Общероссийский математический портал

И. И. Марченко, О росте целых и мероморфных функций, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 6, 59–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:27:23

УДК 517.56

И. И. Марченко

О росте целых и мероморфных функций

Исследуется влияние числа разделенных точек максимума модуля мероморфной функции $f(z)$ на окружности $\{z : |z| = r\}$ на величину

$$b(\infty, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \log^+ \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r T'_-(r, f)},$$

где $T'_-(r, f)$ – левосторонняя производная неванлинновской характеристики. Получены точные оценки соответствующих величин. Также получены точные оценки для $b(a, f)$ и $\sum_{a \in \mathbb{C}} b(a, f)$, соответственно, через валироновский дефект – $\Delta(a, f)$ и валироновский дефект производной в нуле – $\Delta(0, f')$.

Библиография: 21 название.

Мы будем использовать стандартные обозначения теории распределения значений: $m(r, a, f)$, $N(r, a, f)$, $T(r, f)$, $\delta(a, f)$, $\Delta(a, f)$ [1], [2]. Основной результат о дефектных значениях, полученный Р. Неванлинной, сформулируем в следующем виде.

ТЕОРЕМА А [1]. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в плоскости $\mathbb{C}$, не равная тождественно постоянной. Тогда справедливо следующее:

- а) для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ $\delta(a, f) \leq 1$;
- б) $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \leq 2$.

Для целых функций конечного порядка отметим результат Ульриха [3, §4.4], [4].

ТЕОРЕМА В. Если $f(z)$ – целая функция конечного порядка, то

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \delta(a, f) \leq \delta(0, f').$$

В 1969 году в работах В. П. Петренко была построена теория роста мероморфных функций. Напомним ее основные характеристики. Для каждого числа $a \in \overline{\mathbb{C}}$ положим

$$\mathcal{L}(r, a, f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a|}, \quad \mathcal{L}(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|.$$

Величина

$$\beta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)}$$

называется *величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ в точке a* . Петренко получил точную оценку для величины отклонения мероморфных функций конечного нижнего порядка, т.е. в случае

$$\lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} < \infty,$$

а также некоторую оценку для ряда $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f)$.

ТЕОРЕМА С [5]. Для мероморфных функций конечного нижнего порядка λ справедливо следующее:

$$\beta(a, f) \leq \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin(\pi\lambda)}, & \text{если } \lambda \leq 0.5, \\ \pi\lambda, & \text{если } \lambda > 0.5, \end{cases}$$

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f) \leq 816\pi(\lambda + 1)^2.$$

В работе [6] была получена точная оценка для ряда $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f)$.

ТЕОРЕМА D [6]. Если $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ , то

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f) \leq \begin{cases} \frac{2\pi\lambda}{\sin(\pi\lambda)}, & \text{если } \lambda \leq 0.5, \\ 2\pi\lambda, & \text{если } \lambda > 0.5. \end{cases}$$

Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка величина $\beta(a, f)$ может быть равна ∞ , поэтому в этом случае интересен следующий результат В. Бергвайлера и Г. Бука.

ТЕОРЕМА E [7]. Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{rT'_-(r, f)} \leq \pi. \quad (0.1)$$

Отметим, что $rT'_-(r, f) = A(r, f) + O(1)$, $r \rightarrow \infty$, где $A(r, f)$ – сферическая площадь образа круга $\{z : |z| \leq r\}$ при отображении $w = f(z)$, деленная на площадь сферы Римана.

В связи с оценкой (0.1) А. Еременко ввел величины

$$b(a, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{A(r, f)}$$

и доказал аналог соотношения дефектных значений для этих величин.

ТЕОРЕМА F [8]. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция такая, что множество $\{a : b(a, f) > 0\}$ состоит более чем из одной точки. Тогда

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} b(a, f) \leq 2\pi.$$

Величины $\delta(a, f)$, $\beta(a, f)$, $b(a, f)$ характеризуют скорость стремления функции $f(z)$ к значению $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Естественно встает вопрос о “массивности” множества, на котором функция $f(z)$ приближается к a . В связи с этим А. Эдрей ввел понятие протяжения мероморфной функции [9]

$$\sigma(\infty, f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \text{mes} \{ \varphi : |f(re^{i\varphi})| > 1 \}.$$

В 1973 году А. Бернштейн получил точную оценку снизу для этой величины через нижний порядок λ и дефект $\delta(\infty, f)$.

ТЕОРЕМА G [10]. *Для мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ , то*

$$\sigma(\infty, f) \geq \min \left\{ 2\pi; \frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, f)}{2}} \right\}.$$

В работе [11] (см. также [12], [13]) была получена точная оценка для величины протяжения через величину отклонения.

ТЕОРЕМА H [11]. *Если $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ , то*

$$\sigma(\infty, f) \geq \min \left\{ 2\pi; \frac{2}{\lambda} \arcsin \frac{\beta(\infty, f)}{\pi\lambda} \right\}.$$

В работе [12] была введена и исследована величина $p(\infty, f)$, которая совпадает с числом “разделенных” точек максимума модуля $f(z)$ на окружности $|z| = r$. Напомним ее определение. Пусть $p(r, \infty, f)$ – число составляющих интервалов множества $\{\varphi : |f(re^{i\varphi})| > 1\}$, в каждом из которых есть, по крайней мере, одна точка максимума модуля $f(z)$ на окружности $|z| = r$. Положим

$$p(\infty, f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} p(r, \infty, f).$$

В работе [12] получена точная оценка для величины $p(\infty, f)$ через величину $\beta(\infty, f)$ мероморфных функций конечного нижнего порядка. В частности, для целых функций конечного нижнего порядка $p(\infty, f) < \infty$.

В настоящей работе получена точная оценка для этой величины через величину $b(\infty, f)$ мероморфных функций как конечного, так и бесконечного нижнего порядка. Кроме этого, получена точная оценка для ряда $\sum_{a \in \mathbb{C}} b(a, f)$ через валироновский дефект производной $f'(z)$ в нуле.

ТЕОРЕМА 1. *Для мероморфной функции $f(z)$ нижнего порядка λ , $0 < \lambda \leq \infty$, справедлива оценка*

$$b(\infty, f) \leq \begin{cases} \frac{\pi}{p(\infty, f)}, & \text{если } \frac{\lambda}{p(\infty, f)} \geq 0.5 \text{ или } \lambda = \infty, \\ \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}, & \text{если } p(\infty, f) = 1 \text{ и } \lambda < 0.5, \\ \frac{\pi}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi}{p(\infty, f)}, & \text{если } p(\infty, f) > 1 \text{ и } \frac{\lambda}{p(\infty, f)} < 0.5. \end{cases} \quad (0.2)$$

$$\text{если } p(\infty, f) = 1 \text{ и } \lambda < 0.5, \quad (0.3)$$

$$\text{если } p(\infty, f) > 1 \text{ и } \frac{\lambda}{p(\infty, f)} < 0.5. \quad (0.4)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для мероморфной функции $f(z)$*

$$p(\infty, f) \leq \max \left\{ 1; \left[\frac{\pi}{b(\infty, f)} \right] \right\},$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

Отметим, что этот результат связан с проблемой Клуни (J. Clunie) о числе точек максимума модуля целых функций [14].

Оценка в теореме 1 является точной. В случае $\lambda = \infty$ она достигается на функции $E_0(z^n)$, где n – любое натуральное число, а E_0 – целая функция из работы [3, §4.1]. Для этой функции $p(\infty, E_0) = n$, $b(\infty, E_0) = \pi/n$. В случае, если $\lambda < \infty$ и $\lambda/n \geq \frac{1}{2}$ оценка (0.2) достигается на функции $f_1(z) = E_{\lambda/n}(z^n)$, где $E_\rho(z)$ – функция Миттаг–Леффлера порядка ρ . Из асимптотик функции $E_\rho(z)$ (см. [2, гл. 2]) легко следует, что нижний порядок $f_1(z)$ равен λ и $p(\infty, f_1) = n$, $b(\infty, f_1) = \pi/n$. Оценка (0.3) достигается на функции $E_\lambda(z)$. Оценка (0.4) достигается на функции $f_2(z) = \frac{1}{2}f_{\lambda/n}(z^n)$, где $f_\lambda(z)$ – функция из примера 3 [2, гл. 2, §3], а числа $\lambda > 0$, n удовлетворяют условию $\lambda/n < \frac{1}{2}$. Из асимптотик функции $f_2(z)$ легко следует, что функция $f_2(z)$ имеет нижний порядок λ , а также $p(\infty, f_2) = n$ и $b(\infty, f_2) = (\pi/n) \sin(\pi\lambda/n)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция нижнего порядка λ , где $0 < \lambda \leq \infty$. Тогда для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$

$$b(a, f) \leq \begin{cases} \pi\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если } \lambda \geq 0.5 \text{ или } 0 < \lambda < 0.5 \text{ и } \sin \frac{\pi\lambda}{2} \geq \sqrt{\frac{\Delta}{2}}, \\ \pi\left(\Delta \operatorname{ctg}(\pi\lambda) + \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2}\right), & \text{если } 0 < \lambda < 0.5 \text{ и } \sin \frac{\pi\lambda}{2} < \sqrt{\frac{\Delta}{2}}, \end{cases}$$

где $\Delta = \Delta(a, f)$ – дефект Валирона функции $f(z)$ в точке a .

СЛЕДСТВИЕ. Для мероморфной функции $f(z)$ нижнего порядка $\lambda > 0$

$$B(f) = \{a : b(a, f) > 0\} \subset E_V(f) = \{a : \Delta(a, f) > 0\}.$$

В случае мероморфных функций конечного нижнего порядка λ оценка в теореме 2 достигается на функции $F_{\lambda/n}(z^n)$, где $F_\rho(z)$ – функция из работы [15].

Следует отметить, что точная оценка для величины отклонения мероморфной функции конечного нижнего порядка через величину валироновского дефектного значения была получена Д. Шиа (см. [5]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция нижнего порядка λ , где $0.5 \leq \lambda \leq \infty$. Тогда

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} b(a, f) \leq 2\pi\sqrt{\Delta(2-\Delta)},$$

где $\Delta = \Delta(0, f')$.

В случае целых функций теорему 3 можно уточнить.

ТЕОРЕМА 4. Для целой функции $f(z)$ нижнего порядка λ , $0.5 \leq \lambda \leq \infty$, справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} b(a, f) \leq \pi\sqrt{\Delta(2-\Delta)},$$

где $\Delta = \Delta(0, f')$.

Отметим, что наш метод доказательства теорем 3, 4 отличен от метода Еременко [8].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция нижнего порядка $\lambda > 0$ и $b(\infty, f) > 0$. Тогда

$$\sigma(\infty, f) \geq \min \left\{ 2\pi; \frac{2p(\infty, f)}{\lambda} \arcsin \left(\frac{b(\infty, f)}{\pi} p(\infty, f) \right) \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка $\lambda > 0$

$$\sigma(\infty, f) \geq \min \left\{ 2\pi; \frac{2}{\lambda} \arcsin \frac{b(\infty, f)}{\pi} \right\}.$$

Оценка в теореме 5 достигается на вышеуказанных функциях $f_1(z), f_2(z)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ , $0 < \lambda < \frac{1}{2}p(\infty, f)$.

Тогда если

$$b(\infty, f) > \frac{\pi}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)},$$

то существует последовательность окружностей $\{|z| = r_k\}$, $r_k \rightarrow \infty$, на которых функция $f(z)$ равномерно относительно $\arg z$ стремится к ∞ .

СЛЕДСТВИЕ. Если $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ , $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, и $b(\infty, f) > \pi \sin(\pi\lambda)$, то существует последовательность окружностей $\{|z| = r_k\}$, $r_k \rightarrow \infty$, на которых функция $f(z)$ равномерно относительно $\arg z$ стремится к ∞ .

Этот результат ранее был получен в работе [8].

Остановимся на методах доказательства основных результатов. Используются свойства хорошо известной T^* -функции Бернштейна [10], [16], а также полученное ранее (см. [12]) дифференциальное неравенство типа Гариши–Льюиса [17]:

$$r \frac{d}{dr} r T_-^{*'}(r, \theta, f) \geq -\frac{1}{\pi} p^2(r, \infty, f) \frac{\partial u^*}{\partial \theta}(r, \theta).$$

С помощью этого неравенства и метода В. Фукса [18] (см. также [19]) получается дифференциальное неравенство типа Данжуа–Чельберга. Далее с использованием пиков Поля для функций бесконечного нижнего порядка, введенных Бергвайлером и Бруком [7], выводятся утверждения теорем 1 и 2.

Для доказательства теорем 3 и 4 сначала доказывается соответствующая лемма о логарифмической производной, а затем используются прием А. Вейсмана [20], и идеи из работы [6].

В первом параграфе изложены вспомогательные результаты; во втором – доказаны теоремы 1, 2; в третьем – теоремы 3, 4; в четвертом и пятом – соответственно, теоремы 5 и 6.

Автор выражает признательность профессору А. Ф. Гришину за внимание к работе.

§1. Вспомогательные результаты

Рассмотрим функцию $u(z) = \log^+ |f(z)|$, где $f(z)$ – мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Поскольку $f(z)$ – мероморфная функция, то ее можно представить в виде отношения двух целых функций: $f(z) = g_1(z)/g_2(z)$. Тогда

$$u(z) = \max\{\log |g_1(z)|; \log |g_2(z)|\} - \log |g_2(z)|.$$

Таким образом, функция $u(z)$ есть разность двух субгармонических функций.

Напомним определение T^* -функции Бернштейна. Для этого положим [16]

$$m^*(r, \theta, f) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$T^*(r, \theta, f) = T^*(re^{i\theta}) = m^*(r, \theta, f) + N(r, \infty, f),$$

где $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $|E|$ – лебеговская мера множества E , $N(r, \infty, f)$ – считающая функция Неванлинны для полюсов $f(z)$.

Для каждого t , $-\infty \leq t \leq \infty$, рассмотрим

$$F_t = \{re^{i\varphi} : \log^+ |f(re^{i\varphi})| > t\}, \quad u^*(r, \varphi) = \sup\{t : re^{i\varphi} \in F_t^*\},$$

где F_t^* – симметрическая перестройка множества F_t [21].

Напомним основные свойства функций $u^*(z) = u^*(r, \varphi)$ и $T^*(z)$, которые нам потребуются в дальнейшем [16], [21]:

$$u^*(r, 0) = \log^+ \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad u^*(r, \pi) = \log^+ \min_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$m^*(r, \theta, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta u^*(r, \varphi) d\varphi.$$

Функция $T^*(r, \theta, f) = T^*(z)$, $z = re^{i\theta}$, субгармонична в области $K = \{re^{i\varphi} : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \pi\}$, непрерывна в $K \cup (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, логарифмически выпукла по r при каждом фиксированном $\varphi \in [0, \pi]$ и, кроме того,

$$T^*(r, 0, f) = N(r, \infty, f), \quad T^*(r, \pi, f) = T(r, f),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} T^*(r, \theta, f) = \frac{1}{\pi} u^*(r, \theta),$$

где $T(r, f)$ – неванлинновская характеристика функции $f(z)$.

Для действительной функции $\varphi(r)$ от действительного переменного r рассмотрим оператор

$$L\varphi(r) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(re^h) + \varphi(re^{-h}) - 2\varphi(r)}{h^2}.$$

Если $\varphi(r)$ — дважды дифференцируемая функция в точке r , то

$$L\varphi(r) = r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \varphi(r).$$

В работе [12] было получено следующее утверждение.

ЛЕММА А. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Тогда для почти всех $\theta \in [0, \pi]$ и для всех r таких, что на окружности $\{z : |z| = r\}$ нет нулей и полюсов функции $f(z)$, справедливо следующее неравенство:

$$Lm^*(r, \theta, f) \geq -\frac{p^2(r, \infty, f)}{\pi} \frac{\partial u^*(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad (1.1)$$

где функция $p(r, \infty, f)$ определена в теореме 1.

Из неравенства (1.1) следует, что для всех r, θ , удовлетворяющих лемме А, выполняется неравенство

$$Lm^*(r, \theta, f) \geq -\frac{1}{\pi} \frac{\partial u^*(r, \theta)}{\partial \theta}. \quad (1.2)$$

Действительно, если $p(r, \infty, f) = 0$, то для всех $\theta \in [0, \pi]$ выполнено $u^*(r, \theta) = 0$ и неравенство (1.2) очевидно.

Если $p(r, \infty, f) \geq 1$, то неравенство (1.2) является следствием (1.1).

Отметим также, что в силу выпуклости $T^*(r, \theta, f)$ относительно $\log r$, для всех $r > 0$ и $\theta \in [0, \pi]$ имеем

$$LT^*(r, \theta, f) \geq 0. \quad (1.3)$$

В работе [7] были введены последовательности, которые являются обобщениями пиков Поля для функций бесконечного нижнего порядка. Напомним их определение.

Для любых последовательностей $M_j \rightarrow \infty, \varepsilon_j \rightarrow 0$ существуют последовательности $\rho_j \rightarrow \infty$ и $\mu_j \rightarrow \infty$ такие, что для всех r , удовлетворяющих неравенству $|\log(r/\rho)| \leq M_j/\mu_j$, выполняется следующее:

$$T(r, f) \leq (1 + \varepsilon_j) \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T(\rho_j, f). \quad (1.4)$$

Последовательности μ_j и M_j можно выбрать так, чтобы

$$\mu_j = o(\log^{3/2} T(\rho_j, f)), \quad M_j = o(\log T(\rho_j, f)), \quad j \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

(см. [7]). Положим

$$P_j = \rho_j e^{-M_j/\mu_j}, \quad Q_j = \rho_j e^{M_j/\mu_j}.$$

Тогда неравенство (1.4) выполняется для всех $r \in [P_j, Q_j]$. Будем считать, что $M_j > 1$.

Рассмотрим множества

$$A_j = \left\{ r \in [\rho_j, Q_j] : T(r, f) \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T(\rho_j, f) \right\},$$

$$B_j = \left\{ r \in [P_j, \rho_j] : T(r, f) \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T(\rho_j, f) \right\}.$$

Положим

$$R_j = \begin{cases} \min A_j, & \text{если } A_j \neq \emptyset, \\ Q_j, & \text{если } A_j = \emptyset, \end{cases} \quad t_j = \begin{cases} \max B_j, & \text{если } B_j \neq \emptyset, \\ P_j, & \text{если } B_j = \emptyset, \end{cases}$$

$$S_j = e^{-1/\mu_j} R_j, \quad T_j = e^{-2/\mu_j} R_j.$$

Тогда

$$t_j < \rho_j < T_j < S_j < R_j.$$

В работе [7] доказано, что

$$\frac{T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} = o\left(\mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr\right), \quad j \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Кроме этого из неравенства (19) работы [7] следует, что

$$T(\rho_j, f) \leq T^{3/2}(t_j, f), \quad j \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Следующее утверждение является некоторым аналогом леммы о логарифмической производной.

ЛЕММА 1. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция бесконечного нижнего порядка. Тогда

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, f'/f)}{r^{\mu_j+1}} dr = o\left(\mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr\right), \quad j \rightarrow \infty,$$

где

$$\mathcal{L}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \log^+ \max_{|z|=r} \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для каждого положительного α , $0 < \alpha \leq \pi/(2\mu_j)$, положим [19]

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T^* \left(r e^{i\varphi}, \frac{f'}{f} \right) \cos(\mu_j \varphi) d\varphi.$$

В силу (1.1), (1.2) и леммы Фату имеем, что для почти всех $r > 0$

$$r \frac{d}{dr} r \sigma'_-(r) \geq -\frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\partial u^*(r, \varphi)}{\partial \varphi} \cos(\mu_j \varphi) d\varphi,$$

где $u(z) = \log^+ |f'(z)/f(z)|$.

Пусть число r такое, что на окружности $|z| = r$ нет нулей и полюсов функции $f(z)$. Тогда функция $u^*(r, \theta)$ — абсолютно непрерывная по $\theta \in [0, \pi]$ [21]. Поэтому, применяя формулу интегрирования по частям к правой части последнего неравенства, получаем, что для почти всех $r > 0$

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} r \sigma'_-(r) &\geq -\frac{1}{\pi} u^*(r, \alpha) \cos(\mu_j \alpha) + \frac{1}{\pi} \mathcal{L} \left(r, \frac{f'}{f} \right) \\ &\quad - \mu_j T^* \left(r e^{i\alpha}, \frac{f'}{f} \right) \sin(\mu_j \alpha) + \mu_j^2 \sigma(r) \equiv h(r) + \mu_j^2 \sigma(r). \end{aligned}$$

Разделим это неравенство на r^{μ_j+1} и проинтегрируем его от t_j до T_j , используя монотонность функции $r \sigma'_-(r)$ и формулу интегрирования по частям [12]. Получим

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r)}{r^{\mu_j+1}} dr \leq \left(\frac{\sigma'_-(r)}{r^{\mu_j-1}} + \mu_j \frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j}} \right) \Big|_{t_j}^{T_j}. \quad (1.8)$$

Так как для любой мероморфной функции $f(z)$ $T^*(r, \theta, f) \leq T(r, f)$, то для всех $r > 0$ выполнено

$$0 \leq \sigma(r) \leq \frac{1}{\mu_j} T \left(r, \frac{f'}{f} \right).$$

Из монотонности функции $r \sigma'_-(r)$ следует

$$\sigma(S_j) \geq \sigma(S_j) - \sigma(T_j) = \int_{T_j}^{S_j} \sigma'_-(r) dr \geq T_j \sigma'_-(T_j) \log \frac{S_j}{T_j} = \frac{1}{\mu_j} T_j \sigma'_-(T_j).$$

Отсюда

$$T_j \sigma'_-(T_j) \leq \mu_j \sigma(S_j) \leq T \left(S_j, \frac{f'}{f} \right).$$

Кроме того, для всех $R \geq 1$ $R \sigma'_-(R) \geq \sigma'_-(1) = C$.

Таким образом, из формулы (1.8) получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r)}{r^{\mu_j+1}} dr &\leq \frac{T(S_j, f'/f)}{T_j^{\mu_j}} + \frac{T(T_j, f'/f)}{T_j^{\mu_j}} - \frac{C}{t_j^{\mu_j}} \\ &< 2 \frac{T(S_j, f'/f)}{T_j^{\mu_j}} - \frac{C}{t_j^{\mu_j}} = 2e \frac{T(S_j, f'/f)}{S_j^{\mu_j}} - \frac{C}{t_j^{\mu_j}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Далее используем лемму о логарифмической производной [3, § 2.2]

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 5 \log T(R, f) + 6 \log^+ \frac{1}{R-r}, \quad R > r \geq r_0. \quad (1.10)$$

Из этого неравенства следует

$$\begin{aligned} T\left(S_j, \frac{f'}{f}\right) &= m\left(S_j, \frac{f'}{f}\right) + N\left(S_j, \frac{f'}{f}\right) \\ &\leq 5 \log T(R_j, f) + 6\mu_j + 3T(S_j, f) + O(1), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Используя (1.5), получаем

$$T\left(S_j, \frac{f'}{f}\right) < 4T(R_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

В силу (1.9) и (1.4)

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r)}{r^{\mu_j+1}} dr &\leq 8e \frac{T(R_j, f)}{S_j^{\mu_j}} - \frac{C}{t_j^{\mu_j}} \\ &= 8e^2 \frac{T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} - \frac{C}{t_j^{\mu_j}} < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Но

$$m^*\left(r, \alpha, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha u^*(r, \theta) d\theta \geq \frac{\alpha}{\pi} u^*(r, \alpha).$$

Отсюда

$$u^*(r, \alpha) \leq \frac{\pi}{\alpha} m^*\left(r, \alpha, \frac{f'}{f}\right) \leq \frac{\pi}{\alpha} m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Из определения функции $h(r)$ и (1.11) следует, что при $j \geq j_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, f'/f) - \frac{\pi}{\alpha} m(r, f'/f) \cos(\mu_j \alpha) - \pi \mu_j T(r, f'/f) \sin(\mu_j \alpha)}{r^{\mu_j+1}} dr \\ < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Далее, используя (1.10), получаем

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{m(r, f'/f)}{r^{\mu_j+1}} dr \leq 5 \int_{t_j}^{T_j} \frac{\log T(re^{1/\mu_j}, f)}{r^{\mu_j+1}} dr + 6\mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{dr}{r^{\mu_j+1}}. \quad (1.13)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{T_j} \frac{\log T(re^{1/\mu_j}, f)}{r^{\mu_j+1}} dr &= e \int_{t_j \exp(1/\mu_j)}^{S_j} \frac{\log T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr \\ &\leq e \int_{t_j}^{T_j} \frac{\log T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr + \frac{e}{\mu_j} \frac{\log T(S_j, f)}{T_j^{\mu_j}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из соотношений (1.4)–(1.7) следует, что для всех $r \in [t_j, R_j]$

$$\begin{aligned} \log T(r, f) &\leq \mu_j + 1 + \log \frac{r}{\rho_j} + \log T(\rho_j, f) \\ &\leq \mu_j + 1 + \frac{M_j}{\mu_j} + \log T(\rho_j, f) < \log^{3/2} T(\rho_j, f) < \log^2 T(t_j, f); \\ \mu_j^4 &< \log^6 T(\rho_j, f) < \log^9 T(t_j, f), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, для всех $r \in [t_j, R_j]$

$$\mu_j^4 \log T(r, f) < \log^{11} T(t_j, f) \leq \log^{11} T(r, f) < T(r, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Кроме того, из (1.15) следует

$$\mu_j < \log^3 T(t_j, f) < \frac{1}{\mu_j^4} T(t_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Подставляя полученные оценки в (1.13) и (1.14), получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{T_j} \frac{m(r, f'/f)}{r^{\mu_j+1}} dr &\leq \frac{5e}{\mu_j^4} \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr + \frac{5e}{\mu_j^5} \frac{T(S_j, f)}{T_j^{\mu_j}} + \frac{6}{\mu_j^4} T(t_j, f) \int_{t_j}^{T_j} \frac{dr}{r^{\mu_j+1}} \\ &\leq \frac{21}{\mu_j^4} \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr + \frac{5e^3}{\mu_j^5} \frac{T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.6) имеем

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{m(r, f'/f)}{r^{\mu_j+1}} dr < \frac{22}{\mu_j^4} \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr. \quad (1.16)$$

Таким образом, в силу (1.12)

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, f'/f)}{r^{\mu_j+1}} dr &< \left(\left(\frac{\pi}{\alpha} \cos(\mu_j \alpha) + \pi \mu_j \sin(\mu_j \alpha) \right) \frac{22}{\mu_j^4} + (3\pi \sin(\mu_j \alpha) + \varepsilon) \mu_j \right) \\ &\quad \times \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Выбирая в соотношении (1.17) $\alpha = 1/\mu_j^2$ и учитывая, что $\mu_j \rightarrow \infty$, приходим к утверждению леммы 1.

Для доказательства основных результатов нам понадобится результат из работы [5, гл. 1].

ЛЕММА В. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ . Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют последовательности S_k и R_k , стремящиеся к бесконечности, такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k/R_k = 0$ и при $k \geq k_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\frac{T(2R_k, f)}{R_k^\lambda} + \frac{T(2S_k, f)}{S_k^\lambda} < \varepsilon \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Определим величину

$$\begin{aligned} h(r, f, \lambda) = h(r, f, \lambda, \alpha, \psi, p) := & \mathcal{L}(r, \infty, f) \cos \frac{\lambda\psi}{p} - \frac{\pi\lambda}{p} T^*(r, \alpha, f) \sin \frac{\lambda(\alpha + \psi)}{p} \\ & + \frac{\pi\lambda}{p} N(r, \infty, f) \sin \frac{\lambda\psi}{p} - u^*(r, \alpha) \cos \frac{\lambda(\alpha + \psi)}{p}, \end{aligned}$$

где $u(z) = \log^+ |f(z)|$.

В работе [12] доказано неравенство, которое здесь сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА С. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция конечного нижнего порядка λ . Тогда при $p = p(\infty, f)$, $0 < \alpha \leq \min\{\pi; \pi p/(2\lambda)\}$, $-\pi p/(2\lambda) \leq \psi \leq \pi p/(2\lambda) - \alpha$ справедливо асимптотическое неравенство

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h(r, f, \lambda)}{r^{\lambda+1}} dr < \varepsilon \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr, \quad k \rightarrow \infty,$$

где S_k и R_k – последовательности, определенные в лемме В.

Следующее утверждение является аналогом леммы С для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка.

ЛЕММА 2. Пусть $f(z)$ – мероморфная функция бесконечного нижнего порядка. Тогда для p таких, что $1 \leq p \leq \max\{1; p(\infty, f)\}$, $0 < \alpha \leq \min\{\pi; \pi p/(2\mu_j)\}$, $-\pi p/(2\mu_j) \leq \psi \leq \pi p/(2\mu_j) - \alpha$ выполнено неравенство

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r, f, \mu_j)}{r^{\mu_j+1}} dr < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

где T_j и t_j определяются соотношением (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Положим [12], [19]

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T^*(r, \theta, f) \cos\left(\frac{\mu_j}{p}(\theta + \psi)\right) d\theta.$$

В силу леммы А, соотношения (1.3) и леммы Фату, для почти всех $r \geq r_0$ имеем

$$r \frac{d}{dr} r \sigma'_-(r) \geq - \int_0^\alpha \frac{p^2}{\pi} \frac{\partial u^*(r, \theta)}{\partial \theta} \cos\left(\frac{\mu_j}{p}(\theta + \psi)\right) d\theta.$$

Используя формулу интегрирования по частям в правой части этого неравенства, получаем

$$r \frac{d}{dr} r \sigma'_-(r) \geq p^2 h(r, f, \mu_j) + \mu_j^2 \sigma(r).$$

Разделим полученное неравенство на r^{μ_j+1} и проинтегрируем по отрезку $[t_j, T_j]$

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{1}{r^{\mu_j}} \frac{d}{dr} r \sigma'_-(r) dr \geq p^2 \int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r, f, \mu_j)}{r^{\mu_j+1}} dr + \mu_j^2 \int_{t_j}^{T_j} \frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j+1}} dr. \quad (1.19)$$

Применим формулу интегрирования по частям к левой части неравенства (1.19), используя монотонность функции $r \sigma'_-(r)$. Получим

$$p^2 \int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r, f, \mu_j)}{r^{\mu_j+1}} dr \leq \left(\frac{\sigma'_-(r)}{r^{\mu_j-1}} + \mu_j \frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j}} \right) \Big|_{t_j}^{T_j}. \quad (1.20)$$

Из определения функции $\sigma(r)$ следует

$$\sigma(r) \leq \frac{p}{\mu_j} T(r, f).$$

Так как $r \sigma'_-(r)$ монотонно возрастает на отрезке $[t_j, T_j]$, то

$$\sigma(S_j) - \sigma(T_j) = \int_{T_j}^{S_j} \sigma'_-(r) dr \geq T_j \sigma'_-(T_j) \log \frac{S_j}{T_j} = \frac{1}{\mu_j} T_j \sigma'_-(T_j).$$

Таким образом,

$$T_j \sigma'_-(T_j) \leq \mu_j \sigma(S_j) \leq p T(S_j, f).$$

Кроме того, при всех $r \geq 1$ выполняется неравенство $r \sigma'_-(r) \geq \sigma'_-(1)$. Подставляя полученные оценки в соотношение (1.20), имеем

$$p^2 \int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r, f, \mu_j)}{r^{\mu_j+1}} dr \leq \frac{2pT(S_j, f)}{T_j^{\mu_j}} - \frac{\sigma'_-(1)}{t_j^{\mu_j}} < \frac{2peT(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}}.$$

Из этого неравенства и из (1.6) следует утверждение леммы 2.

§ 2. Оценка величины $b(a, f)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $b(\infty, f) = 0$, то теорема очевидна. Пусть $b(\infty, f) > 0$. Тогда $p(\infty, f) \geq 1$. Сначала рассмотрим случай мероморфной функции $f(z)$ бесконечного нижнего порядка. Пусть число p удовлетворяет лемме 2. Выберем число j_0 так, чтобы при $j \geq j_0$ выполнялись неравенства (1.18) и $p/\mu_j < 1$. В лемме 2 выберем $\psi = 0$ и $\alpha = \pi p/(2\mu_j)$. В этом случае $h(r, f, \mu_j) = \mathcal{L}(r, \infty, f) - (\pi\mu_j/p)T^*(r, \alpha, f)$. Так как $T^*(r, \theta, f) \leq T(r, f)$ для всех $\theta \in [0, \pi]$, то в силу леммы 2

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{r^{\mu_j+1}} dr < \left(\frac{\pi}{p} + \varepsilon \right) \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty.$$

Используя (1.6), получаем

$$\begin{aligned} \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr &= \frac{T(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} - \frac{T(T_j, f)}{T_j^{\mu_j}} + \int_{t_j}^{T_j} \frac{rT'_-(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr \\ &< (1 + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом,

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{r^{\mu_j+1}} dr < \left(\frac{\pi}{p} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty.$$

Поэтому существует последовательность $r_j \in [t_j, T_j]$ такая, что

$$\mathcal{L}(r_j, \infty, f) < \left(\frac{\pi}{p} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon)A(r_j, f). \quad (2.2)$$

Из определения последовательности t_j следует, что $t_j \geq P_j = \rho_j \exp(-M_j/\mu_j)$, где $\rho_j \rightarrow \infty$, а последовательность $M_j/\mu_j \rightarrow 0$. Поэтому $P_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательности t_j и r_j стремятся к бесконечности при $j \rightarrow \infty$. Из неравенства (2.2) и определения величины $b(\infty, f)$ следует, что

$$b(\infty, f) \leq \left(\frac{\pi}{p} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем, что для всех p , удовлетворяющих неравенствам $1 \leq p \leq p(\infty, f)$, $p < \infty$, выполнено

$$b(\infty, f) \leq \frac{\pi}{p}. \quad (2.3)$$

Если $p(\infty, f) < \infty$, то положив в (2.3) $p = p(\infty, f)$, приходим к утверждению теоремы.

Если $p(\infty, f) = \infty$, то неравенство (2.3) выполняется для любого $p \geq 1$. Поэтому в этом случае $b(\infty, f) = 0$.

Докажем теорему для мероморфных функций конечного нижнего порядка. Сначала рассмотрим случай $p(\infty, f) < \infty$. В лемме С положим $\psi = \frac{\pi p(\infty, f)}{2\lambda} - \alpha$, тогда при $r \rightarrow \infty$

$$\sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)} \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{r^{\lambda+1}} dr < \left(\varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)}\right) \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr. \quad (2.4)$$

При $\lambda > 0$ имеем

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr = \frac{T(2S_k, f)}{\lambda 2^\lambda S_k^\lambda} - \frac{T(R_k, f)}{\lambda R_k^\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{2S_k}^{R_k} \frac{rT'_-(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Поэтому в силу леммы В

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr < \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \int_{2S_k}^{R_k} \frac{A(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Подставляя это неравенство в (2.4), получаем

$$\sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)} \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{r^{\lambda+1}} dr < \frac{1}{\lambda}(1+\varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \right) \int_{2S_k}^{R_k} \frac{A(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Отсюда следует, что существует последовательность $r_k \in [2S_k, R_k]$ такая, что

$$\sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)} \mathcal{L}(r_k, \infty, f) < \frac{1}{\lambda}(1+\varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \right) A(r_k, f).$$

Так как $S_k \rightarrow \infty$, то $r_k \rightarrow \infty$. Поэтому

$$b(\infty, f) \leq \frac{(1+\varepsilon) \left(\varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \right)}{\lambda \sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)}}.$$

В силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$ и α , $0 < \alpha \leq \min\{\pi; \pi p(\infty, f)/(2\lambda)\}$, получаем оценки (0.2) и (0.3). Докажем оценку (0.4). Рассмотрим случай $p(\infty, f) > 1$ и $\lambda/p(\infty, f) < \frac{1}{2}$. В этом случае $p(\infty, f) \geq 2$. Поэтому при $r \geq r_0$ выполнено $p(r, \infty, f) \geq 2$. Отсюда для всех $r \geq r_0$ имеем $u^*(r, \pi) = 0$. В лемме С положим $\alpha = \pi$, $\psi = 0$. Тогда

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{r^{\lambda+1}} dr < \left(\frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Из этого неравенства и из (2.5) следует, что существует последовательность $r_k \in [2S_k, R_k]$ такая, что

$$\mathcal{L}(r_k, \infty, f) < \left(\frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) \frac{1+\varepsilon}{\lambda} A(r_k, f).$$

Отсюда

$$b(\infty, f) \leq \left(\frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) \frac{1+\varepsilon}{\lambda}. \quad (2.6)$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ приходим к оценке (0.4). В случае, если $p(\infty, f) = \infty$, в доказательстве в качестве $p(\infty, f)$ берем произвольное число, большее 2λ . Тогда из (2.6) следует, что $b(\infty, f) = 0$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала рассмотрим случай мероморфной функции бесконечного нижнего порядка. Положим в лемме 2 $p = 1$ и $\psi = \pi/(2\mu_j) - \alpha$. Тогда

$$h(r, f, \mu_j) = \mathcal{L}(r, \infty, f) \sin(\mu_j \alpha) - \pi \mu_j T^*(r, \alpha, f) + \pi \mu_j \cos(\mu_j \alpha) N(r, \infty, f),$$

и лемма дает неравенство

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r, f, \mu_j)}{r^{\mu_j+1}} dr < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Из определения дефекта Валирона следует, что при $r \geq r_0$

$$N(r, \infty, f) > (1 - \Delta(\infty, f) - \varepsilon) T(r, f). \quad (2.8)$$

Поэтому при $r \geq r_0$ имеем

$$h(r, f, \mu_j) \geq \mathcal{L}(r, \infty, f) \sin(\mu_j \alpha) - \pi \mu_j (1 - (1 - \Delta(\infty, f) - \varepsilon) \cos(\mu_j \alpha)) T(r, f).$$

Используя неравенства (2.7) и (2.1), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f)}{r^{\mu_j+1}} dr \\ & \leq \frac{\pi}{\sin(\mu_j \alpha)} (1 + \varepsilon - (1 - \Delta(\infty, f) - \varepsilon) \cos(\mu_j \alpha)) (1 + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Выберем теперь $\alpha = \alpha_j$ из условия $\cos(\mu_j \alpha) = (1 - \Delta(\infty, f) - \varepsilon)$. Деля обе части неравенства (2.9) на $\int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr$ и затем переходя к пределам при $j \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$b(\infty, f) \leq \pi \sqrt{\Delta(\infty, f) (2 - \Delta(\infty, f))}.$$

Теорема 2 доказана для случая мероморфной функции f бесконечного нижнего порядка.

В случае конечного нижнего порядка $\lambda > 0$ доказательство теоремы 2 получается аналогично. Полагая $\psi = \pi/(2\lambda) - \alpha$, $\mu_j = \lambda$ и используя оценку (2.5) при всех допустимых значениях α , мы получаем

$$\begin{aligned} b(\infty, f) & \leq \frac{\pi}{\sin(\lambda \alpha)} (1 - (1 - \Delta(\infty, f)) \cos(\lambda \alpha)) \\ & = \pi \left(\operatorname{tg} \frac{\lambda \alpha}{2} + \Delta(\infty, f) \operatorname{ctg}(\lambda \alpha) \right). \end{aligned}$$

Вычисление минимума правой части по допустимым значениям α дает доказываемое неравенство. Теорема 2 доказана.

§3. О соотношении для величин $b(a, f)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим сначала случай бесконечного нижнего порядка. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^q$ — набор различных комплексных чисел таких, что $b(a_k, f) > 0$, $k = 1, 2, \dots, q$, $c = \min_{k \neq i} |a_i - a_k|$.

Положим [20]

$$G_j = \left\{ z : t_j \leq |z| \leq T_j, \log |f'(z)| \leq -\sqrt{T(\rho_j, f)} \right\},$$

где последовательности $t_j, \rho_j, T_j, S_j, R_j$ определены соотношениями (1.4), (1.6).

Обозначим через $G_{j,k}$ множество, состоящее из тех связных компонент G_j , в каждой из которых есть точка z_1 такая, что

$$|f(z_1) - a_k| < \frac{c}{4}.$$

Покажем, что множества $G_{j,k}$ попарно не пересекаются при каждом фиксированном j и различных значениях k . Для этого используем один прием Вейцмана [20].

Пусть $l(t)$ — длина линий уровня $|f'(z)| = t$ в круге $|z| \leq T_j$. Тогда, используя соотношение $S_j = e^{1/\mu_j} T_j$ и лемму Картана [3, § 1.4], мы получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} n\left(T_j, \frac{1}{f' - te^{i\varphi}}\right) d\varphi &\leq \mu_j \int_0^{2\pi} N\left(S_j, \frac{1}{f' - te^{i\varphi}}\right) d\varphi \\ &= \mu_j \int_0^{2\pi} N\left(S_j, e^{i\varphi}, \frac{f'}{t}\right) d\varphi \\ &= \mu_j \left(T\left(S_j, \frac{f'}{t}\right) + O(1) \right). \end{aligned}$$

Обозначим правую часть последнего неравенства через I_1 и продолжим его оценку, используя лемму о логарифмической производной (см. неравенство (1.10)) и соотношение (1.5). Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \mu_j \left(T(S_j, f') + \log^+ \frac{1}{t} + O(1) \right) \\ &\leq \mu_j \left(m\left(S_j, \frac{f'}{f}\right) + m(S_j, f) + N(S_j, f') + \log^+ \frac{1}{t} + O(1) \right) \\ &\leq \mu_j \left(5 \log T(R_j, f) + 2T(S_j, f) + \log^+ \frac{1}{t} \right) \\ &< \log^2 T(R_j, f) \left(3T(R_j, f) + \log^+ \frac{1}{t} \right), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пусть $\gamma_1 = \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)})$, $\gamma_2 = 2\gamma_1$. Из последнего неравенства и принципа длины и площади [21, гл. 2] получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{l^2(t)}{t} dt &\leq \pi T_j^2 \log^2 T(R_j, f) \left(3T(R_j, f) + \log^+ \frac{1}{\gamma_1} \right) \\ &\leq \pi R_j^2 \log^2 T(R_j, f) \left(3T(R_j, f) + \frac{1}{2} T(\rho_j, f) \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу соотношений (1.4) и (1.5)

$$T(R_j, f) \leq T(Q_j, f) = T(\rho_j e^{M_j/\mu_j}, f) \leq (1 + \varepsilon_j) e^{M_j} T(\rho_j, f) < T^2(\rho_j, f).$$

Поэтому из неравенства (3.1) следует, что

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{l^2(t)}{t} dt < \frac{1}{2} T^3(\rho_j, f).$$

Следовательно, существует число $\alpha_j \in [\sqrt{T(\rho_j, f)} - \log 2, \sqrt{T(\rho_j, f)}]$ такое, что $l(e^{-\alpha_j}) \leq T^{3/2}(\rho_j, f)$, $j \rightarrow \infty$. Далее положим

$$G'_j = \{z : t_j \leq |z| \leq T_j, \log |f'(z)| \leq -\alpha_j\}.$$

Ясно, что $G_{j,k} \subset G_j \subset G'_j$, $k = 1, 2, \dots, q$. Пусть $z \in G_{j,k}$. Тогда существует связная компонента M множества G_j такая, что $z \in M$ и $M \subset G_{j,k} \subset G_j \subset G'_j$.

По определению множества $G_{j,k}$ в M существует точка z_1 такая, что $|f(z_1) - a_k| < c/4$. Точки $z, z_1 \in M \subset G'_j$ соединим кривой Γ , лежащей в G'_j , длина которой не превосходит длины границы множества G'_j . Тогда

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_1)| &= \left| \int_{\Gamma} f'(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f'(z)| |dz| \\ &\leq \exp(-\sqrt{T(\rho_j, f)}) T^{3/2}(\rho_j, f) < \frac{c}{4}, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, при $j \geq j_0$ для каждого $z \in G_{j,k}$ выполняется неравенство

$$|f(z) - a_k| \leq |f(z) - f(z_1)| + |f(z_1) - a_k| < \frac{c}{2}.$$

Из этого неравенства и определения числа c следует, что множества $G_{j,k}$, $k = 1, 2, \dots, q$, попарно не пересекаются.

Далее положим

$$u_{j,k} = \begin{cases} -\log |f'(z)|, & \text{если } z \in G_{j,k}, \\ \sqrt{T(\rho_j, f)}, & \text{если } z \notin G_{j,k}. \end{cases}$$

Функции $u_{j,k}$ являются δ -субгармоническими функциями, т.е. могут быть представлены в виде разности двух субгармонических [6].

Введем обозначения

$$\begin{aligned} m_{j,k}^*(r, \theta) &= \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E u_{j,k}(re^{i\varphi}) d\varphi, \\ T_1^*(r, \theta, f) &= \sum_{k=1}^q m_{j,k}^*(r, \theta) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right). \end{aligned}$$

Функция $T_1^*(r, \theta, f)$ выпукла относительно $\log r$ для каждого фиксированного $\theta \in [0, \pi]$ (см. [6], [16]), поэтому для всех $r \in [t_j, T_j]$ и $\theta \in [0, \pi]$

$$LT_1^*(r, \theta, f) \geq 0.$$

Легко видеть, что доказательство леммы А переносится без изменений и на функции $u_{j,k}$. Отсюда следует, что для почти всех $\theta \in [0, \pi]$ и для всех $r \in [t_j, T_j]$ таких, что на окружности $|z| = r$ нет нулей и полюсов функции $f'(z)$,

$$LT_1^*(r, \theta, f) \geq -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^q \frac{\partial u_{j,k}^*(r, \theta)}{\partial \theta}. \quad (3.2)$$

Для каждого α , $0 < \alpha < \pi/(2\mu_j)$, положим

$$\sigma_1(r) = \int_0^\alpha T_1^*(r, \theta, f) \sin(\mu_j(\alpha - \theta)) d\theta.$$

Используя неравенство (3.2) и лемму Фату, имеем

$$L\sigma_1(r) \geq -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^q \int_0^\alpha \frac{\partial u_{j,k}^*}{\partial \theta}(r, \theta) \sin(\mu_j(\alpha - \theta)) d\theta. \quad (3.3)$$

Кроме того,

$$L\sigma_1(r) \geq \int_0^\alpha LT_1^*(r, \theta, f) \sin(\mu_j(\alpha - \theta)) d\theta \geq 0.$$

Поэтому функция $\sigma_1(r)$ логарифмически выпукла на отрезке $[t_j, T_j]$ и $L\sigma_1(r) = r \frac{d}{dr} r \sigma_1'(r)$ для почти всех $r \in [t_j, T_j]$, где через $\sigma_1'(r)$ обозначена левосторонняя производная функции $\sigma_1(r)$.

Интегрируя правую часть неравенства (3.3) по частям, получаем

$$r \frac{d}{dr} r \sigma_1'(r) \geq h_1(r) + \mu_j^2 \sigma_1(r)$$

для почти всех $r \in [t_j, T_j]$, где

$$h_1(r) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^q u_{j,k}^*(r, 0) \sin(\mu_j \alpha) - \mu_j T_1^*(r, \alpha, f) + \mu_j \cos(\mu_j \alpha) N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

Разделим полученное неравенство на r^{μ_j+1} и проинтегрируем его от t_j до T_j . Тогда

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{1}{r^{\mu_j}} \frac{d}{dr} r \sigma_1'(r) dr \geq \int_{t_j}^{T_j} \frac{h_1(r)}{r^{\mu_j+1}} dr + \mu_j^2 \int_{t_j}^{T_j} \frac{\sigma_1(r)}{r^{\mu_j+1}} dr.$$

Применим формулу интегрирования по частям к левой части этого неравенства, используя монотонность $r \sigma_1'(r)$. Имеем

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{h_1(r)}{r^{\mu_j+1}} dr \leq \left(\frac{\sigma_1'(r)}{r^{\mu_j-1}} + \mu_j \frac{\sigma_1(r)}{r^{\mu_j}} \right) \Big|_{t_j}^{T_j}. \quad (3.4)$$

Из определения функции $T_1^*(r, \theta, f)$ и неравенства (1.7) следует, что для всех $\theta \in [0, \pi]$, $r \in [t_j, T_j]$

$$\begin{aligned} T_1^*(r, \theta, f) &\leq m(r, 0, f') + q\sqrt{T(\rho_j, f)} + N(r, 0, f') \\ &\leq T(r, f') + qT^{3/4}(r, f), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sigma_1(r) \leq \frac{1}{\mu_j} (T(r, f') + qT^{3/4}(r, f)).$$

Положив в неравенстве (1.10) $r = T_j$, $R = S_j = T_j e^{1/\mu_j}$ и используя (1.5), получаем

$$m\left(T_j, \frac{f'}{f}\right) < 5 \log T(S_j, f) + \mu_j < \log^{3/2} T(S_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T(T_j, f') &\leq m\left(T_j, \frac{f'}{f}\right) + m(T_j, f) + N(T_j, f') \\ &\leq \log^{3/2} T(S_j, f) + 2T(T_j, f), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_1(T_j) \leq \frac{3}{\mu_j} T(S_j, f).$$

Аналогично,

$$\sigma_1(S_j) \leq \frac{3}{\mu_j} T(R_j, f).$$

В силу монотонности функции $r\sigma_1'(r)$

$$\sigma_1(S_j) - \sigma_1(T_j) = \int_{T_j}^{S_j} \sigma_1'(r) dr \geq T_j \sigma_1'(T_j) \log \frac{S_j}{T_j} = \frac{1}{\mu_j} T_j \sigma_1'(T_j).$$

Поэтому

$$T_j \sigma_1'(T_j) \leq \mu_j \sigma_1(S_j) \leq 3T(R_j, f).$$

Из полученных неравенств и из (1.6) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует j_0 такое, что при $j \geq j_0$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1'(r)}{r^{\mu_j-1}} + \mu_j \frac{\sigma_1(r)}{r^{\mu_j}} \right) \Big|_{t_j}^{T_j} &\leq \frac{4T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} - \frac{\sigma_1'(1)}{t_j^{\mu_j}} \\ &\leq \frac{4T(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} \\ &< \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (3.4), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\mu_j \alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^q \int_{t_j}^{T_j} \frac{u_{jk}^*(r, 0)}{r^{\mu_j+1}} dr - \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f')}{r^{\mu_j+1}} dr + \mu_j \cos(\mu_j \alpha) \int_{t_j}^{T_j} \frac{N(r, 0, f')}{r^{\mu_j+1}} dr \\ < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Напомним определение валироновского дефекта:

$$\Delta(0, f') = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(r, 0, f')}{T(r, f')} \right).$$

Отсюда при $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$N(r, 0, f') > (1 - \Delta(0, f') - \varepsilon) T(r, f'). \quad (3.6)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} T(r, f') &= m(r, f') + N(r, f') \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r, f) + 2N(r, f) \\ &\leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2T(r, f). \end{aligned}$$

Поэтому из (1.16) следует

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f')}{r^{\mu_j+1}} dr < (2 + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Таким образом, учитывая неравенства (3.5), (3.6), (3.7), находим

$$\sum_{k=1}^q \int_{t_j}^{T_j} \frac{u_{jk}^*(r, 0)}{r^{\mu_j+1}} dr < \frac{2\pi\mu_j}{\sin(\mu_j \alpha)} (1 - (1 - \Delta) \cos(\mu_j \alpha) + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr. \quad (3.8)$$

Так как $b(a_k, f) > 0$, то при $r \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(r, a_k, f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_k|} = \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta_k(r)}) - a_k|} \rightarrow \infty.$$

Поэтому для всех $r \in [t_j, T_j]$ при $j \geq j_0$

$$|f(re^{i\theta_k(r)}) - a_k| < \frac{c}{4}, \quad (3.9)$$

где $c = \min_{k \neq i} |a_k - a_i|$. Ясно, что

$$\mathcal{L}(r, a_k, f) \leq \log^+ \frac{|f'(re^{i\theta_k(r)})|}{|f(re^{i\theta_k(r)}) - a_k|} + \log^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta_k(r)})|}. \quad (3.10)$$

Если $re^{i\theta_k(r)} \in G_{j,k}$, то

$$\log^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta_k(r)})|} \leq \max_{|z|=r, z \in G_{j,k}} \log^+ \frac{1}{|f'(z)|} = u_{j,k}^*(r, 0).$$

Рассмотрим случай $re^{i\theta_k(r)} \notin G_{j,k}$. Тогда в силу (3.9) $re^{i\theta_k(r)} \notin G_j$. Поэтому

$$\log^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta_k(r)})|} < \sqrt{T(\rho_j, f)}.$$

Значит, для всех $r \in [t_j, T_j]$

$$\log^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta_k(r)})|} < u_{j,k}^*(r, 0) + \sqrt{T(\rho_j, f)}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Поэтому, используя (1.7), (3.10), получаем, что для всех $r \in [t_j, T_j]$

$$\mathcal{L}(r, a_k, f) \leq \mathcal{L}\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right) + u_{j,k}^*(r, 0) + T^{3/4}(r, f), \quad j \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Из (3.11), (3.8), леммы 1 и (2.2) следует, что при $j \geq j_0(\varepsilon)$

$$\sum_{k=1}^q \int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, a_k, f)}{r^{\mu_j+1}} dr < \frac{2\pi}{\sin(\mu_j \alpha)} (1 - (1 - \Delta) \cos(\mu_j \alpha) + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr,$$

где $\Delta = \Delta(0, f')$.

Далее положим $\alpha = \frac{1}{\mu_j} \arccos(1 - \Delta)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^q \int_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r, a_k, f)}{r^{\mu_j+1}} dr < 2\pi(\sqrt{\Delta(2 - \Delta)} + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{A(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty.$$

Из этого неравенства следует, что существует последовательность $r_j \in [t_j, T_j]$ такая, что

$$\sum_{k=1}^q \mathcal{L}(r_j, a_k, f) < 2\pi(\sqrt{\Delta(2 - \Delta)} + \varepsilon) A(r_j, f), \quad j \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^q b(a_k, f) \leq 2\pi(\sqrt{\Delta(2 - \Delta)} + \varepsilon).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы 3 в случае функции бесконечного нижнего порядка.

Для мероморфных функций конечного нижнего порядка λ доказательство теоремы 3 проводится аналогично с использованием обычных пиков Поля и $\mu_j = \lambda$ (см. также [6]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Сначала рассмотрим случай целой функции $f(z)$ бесконечного нижнего порядка. Легко видеть, что

$$T(r, f') = m(r, f') \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + T(r, f).$$

Поэтому из (1.16) следует

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f')}{r^{\mu_j+1}} dr < (1 + \varepsilon) \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr, \quad j \rightarrow \infty.$$

Далее, повторяя доказательство теоремы 3, получаем

$$\sum_{k=1}^q b(a_k, f) \leq \pi(1 + \varepsilon) \sqrt{\Delta(2 - \Delta)},$$

где $\Delta = \Delta(0, f')$.

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы 4 для целых функций бесконечного нижнего порядка.

Для целых функций конечного нижнего порядка доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что из теоремы 3 следует утверждение теоремы F при $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Для этого достаточно применить теорему 3 к функции

$$F(z) = \frac{1 + \bar{a}f(z)}{f(z) - a},$$

где $a \in \mathbb{C}$ и $\Delta(a, f) = 0$. Ясно, что $m(r, F) = m(r, a, f) + O(1)$, $T(r, F) = T(r, f) + O(1)$, $r \rightarrow \infty$. Поэтому $\Delta(\infty, F) = \Delta(a, f) = 0$. По теореме 2 $b(\infty, F) = 0$. Так как $f(z) = \frac{1 + aF(z)}{F(z) - \bar{a}}$, то для каждого числа $d \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$\mathcal{L}(r, d, f) = \mathcal{L}\left(r, \frac{1 + \bar{a}d}{d - a}, F\right), \quad \mathcal{L}(r, \infty, f) = \mathcal{L}(r, \bar{a}, F)$$

и (см. [2, гл. 1, § 4])

$$A(r, f) = A(r, F).$$

Таким образом, $b(a, f) = 0$, $b(\infty, f) = b(\bar{a}, F)$ и

$$b(d, f) = b\left(\frac{1 + \bar{a}d}{d - a}, F\right) \quad \text{при } d \neq a.$$

Поэтому

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} b(a, f) \leq \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} b(a, F) \leq 2\pi \sqrt{\Delta(2 - \Delta)} \leq 2\pi,$$

где $\Delta = \Delta(0, F')$.

§ 4. Оценка величины протяжения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Так как $b(\infty, f) > 0$, то $p(\infty, f) \geq 1$. Из теоремы 1 следует, что $p(\infty, f) < \infty$. Если $\sigma(\infty, f) \geq \min\{2\pi; \pi p(\infty, f)/\lambda\}$, то теорема 5 очевидна. Поэтому будем считать, что

$$\sigma(\infty, f) < \min\left\{2\pi; \frac{\pi p(\infty, f)}{\lambda}\right\}.$$

Выберем число α так, чтобы

$$\frac{1}{2}\sigma(\infty, f) < \alpha < \min\left\{\pi; \frac{\pi p(\infty, f)}{2\lambda}\right\}.$$

Тогда при $r \geq r_0$ имеем $u^*(r, \alpha) = 0$. Поэтому, положив в лемме С $\psi = 0$, получаем

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{\mathcal{L}(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr < \left(\frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда в силу (2.5)

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{\mathcal{L}(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr < \frac{(1+\varepsilon)}{\lambda} \left(\frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) \int_{2S_k}^{R_k} \frac{A(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Таким образом, существует последовательность $r_k \in [2S_k, R_k]$ такая, что

$$\mathcal{L}(r_k, f) < \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \left(\frac{\pi\lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) A(r_k, f), \quad k \rightarrow \infty.$$

Это дает

$$b(\infty, f) \leq \frac{\pi}{p(\infty, f)} \sin \frac{\lambda\alpha}{p(\infty, f)}. \quad (4.1)$$

В неравенстве (4.1) перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow \sigma(\infty, f)/2$. Получим

$$b(\infty, f) \leq \frac{\pi}{p(\infty, f)} \sin \frac{\lambda\sigma(\infty, f)}{2p(\infty, f)}.$$

Из этого следует

$$\sigma(\infty, f) \geq \frac{2p(\infty, f)}{\lambda} \arcsin \frac{b(\infty, f)p(\infty, f)}{\pi},$$

что и доказывает теорему 5.

§ 5. О мероморфных функциях малого нижнего порядка

Теорема 6 легко следует из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция нижнего порядка λ , где $0 < \lambda < \frac{1}{2}p(\infty, f)$, $\mu(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \mu(r, f)}{A(r, f)} \geq \left(b(\infty, f) - \frac{\pi}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} \right) \frac{1}{\cos \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $b(\infty, f) = 0$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $b(\infty, f) > 0$, тогда из теоремы 1 следует, что $p(\infty, f) < \infty$.

В лемме С положим $\alpha = \pi$, $\psi = 0$. Тогда $u^*(r, \pi) = \log^+ \mu(r, f)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\mathcal{L}(r, f) - \log^+ \mu(r, f) \cos \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)}}{r^{\lambda+1}} dr \\ < \left(\frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и оценки (2.5) следует, что существует последовательность $r_k \in [2S_k, R_k]$ такая, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r_k, f) - \log^+ \mu(r_k, f) \cos \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} \\ < \frac{1 + \varepsilon}{\lambda} \left(\frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) A(r_k, f), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \mu(r, f)}{A(r, f)} \geq \frac{1}{\cos \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)}} \left(b(\infty, f) - \frac{1 + \varepsilon}{\lambda} \left(\frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} \sin \frac{\pi \lambda}{p(\infty, f)} + \varepsilon \right) \right).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы 7.

Список литературы

1. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.: ГИТЛ, 1941.
2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
3. Хейман У. К. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.

4. *Ulrich E.* Über die Ableitung einer meromorphen Funktion // Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. Math.-Phys. Kl, 1929. P. 592–608.
5. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций. Харьков: Вища школа, 1978.
6. *Марченко И. И., Щерба А. И.* О величинах отклонений мероморфных функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. №1. С. 3–24.
7. *Bergweiler W., Bock H.* On the growth of meromorphic functions of infinite order // J. Anal. Math. 1994. V. 64. P. 327–336.
8. *Eremenko A.* An analogue of the defect relation for the uniform metric // Complex Variables Theory Appl. 1997. V. 34. P. 83–97.
9. *Edrei A.* Sums of deficiencies of meromorphic functions // J. Anal. Math. 1965. V. 14. P. 79–104.
10. *Baernstein A.* Proof of Edrei's conjecture // Proc. London Math. Soc. (3). 1973. V. 26. P. 418–434.
11. *Марченко И. И.* О росте мероморфных функций конечного нижнего порядка // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. №5. С. 1077–1080.
12. *Марченко И. И.* О величинах отклонений и протяжений мероморфных функций конечного нижнего порядка // Матем. сб. 1995. Т. 186. №3. С. 85–102.
13. *Содин М. Л.* Некоторые результаты о росте мероморфных функций конечного нижнего порядка // Математическая физика и функциональный анализ. Киев: Наукова думка, 1986. С. 102–113.
14. *Anderson I. M., Barth K. F., Branan D. A.* Research problems in complex analysis // Bull. London Math. Soc. 1977. V. 9. №2. P. 129–162.
15. *Рыжков М. А.* О точности оценки величины отклонения для мероморфной функции // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. №37. Харьков: Вища школа, 1982. С. 114–115.
16. *Baernstein A.* Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta Math. 1974. V. 133. P. 139–169.
17. *Gariepy R., Lewis I. L.* Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions // Ark. Mat. 1975. V. 13. №1. P. 91–105.
18. *Fuchs W. H. J.* A theorem on $\min_{|z|=r}(\log |f(z)|)/T(r, f)$. // Symp. on Compl. Anal. Canterbury 1973. London Math. Soc. Lect. Notes 12. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1975. P. 69–72.
19. *Essen M., Shea D. F.* Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions // Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A. 1982. V. 82. №2. P. 201–216.
20. *Weitsman A.* A theorem on Nevanlinna deficiencies // Acta Math. 1972. V. 128. №1–2. P. 41–52.
21. *Хейман У. К.* Многолистные функции. М.: ИЛ, 1960.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
17.02.1997