Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Лахтин, А. И. Субботин, Многозначные решения уравнений с частными производными первого порядка, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 6, 33–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:21:44

УДК 517.952+517.977

А. С. Лахтин, **А. И. Субботин**

Многозначные решения уравнений с частными производными первого порядка

Для уравнений с частными производными первого порядка вводится понятие многозначного решения. Оно представляет собой развитие понятия минимаксного решения, определение которого основано на свойстве слабой инвариантности относительно характеристических включений. Потребность рассматривать такие решения возникает, например, в тех случаях, когда уравнения с частными производными первого порядка не удовлетворяют известным условиям, при которых непрерывные вязкостные и минимаксные решения существуют и единственны.

В качестве иллюстрации понятия многозначного решения приведена задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби. В отличие от результатов, известных в теории вязкостных и минимаксных решений, здесь не требуется, чтобы гамильтониан удовлетворял условию Липшица по фазовой переменной или модификациям этого условия.

Рассматривается также краевая задача типа Дирихле для уравнений с частными производными первого порядка. Известно, что при определенных условиях ее минимаксное решение существует и единственно в классе разрывных функций. Вместо разрывных решений можно рассматривать соответствующие многозначные решения, что облегчает изучение этих задач.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad (x, u(x)) \in G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

с краевым условием

$$(x, u(x)) \in Q. \quad (1.2)$$

Здесь G – открытое множество в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, ∂G – граница множества G , Q – заданное подмножество множества ∂G , $Du = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$ – градиент функции $u(x)$. В частности, задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби и задача типа Дирихле для уравнения (1.1) являются задачами указанного вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00219) и Фонда поддержки научных школ (грант № 96-15-96245).

В §2 вводятся *многозначные решения* (*М-решения*) задачи (1.1), (1.2). Они представляют собой естественное развитие понятия минимаксного решения, определение которого основано на свойстве слабой инвариантности относительно характеристических включений [1]–[3]. Потребность рассматривать такие решения возникает, например, в тех случаях, когда не выполняются известные условия (см., например, [1]–[5]), при которых вязкостные и минимаксные решения существуют и единственны.

В §3 рассматривается многозначное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби. В отличие от результатов, известных в теории вязкостных и минимаксных решений, не требуется, чтобы гамильтониан удовлетворял условию Липшица по фазовой переменной или его модификациям. Как видно из простых примеров, приведенных в §3, в этом случае либо не существуют непрерывные вязкостные и минимаксные решения, либо для некоторых верхних решений u и нижних решений v нарушается неравенство $u \geq v$, на котором основано доказательство единственности вязкостных и минимаксных решений.

В §§ 4, 5 рассматривается краевая задача типа Дирихле. Известно [6], [7], что при условиях, указанных в §4, ее минимаксное решение существует и единственно в классе разрывных функций. Как показано в данной работе, вместо разрывных решений можно использовать соответствующие многозначные решения, что облегчает изучение этих задач. Отметим, что разрывные вязкостные решения рассматривались в ряде работ (см., например, [8]–[11] и библиографию в этих статьях), содержащих, в основном, исследования функций цены некоторых задач управления и дифференциальных игр.

М-решения можно использовать также в задачах управления, в которых динамика задана дифференциальными включениями.

Будем предполагать, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $\{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in G\}$ является интервалом $(z_0(x), z^0(x))$, где $-\infty \leq z_0(x) \leq z^0(x) \leq \infty$ (этот интервал может быть ограниченным или неограниченным, или пустым).

Пусть $\|\cdot\|$ – евклидова норма, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что функция $F(x, z, s)$ непрерывна в области $G \times \mathbb{R}^n$, не возрастает по переменной z , т.е.

$$F(x, z', s) \geq F(x, z'', s) \quad \text{при} \quad z' \leq z'', \quad (1.3)$$

и удовлетворяет условию Липшица по переменной s

$$|F(x, z, p) - F(x, z, s)| \leq \lambda(x, z) \|p - s\| \quad (1.4)$$

для любых $(x, z) \in G$, $p, s \in \mathbb{R}^n$, где $\lambda(x, z)$ – непрерывная на G функция.

Для определения М-решения потребуются приводимые ниже конструкции и понятия. Положим

$$S(x, z, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \lambda(x, z), g = \langle s, f \rangle - F(x, z, s)\}, \quad (1.5)$$

где $\lambda(x, z)$ – постоянная Липшица из условия (1.4).

Рассмотрим *характеристическое дифференциальное включение* (ДВ)

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in S(x, z, s). \quad (1.6)$$

Здесь $(x, z) \in G$ – фазовые переменные, $s \in \mathbb{R}^n$ – фиксированный вектор. Используя условие (1.4), можно показать, что

$$S(x, z, p) \cap S(x, z, s) \neq \emptyset \quad \forall (x, z) \in G, \quad \forall p, s \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть Y – некоторое замкнутое подмножество множества $\text{cl } G$. Будем говорить, что Y *слабо инвариантно в G относительно ДВ* (1.6), если для любых $(x_0, z_0) \in Y \cap G$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существуют $\theta > 0$ и траектория ДВ (1.6) $[0, \theta] \ni t \mapsto (x(t), z(t))$ такая, что $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $(x(t), z(t)) \in Y$ при $t \in [0, \theta]$.

Свойство слабой инвариантности, которое называется также *свойством выживаемости* (viability property), рассматривалось многими авторами (см., например, [12], [13] и библиографию в этих работах).

Известно (см., например, [3], [6], [13]), что данное определение эквивалентно любому из двух соотношений:

$$\text{co } T(x, z; Y) \cap S(x, z, s) \neq \emptyset \quad \forall (x, z) \in Y \cap G, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad (1.8)$$

$$\text{co } T(x, z; Y) \cap \Gamma(x, z, s) \neq \emptyset \quad \forall (x, z) \in Y \cap G, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

Здесь

$$\Gamma(x, z, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : g = \langle f, s \rangle - F(x, z, s)\},$$

$T(x, z; Y)$ – конус Булигана. Напомним, что вектор (f, g) из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ содержится в $T(x, z; Y)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности $(x_k, z_k) \in Y$ и $\delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\delta_k \rightarrow 0, \quad \frac{x_k - x}{\delta_k} \rightarrow f, \quad \frac{z_k - z}{\delta_k} \rightarrow g \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

§ 2. Определение M -решений

Пусть $Y \subset \text{cl } G$. Положим

$$\text{epi } Y = \{(x, z + a) \in \text{cl } G : (x, z) \in Y, a \geq 0\},$$

$$\text{hypo } Y = \{(x, z - a) \in \text{cl } G : (x, z) \in Y, a \geq 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Эпи-решением* (соответственно, *гипо-решением*) задачи (1.1), (1.2) будем называть замкнутое множество $U \subset \text{cl } G$ (соответственно, $V \subset \text{cl } G$), слабо инвариантное в G относительно ДВ (1.6) и удовлетворяющее условию

$$U \cap \partial G \subset \text{epi } Q \quad (\text{соответственно, } V \cap \partial G \subset \text{hypo } Q). \quad (2.1)$$

Совокупность эпи-решений (соответственно, гипо-решений) будем обозначать символом $\mathbb{U}$ (соответственно, $\mathbb{V}$).

Пусть (x, z') и (x, z'') – элементы множества $G \cap \text{epi } U$ и пусть $z' \leq z''$. Тогда из определения конуса Булигана имеем $T(x, z'; \text{epi } U) \subset T(x, z''; \text{epi } U)$. Объединяя это соотношение с критерием слабой инвариантности (1.8) и условием (1.3), получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Если $U \in \mathbb{U}$, то $\text{epi } U \in \mathbb{U}$. Аналогично, если $V \in \mathbb{V}$, то $\text{hypo } V \in \mathbb{V}$.

Положим

$$U_\Sigma = \bigcup_{U \in \mathbb{U}} U, \quad V_\Sigma = \bigcup_{V \in \mathbb{V}} V, \quad U_* = \text{cl } U_\Sigma, \quad V_* = \text{cl } V_\Sigma. \quad (2.2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Множества U_* и V_* слабо инвариантны относительно ДВ (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения 1.1 видно, что объединение любой совокупности слабо инвариантных множеств слабо инвариантно. Операция замыкания также сохраняет слабую инвариантность. Этот факт вытекает из известного свойства решений дифференциальных включений, которое в рассматриваемом случае формулируется следующим образом. Пусть $(x_0^k, z_0^k) \in G$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность, сходящаяся к пределу $(x_0, z_0) \in G$. Тогда существует достаточно малое $\theta > 0$ такое, что из любой последовательности траекторий $(x_k(\cdot), z_k(\cdot)): [0, \theta] \mapsto G$, удовлетворяющих (1.6) и начальному условию $(x_k(0), z_k(0)) = (x_0^k, z_0^k)$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на $[0, \theta]$ к некоторой траектории ДВ (1.6).

Положим

$$W = U_* \cap V_*. \quad (2.3)$$

Введем обозначения

$$G(x) = \{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in \text{cl } G\}, \quad W(x) = \{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in W\}, \\ X = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) \neq \emptyset\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Предположим, что

$$W(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X. \quad (2.4)$$

Тогда множество W вида (2.3) слабо инвариантно в G относительно ДВ (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$u_*(x) = \inf \{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in U_*\}, \quad v^*(x) = \sup \{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in V_*\}, \\ B_r = \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|\xi\|^2 + \zeta^2 \leq r^2\}, \\ D(r) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \{(x, z)\} + B_r \subset G\}, \\ W_\varepsilon = (U_* + B_\varepsilon) \cap (V_* + B_\varepsilon).$$

А) Пусть $\varepsilon \in (0, r)$, $(x, z) \in W_\varepsilon \cap D(r)$ и $W(x) \neq \emptyset$. Тогда либо $(x, z) \in \text{int } W_\varepsilon$, либо $(x, z) \in \text{int}(V_* + B_\varepsilon)$, либо $(x, z) \in \text{int}(U_* + B_\varepsilon)$.

Действительно, если $(x, z) \in \partial(U_* + B_\varepsilon)$, то $(x, z) \notin U_*$. Используя утверждение 2.1 и условие (2.4), получаем $z < u_*(x)$ и $u_*(x) \leq v^*(x)$. Поэтому $z < v^*(x)$ и $(x, z) \in V_*$. Следовательно, (x, z) – внутренняя точка множества $V_* + B_\varepsilon$. Если $(x, z) \in \partial(V_* + B_\varepsilon)$, то аналогично получаем, что $(x, z) \in \text{int}(U_* + B_\varepsilon)$.

В) Пусть множество Y слабо инвариантно в G относительно ДВ (1.6). Тогда для любых $0 < \varepsilon \leq r$ множество $Y + B_\varepsilon$ слабо инвариантно в $D(r)$ относительно ДВ

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in S_\varepsilon(x, z, s), \quad (2.5)$$

где

$$S_\varepsilon(x, z, s) = \text{co} \left(\bigcup_{(\xi, \zeta) \in B_\varepsilon} S(x + \xi, z + \zeta, s) \right). \quad (2.6)$$

Это утверждение непосредственно следует из определения слабой инвариантности и построения ДВ (2.5), (2.6).

С) Для любых $0 < \varepsilon \leq r$ множество W_ε слабо инвариантно в $D(r)$ относительно ДВ (2.5).

Пусть $(x, z) \in W_\varepsilon \cap D(r)$, $s \in \mathbb{R}^n$. Требуется показать, что

$$T(x, z; W_\varepsilon) \cap S_\varepsilon(x, z, s) \neq \emptyset. \quad (2.7)$$

Если (x, z) – внутренняя точка множества W_ε , то $T(x, z; W_\varepsilon) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, и очевидно, что (2.7) выполнено. Если $(x, z) \in \partial W_\varepsilon$, то согласно утверждению А) возможен один и только один из следующих двух случаев:

- 1) $(x, z) \in \partial(U_* + B_\varepsilon) \cap \text{int}(V_* + B_\varepsilon)$;
- 2) $(x, z) \in \partial(V_* + B_\varepsilon) \cap \text{int}(U_* + B_\varepsilon)$.

В первом случае $T(x, z; W_\varepsilon) = T(x, z; U_* + B_\varepsilon)$. Используя утверждение В), имеем $T(x, z; U_* + B_\varepsilon) \cap S_\varepsilon(x, z, s) \neq \emptyset$, следовательно, в этом случае (2.7) опять выполнено. Аналогично получаем, что соотношение (2.7) выполняется во втором случае. Утверждение С) доказано.

Д) Пусть $r > 0$, $(x_0, z_0) \in W \cap D(r)$, $s \in \mathbb{R}^n$. Выберем сходящуюся к нулю последовательность $\varepsilon_k \in (0, r]$, $k = 1, 2, \dots$. Поскольку $(x_0, z_0) \in W_{\varepsilon_k}$ и множества W_{ε_k} слабо инвариантны в $D(r)$ относительно ДВ (2.5), где $\varepsilon = \varepsilon_k$, то существуют $\theta > 0$ и последовательность траекторий $(x_k(\cdot), z_k(\cdot))$ таких, что

$$(\dot{x}_k(t), \dot{z}_k(t)) \in S_{\varepsilon_k}(x_k(t), z_k(t), s),$$

$(x_k(0), z_k(0)) = (x_0, z_0)$, $(x_k(t), z_k(t)) \in W_{\varepsilon_k}$ при $t \in [0, \theta]$. Рассматриваемые траектории должны быть продолжимы до момента времени $t = \theta$ и должны оставаться в $D(r)$ при $t \in [0, \theta]$. Важно отметить, что удовлетворяющий этим требованиям отрезок времени $[0, \theta]$ можно выбрать так, чтобы число $\theta > 0$ не зависело от индекса k .

Из последовательности траекторий $(x_k(\cdot), z_k(\cdot))$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу $(x_*(\cdot), z_*(\cdot))$. Предельная функция удовлетворяет ДВ (1.6) и соотношениям $(x_*(0), z_*(0)) = (x_0, z_0)$, $(x_*(t), z_*(t)) \in W$ при $t \in [0, \theta]$. Получаем, что множество W слабо инвариантно в $D(r)$. Поскольку

этот факт имеет место для любых $r > 0$, то множество W слабо инвариантно в G . Утверждение 2.3 доказано.

Заметим, что для любой $(x, z) \in \text{epi } Q$ одноэлементное множество $U = \{(x, z)\}$ принадлежит семейству $\mathcal{U}$. Поэтому $\partial G \cap U_\Sigma = \partial G \cap \text{epi } Q$. Аналогично, $\partial G \cap V_\Sigma = \partial G \cap \text{hypo } Q$. Следовательно, $\partial G \cap U_* \supset \partial G \cap \text{epi } Q$, $\partial G \cap V_* \supset \partial G \cap \text{hypo } Q$.

Будем говорить, что задача (1.1), (1.2) является *регулярной*, если

$$\partial G \cap U_* = \text{epi } Q, \quad \partial G \cap V_* = \text{hypo } Q \quad (2.8)$$

или, что то же самое,

$$\partial G \cap U_\Sigma = \partial G \cap \text{cl } U_\Sigma, \quad \partial G \cap V_\Sigma = \partial G \cap \text{cl } V_\Sigma. \quad (2.9)$$

Заметим, что непосредственно из утверждения 2.2 и определения регулярной задачи следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. *Если задача (1.1), (1.2) регулярна, то множество U_* (соответственно, V_*) вида (2.2) является максимальным по включению эпи-решением (соответственно, гипо-решением).*

Приведем два определения M -решения задачи (1.1), (1.2) и докажем их эквивалентность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. M -решением регулярной задачи (1.1), (1.2) называется максимальное замкнутое множество $Y \subset \text{cl } G$, которое слабо инвариантно в G относительно ДВ (1.6) и удовлетворяет условию $\partial G \cap Y = Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. M -решением задачи (1.1), (1.2) называется пересечение $W = U_* \cap V_*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. *Если задача (1.1), (1.2) регулярна и выполняется условие (2.4), то определения 2.1 и 2.2 эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество W определено равенством (2.3). Поскольку задача (1.1), (1.2) регулярна, то из (2.8), (2.9) и (2.3) имеем

$$\partial G \cap U_\Sigma = \text{epi } Q, \quad \partial G \cap V_\Sigma = \text{hypo } Q, \quad \partial G \cap W = Q.$$

Согласно утверждению 2.3 множество W слабо инвариантно в G относительно ДВ (1.6). Поскольку Y – максимальное слабо инвариантное множество, удовлетворяющее условию $\partial G \cap Y = Q$, то $W \subset Y$.

Нетрудно показать, что $Y \subset W$. Действительно, используя утверждение 2.1, получаем, что множества $\text{epi } Y$ и $\text{hypo } Y$ являются эпи-решением и гипо-решением, соответственно. Поэтому согласно утверждению 2.4 $\text{epi } Y \subset U_*$, $\text{hypo } Y \subset V_*$. Следовательно, $Y \subset U_* \cap V_* = W$. Утверждение 2.5 доказано.

Покажем, как связаны предлагаемые конструкции с известными понятиями теории обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка.

Пусть U и V – некоторые эпи-решение и гипо-решение, соответственно. Положим

$$u(x) = \inf \{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in U\}, \quad v(x) = \sup \{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in V\}.$$

Согласно утверждению 2.1 надграфик функции u слабо инвариантен, поэтому функция u является верхним решением уравнения (1.1) в минимаксном смысле [1]–[3]. Аналогично, получаем, что функция v – нижнее минимаксное решение. Известно, что минимаксные и вязкостные решения эквивалентны, поэтому функции u и v являются вязкостными супер-решением и суб-решением, соответственно.

Пусть $X = \{x : \exists z \in \mathbb{R} \text{ такое, что } (x, z) \in \text{cl } G\}$. Пусть $X \ni x \mapsto w(x)$ – минимаксное (и/или вязкостное) решение уравнения (1.1), т.е. функция $w(\cdot)$ непрерывна, ее график $\text{gr } w = \{(x, w(x)) : x \in X_*\}$ содержится в $\text{cl } G$ и слабо инвариантен в G относительно ДВ (1.6). Предположим также, что функция $w(\cdot)$ удовлетворяет краевому условию (1.2). Поэтому надграфик (соответственно, подграфик) функции w является эпи-решением (соответственно, гипо-решением) задачи (1.1), (1.2). Тогда для минимаксного решения w и M -решения W имеем соотношение $\text{gr } w \subset W$. Если $u \geq v$ для любого верхнего решения u и любого нижнего решения v , то, как известно, минимаксное (и/или вязкостное) решение w единственно, и в этом случае $\text{gr } w = W$.

С другой стороны, пусть M -решение задачи (1.1), (1.2) совпадает с графиком некоторой непрерывной функции w , т.е. $W = \text{gr } w$. Тогда w – минимаксное и вязкостное решение рассматриваемой задачи.

В теории уравнений с частными производными первого порядка известны концепции обобщенных решений, предложенные в работах [14]–[16]. Можно показать, что M -решения совпадают также с графиками решений, рассматриваемых в упомянутых работах.

Неравенство $u \geq v$, единственность и существование минимаксных и вязкостных решения имеют место при определенных предположениях относительно функции F и краевого условия (1.2) (см., например, [1]–[5]). Важно отметить, что в данной работе рассматриваются M -решения задач, в которых упомянутые предположения могут нарушаться. Возможны случаи, когда минимаксные и вязкостные решения либо не существуют, либо неединственны.

Определение 2.3 содержит требование максимальности M -решения. Множества U_* и V_* , используемые в определении 2.1, тоже в некотором смысле максимальны. Напомним, что объединение любой совокупности слабо инвариантных множеств и операция замыкания сохраняют слабую инвариантность. Поэтому

$$Y = \bigcup_{Z \in \mathbb{Z}} Z = \text{cl} \left(\bigcup_{Z \in \mathbb{Z}} Z \right). \quad (2.10)$$

Здесь Y – M -решение в смысле определения 2.2, $\mathbb{Z}$ – совокупность замкнутых слабо инвариантных множеств $Z \subset \text{cl } G$, удовлетворяющих краевому условию $\partial G \cap Z = Q$. Однако определение M -решений равенствами вида (2.2) или (2.10) неконструктивно. Вместе с тем в теории дифференциальных игр и теории слабо инвариантных множеств известны конструктивные методы и вычислительные алгоритмы для решения аналогичных проблем, т.е. для построения максимальных

стабильных мостов и максимальных множеств, обладающих свойством слабой инвариантности (выживаемости).

Наконец отметим, что предположение (2.4) означает существование M -решения. В рассмотренных ниже задачах (в задаче Коши и в задаче типа Дирихле) условие (2.4) будет получено как следствие предположений относительно функции F и краевого условия. Рассмотренная ниже задача Коши является регулярной, поэтому для этой задачи можно использовать определения 2.2 и 2.3. В задаче Дирихле условие регулярности может нарушаться, поэтому M -решение этой задачи вводится согласно определению 2.3.

§3. M -решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + H(t, x, u(t, x), D_x u(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in (0, \theta) \times \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

$$u(\theta, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Здесь $D_x u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$ – градиент функции $u(t, x)$ по переменной x , функция $\sigma: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна.

Известно [1]–[3], что при выполнении указанных ниже условий (а)–(г) существует и единственна непрерывная функция $u: [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, которая является решением задачи (3.1), (3.2) в минимаксном и/или вязкостном смысле.

- (а) Функция $H(t, x, z, s)$ непрерывна на $[0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и не возрастает по переменной z .
- (б) Для любых $(t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}$ выполняется условие Липшица по переменной s

$$|H(t, x, z, s') - H(t, x, z, s'')| \leq \lambda(x) \|s' - s''\| \quad \forall s', s'' \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

где

$$\lambda(x) = \Lambda(1 + \|x\|), \quad \Lambda - \text{постоянная}. \quad (3.4)$$

- (в) Для любых $(t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}$ выполняется оценка

$$|H(t, x, z, 0)| \leq \omega(1 + \|x\| + |z|), \quad \omega - \text{постоянная}. \quad (3.5)$$

- (г) Для любого ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^n$ существует число $L(B) > 0$ такое, что для всех $x', x'' \in B$ и для любых $t \in [0, \theta]$, $z \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|H(t, x', z, s) - H(t, x'', z, s)| \leq L(B)(1 + \|s\|)\|x' - x''\|.$$

В данной работе предполагается, что выполнены условия (а)–(в), но в отличие от [1]–[3] здесь не требуется, чтобы выполнялось условие (г). В рассматриваемом случае утверждение о существовании и единственности минимаксного или вязкостного решения не имеет места (см. примеры в конце этого параграфа).

Задача (3.1), (3.2) является частным случаем задачи (1.1), (1.2). Здесь $G = (0, \theta) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, элементами G являются точки $\hat{x} = (t, x, z) = (t, x_1, \dots, x_n, z)$. Множество $Q \subset \partial G$ имеет вид:

$$Q = Q_0 \cup Q_\theta, \quad Q_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad Q_\theta = \{\theta\} \times \text{gr } \sigma.$$

Определение M -решения основано на свойстве слабой инвариантности (см. § 2). Положим

$$S(t, x, z, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \lambda(x), g = \langle s, f \rangle - H(t, x, z, s)\}, \quad (3.6)$$

где $\lambda(x)$ – величина из условия Липшица (3.3). Символом $\text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ будем обозначать множество абсолютно непрерывных функций (траекторий) $[0, \theta] \ni t \mapsto (x(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, удовлетворяющих почти всюду ДВ

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in S(t, x, z, s) \quad (3.7)$$

и условию $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$.

Заметим, что $S(t, x, z, s) \cap S(t, x, z, p) \neq \emptyset$ для любых $(t, x, z) \in (0, \theta) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ и $s, p \in \mathbb{R}^n$ (см. аналогичное соотношение (1.7)). Поэтому

$$\text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s) \cap \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, p) \neq \emptyset \quad (3.8)$$

для любых $(t_0, x_0, z_0) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ и $p, s \in \mathbb{R}^n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть Y – замкнутое множество в $[0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Будем говорить, что Y *слабо инвариантно относительно* ДВ (3.7), если для любых $(t_0, x_0, z_0) \in Y$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ такая, что $(t, x(t), z(t)) \in Y$ при $t \in [t_0, \theta]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в рассматриваемой задаче применить определение 1.1, то вместо ДВ (3.7) следует рассматривать ДВ вида

$$(\dot{t}, \dot{x}, \dot{z}) \in \widehat{S}(t, x, z, \hat{s}),$$

где $\hat{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Опуская явные соотношения, определяющие множество $\widehat{S} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ согласно конструкциям из § 1, отметим, что для уравнения (3.1) определения 1.1 и 3.1 эквивалентны [2], [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Эпи-решением* (соответственно, *гипо-решением*) задачи (3.1), (3.2) будем называть замкнутое множество $U \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ (соответственно, $V \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$), слабо инвариантное относительно ДВ (3.7) и удовлетворяющее условию

$$(\theta, x, z) \in U \implies z \geq \sigma(x) \quad (\text{соответственно, } (\theta, x, z) \in V \implies z \leq \sigma(x)). \quad (3.9)$$

Пусть $U_\Sigma \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (соответственно, $V_\Sigma \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) – объединение всех эпи-решений (соответственно, гипо-решений) задачи (3.1), (3.2). Положим

$$U_* = \text{cl } U_\Sigma, \quad V_* = \text{cl } V_\Sigma, \quad W = U_* \cap V_*. \quad (3.10)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Задача (3.1), (3.2) регулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – некоторое множество в $[0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Положим $Y(\theta) = \{(x, z) : (\theta, x, z) \in Y\}$. Условие регулярности задачи (3.1), (3.2) означает, что $U_*(\theta) = \text{epi } \sigma$, $V_*(\theta) = \text{hypo } \sigma$. Имеем $U_*(\theta) \supset U_\Sigma(\theta) = \text{epi } \sigma$ и $V_*(\theta) \supset V_\Sigma(\theta) = \text{hypo } \sigma$. Покажем, что $U_*(\theta) \subset \text{epi } \sigma$.

Пусть $(x_0, z_0) \in U_*(\theta)$. По определению множества U_* существуют последовательность эпи-решений U_k и последовательность точек $(\tau_k, \xi_k, \zeta_k) \in U_k$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $(\tau_k, \xi_k, \zeta_k) \rightarrow (\theta, x_0, z_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Выберем произвольно $s \in \mathbb{R}^n$. По определению эпи-решения существуют траектории $(x_k(\cdot), z_k(\cdot)) \in \text{Sol}(\tau_k, \xi_k, \zeta_k, s)$ такие, что $(\theta, x_k(\theta), z_k(\theta)) \in U_k$. Согласно (3.9) имеем $z_k(\theta) \geq \sigma(x_k(\theta))$. Заметим, что $(x_k(\theta), z_k(\theta)) \rightarrow (x_0, z_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому, учитывая непрерывность функции σ , получаем $z_0 \geq \sigma(x_0)$. Следовательно, $U_*(\theta) \subset \text{epi } \sigma$.

Аналогично можно показать, что $V_*(\theta) \subset \text{hypo } \sigma$. Итак, доказано, что задача (3.1), (3.2) регулярна.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Множество W , определенное равенствами (3.10), удовлетворяет условию (2.4), т.е.*

$$W(t, x) = \{z \in \mathbb{R} : (t, x, z) \in W\} \neq \emptyset \quad \forall (t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n. \quad (3.11)$$

Это утверждение можно доказать различными способами. Например, опишем следующую схему доказательства.

Рассмотрим последовательность аппроксимирующих задач

$$\frac{\partial w_k(t, x)}{\partial t} + H_k(t, x, w_k(t, x), D_x w_k(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in G, \quad (3.12)$$

$$w_k(\theta, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.13)$$

где гамильтонианы H_k удовлетворяют не только условиям (а)–(в), но и условию (г). Известно (см., например, [2], [3]), что существует и единственно минимальное решение $w_k(t, x)$ задачи (3.12), (3.13).

Согласно определению график функции w_k слабо инвариантен относительно характеристических ДВ вида (3.7), (3.6), где вместо H следует подставить H_k . Определим верхний предел

$$W^\natural = \left\{ (t, x, z) : \exists \text{ последовательность } (t_{k_i}, x_{k_i}, z_{k_i}) \in \text{gr } w_{k_i}, i = 1, 2, \dots, \right. \\ \left. \text{такая, что } \lim_{i \rightarrow \infty} (t_{k_i}, x_{k_i}, z_{k_i}) = (t, x, z) \right\}.$$

Можно показать, что $W^\natural$ является замкнутым множеством, и $\{z \in \mathbb{R} : (t, x, z) \in W^\natural\} \neq \emptyset$ для любых $(t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, множество $W^\natural$ слабо инвариантно относительно ДВ (3.7), и справедливо равенство $W^\natural(\theta) = \text{gr } \sigma$.

Получаем, что $W^\natural$ является одновременно эпи-решением и гипо-решением задачи (3.1), (3.2), т.е.

$$W^\natural \subset U_* \cap V_*.$$

Поскольку $W^\natural(t, x) \neq \emptyset$, то имеем (3.11).

Приведем более подробно другое доказательство, прототипом которого является метод программных итераций, разработанный в теории дифференциальных игр (см., например, [17], [18]). В отличие от приведенной выше схемы в предлагаемом доказательстве не используется существование решений в случае, когда гамильтонианы удовлетворяют условиям (а)–(г). Заметим, что в работе [19] метод программных итераций использовался для доказательства существования минимаксных и вязкостных решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.2. А) Рассмотрим оператор A , который произвольному множеству $Y \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ставит в соответствие некоторое множество $Y' = A(Y) \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Точка (t_0, x_0, z_0) содержится в $A(Y)$ тогда и только тогда, когда для любых $s \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \in [t_0, \theta]$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ такая, что $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in Y$.

Заметим, что для любого $Y \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ справедливо вложение

$$A(Y) \subset Y. \quad (3.14)$$

Если Y замкнуто, то нетрудно проверить, что равенство $A(Y) = Y$ равносильно слабой инвариантности множества Y относительно ДВ (3.7).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ – некоторое множество. Через $\Pi(M)$ обозначим совокупность точек $(t_0, x_0, z_0) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ таких, что для любого $s \in \mathbb{R}^n$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$, удовлетворяющая условию $(x(\theta), z(\theta)) \in M$. Множество $\Pi(M)$ так же, как и его прототип в теории ДИ (см., например, [20]), называется *множеством программного поглощения*.

Рассмотрим последовательность множеств

$$U_0 = \Pi(\text{epi } \sigma), \quad U_k = A(U_{k-1}) = A^k(U_0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

$$V_0 = \Pi(\text{hypo } \sigma), \quad V_k = A(V_{k-1}) = A^k(V_0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Ниже будет доказано, что множества

$$U_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_k, \quad V_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_k$$

являются, соответственно, эпи-решением и гипо-решением задачи (3.1), (3.2).

В) Пусть заданы функции $(t, x, z) \mapsto \tau(t, x, z) \in [t, \theta]$ и $(t, x, z) \mapsto p(t, x, z) \in \mathbb{R}^n$, определенные при $(t, x, z) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Пару этих функций обозначим через γ .

Рассмотрим набор

$$\omega = \left(x(\cdot), z(\cdot), \{t_i\}_{i=0}^{k+1}, \{s_i\}_{i=0}^k \right). \quad (3.17)$$

Здесь $(x(\cdot), z(\cdot)) : [t_0, \theta] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет начальному условию $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$ и при почти всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$ удовлетворяет ДВ $(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in S(t, x(t), z(t), s_i)$, где множество S определено равенством (3.6). Векторы s_i и моменты времени t_i определены равенствами $s_i = p(t_i, x(t_i), z(t_i))$ ($i = 0, 1, \dots, k$), $t_i = \tau(t_{i-1}, x(t_{i-1}), z(t_{i-1}))$ ($i = 1, \dots, k$), $t_{k+1} = \theta$. Совокупность всех наборов вида (3.17), удовлетворяющих указанным требованиям, обозначим через $\Omega_k(t_0, x_0, z_0, \gamma)$.

Предположим, что для некоторой точки (t_0, x_0, z_0) выполняются соотношения

$$(t_0, x_0, z_0) \notin U_k, \quad (t_0, x_0, z_0) \notin V_k. \quad (3.18)$$

Из первого соотношения по определению множества U_k следует, что существует γ^* такая, что

$$(t_i, x(t_i), z(t_i)) \notin U_{k-i}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (\theta, x(\theta), z(\theta)) \notin \text{epi } \sigma$$

для любого $\omega \in \Omega_k(t_0, x_0, z_0, \gamma^*)$.

Аналогично, из второго соотношения следует, что существует γ_* такая, что

$$(t_i, x(t_i), z(t_i)) \notin V_{k-i}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (\theta, x(\theta), z(\theta)) \notin \text{hypo } \sigma$$

для любого $\omega \in \Omega_k(t_0, x_0, z_0, \gamma_*)$.

Используя соотношение (3.8), получаем, что существуют $\omega^* \in \Omega_k(t_0, x_0, z_0, \gamma^*)$ и $\omega_* \in \Omega_k(t_0, x_0, z_0, \gamma_*)$ такие, что $(x^*(\cdot), z^*(\cdot)) = (x_*(\cdot), z_*(\cdot))$.

Таким образом, одновременно выполняются соотношения

$$(\theta, x^*(\theta), z^*(\theta)) \notin \text{epi } \sigma, \quad (\theta, x_*(\theta), z_*(\theta)) = (\theta, x^*(\theta), z^*(\theta)) \notin \text{hypo } \sigma.$$

Следовательно, соотношения (3.18) приводят к противоречию.

С) Покажем, что множества U_k замкнуты для любых $k = 0, 1, \dots$. Действительно, из непрерывности σ следует замкнутость надграфика $\text{epi } \sigma$. Используя свойство полунепрерывной сверху зависимости пучка $\text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ от начальных условий (t_0, x_0, z_0) , получаем, что множество U_0 замкнуто. Затем, используя

опять свойство полунепрерывности, по индукции получаем, что U_k замкнуто для любого $k = 0, 1, \dots$.

Аналогично проверяется, что множества V_k замкнуты для любых $k = 0, 1, \dots$.

По индукции нетрудно показать, что множества U_k и V_k обладают следующим свойством: $(t, x, z) \in U_k \implies (t, x, z + r) \in U_k$, $(t, x, z) \in V_k \implies (t, x, z - r) \in V_k$ для любого $r \geq 0$.

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} U_k(t_0, x_0) &= \{z_0 \in \mathbb{R} : (t_0, x_0, z_0) \in U_k\}, \\ V_k(t_0, x_0) &= \{z_0 \in \mathbb{R} : (t_0, x_0, z_0) \in V_k\}. \end{aligned}$$

Согласно указанным свойствам

$$U_k(t_0, x_0) = [u_k(t_0, x_0), \infty) \text{ либо } U_k(t_0, x_0) = (-\infty, \infty), \text{ либо } U_k(t_0, x_0) = \emptyset.$$

Аналогично,

$$V_k(t_0, x_0) = (-\infty, v_k(t_0, x_0)] \text{ либо } V_k(t_0, x_0) = (-\infty, \infty), \text{ либо } V_k(t_0, x_0) = \emptyset,$$

где $u_k(t_0, x_0)$ и $v_k(t_0, x_0)$ — некоторые числа.

Заметим, что

$$U_k(t_0, x_0) \cap V_k(t_0, x_0) \neq \emptyset. \quad (3.19)$$

Действительно, в противном случае существует $z_0 \in \mathbb{R}$ такое, что выполняются соотношения (3.18), которые, как показано выше, приводят к противоречию.

Д) Покажем, что множество $U_\infty = \bigcap_{k=0}^\infty U_k$ слабо инвариантно относительно ДВ (3.7).

Пусть $(t_0, x_0, z_0) \in U_\infty$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [t_0, \theta]$. Требуется показать, что существует $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ такая, что $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in U_\infty$. Имеем $(t_0, x_0, z_0) \in U_k$ для любого $k = 0, 1, \dots$. Из определения множества U_k (см. (3.15)) следует, что существует $(x_k(\cdot), z_k(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ такая, что $(\tau, x_k(\tau), z_k(\tau)) \in U_{k-1}$. Из последовательности $(x_k(\cdot), z_k(\cdot))$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу $(x_*(\cdot), z_*(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$. Заметим, что множества U_k и U_∞ замкнуты, множества U_k образуют монотонную последовательность, т.е. $U_{k+1} \subset U_k$. Поэтому $(\tau, x_*(\tau), z_*(\tau)) \in U_\infty$. Итак, доказано, что множество U_∞ слабо инвариантно относительно ДВ (3.7).

Непосредственно из построений следует, что $U_\infty(\theta) = \text{epi } \sigma$. Следовательно, множество U_∞ является эпи-решением задачи (3.1), (3.2). Аналогично получаем, что множество $V_\infty = \bigcap_{k=0}^\infty V_k$ — гипо-решение задачи (3.1), (3.2).

Согласно (3.14)–(3.15) последовательности U_k и V_k монотонны. Поэтому

$$U_{k+1}(t_0, x_0) \subset U_k(t_0, x_0), \quad V_{k+1}(t_0, x_0) \subset V_k(t_0, x_0).$$

Как показано в С), пересечение замкнутых множеств $U_k(t_0, x_0)$ и $V_k(t_0, x_0)$ не пусто. Следовательно, $W_\infty(t_0, x_0) = U_\infty(t_0, x_0) \cap V_\infty(t_0, x_0) \neq \emptyset$. Утверждение 3.2 доказано.

Приведем два определения M -решения задачи Коши (3.1), (3.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *M-решением задачи (3.1), (3.2) называется максимальное замкнутое множество $Y \subset [0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, которое слабо инвариантно относительно ДВ (3.7) и удовлетворяет условию $Y(\theta) = \text{gr } \sigma$, где $Y(\theta) = \{(x, z) : (\theta, x, z) \in Y\}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *M-решением задачи (3.1), (3.2) называется пересечение $W = U_* \cap V_*$, где U_* и V_* определены равенствами (3.10).*

Поскольку задача Коши (3.1), (3.2) регулярна и удовлетворяет условию (3.11), то согласно утверждению 2.5 определения 3.3 и 3.4 эквивалентны.

Отметим, что множество Y_∞ , определенное итерационной процедурой

$$Y_0 = \Pi(\text{gr } \sigma), \quad Y_k = A(Y_{k-1}) = A^k(Y_0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad Y_\infty = \bigcap_{i=0}^{\infty} Y_i,$$

является *M*-решением задачи (3.1), (3.2).

Действительно, согласно определению 3.3, для любых $(t_0, x_0, z_0) \in W$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$, удовлетворяющая условию $(x(\theta), z(\theta)) \in \text{gr } \sigma$. Поэтому $Y_0 \supset W$. Множество W слабо инвариантно, поэтому $A(W) = W$. Согласно итерационной процедуре имеем $Y_1 = A(Y_0) \supset A(W) = W$. Аналогично получаем $Y_k \supset A(Y_{k-1}) = W, k = 1, 2, \dots$. Следовательно, $Y_\infty \supset W$. Заметим, что $Y_\infty(\theta) = \text{gr } \sigma$. Подобно тому, как это сделано в доказательстве утверждения 3.2, выводим, что множество Y_∞ замкнуто и слабо инвариантно. Поскольку W – максимальное множество с указанными свойствами, то заключаем, что $Y_\infty = W$.

Для иллюстрации понятия *M*-решения задачи (3.1), (3.2) рассмотрим следующий простой пример, основанный на неединственности решений обыкновенного дифференциального уравнения, которая может иметь место, если не выполнено условие Липшица по фазовой переменной.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 1$, $H(t, x, s) = 2s\sqrt{\max\{x; 0\}}$, $\sigma(x) = x$. Определим многозначное отображение

$$W(t, x) = \begin{cases} \{(\theta - t + \sqrt{x})^2\} & \text{при } x > 0, \\ [0, (\theta - t - \sqrt{-x})^2] & \text{при } x = 0, \\ \{x\} & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Можно показать, что множество $W = \{(t, x, z) : z \in W(t, x), (t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}\}$ является *M*-решением данного примера.

Заметим, что в рассматриваемом примере слабая инвариантность множества $Y \subset [0, \theta] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равносильна следующему условию: для любой точки $(t_0, x_0, z_0) \in Y$ существует решение дифференциального уравнения $\dot{x} = \sqrt{\max\{x; 0\}}$ такое, что $x(t_0) = x_0$ и $(t, x(t), z_0) \in Y$ при $t \in [t_0, \theta]$. Эквивалентность этого условия и определения 3.1 следует из линейности по s гамильтониана $H(t, x, s) = 2s\sqrt{\max\{x; 0\}}$ (см., например, [2], [3]). После этого замечания нетрудно показать, что множества $\text{epi } W$ и $\text{hypo } W$ являются максимальными эпи-решением и гипо-решением. Следовательно, для множества W вида (3.20) имеем $\text{epi } W = U_*$,

пусть $W = V_*$, $W = U_* \cap V_*$. Таким образом, получаем, что это множество является M -решением данного примера.

В этом примере не существует непрерывного решения $u(t, x)$ в минимаксном и/или вязкостном смысле. Действительно, если функция u является минимаксным и/или вязкостным решением, то, как отмечено в § 2, должно выполняться вложение $\text{gr } u \subset W$. Однако согласно (3.20) в данном примере не существует непрерывной функции, удовлетворяющей указанному вложению.

ПРИМЕР 2. M -решение в предыдущем примере можно отождествить определенным образом с разрывной кусочно-непрерывной функцией. Однако M -решение может быть множеством с непустой внутренностью. Чтобы показать это, модифицируем предыдущий пример. Пусть $n = 1$, $H(t, x, s) = 2s\sqrt{|x|}$, $\sigma(x) = x$. Рассмотрим многозначное отображение

$$W(t, x) = \begin{cases} \{-(\theta - t - \sqrt{-x})^2\} & \text{при } x \leq -(\theta - t)^2, \\ [0, (\theta - t - \sqrt{-x})^2] & \text{при } -(\theta - t)^2 < x \leq 0, \\ \{(\theta - t + \sqrt{x})^2\} & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Можно показать, что множество $W = \{(t, x, z) : z \in W(t, x), (t, x) \in [0, \theta] \times \mathbb{R}\}$ является M -решением данного примера.

Отметим, что в этом примере функция $u^*(t, x) = \max_{z \in W(t, x)} z$ непрерывна. График этой функции слабо инвариантен в смысле определения 3.1. Поэтому функция u^* является минимаксным решением данного примера. Поскольку подграфик этой функции тоже слабо инвариантен, то u^* – нижнее решение. Рассмотрим функцию $u_*(t, x) = \min_{z \in W(t, x)} z$. Она полунепрерывна снизу. Ее надграфик слабо инвариантен. Поэтому функция u_* – верхнее решение. Из (3.21) следует, что $u^*(t, x) > u_*(t, x)$ при $-(\theta - t)^2 < x < 0$.

Напомним, что для задач, которые рассматриваются в теории минимаксных и вязкостных решений и удовлетворяют определенным условиям (в частности, условиям (а)–(г), указанным в начале этого параграфа), для любых верхних решений u , нижних решений v и при всех (t, x) выполняется неравенство $u(t, x) \geq v(t, x)$. Оно лежит в основе доказательства единственности вязкостных и минимаксных решений. В данном примере не выполняется условие (г) и нарушается указанное неравенство.

§ 4. M -решение краевой задачи типа Дирихле

В этом параграфе обсуждаются два подхода к определению обобщенного решения краевой задачи типа Дирихле. Согласно первому из них решение рассматривается в классе разрывных функций. Другое определение дано согласно подходу, изложенному в § 2. Ниже приведены формулировки основных фактов и сопоставление M -решений с разрывными решениями.

Рассмотрим задачу типа Дирихле для уравнения

$$H(x, Du(x)) - u(x) = 0, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

с краевым условием

$$u(x) = \sigma(x), \quad x \in \partial X. \quad (4.2)$$

Здесь X – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия.

(Н1) Функция $H(\cdot, 0)$ ограничена, т.е.

$$\sup_{x \in X} |H(x, 0)| < c, \quad (4.3)$$

где c – некоторое число.

(Н2) Для любых $x \in X, p, q \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|H(x, p) - H(x, q)| \leq \lambda(x),$$

где $\lambda(x) = (1 + \|x\|)\|p - q\|\mu$, μ – константа.

(Н3) Для любого ограниченного множества $\Delta \subset X$ существует число $\Lambda(\Delta)$ такое, что для любых $s \in \mathbb{R}^n, x, y \in \Delta$ выполняется неравенство

$$|H(x, s) - H(y, s)| \leq \Lambda(\Delta)\|x - y\|(1 + \|s\|).$$

(Н4) Функция σ непрерывна на ∂X и удовлетворяет оценке $\sup_{x \in \partial X} |\sigma(x)| < c$.

Определения верхних, нижних и минимаксных решений задачи (4.1), (4.2) основаны на свойстве слабой инвариантности относительно ДВ

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in S(x, z, s), \quad (4.4)$$

$$S(x, z, s) = \{(f, g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|f\| \leq \lambda(x), g = \langle f, s \rangle - H(x, s) + z\}, \quad (4.5)$$

где $\lambda(x)$ – величина из условия (Н2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (см., например, [3], [6], [7]). *Верхним* (соответственно, *нижним*) *решением задачи* (4.1), (4.2) называется полунепрерывная снизу (соответственно, сверху) функция $x \mapsto u(x)$, $x \in \text{cl } X$, $u(x) \in \mathbb{R}$, такая, что

$$\sup_{x \in \text{cl } X} |u(x)| \leq c, \quad (4.6)$$

для всех $x \in \partial X$ выполняется условие $u(x) \geq \sigma(x)$ (соответственно, $u(x) \leq \sigma(x)$), надграфик $\text{epi } u$ (соответственно, подграфик $\text{hypo } u$) слабо инвариантен относительно ДВ (4.4), (4.5). *Минимаксным решением задачи* (4.1), (4.2) называется функция $u: \text{cl } X \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)}(x) = u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) \quad \forall x \in \text{cl } X, \quad (4.7)$$

где $u^{(k)}$ (соответственно, u_k), $k = 1, 2, \dots$, – некоторая последовательность верхних (соответственно, нижних) решений задачи (4.1), (4.2).

Здесь

$$\begin{aligned} \text{epi } u &= \{(x, z) : x \in \text{cl } X, z \geq u(x)\}, \\ \text{hypo } u &= \{(x, z) : x \in \text{cl } X, z \leq u(x)\}. \end{aligned}$$

Согласно замечанию М. Барди (см., например, [8]) соотношения (4.7) эквивалентны следующим равенствам:

$$\inf\{v(x) : v \text{ – верхнее решение}\} = u(x) = \sup\{w(x) : w \text{ – нижнее решение}\}.$$

ТЕОРЕМА 4.1 [3], [6], [7]. Пусть выполнены условия (Н1)–(Н4). Предположим, что существует нижнее (соответственно, верхнее) решение задачи (4.1), (4.2), непрерывное в каждой точке $x \in \partial X$. Тогда существует и единственно минимаксное решение этой задачи. Минимаксное решение совпадает с наименьшим верхним (соответственно, наибольшим нижним) решением.

Если одновременно существуют верхнее решение $u(x)$ и нижнее решение $v(x)$, непрерывные в каждой точке $x \in \partial X$, то минимаксное решение непрерывно на $\text{cl } X$.

Минимаксное решение совместно с классическим решением: если классическое решение задачи (4.1), (4.2) существует, то оно совпадает с минимаксным решением этой задачи; если минимаксное решение u дифференцируемо в некоторой точке $x \in X$, то в этой точке справедливо равенство (4.1).

Минимаксное решение может быть разрывным. Такая ситуация типична для краевой задачи для уравнения Беллмана–Айзека, которая возникает в задаче оптимального быстрогодействия. Известно, что функция цены дифференциальной игры или задачи оптимального быстрогодействия совпадает с минимаксным решением соответствующей краевой задачи вида (4.1), (4.2). Необходимость рассматривать разрывные решения мотивируется также задачами, возникающими в исследованиях сингулярно возмущенных эллиптических уравнений.

Вместо разрывных решений $u(x)$ можно рассматривать M -решения, исследование которых оказывается более удобным. Вместе с тем, M -решения естественным образом связаны с разрывными решениями (см. ниже (4.13)).

M -решение рассматриваемой задачи определим согласно общей конструкции из §§ 1, 2. Положим $G = X \times \mathbb{R}$, $Q = \text{gr } \sigma = \{(x, \sigma(x)) : x \in \partial X\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Эпи-решением задачи (4.1), (4.2) назовем замкнутое множество $U \subset \text{cl } G$, которое слабо инвариантно относительно ДВ (4.4), (4.5), удовлетворяет краевому условию*

$$U \cap \partial G \subset \text{epi } \sigma$$

и оценке

$$\inf\{z : (x, z) \in U\} \in [-c, c] \quad \forall x \in \text{cl } X.$$

Аналогично, *гипо-решением задачи (4.1), (4.2) назовем замкнутое множество $V \subset \text{cl } G$, которое слабо инвариантно относительно ДВ (4.4), (4.5), удовлетворяет краевому условию*

$$V \cap \partial G \subset \text{hypo } \sigma$$

и оценке

$$\sup\{z : (x, z) \in V\} \in [-c, c] \quad \forall x \in \text{cl } X.$$

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия (Н1)–(Н4) и пусть существует гипо-решение $V^\sharp$ такое, что функция

$$v^\sharp(x) = \sup\{z : (x, z) \in V^\sharp\} \quad (4.8)$$

непрерывна в каждой точке $x \in \partial X$. Тогда

$$\text{cl } G = U_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V^{(k)} \right), \quad (4.9)$$

где U_0 – некоторое эпи-решение, $V^{(k)}$ – некоторая последовательность гипо-решений. Аналогично, если существует эпи-решение $U^\sharp$ такое, что функция

$$u^\sharp(x) = \inf\{z : (x, z) \in U^\sharp\} \quad (4.10)$$

непрерывна в каждой точке $x \in \partial X$, то имеет место равенство

$$\text{cl } G = V_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \right),$$

где V_0 – некоторое гипо-решение, $U^{(k)}$ – некоторая последовательность эпи-решений.

ТЕОРЕМА 4.3. Для любых $(x, z') \in U_\Sigma$ и $(x, z'') \in V_\Sigma$ справедливо неравенство $z' \geq z''$.

Здесь через U_Σ и V_Σ обозначаются, соответственно, объединения всех эпи-решений и гипо-решений задачи (4.1), (4.2) (см. аналогичные обозначения (2.2)).

Теорема 4.3 фактически совпадает с теоремой 3.3 из [7], в которой для любого верхнего решения u и любого нижнего решения v доказано неравенство $u(x) \geq v(x)$. Действительно, пусть U и V – некоторые эпи-решение и гипо-решение, соответственно. Рассмотрим функции

$$u(x) = \inf\{z : (x, z) \in U\}, \quad v(x) = \sup\{z : (x, z) \in V\}. \quad (4.11)$$

Можно проверить, что эти функции являются верхним и нижним решениями задачи (4.1), (4.2) в смысле определения 4.1. Поэтому теорема 4.3 следует из неравенства $u \geq v$.

Доказательство теоремы 4.2 приведено в §5. Отметим, что по содержанию и по способу доказательства теорема 4.2 близка теореме об альтернативе для дифференциальной игры сближения-уклонения [21].

Положим

$$U_* = \text{cl } U_\Sigma, \quad V_* = \text{cl } V_\Sigma, \quad W = U_* \cap V_*. \quad (4.12)$$

Нетрудно заметить, что при выполнении условий теоремы 4.2 выполняется условие (2.4). Поэтому согласно утверждению 2.3 множество W вида (4.12) слабо инвариантно в G относительно ДВ (4.4), (4.5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *M-решением задачи* (4.1), (4.2) будем называть пересечение $W = U_* \cap V_*$.

Условие регулярности (2.8) в рассматриваемой задаче может нарушаться (см. пример в конце параграфа). Поэтому утверждение 2.5 не имеет места.

Рассмотрим, как связаны определения 4.1 и 4.2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены равенствами (4.11). Из определений 2.1 и 2.2 имеем следующее:

- 1) если множество U (множество V) является эпи-решением (гипо-решением) в смысле определения 4.2, то функция u (функция v) является верхним (нижним) решением в смысле определения 4.1;
- 2) если функция u (функция v) является верхним (нижним) решением в смысле определения 4.1, то множество $U = \text{epi } u$ (множество $V = \text{hypo } v$) является эпи-решением (гипо-решением) в смысле определения 4.2.

С использованием результатов работы [7] можно показать, что минимаксное решение $u: \text{cl } X \mapsto \mathbb{R}$ связано с M -решением W равенством

$$W = \text{cl epi } u \cap \text{cl hypo } u. \quad (4.13)$$

Рассмотрим многозначную функцию $x \mapsto W(x) = \{z : (x, z) \in W\}$. Из равенства (4.13) получаем следующее:

- 1) если в окрестности некоторой точки $x_* \in \text{cl } X$ минимаксное решение u непрерывно, то $W(x_*) = \{u(x_*)\}$;
- 2) если $x_* \in \text{cl } X$ — точка разрыва, то $W(x_*) = [u_*, u^*]$, где

$$u_* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \{u(x) : x \in \text{cl } X, \|x - x_*\| \leq \varepsilon\},$$

$$u^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \{u(x) : x \in \text{cl } X, \|x - x_*\| \leq \varepsilon\}.$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи минимаксное решение в смысле определения 2.1 и M -решение в смысле определения 2.2 представляют по сути одно и то же понятие. Вместе с тем замена разрывных решений многозначными отображениями позволяет упростить доказательства ряда положений. В частности, доказательство теоремы 4.2 оказывается более простым, чем доказательство аналогичного результата в [3], [7], из которого выводится существование минимаксного решения.

ПРИМЕР. Покажем, что для задач вида (4.1), (4.2) условие регулярности (2.8) может нарушаться. Рассмотрим краевую задачу

$$1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - u(x_1, x_2) = 0, \quad (4.14)$$

$$(x_1, x_2) \in X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\},$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 = 0\}. \quad (4.15)$$

Данный пример представляет задачу вида (4.1), (4.2), в которой

$$n = 2, \quad H(x, s) = -s_1 + s_2 x_2 + 1, \quad G = X \times \mathbb{R}, \\ \sigma(x) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| = 0.$$

Функция $v^\sharp(x) = 0$ при $x \in \text{cl} X = \mathbb{R}^2$ является нижним решением задачи (4.14), (4.15). Поэтому согласно теореме 4.1 минимаксное решение задачи (4.14), (4.15) существует и единственно.

Это решение имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \exp(-x_1), & \text{если } x_1 \geq 0, x_2 = 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Можно либо непосредственно проверить, что в данном примере функция вида (4.16) удовлетворяет определению 4.1, либо воспользоваться следующим замечанием.

Пусть гамильтониан в задаче (4.1), (4.2) имеет вид:

$$H(x, s) = \min_{\alpha \in A} \max_{\beta \in B} \langle f(x, \alpha, \beta), s \rangle + 1. \quad (4.17)$$

Рассмотрим дифференциальную игру, в которой движение управляемой системы задано уравнением

$$\dot{x} = f(x, \alpha, \beta).$$

Первый (второй) игрок выбирает стратегию $\alpha(x)$ (стратегию $\beta(x)$) и стремится гарантировать наименьшее (наибольшее) время, за которое фазовая точка выходит из области X . Известно (см., например, [21]), что в этой игре существует ситуация ε -равновесия и цена игры $\tau(x_0)$ – оптимальный результат для игроков, где $x_0 = x(0)$ – начальное состояние игры. Известно также, что минимаксное решение задачи (4.1), (4.2) и функция цены $\tau(x)$ связаны равенством (преобразованием Крусковского) $u(x) = 1 - \exp(-\tau(x))$.

В примере (4.14), (4.15) гамильтониан имеет вид (4.17), где $f(x) = (-1, x_2)$. Величина $\tau(x_0)$ – время, за которое траектория $(x_1(t), x_2(t))$, удовлетворяющая уравнениям

$$\dot{x}_1(t) = -1, \quad \dot{x}_2(t) = x_2$$

и начальному условию $x(0) = x_0$, попадает в начало координат (напомним, что здесь $\partial X = \{0\}$). Если $(x_1(t), x_2(t)) \neq (0, 0)$ при всех $t \geq 0$, то полагаем $\tau(x_0) = \infty$. Поэтому равенство (4.16) следует из формулы $u(x) = 1 - \exp(-\tau(x))$.

Согласно (4.13) получаем, что M -решение задачи (4.14), (4.15) имеет вид:

$$W(x_1, x_2) = \begin{cases} [1 - \exp(-x_1), 1], & \text{если } x_1 \geq 0, x_2 = 0, \\ \{1\} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Положим

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \{(x_1, x_2) : x_1 \in (-\varepsilon, \infty), x_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}, \quad L_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus K_\varepsilon, \\ V_\varepsilon(x) &= \begin{cases} (-\infty, 0], & \text{если } x \in K_\varepsilon, \\ (-\infty, 1], & \text{если } x \in L_\varepsilon, \end{cases} \\ V_\varepsilon &= \{(x, z) : z \in V_\varepsilon(x), x \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Можно проверить, что множества V_ε являются гипо-решениями задачи (4.14), (4.15). Согласно этим построениям и соотношениям (2.2) имеем

$$V_* = \text{cl}\left(\bigcup_{V \in \mathbb{V}} V\right) \supset \text{cl}\left(\bigcup_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon\right) \ni (0, 0, 1).$$

В рассматриваемом примере $\text{гипо } Q = \text{гипо } \sigma = \{(0, 0)\} \times (-\infty, 0]$, $\partial G = \{(0, 0)\} \times (-\infty, \infty)$. Получаем, что $(0, 0, 1) \in \partial G \cap V_*$, $(0, 0, 1) \notin \text{гипо } Q$. Следовательно, условие регулярности (2.8) не выполняется.

§ 5. Доказательство теоремы 4.2

Пусть $(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Положим

$$\begin{aligned} I(x(\cdot), z(\cdot)) &= \begin{cases} [0, \infty), & \text{если } (x(t), z(t)) \in G \ \forall t \in [0, \infty), \\ [0, \tau(x(\cdot), z(\cdot))] & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \tau(x(\cdot), z(\cdot)) &= \inf\{t \in [0, \infty) : (x(t), z(t)) \notin G\}. \end{aligned}$$

Пусть $(x_0, z_0) \in \text{cl } G$, $s \in \mathbb{R}^n$. Через $\text{Sol}(x_0, z_0, s)$ обозначим совокупность функций $(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, абсолютно непрерывных на любом ограниченном отрезке $[0, \tau]$, удовлетворяющих начальному условию $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ и дифференциальному включению (4.4) при почти всех $t \in I(x(\cdot), z(\cdot))$.

Можно показать, что для любых $(x, z) \in X \times \mathbb{R}$, $s, s_* \in \mathbb{R}^n$ пересечение множеств $S(x, z, s)$ и $S(x, z, s_*)$ вида (4.5) непусто. Поэтому

$$\text{Sol}(x_*, z_*, s) \cap \text{Sol}(x_*, z_*, s_*) \neq \emptyset \quad (5.1)$$

для любых $(x_*, z_*) \in \text{cl } G$, $s, s_* \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\varepsilon \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} \text{dist}[x, \partial X] &= \inf\{\|x - \xi\| : \xi \in \partial X\}, \\ M_\varepsilon &= \{(x, z) \in X \times \mathbb{R} : \text{dist}[x, \partial X] < \varepsilon\}, \\ \tau_\varepsilon(x(\cdot), z(\cdot)) &= \inf\{t \in [0, \infty) : (x(t), z(t)) \notin M_\varepsilon\}, \\ \theta_\varepsilon(x_0) &= \inf\{\tau_\varepsilon(x(\cdot), z(\cdot)) : (x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s)\}. \end{aligned}$$

Если $(x(t), z(t)) \in M_\varepsilon$ при всех $t \geq 0$, то полагаем $\tau_\varepsilon(x(\cdot), z(\cdot)) = \infty$. Отметим, что $\tau_\varepsilon(x(\cdot), z'(\cdot)) = \tau_\varepsilon(x(\cdot), z''(\cdot))$ для любых $(x(\cdot), z'(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z'_0, s')$,

$(x(\cdot), z''(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0'', s'')$. Поэтому число $\theta_\varepsilon(x_0)$ не зависит от точки z_0 и вектора s .

Пусть $V^\natural$ — гипо-решение, удовлетворяющее условиям, указанным в теореме 4.2. Согласно утверждению 2.1 можно полагать, что $V^\natural = \text{hypo } V^\natural$. Через $\mathbb{V}_\varepsilon$ обозначим совокупность гипо-решений V , которые удовлетворяют равенству

$$V \cap M_\varepsilon = V^\natural \cap M_\varepsilon. \quad (5.2)$$

Положим

$$V_\varepsilon = \bigcup_{V \in \mathbb{V}_\varepsilon} V. \quad (5.3)$$

Нетрудно проверить, что $V_\varepsilon \in \mathbb{V}_\varepsilon$.

Действительно, $V_\varepsilon \cap M_\varepsilon = V^\natural \cap M_\varepsilon$ и $\text{cl } V_\varepsilon \cap M_\varepsilon \supset V^\natural \cap M_\varepsilon$. Покажем, что $\text{cl } V_\varepsilon \cap M_\varepsilon \subset V^\natural \cap M_\varepsilon$. Пусть $(x_*, z_*) \in \text{cl } V_\varepsilon \cap M_\varepsilon$. Тогда открытое множество M_ε содержит некоторую окрестность точки (x_*, z_*) . Рассмотрим последовательность $(x_k, z_k) \in V_\varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся к точке (x_*, z_*) . Можно полагать, что $(x_k, z_k) \in M_\varepsilon$ и $(x_*, z_*) \in M_\varepsilon$. Поскольку множество V_ε удовлетворяет условию (5.2), то $(x_k, z_k) \in V^\natural \cap M_\varepsilon$. Множество $V^\natural$ замкнуто, следовательно, $(x_*, z_*) \in V^\natural \cap M_\varepsilon$, что и требовалось показать.

Напомним, что операции объединения и замыкания сохраняют свойства слабой инвариантности (см. доказательство утверждения 2.2). Поэтому заключаем, что $V_\varepsilon \in \mathbb{V}_\varepsilon$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть $V \in \mathbb{V}_\varepsilon$, $(x_0, z_0) \in G$, $\tau \in (0, \theta_\varepsilon(x_0))$, $s_* \in \mathbb{R}^n$ и

$$\begin{aligned} A(t) &= \{(x(t), z(t)) : (x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s_*)\}, \\ K &= \{(x, z) \in \text{cl } G : (x, z) \in A(t), t \in [0, \tau]\}. \end{aligned}$$

Предположим, что

$$A(\tau) \subset V. \quad (5.4)$$

Тогда

$$V_K = V \cup K \in \mathbb{V}_\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\tau < \theta_\varepsilon(x_0)$, то из определения момента времени $\theta_\varepsilon(x_0)$ следует, что $K \cap M_\varepsilon = \emptyset$. Поэтому

$$(V \cup K) \cap M_\varepsilon = V \cap M_\varepsilon = V^\natural \cap M_\varepsilon.$$

Следовательно, множество $V \cup K$ удовлетворяет условию (5.2).

Проверим, что множество $V \cup K$ слабо инвариантно, т.е. для любых $(x_*, z_*) \in V \cup K$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_*, z_*, s)$ такая, что $(x(t), z(t)) \in V \cup K$ при всех $t \in I(x(\cdot), z(\cdot))$. Если $(x_*, z_*) \in V$, то сразу получаем, что такая траектория существует, поскольку множество V слабо инвариантно.

Пусть $(x_*, z_*) \in K$. Из определения множества K следует, что существуют момент времени $t_* \in [0, \tau]$ и траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s_*)$ такие, что

$(x_*, z_*) = (x(t_*), z(t_*)) \in \text{cl } G$. Из соотношения (5.1) следует, что при $t \in [t_*, \tau]$ траекторию $(x(\cdot), z(\cdot))$ можно продолжить так, чтобы она удовлетворяла дифференциальному включению

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in S(x(t), z(t), s_*) \cap S(x(t), z(t), s)$$

при почти всех $t \in [t_*, \tau]$. Очевидно, $(x(\tau), z(\tau)) \in A(\tau) \subset V$. Поэтому из точки $(x(\tau), z(\tau))$ траекторию $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_*, z_*, s)$ можно продолжить так, что $(x(t), z(t)) \in V \cup K$ при всех $t \in I(x(\cdot), z(\cdot))$. Слабая инвариантность множества $V \cup K$ доказана.

Поскольку по построению множества K имеем $K \subset \text{cl } G$ и по определению $V \subset \text{cl } G$, то $V \cup K \subset \text{cl } G$.

Очевидно, что $\sup\{z : (x, z) \in V_K\} \geq \sup\{z : (x, z) \in V\} \geq -c$. Покажем, что $\sup\{z : (x, z) \in V_K\} \leq c$. Поскольку $V \in \mathbb{V}_\varepsilon$, то $\sup\{z : (x, z) \in V\} \leq c$. Поэтому остается показать, что $\sup\{z : (x, z) \in K\} \leq c$. Пусть $(x_*, z_*) \in K$, т.е. существуют момент времени $t_* \in [0, \tau]$ и траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s_*)$ такие, что $(x_*, z_*) = (x(t_*), z(t_*))$. Из соотношений (5.1) и (5.4) следует, что при $t \in [t_*, \tau]$ траекторию $(x(\cdot), z(\cdot))$ можно продолжить так, чтобы она удовлетворяла дифференциальному включению

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in S(x(t), z(t), 0)$$

и условиям $(x(t_*), z(t_*)) = (x_*, z_*)$, $(x(\tau), z(\tau)) \in A(\tau) \subset V$. Из (4.4), (4.5) при $s = 0$ и условия (4.3) имеем

$$\dot{z}(t) = -H(x(t), 0) + z(t) \geq -c + z(t).$$

Поэтому $z(\tau) \geq c + (z_* - c) \exp(\tau - t_*)$. Поскольку $(x(\tau), z(\tau)) \in V$, то $z(\tau) \leq c$. Следовательно, $z_* \leq c$. Утверждение 5.1 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. Пусть

$$v_\varepsilon(x) = \sup\{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in V_\varepsilon\}, \quad P_\varepsilon = \{(x, z) \in \text{cl } G : z > v_\varepsilon(x)\},$$

где множество V_ε определено равенством (5.3). Тогда множество

$$U_\varepsilon = \text{cl } P_\varepsilon \tag{5.5}$$

слабо инвариантно в области $D_\varepsilon = G \setminus \text{cl } M_\varepsilon$ относительно дифференциальных включений (4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $V^\sharp = \text{hypo } V^\sharp$, то, используя утверждение 2.1, получаем $V_\varepsilon = \text{hypo } V_\varepsilon$.

Пусть $(x_0, z_0) \in P_\varepsilon$, $\tau \in (0, \theta_\varepsilon(x_0))$, $s_* \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что

$$U_\varepsilon \cap \{(x(\tau), z(\tau)) : (x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s_*)\} \neq \emptyset. \quad (5.6)$$

Допустим противное. Тогда, учитывая, что $V_\varepsilon = \text{hypo } V_\varepsilon$, получаем, что выполняется соотношение (5.4), где $V = V_\varepsilon$. Поскольку $V_\varepsilon \in \mathbb{V}_\varepsilon$, то согласно утверждению 5.1 $V_\varepsilon \cup K \in \mathbb{V}_\varepsilon$. Очевидно, $(x_0, z_0) \in K$. Поэтому по определению множества V_ε имеем $(x_0, z_0) \in V_\varepsilon$. Пришли к противоречию с условием $(x_0, z_0) \in P_\varepsilon$. Соотношение (5.6) доказано.

Пусть теперь $(x_*, z_*) \in U_\varepsilon = \text{cl } P_\varepsilon$. Выберем некоторую последовательность $(x_0^k, z_0^k) \in P_\varepsilon$, сходящуюся к точке (x_*, z_*) . Из доказанного соотношения (5.6) следует, что для любого $k = 1, 2, \dots$ существует траектория $(x_k(\cdot), z_k(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0^k, z_0^k, s_*)$ такая, что $(x_k(\tau), z_k(\tau)) \in U_\varepsilon$. Из последовательности $(x_k(\cdot), z_k(\cdot))$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на промежутке $[0, \tau]$. Предельная функция удовлетворяет начальному условию $(x(0), z(0)) = (x_*, z_*)$ и ДВ (4.4) при почти всех $t \in [0, \tau]$ (в (4.4) полагаем $s = s_*$). Множество U_ε замкнуто, поэтому получаем, что $(x(\tau), z(\tau)) \in U_\varepsilon$.

Далее, используя замкнутость множества U_ε , можно получить, что из доказанного положения следует существование траектории $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_*, z_*, s_*)$ такой, что $(x(t), z(t)) \in U_\varepsilon$ при всех $t \in (0, \theta_\varepsilon(x_*))$. Утверждение 5.2 доказано.

Перейдем к следующему утверждению. Заметим сначала, что

$$\mathbb{V}_{\varepsilon_1} \subset \mathbb{V}_{\varepsilon_2} \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2.$$

Поэтому

$$V_{\varepsilon_1} \subset V_{\varepsilon_2}, \quad U_{\varepsilon_1} \supset U_{\varepsilon_2}$$

при $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$. Положим

$$U_0 = \bigcap_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *Множество U_0 – эпи-решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что множество U_0 замкнуто.

Проверим, что множество U_0 удовлетворяет краевому условию. Требуется показать, что

$$U_0 \cap (\partial X \times \mathbb{R}) = \text{epi } \sigma.$$

Пусть $(x_*, z_*) \in U_0 \cap (\partial X \times \mathbb{R})$. Следовательно, $(x_*, z_*) \in U_\varepsilon \cap (\partial X \times \mathbb{R})$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Очевидно, $(x_*, z_*) \in M_\varepsilon$ и по определению (5.5) существует последовательность $(x_k, z_k) \in P_\varepsilon \cap M_\varepsilon$, сходящаяся к (x_*, z_*) . Отметим, что $z_k > v_\varepsilon(x_k) = v^\sharp(x_k)$. Поскольку функция $v^\sharp$ непрерывна в точке x_* и удовлетворяет краевому условию $v^\sharp(x_*) = \sigma(x_*)$, то получаем $z_* \geq v^\sharp(x_*) = \sigma(x_*)$, т.е. $U_\varepsilon \cap (\partial X \times \mathbb{R}) \subseteq \text{epi } \sigma$ и $U_0 \cap (\partial X \times \mathbb{R}) \subseteq \text{epi } \sigma$.

Нетрудно проверить, что $\text{epi } \sigma \subseteq U_0$. Действительно, пусть $(x_*, z_*) \in \text{epi } \sigma$. Тогда $(x_*, z_*) \in U_\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, следовательно, $(x_*, z_*) \in U_0$. Итак, доказано, что $U_0 \cap (\partial X \times \mathbb{R}) = \text{epi } \sigma$.

Покажем, что $\inf\{z : (x, z) \in U_0\} \in [-c, c]$. По определению множества U_ε (5.5) имеем $\inf\{z : (x, z) \in U_\varepsilon\} \leq \inf\{z : (x, z) \in P_\varepsilon\} = v_\varepsilon(x) \leq c$. С другой стороны, существует последовательность $(x_k, z_k) \in P_\varepsilon$ такая, что $\inf\{z : (x, z) \in U_\varepsilon\} = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$. Из определения множества P_ε следует, что $z_k > v(x_k) \geq -c$. Поэтому $\inf\{z : (x, z) \in U_\varepsilon\} \geq -c$. Следовательно, $\inf\{z : (x, z) \in U_0\} \in [-c, c]$.

Проверим, что множество U_0 слабо инвариантно в области G относительно дифференциальных включений (4.4).

Пусть $(x_0, z_0) \in U_0$, $s \in \mathbb{R}^n$. Требуется показать, что существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s)$ такая, что $(x(t), z(t)) \in U_0$ при всех $t \in I(x(\cdot), z(\cdot))$. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность $\varepsilon_k = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$. По определению множества U_0 имеем $(x_0, z_0) \in U_{1/k}$. Поскольку множество $U_{1/k}$ слабо инвариантно в области $D_{1/k} = G \setminus \text{cl } M_{1/k}$, то существует траектория $(x_k(\cdot), z_k(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s)$ такая, что $(x_k(t), z_k(t)) \in U_{1/k}$ при всех $t \in (0, \tau_{1/k}(x_k(\cdot), z_k(\cdot)))$. Из последовательности $(x_k(\cdot), z_k(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на любом ограниченном промежутке времени к предельной функции $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \text{Sol}(x_0, z_0, s)$. Из построений следует, что $(x(t), z(t)) \in U_0$ при всех $t \in I(x(\cdot), z(\cdot))$. Следовательно, множество U_0 слабо инвариантно в области G относительно дифференциальных включений (4.4). Утверждение 5.3 доказано.

Используя утверждения 5.1–5.3, нетрудно доказать первую часть теоремы 4.2. Пусть множества $V^{(k)}$ и $U^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, определены равенствами вида (5.3) и (5.5), в которых полагаем $\varepsilon = 1/k$. Напомним, что множества $V^{(k)}$ – гипорешения. Из определения (5.5) видно, что

$$U^{(k)} \cup V^{(k)} = \text{cl } G = \text{cl } X \times \mathbb{R}.$$

Так как $V^{(k)} \subseteq V^{(l)}$ при $k \leq l$, то для любой точки $(x, z) \in \text{cl } G$ либо существует достаточно большое число K такое, что $(x, z) \in V^{(k)}$ при всех $k \geq K$, и в этом случае $(x, z) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} V^{(k)}$; либо $(x, z) \in U^{(k)}$ при всех $k = 1, 2, \dots$ и в этом случае согласно определению множества U_0 имеем $(x, z) \in U_0$. Тем самым равенство (4.9) доказано.

Аналогично можно доказать вторую часть теоремы 4.2.

Список литературы

1. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
2. *Субботин А. И.* Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка // УМН. 1996. Т. 51. №2. С. 105–138.
3. *Subbotin A. I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
4. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. P. 1–42.

5. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L.* Uniqueness of viscosity solutions revisited // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39. P. 581–596.
6. *Субботин А. И.* Непрерывные и разрывные решения краевых задач для уравнений с частными производными первого порядка // Докл. АН. 1992. Т. 323. №1. С. 30–34.
7. *Subbotin A. I.* Discontinuous solutions of a Dirichlet type boundary value problem for the first order partial differential equation // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. №2. P. 145–164.
8. *Bardi M., Bottacin S., Falcone M.* Convergence of discrete schemes for discontinuous value functions of pursuit-evasion games // Annals of the International Society of Dynamic Games. V. 3. New Trends in Dynamic Games and Applications. Boston: Birkhäuser, 1995. P. 273–304.
9. *Barles G.* Discontinuous viscosity solutions of first-order Hamilton–Jacobi equations: a guided visit // Nonlinear Anal. 1993. V. 20. P. 1123–1134.
10. *Barron E. N., Jensen R.* Semicontinuous viscosity solutions for Hamilton–Jacobi equations with convex hamiltonians // Comm. Partial Differential Equations. 1990. V. 15. P. 1713–1742.
11. *Barron E. N., Liu W.* Semicontinuous viscosity solutions for Hamilton–Jacobi equations and the L_∞ control problem // Appl. Math. Optim. (to appear).
12. *Aubin J.-P.* Viability Theory. Boston: Birkhäuser, 1990.
13. *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R.* Qualitative properties of trajectories of control systems: a survey // J. Dynam. Control Systems. 1995. V. 1. P. 1–48.
14. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I // Матем. сб. 1975. Т. 98. №3. С. 450–493.
15. *Колокольцов В. Н., Маслов В. П.* Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. №4. С. 796–800.
16. *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S.* Mean value inequalities in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 344. P. 307–324.
17. *Ченцов А. Г.* О структуре игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. №6. С. 1272–1275.
18. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования // Прикладная матем. и мех. 1977. Т. 41. №5. С. 825–832.
19. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Докл. АН. (в печати).
20. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
21. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Институт математики и механики УрО РАН;
Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Поступила в редакцию
17.10.1996