Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Аналог одной теоремы Титчмарша для преобразования Фурье–Уолша, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 5, 69–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:49:43

УДК 517.518.2

Б. И. Голубов

Аналог одной теоремы Титчмарша для преобразования Фурье–Уолша

Для операторов Харди

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy, \quad x > 0$$

и Харди–Литлвуда

$$\mathcal{B}(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad x > 0$$

в монографии Е. Титчмарша “Введение в теорию интегралов Фурье” (1948 г.)
для функций класса $L^2(\mathbb{R}_+)$ доказаны равенства

$$\mathcal{H}(\hat{f}_c) = \widehat{\mathcal{B}(f)}_c, \quad \mathcal{B}(\hat{f}_c) = \widehat{\mathcal{H}(f)}_c,$$

где $\hat{f}_c$ – косинус-преобразование Фурье функции f .

В данной работе доказываются аналогичные равенства для функций класса $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, и преобразования Фурье–Уолша.

Библиография: 11 названий.

Введение

Работа посвящается П. Л. Ульянову в связи с его семидесятилетием.

Для функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq 2$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, косинус- и синус-преобразование Фурье определяются формулами

$$\hat{f}_c(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \cos xy dy, \quad \hat{f}_s(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \sin xy dy.$$

При этом для $p = 1$ эти равенства следует понимать поточечно, а функции $\hat{f}_c(x)$ и $\hat{f}_s(x)$ являются непрерывными, так как определяющие их интегралы сходятся равномерно на $\mathbb{R}_+$. Для $1 < p \leq 2$ функция $\hat{f}_c(x)$ понимается как предел по $L^q(\mathbb{R}_+)$ -норме $\|\cdot\|_q$ при $a \rightarrow +\infty$ функций

$$F_a(x) = \int_0^a f(y) \cos xy dy,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00332).

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а

$$\|\varphi\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(x)|^r dx \right)^{1/r}, \quad 1 \leq r \leq +\infty.$$

Аналогично определяется и функция $\hat{f}_s(x)$ для $1 < p \leq 2$. Корректность этих определений, т.е. существование функций $\hat{f}_c(x)$ и $\hat{f}_s(x)$ для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p \leq 2$ доказывается, например, в книге А. Зигмунда [1, гл. 16].

Для функций f , заданных на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, положим

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy, \quad x > 0, \quad (0.1)$$

$$\mathcal{B}(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad x > 0. \quad (0.2)$$

Операторы (0.1) и (0.2) будем называть соответственно оператором Харди и Харди–Литлвуда. Такая терминология принята, например, в книге [2].

Известно (см. [3, с. 289 и 294]), что линейные операторы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ ограничены в $L^p(\mathbb{R}_+)$: первый – для $1 \leq p < \infty$, а второй – для $1 < p \leq \infty$. (При этом $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ – пространство измеримых по Лебегу существенно ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций.)

В книге Е. Титчмарша [4, с. 123, теорема 69] доказана

ТЕОРЕМА А. Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то

$$\mathcal{H}(\hat{f}_c) = \widehat{\mathcal{B}(f)}_c, \quad \mathcal{B}(\hat{f}_c) = \widehat{\mathcal{H}(f)}_c \quad (0.3)$$

и аналогичные равенства справедливы для синус-преобразований Фурье.

В работе Р. Беллмана [5], которая опубликована после выхода в свет английского издания книги Е. Титчмарша [4] (1937 г.), равенства (0.3) выводятся на эвристическом уровне без формулировки условий, налагаемых на функции.

В работе автора [6] теорема А была обобщена следующим образом.

ТЕОРЕМА В. Для функций $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ первое из равенств (0.3) справедливо при $1 < p \leq 2$, а второе – при $1 \leq p \leq 2$. Аналогичное утверждение имеет место и для синус-преобразований Фурье.

В данной работе доказывается аналог теоремы В для преобразования Фурье–Уолша, которое введено Н. Файном [7]. Для этого вводятся аналоги операторов Харди и Харди–Литлвуда, связанные с преобразованием Фурье–Уолша.

§ 1. Преобразование Фурье–Уолша

В этом параграфе приводится определение преобразования Фурье–Уолша и упоминаются некоторые его свойства.

Для числа $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod{2}, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod{2}, \quad (1.0)$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Поскольку $x_{-n} = 0$ для $n \geq n(x)$, то для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Ядро Файна $\chi(x, y)$ определяется на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\chi(x, y) = (-1)^{t(x, y)}. \quad (1.1)$$

Очевидно, что $\chi(x, y) = \pm 1$ для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Преобразование Фурье–Уолша $F[f] \equiv \hat{f}$ функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$F[f](x) \equiv \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \chi(x, y) dy. \quad (1.2)$$

Если при этом $p = 1$, то равенство (1.2) следует понимать поточечно. В случае $1 < p \leq 2$ функция $\hat{f}(x)$ понимается как предел по $L^q(\mathbb{R}_+)$ -норме при $a \rightarrow +\infty$ функций

$$F(x, a) = \int_0^a f(y) \chi(x, y) dy,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Корректность этого определения, т.е. существование функции (1.2) при $1 < p \leq 2$, доказывается, например, в книгах [8, гл. 9] и [9, §6.3], где рассматриваются и более общие мультипликативные преобразования Фурье. Там же доказывается, что оператор $F: L^p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^q(\mathbb{R}_+)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) ограничен для $1 \leq p \leq 2$, причем

$$\|F[f]\|_q \leq \|f\|_p. \quad (1.3)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА С. Пусть $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq 2$. Тогда справедливо обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Эта теорема является частным случаем теоремы 2 из работы [10], где она доказана для мультипликативных преобразований Фурье, частным случаем которых является преобразование Фурье–Уолша.

§ 2. Аналоги операторов Харди и Харди–Литлвуда

Для того чтобы определение аналогов операторов Харди и Харди–Литлвуда выглядело естественно, отметим сначала, что сами операторы (0.1) и (0.2) могут быть заданы при помощи тригонометрического ядра $\frac{2}{\pi} \cos xy$ следующим образом. Положим

$$D_c(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^y \cos xt dt = \frac{2}{\pi} \frac{\sin xy}{x}.$$

Легко проверить, что

$$\left(\frac{D_c(x, t)}{t} \right)^\wedge(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < y; \\ \frac{1}{x}, & 0 \leq y < x, \end{cases}$$

где косинус-преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}_+)$ берется по аргументу t .

Учитывая это равенство, оператор Харди (0.1) можно записать в виде

$$\mathcal{H}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \left(\frac{D_c(x, t)}{t} \right)_c^\wedge(y) dx, \quad (2.1)$$

а оператор Харди–Литлвуда (0.2) – в виде

$$\mathcal{B}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \left(\frac{D_c(y, t)}{t} \right)_c^\wedge(x) dx. \quad (2.2)$$

Учитывая тот факт, что в теории преобразования Фурье–Уолша ядро Файна (1.1) является аналогом тригонометрического ядра, по аналогии с равенствами (2.1) и (2.2) положим

$$\mathcal{H}_w(f)(y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \left(\frac{D(x, t)}{t} \right)^\wedge(y) dx \quad (2.3)$$

и

$$\mathcal{B}_w(f)(y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \left(\frac{D(y, t)}{t} \right)^\wedge(x) dx, \quad (2.4)$$

где преобразование Фурье–Уолша функции $\frac{D(\cdot, t)}{t}$ берется по аргументу t , а

$$D(x, t) = \int_0^t \chi(x, y) dy \quad (2.5)$$

– обобщенное ядро Дирихле–Уолша.

Оператор (2.3) назовем оператором Харди–Уолша, а (2.4) – оператором Харди–Литлвуда–Уолша.

Отметим, что для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, интегралы (2.3) и (2.4) сходятся для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Это вытекает на основании неравенства Гёльдера из следующей леммы.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Для любого $p \in (1, +\infty)$ ядро*

$$\mathcal{K}(x, y) \equiv \left(\frac{D(x, t)}{t} \right)^\wedge(y) \quad (2.6)$$

принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}_+)$ по каждому из своих аргументов при почти всяком значении другого аргумента из $\mathbb{R}_+$.

Утверждение этой леммы вытекает из лемм 4 и 7, которые доказываются в §3.

Уточним, как понимается преобразование Фурье–Уолша в правой части равенства (2.6). Поскольку $|\chi(x, y)| = 1$ для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, то из (2.5) следует неравенство $|D(x, t)| \leq t$ для $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, для $x > 0$ и $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место неравенство $|D(x, t)| \leq \frac{3}{x}$ (см. [8, с. 428]). Из этих неравенств следует, что

при любом $x > 0$ и любом $p \in (1, +\infty)$ справедливо включение $\frac{D(x,t)}{t} \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Но как отмечалось выше, преобразование Фурье–Уолша определено для функций из пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$ при любом $p \in [1, 2]$ и, в частности, для функции $\frac{D(x,t)}{t}$ при любом фиксированном $x > 0$.

Отметим, что ядро оператора (2.4) является транспонированным по отношению к ядру оператора (2.3), т.е. получается из последнего путем перестановки его аргументов.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, то

$$\mathcal{H}_w(\hat{f}) = (\mathcal{B}(f))^\wedge, \quad \mathcal{B}_w(\hat{f}) = (\mathcal{H}(f))^\wedge. \quad (2.7)$$

Эта теорема является аналогом теоремы В, сформулированной во введении, а при $p = 2$ она является аналогом теоремы А, принадлежащей Е. Титчмаршу.

§3. Вспомогательные результаты

Напомним определение системы функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ в нумерации Пэли (см., например, [9]). Для этого положим

$$r_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{при } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

и продолжим эту функцию периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Далее, определим систему функций Радемахера $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$, положив $r_k(x) = r_0(2^k x)$, $k = 0, 1, \dots$.

После этого представим произвольное натуральное число n в виде $n = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i$, где $\varepsilon_k = 1$, а $\varepsilon_i = 0$ или 1 при $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Функция Уолша $w_n(x)$ определяется равенством

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^k (r_i(x))^{\varepsilon_i}.$$

Очевидно, $2^k \leq n < 2^{k+1}$, где $k = k(n)$. Кроме того, полагается $w_0(x) \equiv 1$.

Система функций $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ортонормирована на $[0, 1]$ и полна в пространстве $L^p[0, 1]$ при любом $p \in [1, +\infty)$. Если $2^k \leq n < 2^{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots$), то функция $w_n(x)$ постоянна на полуинтервалах вида $\Delta_m^{(k+1)} = (\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}})$, $m = 0, 1, \dots, 2^{k+1} - 1$, причем $w_n(x) = 1$ для $x \in \Delta_0^{(k+1)}$.

Отметим, что для $x \in \mathbb{R}_+$ справедливо разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} 2^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},$$

где коэффициенты x_n и x_{-n} принимают значения 0 или 1 и определяются из (1.0).

Введем на $\mathbb{R}_+$ операцию $\oplus$ покоординатного сложения по модулю 2 следующим образом. Пусть для $y \in \mathbb{R}_+$ определено разложение

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_{-n} 2^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n},$$

где y_n и y_{-n} задаются согласно (1.0). Тогда положим $x \oplus y = z$, где

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} 2^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n},$$

причем коэффициенты z_n и z_{-n} принимают значения 0 или 1 и удовлетворяют соотношениям

$$z_{-n} \equiv x_{-n} + y_{-n} \pmod{2}, \quad z_n \equiv x_n + y_n \pmod{2}.$$

Нам понадобятся следующие известные свойства ядра Файна $\chi(x, y)$ и обобщенного ядра Дирихле–Уолша $D(x, y)$.

ЛЕММА 1. Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ справедливы равенства:

- 1) $\chi(x, y) = \chi(y, x)$;
- 2) $\chi(x, y) = \chi(x, [y])\chi([x], y)$;
- 3) $\chi(x, n) = w_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$;
- 4) равенство

$$w_n(x \oplus y) = w_n(x)w_n(y), \quad n = 0, 1, \dots,$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ справедливо для всех $x \in \mathbb{R}_+$ кроме счетного множества.

ЛЕММА 2. Обобщенное ядро Дирихле–Уолша $D(x, y)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $D(x, 0) = 0$ для $x \in \mathbb{R}_+$;
- 2) $D(x, n) = 0$ для всех $x \geq 1$ и целых $n \geq 0$;
- 3) $D(x, n) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x)$ для $0 \leq x < 1$, $n = 1, 2, \dots$;
- 4) $D(x, t) = D(x, [t]) + \chi(x, [t])J_{[x]}^{(1)}(t)$, где

$$J_n^{(1)}(t) = \int_0^t \chi(x, n) dx, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

а $J_0^{(1)}(t) = \{t\} = t - [t]$ для не целых $t \in \mathbb{R}_+$;

$$5) \quad |J_{[x]}^{(1)}(t)| \leq 2^{-n-1} \quad \text{для} \quad 2^n \leq x < 2^{n+1}, \quad (3.2)$$

где $n \geq 0$ – целое;

$$6) \quad |D(x, t)| \leq \frac{3}{x} \quad \text{для} \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (3.3)$$

$$7) \quad D(x, 2^n) = \begin{cases} 2^n & \text{для} \quad x \in [0, 2^{-n}), \\ 0 & \text{для} \quad x \in [2^{-n}, +\infty), \end{cases} \quad (3.4)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Утверждения лемм 1 и 2 см., например, в [8, гл. 9] или в [9, § 1.5 и гл. 6].

Для доказательства основной леммы (см. § 2) мы докажем, что ядро (2.6) оператора Харди–Уолша (2.3) может быть представлено в виде

$$\left(\frac{D(x, t)}{t}\right)^{\wedge}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{D(x, t)}{t} \chi(y, t) dt, \quad (3.5)$$

где предел существует почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, а n пробегает все натуральные значения.

Это представление вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. При любом фиксированном $x > 0$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{D(x, t)}{t} \chi(y, t) dt \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, y) \quad (3.6)$$

сходится для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно два случая.

1) Случай $0 < x < 1$. Согласно п. 4) леммы 2 имеем

$$D(x, t) = D(x, [t]) + \chi(x, [t]) J_{[x]}^{(1)}(t). \quad (3.6')$$

В рассматриваемом случае $[x] = 0$ и $D(x, 0) = 0$, $\chi(x, 0) = 1$, $J_0^{(1)}(t) = \{t\}$. Поэтому из (3.6) и (3.6') получим¹

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} D(x, k) \int_k^{k+1} \frac{\chi(y, t)}{t} dt \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{\{t\}}{t} \chi(y, t) dt \cdot \chi(x, k). \end{aligned} \quad (3.6'')$$

Согласно лемме 1 справедливо равенство

$$\chi(y, t) = \chi(y, [t]) \chi([y], t).$$

Поэтому предыдущее равенство (3.6'') примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} D(x, k) w_k(y) \int_k^{k+1} \frac{w_{[y]}(t)}{t} dt \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x \oplus y) \int_k^{k+1} \frac{w_{[y]}(t)}{t} \{t\} dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Полагая $[y] = n$ и учитывая, что $\chi(x, n) = w_n(x)$, перепишем равенство (3.7) в следующем виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x, n) w_k(y) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(n) w_k(x \oplus y), \quad (3.8)$$

¹Пока ряд (3.6) формально представляется в виде суммы двух рядов, а затем будет доказано, что оба полученных ряда при любом $x > 0$ сходятся для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$.

где

$$c_k(x, n) = D(x, k) \int_k^{k+1} \frac{w_n(t)}{t} dt, \quad c_k(n) = \int_k^{k+1} \frac{\{t\}}{t} w_n(t) dt. \quad (3.8')$$

Докажем, что первый из рядов в правой части равенства (3.8) при $n = [y] \geq 1$ абсолютно сходится.

Действительно, для $[y] = n \geq 1$, учитывая 1-периодичность функций Уолша, получим

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{w_n(t)}{t} dt &= \int_0^1 \frac{w_n(t)}{t+k} dt = \frac{1}{t+k} \int_0^t w_n(u) du \Big|_0^1 \\ &+ \int_0^1 \left[\int_0^t w_n(u) du \right] \frac{dt}{(t+k)^2}. \end{aligned} \quad (3.8'')$$

Внеинтегральный член в правой части этого равенства обращается в нуль при $n \geq 1$, так как

$$\int_0^1 w_n(t) dt = \int_0^1 w_n(t) w_0(t) dt = 0.$$

Учитывая, что для $n = 2^m + l, l = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, справедливо неравенство

$$\left| \int_0^t w_n(u) du \right| \leq \frac{1}{2^{m+1}},$$

из равенства (3.8'') имеем

$$\left| \int_k^{k+1} \frac{w_n(t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2^{m+1} k^2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поскольку $|D(x, k)| < \frac{3}{x}$ (см. (3.3)), то из (3.8) и (3.8') получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x, n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1} k^2} < \infty \quad (3.8''')$$

для $n = [y] \geq 1$.

Если же $0 \leq y < 1$, то $n = 0$ и из (3.8') следует неравенство

$$|c_k(x, 0)| < \frac{3}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) < \frac{3}{kx}.$$

Поэтому при фиксированном $x > 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x, 0) w_k(y), \quad 0 \leq y < 1,$$

является рядом класса $L^2[0, 1)$, а следовательно, сходится почти всюду на $[0, 1)$ (см. [11] или [9, с. 189]).

Докажем, что второй из рядов в правой части равенства (3.8), т.е. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(n) w_k(x \oplus y) \quad (3.9)$$

сходится, если $x \oplus y \not\equiv 0 \pmod{1}$. Полагая для краткости $\{x \oplus y\} = s$, применим преобразование Абеля

$$\sum_{k=1}^m c_k(n) w_k(s) = \sum_{k=1}^{m-1} (c_k(n) - c_{k+1}(n)) D_k(s) + c_m(n) D_m(s), \quad (3.10)$$

где

$$D_k(s) = \sum_{i=0}^{k-1} w_i(s)$$

— ядро Дирихле–Уолша.

Нам понадобятся следующие неравенства

$$|c_k(n) - c_{k+1}(n)| = \left| \int_0^1 \frac{t w_n(t) dt}{(t+k)(t+k+1)} \right| \leq \frac{1}{k(k+1)} \quad (3.10')$$

и $|D_k(s)| < \frac{1}{s}$ ($0 < s < 1, k = 1, 2, \dots$) (см. [9, с. 28]). Кроме того, из (3.8') в силу 1-периодичности функций $\{t\}$ и $w_n(t)$ имеем

$$|c_k(n)| = \left| \int_0^1 \frac{\{t\} w_n(t)}{t+k} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{dt}{t+k} < \frac{1}{k}. \quad (3.10'')$$

Поэтому из (3.10), (3.10') и (3.10''), учитывая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_m(n) D_m(s) = 0,$$

получим

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k(n) w_k(s) \right| \leq \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, ряд (3.9) сходится, если $x \oplus y \not\equiv 0 \pmod{1}$.

Итак, доказано, что при фиксированном $x \in (0, 1)$ оба ряда в правой части равенства (3.8) сходятся для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, утверждение леммы 3 в случае $0 < x < 1$ доказано.

2) Случай $x \geq 1$. В этом случае $D(x, [t]) \equiv 0$ (см. п. 2) леммы 2), т.е. первое слагаемое в правой части равенства (3.6') обращается в нуль для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Поэтому вместо равенства (3.8) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, y) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{J_{[x]}^{(1)}(t) w_n(t)}{t} dt w_k(x \oplus y). \quad (3.11)$$

Отсюда, учитывая неравенство (3.2), для $k \geq 1$ и $[x] = 2^m + l$ ($l = 0, 1, \dots, 2^m - 1$) имеем

$$\left| \int_k^{k+1} \frac{J_{[x]}^{(1)}(t)}{t} w_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{2^{m+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^{m+1} k}. \quad (3.11')$$

Следовательно, ряд в правой части равенства (3.11) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)}(x) w_k(y) \quad \left(c_k^{(n)}(x) = \int_k^{k+1} \frac{J_{[x]}^{(1)}(t)}{t} w_n(t) dt w_k(x) \right),$$

где $n = [y]$, а $\{c_k^{(n)}(x)\}_{k=0}^{\infty} \in l^2$. Поэтому как ряд класса $L^2[0, 1)$ он сходится для почти всех $y \in [n, n+1)$, $n = 0, 1, \dots$, т.е. для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$.

Таким образом, ряд (3.6) и при фиксированном $x \geq 1$ сходится для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При любом фиксированном $x > 0$ сумма ряда (3.6) для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$ совпадает с функцией $\left(\frac{D(x, t)}{t}\right)^\wedge(y)$ (преобразование Фурье–Уолша берется по аргументу t) и принадлежит пространству $L^q(\mathbb{R}_+)$ для любого $q \geq 2$.

Действительно, как уже отмечалось в §2 при определении операторов $\mathcal{H}_w$ и $\mathcal{B}_w$ (см. равенства (2.3) и (2.4)), при фиксированном $x > 0$ для любого $p \in (1, +\infty)$ справедливо включение $\frac{D(x, t)}{t} \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, считая $1 < p \leq 2$, заключаем, что для любого $q \geq 2$ справедливо равенство

$$\left(\frac{D(x, t)}{t}\right)^\wedge(y) \stackrel{L^q}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{D(x, t)}{t} \chi(y, t) dt.$$

(Предел берется в метрике $L^q(\mathbb{R}_+)$.) Но из леммы 3 вытекает, что предел в правой части этого равенства при $a = n \rightarrow \infty$ (n – натуральное) существует также и для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Отсюда следует, что при фиксированном $x > 0$ сумма ряда (3.6) для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$ совпадает с $\left(\frac{D(x, t)}{t}\right)^\wedge(y)$. Тем самым, замечание 1 обосновано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Принимая во внимание замечание 1, в дальнейшем будем считать, что

$$\left(\frac{D(x, t)}{t}\right)^\wedge(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{D(x, t)}{t} \chi(y, t) dt. \quad (3.12)$$

Этим равенством для любого фиксированного $x > 0$ функция $\left(\frac{D(x, t)}{t}\right)^\wedge(y)$ определена для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Но тогда, применяя теорему Фубини к плоским множествам, заключаем, что равенство (3.12) справедливо почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Тем самым, обосновано равенство (3.5) для почти всех $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $1 \leq p < q < \infty$ и $a > 0$. Тогда если $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $f \in L^p[a, +\infty)$, то $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$ для всех $r \in [p, q]$.

Действительно, так как $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$, то $f \in L^q[0, a]$. А так как $L^q[0, a] \subset L^p[0, a]$, то $f \in L^p[0, a]$. Но так как по условию $f \in L^p[a, +\infty)$, то тем самым $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Отсюда и вытекает включение $f \in L^r(\mathbb{R}_+)$ для всех $r \in [p, q]$.

Этим простым замечанием мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 4. При любом фиксированном $x > 0$ для всех $p \in (1, +\infty)$ справедливо включение $\mathcal{K}(x, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $\mathcal{K}(x, y)$ определяется равенством (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно два случая.

1) Случай $0 < x < 1$. Обозначим через $\mathcal{K}_1(x, y)$ и $\mathcal{K}_2(x, y)$ соответственно сумму первого и второго из рядов в правой части равенства (3.8). Тогда, учитывая равенство (3.12), заключаем, что для любого $x \in (0, 1)$ и почти всех $y \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}_1(x, y) + \mathcal{K}_2(x, y). \quad (3.13)$$

Согласно неравенству (3.8''') имеем

$$|\mathcal{K}_1(x, y)| \leq \frac{1}{2y} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12y}, \quad y \geq 1. \quad (3.14)$$

Для оценки функции $\mathcal{K}_2(x, y)$ заметим, что функция $\frac{t}{(t+k)(t+k+1)}$ при любом натуральном k возрастает на отрезке $[0, 1]$, поскольку ее производная $\frac{k-t^2}{[(t+k)(t+k+1)]^2}$ неотрицательна на этом отрезке. Поэтому из (3.10'), применяя вторую теорему о среднем (теорему Бонне), получим

$$c_k(n) - c_{k+1}(n) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \int_{\xi}^1 w_n(t) dt,$$

где $\xi \in (0, 1)$. Но для $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\int_{\xi}^1 w_n(t) dt = - \int_0^{\xi} w_n(t) dt,$$

поскольку

$$\int_0^1 w_n(t) dt = 0.$$

Кроме того, для $n = 2^m + l$ ($l = 0, 1, \dots, 2^m - 1$) имеет место неравенство

$$\left| \int_0^x w_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{2^{m+1}}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

(см. (3.1) и (3.2)). Поэтому

$$|c_k(n) - c_{k+1}(n)| \leq \frac{1}{k(k+1)2^{m+1}}.$$

Следовательно, из определения функции $\mathcal{K}_2(x, y)$ (она равна сумме второго из рядов в правой части равенства (3.8)) и (3.10) при $y \geq 1$ получим

$$|\mathcal{K}_2(x, y)| \leq \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} |D_k(s)|. \quad (3.14')$$

Но для ядра Дирихле–Уолша $D_k(t)$ справедливо неравенство

$$|D_k(t)| \leq \min \left(k, \frac{1}{t} \right), \quad 0 < t < 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому из (3.14'), учитывая периодичность ядра Дирихле–Уолша, получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_2(x, y)| &\leq \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^{[1/s]} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2^m} \sum_{k=[1/s]+1} \frac{1}{k(k+1)s} \\ &\leq \frac{1}{2^{m+1}} \ln \left(1 + \left[\frac{1}{s} \right] \right) + \frac{1}{s(1+[1/s])2^m} < \frac{1 + \ln(1/s + 2)}{y}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.13) и (3.14) следует неравенство

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leq \frac{1}{y} \left(C_0 + \ln \left(2 + \frac{1}{\{x \oplus y\}} \right) \right), \quad (3.15)$$

где $C_0 = \frac{\pi^2}{12} + 1$, $y \geq 1$, $0 < x < 1$.

Из неравенства (3.15) следует, что для любого фиксированного $x \in (0, 1)$ справедливо включение $\mathcal{K}(x, \cdot) \in L^p[1, \infty)$ для всех $p \in (1, +\infty)$. Но выше уже отмечалось (см. замечание 1), что $\mathcal{K}(x, \cdot) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ для любого $q \in [2, +\infty)$ и $x > 0$. Отсюда на основании замечания 3 заключаем, что $\mathcal{K}(x, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для любого $p \in (1, +\infty)$ и $0 < x < 1$.

2) Случай $x \geq 1$. В этом случае из (3.6), (3.11) и (3.12), вспоминая обозначение (2.6), имеем

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{J_m^{(1)}(t)}{t} w_n(t) dt w_k(x \oplus y), \quad (3.16)$$

где $n = [y]$, $m = [x]$.

Введем обозначение

$$b_k = \int_k^{k+1} \frac{J_m^{(1)}(t)}{t} w_n(t) dt \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3.17)$$

Пользуясь тем, что функции $J_m^{(1)}(t)$ и $w_n(t)$ имеют период 1, получим

$$b_k - b_{k+1} = \int_0^1 \frac{J_m^{(1)}(t) w_n(t) dt}{(t+k)(t+k+1)}. \quad (3.17')$$

Отсюда, интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\begin{aligned} b_k - b_{k+1} &= \frac{J_m^{(1)}(t)}{(t+k)(t+k+1)} \int_0^t w_n(t) dt \Big|_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \left\{ \frac{w_m(t)}{(t+k)(t+k+1)} - \frac{(2t+2k+1)J_m^{(1)}(t)}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \right\} J_n^{(1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Будем считать, что $n = [y] \geq 1$. Тогда внеинтегральный член будет равен нулю. Поэтому, пользуясь неравенствами

$$|J_m^{(1)}(t)| \leq t, \quad |J_n^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{2^{r+1}} < \frac{1}{n}, \quad t \geq 0,$$

где $n = 2^r + l$ ($l = 0, 1, \dots, 2^r - 1$; $r = 0, 1, \dots$), получим

$$|b_k - b_{k+1}| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} + \frac{2k+3}{k^2(k+1)^2} \right) \leq \frac{8}{k(k+1)y}. \quad (3.18)$$

Воспользуемся преобразованием Абеля и представим равенство (3.16) в виде

$$\mathcal{K}(x, y) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) D_k(s), \quad (3.19)$$

где $0 < s = \{x \oplus y\} \not\equiv 0 \pmod{1}$. Возможность такого представления вытекает из того, что

$$|b_k| \leq \int_k^{k+1} \frac{|J_m^{(1)}(t)|}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{\{t\}}{t} dt \leq \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{k} \quad (3.19')$$

(см. (3.17)), в силу чего

$$|b_k D_k(s)| \leq \frac{1}{sk} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.19'')$$

Обозначим $r = [1/s]$. Тогда из (3.19) на основании (3.18) для $s \in (0, 1)$ получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}(x, y)| &\leq |b_0| + \sum_{k=1}^r \frac{8k}{k(k+1)y} + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{8}{k(k+1)ys} \\ &\leq |b_0| + 8 \frac{1 + \ln r}{y} + \frac{8}{ys(r+1)} \leq |b_0| + 8 \frac{2 + \ln \frac{1}{s}}{y}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Оценим слагаемое $|b_0|$ в правой части этого равенства. Согласно (3.17)

$$b_0 = \int_0^1 \frac{J_m^{(1)}(t)}{t} w_n(t) dt \quad (n = [y])$$

для $n = [y] \geq 1$.

Так как $w_m(t) = 1$ для $0 \leq t < \frac{1}{2^{m+1}}$ (см. [9, с. 11]), то

$$b_0 = \int_0^{2^{-m}} w_n(t) dt + \int_{2^{-m}}^1 \frac{1}{t} J_m^{(1)}(t) w_n(t) dt.$$

Если $n \geq m$, то первое слагаемое этой суммы равно нулю (см. [9, с. 11]). Поэтому для $n \geq m$ имеем

$$b_0 = \int_0^1 g_m(t) w_n(t) dt, \quad (3.21)$$

где

$$g_m(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2^{-m}; \\ \frac{J_m^{(1)}(t)}{t}, & 2^{-m} \leq t < 1. \end{cases}$$

Эта функция, очевидно, имеет конечную вариацию $V_m = \text{Var } g_m$, на $[0, 1)$, а согласно (3.21) $b_0 = \hat{g}_m(n)$, где $\hat{f}(n)$ — коэффициент Фурье–Уолша функции f . Но

для коэффициентов Фурье–Уолша функций конечной вариации справедливо неравенство

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{\text{Var } f}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(см. [9, с. 66]). Следовательно, поскольку $n = [y]$, то $|b_0| \leq \frac{V_m}{n} \leq \frac{2V_m}{y}$. Поэтому из (3.20) имеем для $[y] \geq [x] \geq 1$:

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leq \frac{1}{y} \left(2V_m + 16 + 8 \ln \frac{1}{\{x \oplus y\}} \right).$$

Отсюда легко следует, что для фиксированного $x \geq 1$ справедливо включение $\mathcal{K}(x, \cdot) \in L^p([x], +\infty)$ для всех $p \in (1, +\infty)$. А так как при $x > 0$ справедливо включение $\mathcal{K}(x, \cdot) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ для любого $q \in [2, +\infty)$, то на основании замечания 3 заключаем, что $\mathcal{K}(x, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для всех $p \in (1, +\infty)$ и $x \geq 1$. Но ранее это же доказано и для $0 < x < 1$. Итак, лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Для функции*

$$\Psi_y(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\chi(y, t)}{t} dt \quad (3.22)$$

справедливы неравенства

- а) $|\Psi_y(x)| \leq \frac{6}{xy}, x > 0, y > 0$;
- б) $|\Psi_y(x)| \leq \frac{6}{y} + \ln \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1, y > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что функция $\Psi_y(x)$ определена для $x > 0, y > 0$, вытекает из признака Дирихле сходимости несобственных интегралов, так как

$$\left| \int_0^t \chi(y, u) du \right| = |D(y, t)| \leq \frac{3}{y}, \quad t \geq 0. \quad (3.23)$$

Для получения оценки а) проинтегрируем по частям интеграл (3.22). В результате получим

$$\Psi_y(x) = \int_x^{+\infty} \frac{D(y, t)}{t^2} dt - \frac{D(y, x)}{x}.$$

Отсюда на основании неравенства (3.23) легко следует оценка а).

На основании этой оценки, используя тот факт, что $|\chi(y, x)| \equiv 1$, для $0 < x \leq 1, y > 0$ получим

$$|\Psi_y(x)| = \left| \int_x^1 \frac{\chi(y, t)}{t} dt + \Psi_y(1) \right| \leq \ln \frac{1}{x} + \frac{6}{y}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ имеет место равенство*

$$\mathcal{K}(x, y) = \widehat{\Psi}_y(x), \quad (3.24)$$

где аргументом преобразования Фурье–Уолша справа является x , а функция $\mathcal{K}(x, y)$ определяется равенством (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что преобразование Фурье–Уолша функции $\Psi_y(\cdot)$, т.е. правая часть равенства (3.24), определена для любого $y > 0$, вытекает из леммы 5, так как согласно этой лемме $\Psi_y(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для $p \in (1, 2]$ (на самом деле, это верно и для $p \in (2, +\infty)$). Остается доказать равенство (3.24) почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Будем исходить из равенства (3.5), которое справедливо почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, точнее для всякого $x > 0$ оно имеет место для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Учитывая обозначение (2.6), запишем это равенство в виде

$$\mathcal{K}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{D(x, t)}{t} \chi(y, t) dt \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad (3.25)$$

где n пробегает натуральные значения.

Преобразуем интеграл под знаком предела в этом равенстве. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(x, y) &\equiv \int_0^{2^n} \frac{D(x, t)}{t} \chi(y, t) dt = -D(x, t) \int_t^{2^n} \frac{\chi(y, u)}{u} du \Big|_{t=0} \\ &\quad + \int_0^{2^n} \chi(x, t) \left[\int_t^{2^n} \frac{\chi(y, u)}{u} du \right] dt. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Внеинтегральный член обращается в нуль на основании оценки б) леммы 5 и неравенства $|D(x, t)| \leq t$, $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Поэтому

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \int_0^{2^n} \Psi_y(t) \chi(x, t) dt - D(x, 2^n) \Psi_{2^n}(y).$$

Но согласно п. 7) леммы 2 $D(x, 2^n) = 0$ для $x \geq 2^{-n}$. Поэтому для любого $x > 0$ при $n > \log_2 \frac{1}{x}$ справедливо равенство

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \int_0^{2^n} \Psi_y(t) \chi(x, t) dt = \int_0^{2^n} \frac{D(x, t)}{t} \chi(y, t) dt.$$

Отсюда согласно (3.25) получаем почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенство

$$\mathcal{K}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2^n} \Psi_y(t) \chi(x, t) dt.$$

Но так как предел в правой части этого равенства при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ существует также в метрике $L^2(\mathbb{R}_+)$ и совпадает с функцией $\widehat{\Psi}_y(x)$, то тем самым лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. При почти всех $y \in \mathbb{R}_+$ функция $\mathcal{K}(x, y) = \left(\frac{D(x, t)}{t} \right)^\wedge(y)$ (как функция аргумента x) принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}_+)$ для всех $p \in (1, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5 при любом фиксированном $y > 0$ имеем $\Psi_y(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для любого $p \in (1, 2]$. Поэтому $\hat{\Psi}_y(\cdot) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ для любого $q \in [2, +\infty)$ и $y > 0$. Следовательно, утверждение леммы 7 для $p \in [2, +\infty)$ вытекает из леммы 6. Остается доказать утверждение леммы для $p \in (1, 2)$.

Для этого оценим модуль функции $\mathcal{K}(x, y)$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ и произвольном $x \geq 1$. При этом будем исходить из равенства (3.19).

Из (3.17') на основании п. 5) леммы 2 имеем

$$|b_k - b_{k+1}| \leq \frac{1}{k(k+1)x}, \quad x \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Из (3.19), полагая $r = \lceil \frac{1}{s} \rceil$ и пользуясь неравенством (3.27) и неравенством (3.14''), получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}(x, y)| &\leq |b_0| + \sum_{k=1}^r |b_k - b_{k+1}| \cdot |D_k(s)| + \sum_{k=r+1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \cdot |D_k(s)| \\ &\leq |b_0| + \sum_{k=1}^r \frac{k}{k(k+1)x} + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)xs} \\ &\leq |b_0| + \frac{1 + \ln r}{x} + \frac{1}{s(r+1)x} \leq |b_0| + \frac{2 + \ln[1/s]}{x}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Наконец, оценим $|b_0|$. Из (3.17) при $k = 0$, $[x] = m$ и $0 < \delta < 1$ имеем

$$\begin{aligned} |b_0| &= \left| \int_0^1 \frac{J_m^{(1)}(t)}{t} w_n(t) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|J_m^{(1)}(t)|^{1-\delta}}{t^{1-\delta}} \frac{|J_m^{(1)}(t)|^\delta}{t^\delta} dt \\ &\leq \frac{1}{x^{1-\delta}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\delta}} = \frac{x^{\delta-1}}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь использованы неравенства $|J_m^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{x}$, $|J_m^{(1)}(t)| \leq t$, где $x \geq 1$, $t \geq 0$, $m = [x]$.

Заметим, что $s = x \oplus y$. Поскольку $\delta \in (0, 1)$ можно взять сколь угодно малым, то из (3.28) и (3.29) следует, что при $y \in \mathbb{R}_+$ и любом $p \in (1, 2]$ (на самом деле, и при любом $p \in (2, +\infty)$) справедливо включение $\mathcal{K}(\cdot, y) \in L^p[1, +\infty)$. Но в начале доказательства этой леммы отмечалось, что $\hat{\Psi}_y(\cdot) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ для любого $q \in [2, +\infty)$ и любого $y \in \mathbb{R}_+$. Отсюда на основании леммы 5 заключаем, что $\mathcal{K}(\cdot, y) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ для любого $q \in [2, +\infty)$ при почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Пользуясь замечанием 3, выводим, что $\mathcal{K}(\cdot, y) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ для любых $r \in [p, q]$. Но так как $p \in (1, 2]$ и $q \in [2, +\infty)$ произвольны, то тем самым лемма 7 доказана.

§ 4. Доказательство основного результата

Докажем основную теорему, сформулированную в конце § 2. Итак, пусть задана функция $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $p \in (1, 2]$. Нам надо доказать равенства (2.7) почти всюду на $\mathbb{R}_+$, так как правые и левые части этих равенств определены почти всюду и принадлежат пространству $L^q(\mathbb{R}_+)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Действительно, поскольку операторы Харди $\mathcal{H}$ и Харди–Литлвуда $\mathcal{B}$, определяемые равенствами (0.1)

и соответственно (0.2), ограничены в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p < \infty$, то $\mathcal{H}(f) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{B}(f) \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Поскольку по условию $1 < p \leq 2$, то преобразования Фурье–Уолша $(\mathcal{H}(f))^\wedge$ и $(\mathcal{B}(f))^\wedge$ принадлежат пространству $L^q(\mathbb{R}_+)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см. неравенство (1.3)). Поэтому они определены лишь с точностью до множества меры Лебега, равной нулю. Левые части доказываемых равенств (2.7) также определены лишь почти всюду. (Это следует из лемм 4 и 7 на основании неравенства Гёльдера.)

1) Докажем, что первое из равенств (2.7) имеет место почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Пользуясь определением (2.3) оператора $\mathcal{H}_w$, обозначением (2.6) и леммой 6, приходим к равенству

$$\mathcal{H}_w(\hat{f})(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \hat{f}(x) \widehat{\Psi}_y(x) dx \quad (4.1)$$

почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Поскольку $\widehat{\Psi}_y \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\hat{g}(x) = \Psi_y(x)$, где $g(x) = \widehat{\Psi}_y(x)$. Поэтому согласно обобщенному равенству Парсеваля (см. §2, теорема С) из (4.1) имеем

$$\mathcal{H}_w(\hat{f})(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \Psi_y(x) f(x) dx \quad (4.2)$$

почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Здесь мы использовали тот факт, что $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ при некотором $p \in (1, 2]$ и то, что $g = \widehat{\Psi}_y = \mathcal{H}(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$ (согласно лемме 7).

Вспоминая определение (3.22) функции $\Psi_y(x)$ и интегрируя по частям, из (4.2) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_w(\hat{f})(y) &= \int_{\mathbb{R}_+} \Psi_y(x) d \left(\int_0^x f(t) dt \right) \\ &= \Psi_y(x) \int_0^x f(t) dt \Big|_{+0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathcal{B}(f)(x) \chi(y, x) dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$. Так как $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, то

$$\left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \cdot x^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Поэтому согласно лемме 5

$$\lim_{x \rightarrow +0} \Psi_y(x) \int_0^x f(t) dt = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_y(x) \int_0^x f(t) dt = 0.$$

Отсюда следует, что внеинтегральный член в правой части равенства (4.3) равен нулю. Тем самым, первое из равенств (2.7) доказано.

2) Докажем, что второе из равенств (2.7) имеет место всюду на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1 < p \leq 2$. Пользуясь определением (2.4) оператора $\mathcal{B}_w$, приходим к равенству

$$\mathcal{B}_w(\hat{f})(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(y) \left(\frac{D(x, t)}{t} \right)^\wedge(y) dy. \quad (4.4)$$

Поскольку $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}_+)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p \leq 2$, а $\mathcal{H}(x, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для любого $x > 0$ (лемма 4), то вспоминая обозначение (2.6), заключаем, что интеграл (4.4)

сходится для всех $x > 0$. На основании леммы 4, применяя обобщенное равенство Парсеваля (см. § 2, теорема С), получим

$$\mathcal{B}_w(\hat{f})(x) = \int_0^{+\infty} f(y) \frac{D(x, y)}{y} dy, \quad x > 0.$$

Вспоминая определение (2.5) обобщенного ядра Дирихле–Уолша и интегрируя по частям, из предыдущего равенства находим

$$\mathcal{B}_w(\hat{f})(x) = -D(x, y)\mathcal{H}(f)(y)|_{y=+0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathcal{H}(f)(y)\chi(x, y) dy. \quad (4.5)$$

Поскольку

$$|\mathcal{H}(f)(y)| \leq \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}}{(q-1)^{1/q}y^{1/p}}, \quad y > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и

$$|D(x, y)| \leq \min\left(y, \frac{3}{x}\right)$$

(см. (2.5) и (3.3)), то внеинтегральный член в равенстве (4.5) обращается в нуль. Тем самым, равенство (4.5) превращается во второе из равенств (2.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заметим, что в равенстве (4.5) левая часть определена для всех $x > 0$, а следовательно, и правая часть также определена для всех $x > 0$. Тем самым, второе из равенств (2.7) доказано для значений аргумента из $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, если правую часть этого равенства задавать с помощью несобственного интеграла Лебега.

Список литературы

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
2. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. И. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
3. Харди Г. Г., Литлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
5. Bellman R. A note on a theorem of Hardy on Fourier constants // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 741–744.
6. Голубов Б. И. Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 31–40.
7. Fine N. The generalised Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 69. P. 66–77.
8. Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh series. Budapest: Akademiai Kiadó, 1990.
9. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
10. Беспалов М. С. Мультипликативные преобразования Фурье в L^p // Моск. ин-т электронной техники. Рукопись. депонир. в ВИНТИ, № 100-82 Деп., 21 с.
11. Billard P. Sur la convergence presque partout des series de Fourier–Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0, 1)$ // Studia Math. 1967. V. 28. № 3. P. 363–388.

Москва

Поступила в редакцию
28.07.1997