s \rightarrow t\pm 0} \varphi(s) \in [0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Из свойства (V6₁), где E заменено на $E_t^- \setminus t$, находим, что

$$V(f, E_t^- \setminus t) = \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} V(f, (E_t^- \setminus t)_s^-) = \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} V(f, E_s^-) = \varphi(t-),$$

поэтому из (V3) получаем:

$$\varphi(t) - \varphi(t-) = \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} (V(f, E_t^-) - V(f, E_s^-)) = \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} V(f, E_s^t).$$

- (б) Из свойства (V6₂), где E заменено на $E_t^+ \setminus t$, и свойства (V3) находим, что

$$\begin{aligned} V(f, E_t^+ \setminus t) &= \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} V(f, (E_t^+ \setminus t)_s^+) = \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} V(f, E_s^+) \\ &= V(f, E) - \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} V(f, E_s^-) = V(f, E_t^+) + \varphi(t) - \varphi(t+). \end{aligned}$$

Снова применяя (V3), получаем:

$$\varphi(t+) - \varphi(t) = \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} (V(f, E_t^+) - V(f, E_s^+)) = \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} V(f, E_t^s).$$

- (с) вытекает из (а), (б) и теоремы 4.3(а).

ЛЕММА 4.5. Пусть точка $t \in E$ такая, что $t \in E_t^{-'} \cap E_t^{+'}$. Тогда

- (а) $V(f, E) = V(f, E_t^- \setminus t) + V(f, E_t^+ \setminus t) + (\varphi(t+) - \varphi(t-))$, причем f непрерывно в точке t тогда и только тогда, когда выполнено равенство $V(f, E) = V(f, E_t^- \setminus t) + V(f, E_t^+ \setminus t)$;
- (б) $V(f, E) = V(f, E \setminus t) + (\varphi(t+) - \varphi(t-)) - \lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} V(f, E_a^b \setminus t)$, причем

если f непрерывно в точке t , то $V(f, E) = V(f, E \setminus t)$; обратное к последнему утверждение, вообще говоря, неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Равенство в (а) получается сложением равенств (а) и (б) из леммы 4.4 и последующим применением (V3), а утверждение в (а) следует из леммы 4.4(с), равенства в (а) и неравенств $\varphi(t-) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t+)$.

(б) Докажем вначале равенство в (б). Принимая во внимание (V3) и (4.5), для $a, b \in E$ таких, что $a < t < b$, имеем:

$$\begin{aligned} V(f, E) - V(f, E \setminus t) &= V(f, E_a^-) + V(f, E_a^b) + V(f, E_b^+) - (V(f, E_a^-) + V(f, E_a^b \setminus t) + V(f, E_b^+)) \\ &= \varphi(b) - \varphi(a) - V(f, E_a^b \setminus t). \end{aligned}$$

Осталось учесть, что при $E \ni a \rightarrow t-0$, $E \ni b \rightarrow t+0$ имеет место (4.6) и

$$\varphi(b) - \varphi(a) \rightarrow \varphi(t+) - \varphi(t-) = (\varphi(t) - \varphi(t-)) + (\varphi(t+) - \varphi(t)). \quad (4.7)$$

Если f непрерывно в t , то предел (4.7) равен нулю в силу леммы 4.2(а), (б), а предел (4.6) равен нулю в силу леммы 4.2(с), откуда и следует первая часть утверждения в (б). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: пусть, например, $E = [-1, 1]$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f = -1$ на $[-1, 0)$, $f(0) = 0$, $f = 1$ на $(0, 1]$ и $t = 0$ (см. формулу (4.9) ниже).

Из приведенных выше рассуждений сразу вытекает следующая

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $f: E \rightarrow X$ — отображение ограниченной вариации. Тогда:

- (а) если $t \in E_t^{-\prime}$, то $V(f, E_t^-) = V(f, E_t^- \setminus t) + \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} d(f(t), f(s))$;
- (б) если $t \in E_t^{+\prime}$, то $V(f, E_t^+) = V(f, E_t^+ \setminus t) + \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} d(f(s), f(t))$;
- (с) если же $t \in E_t^{-\prime} \cap E_t^{+\prime}$, то

$$\begin{aligned} V(f, E) &= V(f, E_t^- \setminus t) + V(f, E_t^+ \setminus t) \\ &\quad + \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} d(f(t), f(s)) + \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} d(f(s), f(t)), \\ V(f, E) &= V(f, E \setminus t) + \lim_{E \ni s \rightarrow t-0} d(f(t), f(s)) \\ &\quad + \lim_{E \ni s \rightarrow t+0} d(f(s), f(t)) - \lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} d(f(b), f(a)), \quad (4.8) \\ V(f, E \setminus t) &= V(f, E_t^- \setminus t) + V(f, E_t^+ \setminus t) + \lim_{\substack{E \ni a \rightarrow t-0 \\ E \ni b \rightarrow t+0}} d(f(b), f(a)). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если X — полное метрическое пространство, то с учетом леммы 4.1 формулы из теоремы 4.6 видоизменяются естественным образом: нужно знак предела “втасить” под знак метрики; так, например, равенство (4.8) примет следующий более приятный вид:

$$V(f, E) = V(f, E \setminus t) + d(f(t), f(t-)) + d(f(t+), f(t)) - d(f(t+), f(t-)). \quad (4.9)$$

Последнее равенство, а также и другие равенства из теоремы 4.6 представляют собой своего рода “предельные формы” более элементарных равенств. Если, например, $T \subset E$ есть множество из $(m+2)$ -х точек

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t \leq t_k \leq \dots \leq t_{m-1} \leq t_m,$$

то очевидно, что

$$V(f, T) = V(f, T \setminus t) + d(f(t), f(t_{k-1})) + d(f(t_k), f(t)) - d(f(t_k), f(t_{k-1})).$$

Это последнее равенство имеет “предел” в виде равенства (4.9).

Формулы из теоремы 4.6 интересны даже в случае отрезка $E = [a, b]$:

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Пусть X – полное метрическое пространство и $f: E \rightarrow X$ – отображение ограниченной вариации. Тогда имеем:

- (a) $V(f, [a, t)) = V_a^t(f) - d(f(t), f(t-)), t \in (a, b];$
- (b) $V(f, (t, b]) = V_t^b(f) - d(f(t+), f(t)), t \in [a, b);$
- (c) $V_a^b(f) = V(f, [a, t)) + V(f, (t, b]) + d(f(t), f(t-)) + d(f(t+), f(t)), t \in (a, b);$
- (d) $V(f, [a, b] \setminus t) = V_a^b(f) - d(f(t), f(t-)) - d(f(t+), f(t)) + d(f(t+), f(t-)), t \in (a, b);$
- (e) $V(f, [a, b] \setminus t) = V(f, [a, t)) + V(f, (t, b]) + d(f(t+), f(t-)), t \in (a, b);$
- (f) $V(f, (a, b)) = V_a^b(f) - d(f(a+), f(a)) - d(f(b), f(b-)).$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти же самые формулы из следствия 4.7 получены также в работе [6] из несколько других соображений. Они не имеют аналогов для вариации в смысле Винера [4], называемой также p -вариацией, если $p > 1$.

§ 5. Принцип выбора Хелли

Основной результат этого параграфа – это теорема о компактности для отображений ограниченной вариации, которая является обобщением на метрически-и банахово-значные отображения классического принципа выбора Хелли (см., например, [1, гл. 8, § 4, теорема Хелли]).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть K – компактное подмножество метрического пространства X и $\mathcal{F} \subset C([a, b]; K)$ – бесконечное семейство непрерывных отображений из отрезка $[a, b]$ в K равномерно ограниченной вариации, т.е. $\sup_{f \in \mathcal{F}} V_a^b(f) < \infty$. Тогда найдется последовательность отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, которая поточечно на $[a, b]$ сходится к некоторому отображению $f: [a, b] \rightarrow K$ ограниченной вариации такому, что $V_a^b(f) \leq \sup_{f_1 \in \mathcal{F}} V_a^b(f_1)$.

Более того, если X – банахово пространство (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то условие непрерывности отображений из семейства $\mathcal{F}$ излишне.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1 (общая часть). По теореме 3.1 любое отображение $f \in \mathcal{F}$ может быть представлено в виде $f = g_f \circ \varphi_f$ на $[a, b]$, где $\varphi_f(t) = V_a^t(f)$, $t \in [a, b]$, и $g_f: E_{1f} = \varphi_f([a, b]) \rightarrow K$ – липшицево отображение с константой $\text{Lip}(g_f) \leq 1$. Заметим, что φ_f неубывающая, неотрицательная и $\varphi_f(a) = 0$. Семейство неубывающих функций $\{\varphi_f \mid f \in \mathcal{F}\}$ бесконечно и равномерно ограничено на $[a, b]$ (поскольку $\omega(\varphi_f, [a, b]) = \varphi_f(b) = V_a^b(f)$), поэтому в силу известного факта из [1, гл. 8, § 4, лемма 2] это семейство содержит последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, отвечающую разложению $f_n = g_n \circ \varphi_n$ (т.е. $\varphi_n = \varphi_{f_n}$ и $g_n = g_{f_n}$) для всех $n \in \mathbb{N}$, которая поточечно на $[a, b]$ сходится к некоторой неубывающей (и ограниченной) функции $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Положим $\ell = V_a^b(\varphi) = \varphi(b)$, так что $0 \leq \ell < \infty$, причем если $\ell_n = V_a^b(f_n)$, то $\ell_n = V_a^b(\varphi_n) = \varphi_n(b)$ и $\ell_n \rightarrow \ell$ при $n \rightarrow \infty$.

Шаг 2. Пусть выполнены условия первой части теоремы. Так как $f_n \in \mathcal{F}$ непрерывно, то и φ_n также непрерывно на $[a, b]$ (теорема 4.3(a)), а потому липшицево отображение g_n определено на отрезке $E_{1n} = \varphi_n([a, b]) = [0, \ell_n]$. Если $\ell_n \geq \ell$, то мы будем рассматривать g_n только на отрезке $[0, \ell]$, а если $\ell_n < \ell$, то продолжим g_n на $(\ell_n, \ell]$ следующим образом: $g_n(\tau) = g_n(\ell_n)$ для $\tau \in (\ell_n, \ell]$. По теореме Арцела–Асколи последовательность липшицевых отображений $g_n: [0, \ell] \rightarrow K$ с

константами $\text{Lip}(g_n) \leq 1$ предкомпактна в $C([0, \ell]; K)$, поэтому она содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Если $g: [0, \ell] \rightarrow K$ есть равномерный предел $\{g_{n_k}\}$, то ясно, что g — липшицево с константой $\text{Lip}(g) \leq 1$, так что в силу леммы 3.2 композиция $f = g \circ \varphi: [a, b] \rightarrow X$ есть отображение ограниченной вариации. Если теперь $t \in [a, b]$, то имеем:

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(t), f(t)) &= d((g_{n_k} \circ \varphi_{n_k})(t), (g \circ \varphi)(t)) \\ &\leq d(g_{n_k}(\varphi_{n_k}(t)), g_{n_k}(\varphi(t))) + d(g_{n_k}(\varphi(t)), g(\varphi(t))) \\ &\leq |\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)| + d(g_{n_k}(\varphi(t)), g(\varphi(t))). \end{aligned}$$

Слагаемые последней суммы стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, поэтому последовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ поточечно на $[a, b]$ сходится к f . Неравенство в теореме вытекает из свойства (V7).

Шаг 3. Пусть X — банахово пространство. Прежде чем доказывать, что предположение о непрерывности семейства $\mathcal{F}$ можно опустить, покажем, что если $g: E \rightarrow X$ — липшицево отображение, то его можно продолжить на $\mathbb{R}$ до липшицево отображения $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow X$ такого, что $\text{Lip}(\tilde{g}) \leq \text{Lip}(g)$.

Поскольку отображение g равномерно непрерывно на E , оно допускает продолжение $g_1: \overline{E} \rightarrow X$ на замыкание $\overline{E}$ множества E , так что g_1 — липшицево и $\text{Lip}(g_1) \leq \text{Lip}(g)$. Положим $\tilde{g} = g_1$ на $\overline{E}$. Дополнение $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ множества $\overline{E}$ в $\mathbb{R}$ открыто и, значит, является не более чем счетным объединением непересекающихся открытых интервалов (a_k, b_k) . На ограниченных интервалах (a_k, b_k) определим $\tilde{g}$ следующим образом:

$$\tilde{g}(t) = g_1(a_k) + \mu_k(t - a_k), \quad \mu_k := \frac{g_1(b_k) - g_1(a_k)}{b_k - a_k}, \quad t \in (a_k, b_k).$$

Если $a_k = -\infty$, то полагаем $\tilde{g}(t) = g_1(b_k)$ для всех $t \in (-\infty, b_k]$, а если $b_k = \infty$, то полагаем $\tilde{g}(t) = g_1(a_k)$ для всех $t \in [a_k, \infty)$.

Если $\|\cdot\|$ обозначает норму в X , то $\|\mu_k\| \leq \text{Lip}(g_1) \leq \text{Lip}(g)$, поэтому в случае, когда $b_k - a_k < \infty$, для всех $t, s \in [a_k, b_k]$ имеем:

$$\|\tilde{g}(t) - \tilde{g}(s)\| = \|\mu_k\| \cdot |(t - a_k) - (s - a_k)| \leq \text{Lip}(g) \cdot |t - s|.$$

Заметим, что если $a_k = -\infty$ (или $b_k = \infty$), то $\tilde{g}$ есть постоянное отображение на $(-\infty, b_k]$ (или на $[a_k, \infty)$).

Осталось проверить, что $\tilde{g}$ — липшицево отображение на $\mathbb{R}$. Возможны три случая: 1) $t \in \overline{E}$, $s \in \overline{E}$, 2) $t \in \overline{E}$, $s \notin \overline{E}$ и 3) $t \notin \overline{E}$, $s \notin \overline{E}$. Случай 1) ясен из сказанного выше. В случае 2) предположим, что $s \in (a_k, b_k)$ и $b_k \leq t$. Тогда в силу неравенства треугольника получаем:

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(t) - \tilde{g}(s)\| &\leq \|g_1(t) - g_1(b_k)\| + \|g_1(b_k) - \tilde{g}(s)\| \\ &\leq \text{Lip}(g) \cdot ((t - b_k) - (b_k - s)) = \text{Lip}(g) \cdot |t - s|. \end{aligned}$$

В случае 3) предположим, что $t \in (a_m, b_m)$, $s \in (a_k, b_k)$ и $b_k \leq a_m$. Снова в силу неравенства треугольника находим, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(t) - \tilde{g}(s)\| &\leq \|\tilde{g}(t) - g_1(a_m)\| + \|g_1(a_m) - g_1(b_k)\| + \|g_1(b_k) - \tilde{g}(s)\| \\ &\leq \text{Lip}(g) \cdot ((t - a_m) + (a_m - b_k) + (b_k - s)) = \text{Lip}(g) \cdot |t - s|. \end{aligned}$$

Шаг 4. Пусть X – банахово пространство и $\mathcal{F}$ – бесконечное семейство отображений из $[a, b]$ в K равномерно ограниченной вариации. Вначале мы рассуждаем, как в шаге 1. Заметим, что в нашем случае $E_{1n} = \varphi_n([a, b]) \subset [0, \ell_n]$. К тому же, если $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$, то $0 \leq L < \infty$ и $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n \leq L$. Обозначим через $\overline{g_n}$ сужение на $[0, L]$ отображения $\widetilde{g_n}$ из шага 3. По теореме Арцела–Асколи последовательность липшицевых отображений $\overline{g_n}: [0, L] \rightarrow K$ с константами Липшица $\text{Lip}(\overline{g_n}) \leq 1$ имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\overline{g_{n_k}}\}_{k=1}^\infty$, равномерный предел которой мы обозначим через $\overline{g}$. Ясно, что $\overline{g}: [0, L] \rightarrow K$ – липшицево отображение с константой $\text{Lip}(\overline{g}) \leq 1$. Положим $E_1 = \varphi([a, b])$ и обозначим через g – сужение $\overline{g}$ на E_1 . В силу леммы 3.2 отображение $f = g \circ \varphi: [a, b] \rightarrow K$ имеет ограниченную вариацию. Если теперь $t \in [a, b]$, то так же, как в шаге 2, имеем:

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(t), f(t)) &= d(\overline{g_{n_k}}(\varphi_{n_k}(t)), \overline{g}(\varphi(t))) \\ &\leq |\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)| + d(\overline{g_{n_k}}(\varphi(t)), \overline{g}(\varphi(t))), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Остается открытым вопрос о том, можно ли условие “ $\mathcal{F}$ из $K^{[a, b]}$, где $K \subset X$ компактно” в теореме 5.1 заменить на более слабое условие: “при любом $t \in [a, b]$ сечение $\mathcal{F}(t) = \{f(t) \in X \mid f \in \mathcal{F}\}$ предкомпактно в X ”.

2) Предположение о непрерывности семейства $\mathcal{F}$ еще не означает, что предельное отображение f также непрерывно. Действительно, последовательность $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, определенная правилом

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & \text{если } t \in [0, 1], \\ (2-t)^n, & \text{если } t \in [1, 2], \end{cases}$$

сходится при $n \rightarrow \infty$ поточечно к разрывной функции f , равной нулю вне точки $t = 1$ и равной 1 в точке $t = 1$.

§ 6. Селекции многозначных отображений

Вначале мы напомним некоторые понятия и факты из теории многозначных отображений (подробнее см. [8, гл. 2, § 1] и [9, гл. 1, §§ 1, 5]).

Пусть $A, B \subset X$ – два непустых подмножества метрического пространства (X, d) . *Доступом множества A к множеству B* называется величина

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \in [0, \infty],$$

и *хаусдорфово расстояние D между A и B* определяется равенством:

$$D(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Если $A, B, C \subset X$ – непустые множества, то: $e(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда A содержится в замыкании B , и $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$. Следовательно, D есть *псевдометрика* на множестве всех непустых замкнутых подмножеств X , т. е. D удовлетворяет всем аксиомам метрики и возможно принимает бесконечные

значения. Отображение D является *метрикой* на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств и, в частности, на множестве всех непустых компактных подмножеств X .

Пусть E и X – два метрических пространства, 2^X – множество всех подмножеств X и $\dot{2}^X = 2^X \setminus \{\emptyset\}$. *Многозначным отображением из E в X* называется отображение $F: E \rightarrow 2^X$, которое каждой точке $t \in E$ ставит в соответствие множество $F(t) \subset X$. *Графиком* (или *графом*) F называется множество $\text{Gr}(F) = \{(t, x) \in E \times X \mid x \in F(t)\}$, а *областью значений F* – множество $R(F) = \bigcup_{t \in E} F(t)$, так что $R(F) \subset X$.

Многозначное отображение $F: E \rightarrow \dot{2}^X$ называется

- (а) *непрерывным (по Хаусдорфу) в точке $t_0 \in E$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $D(F(t), F(t_0)) \leq \varepsilon$ для всех $t \in E$, $d(t, t_0) \leq \delta$; *непрерывным (по Хаусдорфу) на множестве E* , если оно непрерывно в каждой точке $t_0 \in E$;
- (б) *непрерывным по Липшицу на E* , если найдется постоянная $L \geq 0$ такая, что $D(F(t), F(s)) \leq Ld(t, s)$ для всех $t, s \in E$. Наименьшая постоянная L с указанным свойством называется *константой Липшица F* и обозначается через $\text{Lip}(F)$;
- (с) *компактнозначным*, если $F(t)$ есть компактное подмножество X при любом $t \in E$;
- (д) *компактным*, если его график $\text{Gr}(F)$ является компактом в $E \times X$ (в этом случае, F также компактнозначно, но не наоборот);
- (е) *отображением ограниченной вариации на отрезке $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$* , если

$$V_a^b(F) := \sup \{V_D(F, T) \mid T \in \mathcal{T}_a^b\} < \infty,$$

где

$$V_D(F, T) = \sum_{i=1}^m D(F(t_i), F(t_{i-1})), \quad T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}_a^b;$$

- (ф) *$\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывным отображением на отрезке $[a, b]$* , если для некоторой функции $\delta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, любого $\varepsilon > 0$ и любого конечного набора $a \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_N < b_N \leq b$ из условия $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \delta$ вытекает, что $\sum_{n=1}^N D(F(b_n), F(a_n)) \leq \varepsilon$.

Будем говорить, что многозначное отображение $F: E \rightarrow \dot{2}^X$ имеет (регулярную) *селекцию*, если существует отображение $f: E \rightarrow X$ такое, что $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in E$.

Известно, что (см. [9, гл. 1, § 5, следствие 1]) многозначное компактнозначное отображение $F: E \rightarrow \dot{2}^X$ непрерывно (по Хаусдорфу) на E , если и только если оно одновременно полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу в каждой точке $t_0 \in E$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $E = [a, b]$ есть отрезок прямой.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть X – банахово пространство (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нормой $\|\cdot\|$, $F: [a, b] \rightarrow \dot{2}^X$ – компактное многозначное отображение, $t_0 \in [a, b]$ и $x_0 \in F(t_0)$. Имеем:

- (а) если F – непрерывно по Липшицу на $[a, b]$, то существует липшицева селекция $f: [a, b] \rightarrow X$ такая, что $\text{Lip}(f) \leq \text{Lip}(F)$ и $f(t_0) = x_0$;

- (b) если F – отображение ограниченной вариации на $[a, b]$, то существует селекция $f: [a, b] \rightarrow X$ ограниченной вариации такая, что $V_a^b(f) \leq V_a^b(F)$ и $f(t_0) = x_0$;
- (c) если в условиях (b) F еще и непрерывно, то в дополнение селекцию f можно выбрать непрерывной;
- (d) если $F - \delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывно на $[a, b]$, то существует $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывная селекция $f: [a, b] \rightarrow X$, удовлетворяющая неравенству в (b) и такая, что $f(t_0) = x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Разобьем доказательство на два шага.

1. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $T_n = \{t_i^n\}_{i=0}^n \in \mathcal{T}_a^b$ есть разбиение отрезка $[a, b]$ со свойствами:

- 1) $t_0 \in T_n$, т.е. $t_0 = t_{k(n)}^n$ для некоторого $k(n) \in \{0, 1, \dots, n\}$;
- 2) если $\lambda(T_n) := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i^n - t_{i-1}^n)$, то $\lambda(T_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

По индукции определим элементы $x_i^n \in F(t_i^n)$ следующим образом. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть вначале $a < t_0 < b$.

- а) Положим $x_{k(n)}^n = x_0$.
- б) Если $i \in \{1, \dots, k(n)\}$ и элемент $x_i^n \in F(t_i^n)$ уже определен, выберем элемент $x_{i-1}^n \in F(t_{i-1}^n)$ так, чтобы $\|x_i^n - x_{i-1}^n\| = \text{dist}(x_i^n, F(t_{i-1}^n))$.
- с) Если $i \in \{k(n) + 1, \dots, n\}$ и элемент $x_{i-1}^n \in F(t_{i-1}^n)$ уже определен, выберем $x_i^n \in F(t_i^n)$ так, чтобы $\|x_{i-1}^n - x_i^n\| = \text{dist}(x_{i-1}^n, F(t_i^n))$.

Если теперь $t_0 = a$, т.е. $k(n) = 0$, то определяем x_i^n согласно а) и с), а если $t_0 = b$, так что $k(n) = n$, то определяем x_i^n , следуя а) и б).

Наконец, определим последовательность отображений $f_n: [a, b] \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$f_n(t) = x_{i-1}^n + \frac{t - t_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n} (x_i^n - x_{i-1}^n), \quad t \in [t_{i-1}^n, t_i^n], \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.1)$$

Отметим, что $f_n(t_0) = x_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а также, как следует из б) и с), что:

$$\|x_i^n - x_{i-1}^n\| \leq D(F(t_i^n), F(t_{i-1}^n)) \quad (6.2)$$

$$\leq \text{Lip}(F) \cdot (t_i^n - t_{i-1}^n). \quad (6.3)$$

2. Во-первых, заметим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно липшицева с константами $\text{Lip}(f_n) \leq \text{Lip}(F)$. Действительно, если $t, s \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$, то в силу (6.1) и (6.3) найдем, что

$$\|f_n(t) - f_n(s)\| \leq \frac{\|x_i^n - x_{i-1}^n\|}{t_i^n - t_{i-1}^n} \cdot |t - s| \leq \text{Lip}(F) \cdot |t - s|,$$

откуда вытекает, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Во-вторых, при каждом $t \in [a, b]$ последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ предкомпактна в X . Действительно, если $t \in [a, b]$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется номер

$i(n) \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $t_{i(n)-1}^n \leq t \leq t_{i(n)}^n$, поэтому $t_{i(n)-1}^n$ и $t_{i(n)}^n$ стремятся к t при $n \rightarrow \infty$ в силу условия 2). Из (6.3) вытекает, что

$$\left\| \frac{t - t_{i(n)-1}^n}{t_{i(n)}^n - t_{i(n)-1}^n} (x_{i(n)}^n - x_{i(n)-1}^n) \right\| \leq \text{Lip}(F) \cdot |t - t_{i(n)-1}^n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поскольку F имеет компактный график и $x_{i(n)-1}^n \in F(t_{i(n)-1}^n)$, то существует подпоследовательность в $(t_{i(n)-1}^n, x_{i(n)-1}^n) \in \text{Gr}(F)$ (за которой мы сохраним прежнее обозначение), которая сходится в $[a, b] \times X$ к некоторой точке $(\tau, x) \in \text{Gr}(F)$. Но $t_{i(n)-1}^n \rightarrow t$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $\tau = t$, так что $(t, x) \in \text{Gr}(F)$ или $x \in F(t)$. Итак, $f_n(t) \rightarrow x$ в X при $n \rightarrow \infty$, где $x \in F(t)$, и, значит, $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ предкомпактна в X .

По теореме Арцела–Асколи последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ предкомпактна в пространстве $C([a, b]; X)$, поэтому некоторая ее подпоследовательность равномерно на $[a, b]$ сходится к отображению $f: [a, b] \rightarrow X$. Ясно, что f — липшицево, $f(t_0) = x_0$, $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in [a, b]$ и $\text{Lip}(f) \leq \text{Lip}(F)$.

(b) Вначале мы рассуждаем, как в шаге 1 доказательства пункта (a) до неравенства (6.2) включительно. Напомним, что если $h: [\alpha, \beta] \rightarrow X$ — непрерывно дифференцируемое отображение (а X даже не обязательно полно), то

$$V_\alpha^\beta(h) = \int_\alpha^\beta \|h'(\tau)\| d\tau$$

(см., например, [6, теорема 8.7(b)]). Теперь заметим, что отображения $f_n: [a, b] \rightarrow X$ непрерывны и сужения f_n на каждый отрезок $[t_{i-1}^n, t_i^n]$ непрерывно дифференцируемы, а в силу (V3) и (6.2) находим, что

$$\begin{aligned} V_a^b(f_n) &= \sum_{i=1}^n V_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}(f_n) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \|f_n'(t)\| dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \frac{\|x_i^n - x_{i-1}^n\|}{t_i^n - t_{i-1}^n} dt = \sum_{i=1}^n \|x_i^n - x_{i-1}^n\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n D(F(t_i^n), F(t_{i-1}^n)) = V_D(F, T_n) \leq V_a^b(F) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Образ каждого отображения f_n содержится в замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\text{co}} R(F)$ области значений отображения F , но F — компактно, поэтому $R(F)$ тоже компактно в X , а значит (см. лемму 6.2 ниже), и $\overline{\text{co}} R(F)$ — компактно. Применяя принцип выбора Хелли (теорема 5.1), найдем, что существует подпоследовательность в $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (обозначаемая тем же символом), которая поточечно на $[a, b]$ сходится к некоторому отображению $f: [a, b] \rightarrow X$ ограниченной вариации. Ясно, что $f(t_0) = x_0$ и что f есть селекция F , и осталось заметить, что в силу (V7) имеем:

$$V_a^b(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V_a^b(f_n) \leq V_a^b(F).$$

(c) По лемме 3.3 мы имеем разложение $F = G \circ \varphi$ на $[a, b]$, где $\varphi(t) = V_a^t(F)$, $t \in [a, b]$, есть ограниченная неубывающая непрерывная функция, а $G: [0, \ell] =$

$\varphi([a, b]) \rightarrow \dot{2}^X$ – непрерывное по Липшицу многозначное отображение, такое, что $\ell = V_a^b(F)$ и $\text{Lip}(G) \leq 1$.

Так как F – компактное отображение, то G также компактно. Действительно, рассмотрим последовательность $\{(\tau_n, y_n)\}_{n=1}^\infty \subset \text{Gr}(G)$; тогда $\tau_n = \varphi(t_n)$ для некоторого $t_n \in [a, b]$ и $y_n \in G(\varphi(t_n)) = F(t_n)$, т.е. $\{(t_n, y_n)\}_{n=1}^\infty \subset \text{Gr}(F)$. Из компактности F вытекает, что найдется подпоследовательность в $\{(t_n, y_n)\}$ (за которой сохраним прежнее обозначение) такая, что $t_n \rightarrow t$ и $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$, где $y \in F(t)$. Положим $\tau = \varphi(t)$. Так как φ непрерывна, то (τ_n, y_n) сходится к $(\tau, y) \in \text{Gr}(G)$, что и требовалось.

Замечая, что $x_0 \in F(t_0) = G(\tau_0)$, где $\tau_0 = \varphi(t_0)$, в силу пункта (а) найдем липшицево отображение $g: [0, \ell] \rightarrow X$ со свойствами: $g(\tau_0) = x_0$, $g(\tau) \in G(\tau)$ для всех $\tau \in [0, \ell]$ и $\text{Lip}(g) \leq \text{Lip}(G) \leq 1$.

Положим $f = g \circ \varphi$. По лемме 3.2(а) отображение $f: [a, b] \rightarrow X$ имеет ограниченную вариацию и непрерывно, $f(t_0) = x_0$ и $f(t) = g(\varphi(t)) \in G(\varphi(t)) = F(t)$ для всех t . Наконец, из свойства (V4) и неравенства (3.3) находим, что

$$V_a^b(f) = V_a^b(g \circ \varphi) = V_0^\ell(g) \leq \ell \cdot \text{Lip}(g) \leq \ell = V_a^b(F). \quad (6.4)$$

(d) Здесь доказательство такое же, как в (с), если принять во внимание следующие изменения. 1) В разложении $F = G \circ \varphi$ в силу леммы 3.3 функция φ является неубывающей и $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывной. 2) Если положить $f = g \circ \varphi$, то из леммы 3.2(с) (особенно конца доказательства этой леммы) и условия $\text{Lip}(g) \leq 1$ заключаем, что f есть $\delta(\cdot)$ -абсолютно непрерывная селекция F , для которой сохраняется неравенство (6.4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пункты (а) и (с) теоремы 6.1 обобщают результаты [10] и [11] на бесконечномерный случай банаховых пространств без условия выпуклости отображения F . Пункт (а) установлен другим способом в [12, теорема Д1.8], где также в предположениях пункта (с) из других соображений показано, что отображение F имеет непрерывную селекцию f . Пункт (с) уточняет последнее наблюдение: а именно, F имеет непрерывную селекцию f ограниченной вариации. Пункт (d) теоремы 6.1 обобщает лемму 1 в [13], которая доказана там в конечномерном случае $X = \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$). Пункт (b) и пункт (с) теоремы 6.1, принцип выбора Хелли (теорема 5.1) и теорема 3.1 о структуре являются новыми. Следует отметить, что компактные непрерывные многозначные отображения $F: E \rightarrow \dot{2}^{\mathbb{R}^d}$ могут не иметь непрерывных селекций даже в случае, когда E есть отрезок в $\mathbb{R}$ (см. [10], [9, гл. 1, § 6] и [4, § 8]), а также в случае, когда $E \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) есть компакт и F непрерывно по Липшицу (см. [10] и [14]).

В заключение этого параграфа мы установим вспомогательную лемму, которая использовалась в доказательстве пункта (b) теоремы 6.1.

ЛЕММА 6.2. *Если R – вполне ограниченное подмножество линейного нормированного пространства X , то его выпуклая оболочка $\text{co}(R)$ также вполне ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Вначале докажем, что выпуклая оболочка $\text{co}(K)$ конечного множества K вполне ограничена.

Пусть $K = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда $\text{co}(K) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A\}$, где

$$A = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Положим $C = 1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2}$. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ для множества $\text{co}(K)$ существует конечная ε -сеть. Множество A компактно, поэтому для него существует конечная (ε/C) -сеть $\{\beta_j = (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jn})\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, а тогда множество $L = \{\sum_{i=1}^n \beta_{ji} x_i\}_{j=1}^m$ является конечной ε -сетью для $\text{co}(K)$. Действительно, если $x \in \text{co}(K)$, то $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ для некоторого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A$, а потому, в частности, $\sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_{ki}|^2} < \varepsilon/C$ при некотором $1 \leq k \leq m$. Тогда $y = \sum_{i=1}^n \beta_{ki} x_i \in L$ и

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_{ki}) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_{ki}| \cdot \|x_i\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_{ki}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2} < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Если при любом $\varepsilon > 0$ множество $M \subset X$ имеет вполне ограниченную ε -сеть, то оно вполне ограничено.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, P – вполне ограниченная $\varepsilon/2$ -сеть для M и Q – конечная $\varepsilon/2$ -сеть для P . Тогда Q есть конечная ε -сеть для M , поскольку для любого $x \in M$ найдется $y \in P$ такое, что $\|x - y\| < \varepsilon/2$, а для y найдется $z \in Q$ такое, что $\|y - z\| < \varepsilon/2$, откуда $\|x - z\| < \varepsilon$.

3. Для доказательства леммы предположим, что $\varepsilon > 0$ и K – конечная ε -сеть для R , и покажем, что $\text{co}(K)$ является ε -сетью для $\text{co}(R)$. Пусть $r \in \text{co}(R)$, тогда $r = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$ для некоторых $\{r_i\}_{i=1}^n \subset R$ и $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A$. Пусть $x_1, \dots, x_n \in K$ – такие точки, что $\|r_i - x_i\| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \text{co}(K)$ и

$$\|r - x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i - x_i) \right\| < \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \varepsilon = \varepsilon.$$

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ множество $\text{co}(K)$ является ε -сетью для $\text{co}(R)$. Но в силу шага 1 $\text{co}(K)$ вполне ограничено, а тогда в силу шага 2 множество $M = \text{co}(R)$ также вполне ограничено.

Список литературы

1. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
2. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
3. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // Massachusetts J. Math. and Phys. 1924. V. 3. P. 72–94.
4. *Chistyakov V. V., Galkin O. E.* On maps of bounded p -variation with $p > 1$ // Positivity (to appear).
5. *Young L. C.* Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p -ième bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier // C. R. Acad. Sci. Paris. 1937. V. 204. № 7. P. 470–472.
6. *Chistyakov V. V.* On mappings of bounded variation // J. Dynam. Control Systems. 1997. V. 3. № 2. P. 1–30.
7. *Чистяков В. В.* Вариация. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
8. *Castaing C., Valadier M.* Convex Analysis and Measurable Multifunctions // Lecture Notes in Math. V. 580. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
9. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential Inclusions: Set-valued Maps and Viability Theory // Grundlehren Math. Wiss. V. 264. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
10. *Hermes H.* On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. № 3. P. 535–542.
11. *Kikuchi N., Tonita Y.* On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields // Funkcial. Ekvac. 1971. V. 14. № 3. P. 161–170.
12. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
13. *Zhu Qiji.* Single valued representation of absolutely continuous set-valued mappings // Kexue Tongbao. 1986. V. 31. P. 443–446.
14. *Nadler S. B.* Multi-valued contraction mappings // Pacific J. Math. 1969. V. 30. P. 475–488.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
09.09.1997