Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, А. С. Мищенко, Квазиклассическая асимптотика квазичастиц, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 6, 85–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 09:02:32

УДК 517.9

В. П. Маслов, А. С. Мищенко

Квазиклассическая асимптотика квазичастиц

В работе рассмотрена n -частичная задача уравнения Шрёдингера–Лапласа–Бельтрами на многообразии с произвольным потенциалом взаимодействия между частицами. Получен псевдодифференциальный оператор $(\text{mod } h^\infty)$ на многообразии, описывающий уровень энергии гамильтониана для самосогласованного поля. Уравнения для квазичастицы являются уравнениями в вариациях для нелинейного уравнения Вигнера, отвечающего уравнению Хартри. В работе получены как асимптотика стационарного уравнения Вигнера–Хартри, отвечающего уровню энергии в эргодической ситуации, так и асимптотика обобщенной собственной функции уравнения в вариациях, соответствующего этому же многообразию уровня энергии. Рекуррентные асимптотические формулы для указанной выше задачи в случае, изученном Боголюбовым, приводят к его результатам.

Библиография: 6 названий.

Введение

В знаменитой работе Н. Н. Боголюбова [1] о слабо неидеальном бозе-газе, в частности, было получено известное дисперсионное соотношение для квазичастиц, определяющее так называемую кривую Ландау вида

$$\omega = vk + \sqrt{k^2 \tilde{V}(k) + h^2 \frac{k^4}{4}}, \quad (1)$$

где $\omega(k)$ – частота квазичастицы, v – скорость, k – волновое число, а $\tilde{V}$ – преобразование Фурье потенциала взаимодействия n -частичной задачи уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \left(-\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i=1}^n \Delta_i + \varepsilon \sum_{i \neq j}^n V(x^i - x^j) \right) \psi,$$

где n – число частиц ($n \rightarrow \infty$), ε – малый параметр порядка $\varepsilon \sim 1/n$, Δ_i – оператор Лапласа для i -й частицы (детали см. в [2]).

Соотношение (1) позволило определить критерий Ландау сверхтекучести, а также позволило Ландау предсказать второй звук в жидком гелии.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке INTAS (грант № 94-2763).

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00276) и INTAS (грант № 94-2763).

Заметим, что соотношение (1) эквивалентно следующему псевдодифференциальному уравнению, определяющему квазичастицы:

$$\begin{aligned}\omega &= i \frac{\partial}{\partial t}, \\ k &= i \frac{\partial}{\partial q},\end{aligned}$$

т. е.

$$i \frac{\partial}{\partial t} u = i v \frac{\partial u}{\partial q} + \sqrt{\Delta \tilde{V} \left(i \frac{\partial}{\partial q} \right) + h^2 \frac{\Delta^2}{4}} u. \quad (2)$$

Естественно, что в случае присутствия внешнего поля соответствующее (2) уравнение будет с переменными коэффициентами. В этой связи возникла проблема обобщения дисперсионного соотношения (1) на случай, когда присутствует внешнее поле, а также его квазиклассического разложения.

В настоящей работе получены асимптотический ряд по степеням h и рекуррентные асимптотические формулы для указанной выше задачи, которые в случае, изученном Боголюбовым, приводят к его результатам.

Более того, рассматривается уравнение Шрёдингера–Лапласа–Бельтрами на многообразии с произвольным потенциалом взаимодействия между частицами. Мы получаем псевдодифференциальный оператор $(\text{mod } h^\infty)$ на многообразии, описывающий уровень энергии гамильтониана

$$w(q, p) - E = 0, \quad (3)$$

где w удовлетворяет уравнению самосогласованного поля (см. [2]–[6]). В общем случае получаются рекуррентные уравнения. На самом деле, уравнения для квазичастицы являются уравнениями в вариациях для нелинейного уравнения Вигнера, отвечающего уравнению Хартри. В работе получены как асимптотика стационарного уравнения Вигнера–Хартри, отвечающего уровню энергии (3) в эргодической ситуации, так и асимптотика обобщенной собственной функции уравнения в вариациях, соответствующего этому же многообразию уровня энергии.

§ 1. Обозначения и терминология

Рассмотрим фазовое пространство

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_q^n \oplus \mathbb{R}_p^n$$

с координатами

$$q = \{q^1, \dots, q^n\}, \quad p = \{p_1, \dots, p_n\}$$

и симплектической формой

$$\omega = dp \wedge dq = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq^j.$$

Пусть $H(q, p)$ – функция Гамильтона на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Через

$$\{H, f\} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x^j} \right)$$

обозначим скобку Пуассона, т.е. действие гамильтонова векторного поля, ассоциированного с функцией Гамильтона H , на функцию f .

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{H(q, p), \rho(q, p)\} - \left\{ \rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} = 0. \quad (4)$$

Пусть $w(q, p)$ – функция, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$w(q, p) = H(q, p) + \int K(q, p; \xi, \eta) \delta(E - w(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \quad (5)$$

Тогда функция $\rho(q, p) = \delta(E - w(q, p))$ удовлетворяет уравнению (4), поскольку уравнение (4) эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{w(q, p), \rho(q, p)\} = 0.$$

Уравнение (4) заменяем на его квантовый аналог.

Все функции на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ будем считать зависящими от малого параметра $\hbar$, причем разлагающимися в формальные ряды по степеням $\hbar$ с точностью до функций, являющихся $o(\hbar^N)$ для любого N .

Пусть

$$\widehat{f} = f \left(\overbrace{q^1, \dots, q^n}^2, \overbrace{ih \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial q^n}}^1 \right). \quad (6)$$

Тогда композиции двух операторов типа (6) соответствует функция, формальный ряд по степеням $\hbar$ для которой имеет следующий вид:

$$f * g = \sum_{\alpha} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p_{\alpha}} \right) \left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial q^{\alpha}} \right), \quad (7)$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \geq 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Обозначим

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{ih} (f * g - g * f). \quad (8)$$

Как следствие получаем, что

$$\widehat{\langle f, g \rangle} = \frac{1}{ih} [\widehat{f}, \widehat{g}]. \quad (9)$$

Из формул (7), (9) следует, что операция $*$ превращает пространство $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ функций Гамильтона в ассоциативную (некоммутативную) алгебру, а операция $\langle \cdot, \cdot \rangle$ образует алгебру Ли дифференцирований вышеуказанной ассоциативной алгебры.

Рассмотрим оператор $\mathbf{S}$, который сопоставляет оператору (6) формально сопряженный оператор:

$$\widehat{\mathbf{S}(f)} = \bar{f} \left(\overbrace{q^1, \dots, q^n}^1, \overbrace{ih \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial q^n}}^2 \right).$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{S}(f)(q, p) = \sum_{\alpha} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{2|\alpha|} \bar{f}}{\partial p_{\alpha} \partial q^{\alpha}} \right). \quad (10)$$

Из формулы (10), в частности, следует, что оператор $\mathbf{S}$ обратим, причем

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}.$$

Обратный оператор вычисляется по той же формуле:

$$\mathbf{S}^{-1}(f)(q, p) = \sum_{\alpha} \frac{(-ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{2|\alpha|} f}{\partial p_{\alpha} \partial q^{\alpha}} \right).$$

Более того, имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{S}(f * g) = \mathbf{S}(g) * \mathbf{S}(f).$$

Квантовый аналог уравнения (4) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle H(q, p), \rho(q, p) \rangle - \left\langle \rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\rangle = 0. \quad (11)$$

Пусть $\rho(q, p)$ – такая функция, что

$$\widehat{\rho}(q, p) = \delta(\widehat{w}(q, p) - E).$$

Функция ρ выражается через функцию w с помощью некоторого дифференциального оператора $\mathcal{D}(w)$

$$\rho(q, p) = \mathcal{D}(w). \quad (12)$$

Заменим уравнение (5) на уравнение

$$w(q, p) = H(q, p) + \int K(q, p; \xi, \eta) \mathcal{D}(w)(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функция $\rho(q, p)$ удовлетворяет уравнению (11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, уравнение (11) можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\langle H(q, p) + \int K(q, p; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta, \rho(q, p) \right\rangle = 0. \quad (14)$$

В силу (12) и (13) уравнение (14) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle w, \rho \rangle = 0.$$

Поскольку оператор $\hat{\rho}(q, p)$ есть функция от оператора $\hat{w}(q, p)$, то

$$\langle w, \rho \rangle = 0.$$

Таким образом, мы можем написать уравнение в вариациях для нелинейного уравнения (11). Пусть $\sigma(q, p)$ обозначает вариацию решения $\rho(q, p)$. Тогда $\sigma(q, p)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \langle H(q, p), \sigma(q, p) \rangle - \left\langle \sigma(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\rangle \\ - \left\langle \rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta) \sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \langle w(q, p), \sigma(q, p) \rangle - \left\langle \rho(q, p), \int K(q, p; \xi, \eta) \sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\rangle = 0. \quad (15)$$

Будем искать решение уравнения (15) в классе функций вида

$$\sigma(q, p) = \rho(q, p) * f(q, p) + g(q, p) * \rho(q, p).$$

Тогда уравнение (15) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho * f + g * \rho)}{\partial t} + \langle w, \rho * f + g * \rho \rangle \\ - \left\langle \rho, \int K(q, p; \xi, \eta) (\rho(\xi, \eta) * f(\xi, \eta) + g(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Положим

$$g = -f + iha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho * \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} * \rho + \rho * \langle w, f \rangle + \langle w, (-f + iha) \rangle * \rho \\ - \rho * \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \\ + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta * \rho = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим через $\mathcal{V}$ пространство всех функций вида $\rho * f + g * \rho$. Пространство $\mathcal{V}$ может быть представлено в виде суммы

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_l + \mathcal{V}_r,$$

где $\mathcal{V}_l$ — пространство функций вида $\rho * f$, а $\mathcal{V}_r$ — пространство функций вида $g * \rho$.

Таким образом, уравнение (16) есть уравнение в пространстве $\mathcal{V}$.

§ 2. Разложение пространства $\mathcal{V}$

Элементы пространства $\mathcal{V}$ однозначно определяются парой функций (f, g) . Другими словами, имеется эпиморфизм

$$\begin{aligned}\alpha: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) &\rightarrow \mathcal{V}, \\ \alpha(f, g) &= \rho * f + g * \rho.\end{aligned}\tag{17}$$

Опишем подпространство пар функций (f, g) , для которых

$$\rho(q, p) * f(q, p) + g(q, p) * \rho(q, p) = 0,$$

т.е. ядро отображения α .

ЛЕММА 1. *Если*

$$\rho(q, p) * f(q, p) = 0,\tag{18}$$

то

$$f(q, p) = w(q, p) * g(q, p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что функция $\rho(q, p)$ может быть представлена в виде асимптотического ряда, первые члены которого имеют вид:

$$\rho(q, p) = \delta(w(q, p)) + ih\delta^{(2)}(w(q, p))\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial q^j} + o(h).\tag{19}$$

Представим функцию f в виде формального ряда

$$f(q, p) = f_0(q, p) + ihf_1(q, p) + (ih)^2f_2(q, p) + \dots$$

Тогда

$$\rho(q, p) * f(q, p) = \rho(q, p)f(q, p) + ih\frac{\partial \rho}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q^j} + o(h) = \delta(w(q, p))f_0(q, p) + O(h).$$

Следовательно, функция f_0 делится на w , т.е.

$$f_0(q, p) = g_0(q, p)w(q, p) = g_0(q, p) * w(q, p) + O(ih).$$

Значит,

$$f(q, p) = w(q, p) * g_0(q, p) + ihf'(q, p).\tag{20}$$

Применяя (18) к левой и правой части (20), получаем

$$0 = \rho(q, p) * f(q, p) = \rho(q, p) * w(q, p) * g_0(q, p) + ih\rho(q, p) * f'(q, p),$$

следовательно,

$$\rho(q, p) * f'(q, p) = 0.$$

Таким образом, применяя (20) к функции f' по индукции получаем, что

$$f(q, p) = w(q, p) * \left(\sum_{j=0}^n (ih)^j g_j(q, p) \right) + (ih)^{n+1} f^{(n+1)}(q, p).$$

По симметрии получаем аналогичное утверждение.

ЛЕММА 2. Если

$$f(q, p) * \rho(q, p) = 0,$$

то

$$f(q, p) = g(q, p) * w(q, p).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть гамильтоново векторное поле, определяемое функцией Гамильтона $w(q, p)$ на поверхности уровня $L = \{w(q, p) = 0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$, эргодично. Пусть пара функций (f, g) удовлетворяет условию

$$\rho(q, p) * f(q, p) + g(q, p) * \rho(q, p) = 0. \quad (21)$$

Тогда

$$f(q, p) = w(q, p) * f'(q, p), \quad g(q, p) = g'(q, p) * w(q, p)$$

с точностью до постоянных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функции f и g в виде формальных рядов по степеням h :

$$f(q, p) = f_0(q, p) + ihf_1(q, p) + (ih)^2 f_2(q, p) + \dots, \quad (22)$$

$$g(q, p) = g_0(q, p) + ihg_1(q, p) + (ih)^2 g_2(q, p) + \dots. \quad (23)$$

Подставляя выражения (22), (23) в (21) и учитывая (19), получаем

$$\begin{aligned} & \rho(q, p) * f(q, p) + g(q, p) * \rho(q, p) \\ &= \delta(w(q, p)) (f_0(q, p) + g_0(q, p)) \\ &+ ih \left(\delta^{(2)}(w(q, p)) \frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial w}{\partial q^j} (f_0(q, p) + g_0(q, p)) \right. \\ &+ \delta^{(1)}(w(q, p)) \left(\frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial f_0}{\partial q^j} + \frac{\partial g_0}{\partial p_j} \frac{\partial w}{\partial q^j} \right) \\ &\left. + \delta(w(q, p)) (f_1(q, p) + g_1(q, p)) \right) + o(ih). \end{aligned} \quad (24)$$

Приравнявая к нулю член при нулевой степени по h ($h = 0$), получаем, что

$$\delta(w(q, p)) (f_0(q, p) + g_0(q, p)) = 0,$$

что означает

$$(f_0(q, p) + g_0(q, p)) = w(q, p)u(q, p),$$

т.е.

$$g_0(q, p) = w(q, p)u(q, p) - f_0(q, p). \quad (25)$$

Тогда член при первой степени по h в формуле (24) примет с учетом (25) следующий вид:

$$\begin{aligned} & -\delta^{(1)}(w(q, p)) \frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial w}{\partial q^j} u(q, p) \\ & + \delta^{(1)}(w(q, p)) \left(\frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial f_0}{\partial q^j} - \frac{\partial f_0}{\partial p_j} \frac{\partial w}{\partial q^j} + \frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial w}{\partial q^j} u(q, p) + w(q, p) \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial w}{\partial q^j} u(q, p) \right) \\ & + \delta(w(q, p)) (f_1(q, p) + g_1(q, p)) + o(ih). \end{aligned} \quad (26)$$

Приравнявая в (26) члены при $\delta^{(1)}$, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial f_0}{\partial q^j} - \frac{\partial f_0}{\partial p_j} \frac{\partial w}{\partial q^j} = 0.$$

По предположению теоремы динамический поток, задаваемый функцией Гамильтона w , эргодичен. Следовательно, функция f_0 на подмногообразии L постоянна. Без ограничения общности будем считать, что функция f в некоторой точке подмногообразия обращается тождественно по h в нуль. В этом случае получаем, что

$$\begin{aligned} f_0(q, p) &= w(q, p) u_0(q, p), \\ g_0(q, p) &= w(q, p) v_0(q, p). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} f(q, p) &= w(q, p) * u_0(q, p) + ih f'(q, p), \\ g(q, p) &= v_0(q, p) * w(q, p) + ih g'(q, p), \end{aligned}$$

и, следовательно, для пары функций (f', g') тоже выполнены условия теоремы. Применяя индукцию по степеням h , получаем искомое представление функций (f, g) .

§ 3. Разложение функций по степеням w

Согласно теореме 2 уравнение (16) разлагается в два уравнения

$$\begin{aligned} & \rho * \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w, f \rangle \right. \\ & \left. - \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = c\rho, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w, (-f + iha) \rangle \right. \\ & \left. + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) * \rho = -c\rho. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнение (27) есть уравнение в пространстве $\mathcal{V}_l$, в то время как уравнение (28) – уравнение в пространстве $\mathcal{V}_r$. Таким образом, требуется описать пространства $\mathcal{V}_l$, $\mathcal{V}_r$ и уравнения (27), (28) в терминах пространства функций на подмногообразии

$$L = \{w(q, p) = 0\} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Пусть

$$\mathbf{R}: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(L) \quad (29)$$

есть оператор ограничения на подмногообразие L , а $\mathbf{L}$ – такой проектор

$$\mathbf{L}: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}),$$

что

$$\mathbf{R}\mathbf{L} = \mathbf{R} \quad (30)$$

и

$$\mathbf{L}(wf) = 0. \quad (31)$$

В частности, это значит, что проектор $\mathbf{L}$ разлагается в композицию

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}\mathbf{R}$$

для некоторого оператора

$$\mathbf{D}: \mathcal{C}^\infty(L) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}). \quad (32)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{R}\mathbf{D} = \mathbf{1}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{R}(\mathbf{1} - \mathbf{D}\mathbf{R}) = \mathbf{0}.$$

Значит, существует такой оператор $\mathbf{I}$, что

$$\mathbf{I}(f) = \frac{1}{w}(\mathbf{1} - \mathbf{L})(f).$$

Полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(g) &= w \cdot g - w * g, \\ \mathbf{V}(g) &= w \cdot g - g * w, \end{aligned}$$

получаем разложения

$$f = \sum_{k=0}^n (w^{*k} *) \tilde{\mathbf{P}}_k(f) + (w^{*(n+1)} *) \tilde{\mathbf{P}}'_n(f), \quad (33)$$

$$f = \sum_{k=0}^n (*w^{*k}) \tilde{\mathbf{Q}}_k(f) + (*w^{*(n+1)}) \tilde{\mathbf{Q}}'_n(f), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{P}}_k &= \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}(\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1})^k, \\ \widetilde{\mathbf{P}}'_k &= (\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1})^{k+1}, \\ \widetilde{\mathbf{Q}}_k &= \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{VI})^{-1}(\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{VI})^{-1})^k, \\ \widetilde{\mathbf{Q}}'_k &= (\mathbf{I}(\mathbf{1} - \mathbf{VI})^{-1})^{k+1}.\end{aligned}$$

Оператор $\mathbf{I}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}w\mathbf{I}(f) &= (\mathbf{1} - \mathbf{L})(f), \\ \mathbf{I}(wf) &= f.\end{aligned}$$

Следовательно, операторы

$$\mathbf{P}_k = (w^*{}^k)_* \widetilde{\mathbf{P}}_k$$

являются проекторами, причем

$$\mathbf{P}_l \mathbf{P}_k = 0 \quad \text{при } l \neq k, \quad \mathbf{P}_k \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k.$$

В самом деле, имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\mathbf{IL} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}w = 0, \quad w* = w - \mathbf{U}, \\ w\mathbf{I} &= \mathbf{1} - \mathbf{L}, \quad \mathbf{I}w = \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbf{I}(w*) = \mathbf{1} - \mathbf{IU},$$

т. е.

$$(\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{I}(w*) = \mathbf{1}$$

или

$$(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}(w*) = w.$$

Тогда

$$\mathbf{P}_k \mathbf{P}_s = (w*)^k \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}((\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{I})^k (w*)^s \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}((\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{I})^s.$$

Пусть $k > s$. Тогда

$$\mathbf{P}_k \mathbf{P}_s = (w*)^k \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}((\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{I})^{k-s} \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}((\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{I})^s,$$

т. е.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k \mathbf{P}_s &= (w*)^k \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}((\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{I})^{k-s-1} \\ &\quad \times (\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{IL}(\mathbf{1} - \mathbf{UI})^{-1}((\mathbf{1} - \mathbf{IU})^{-1} \mathbf{I})^s = 0.\end{aligned}$$

Пусть $k < s$. Тогда

$$\mathbf{P}_k \mathbf{P}_s = (w*)^k \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{U}\mathbf{I})^{-1} (w*)^{s-k} \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{U}\mathbf{I})^{-1} ((\mathbf{1} - \mathbf{I}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{I})^s,$$

т.е.

$$\mathbf{P}_k \mathbf{P}_s = (w*)^k \mathbf{L} w (w*)^{s-k-1} \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{U}\mathbf{I})^{-1} ((\mathbf{1} - \mathbf{I}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{I})^s = 0.$$

Если же $k = s$, то

$$\mathbf{P}_k \mathbf{P}_k = (w*)^k \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{U}\mathbf{I})^{-1} \mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{U}\mathbf{I})^{-1} ((\mathbf{1} - \mathbf{I}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{I})^s = (w*)^k \mathbf{L}\mathbf{L}(\mathbf{1} - \mathbf{U}\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{P}_k.$$

То же самое касается и проекторов $\mathbf{Q}_k$.

Заметим, что при $k = 0$ имеем

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{Q}_0.$$

Таким образом, для построения разложений (33) и (34) достаточно построить проектор $\mathbf{L}$, удовлетворяющий условиям (30), (31). Для этого рассмотрим трубчатую окрестность $W \supset L$, например, $W = \{|w| < \varepsilon\}$. Пусть $\varphi = \varphi(w)$ – функция, равная единице в окрестности нуля и носитель которой лежит в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Для достаточно малого α окрестность W ретрагируется на подмногообразие L , т.е. существует гладкое отображение

$$\psi: W \rightarrow L,$$

постоянное на подмногообразии L . Положим

$$\mathbf{L}(f) = \varphi(w(p, q)) \mathbf{R}(f) \circ \psi(p, q). \quad (35)$$

Второй сомножитель в (35) определен не всюду, а только в окрестности W , однако, первый сомножитель имеет носитель внутри W , так что правая часть (35) корректно определена. Условие (30) выполняется автоматически, поскольку функция φ равна единице на подмногообразии L , а ψ постоянно на L . Условие (31) тоже выполнено, поскольку $\mathbf{R}(wf) = 0$.

Разложения (33) и (34) показывают, что ядро отображения (17) на каждом слагаемом описывается соответствующим проектором $\tilde{\mathbf{P}}_0$ или $\tilde{\mathbf{Q}}_0$. Именно, если

$$\begin{aligned} \alpha_l: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) &\rightarrow \mathcal{V}_l, & \alpha_l(f) &= \rho * f, \\ \alpha_r: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) &\rightarrow \mathcal{V}_r, & \alpha_r(g) &= g * \rho, \end{aligned}$$

– ограничения отображения (17), то

$$\text{Ker } \alpha_l = \text{Ker } \mathbf{P}_0, \quad \text{Ker } \alpha_r = \text{Ker } \mathbf{Q}_0.$$

§ 4. Редукция уравнений на подмногообразие L

Таким образом, уравнения (27) и (28) можно переписать в виде системы уравнений на подмногообразии L

$$\mathbf{RP}_0 \left(\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial t} + \langle w, \mathbf{D}f \rangle - \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = c, \quad (36)$$

$$\mathbf{RQ}_0 \left(\mathbf{D} \frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w, \mathbf{D}(-f + iha) \rangle + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c. \quad (37)$$

Уравнение (28) эквивалентно следующему уравнению:

$$\rho * \mathbf{S} \left(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w, (-f + iha) \rangle + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c\rho.$$

Тогда с помощью проектора $\mathbf{P}_0$ уравнения (27) и (28) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\mathbf{P}_0 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w, f \rangle - \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = c, \quad (38)$$

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{S} \left(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w, (-f + iha) \rangle + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c. \quad (39)$$

Или

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_0 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w, f \rangle - \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = c, \\ & \overline{\mathbf{P}_0 \mathbf{S}_0} \left(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \langle w, (-f + iha) \rangle + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c. \end{aligned}$$

Уравнения (38) и (39) можно ограничить на функции, определенные на подмногообразии L с помощью вложения (32):

$$\begin{aligned} \mathbf{RP}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{D}f}{\partial t} + \langle w, \mathbf{D}f \rangle \right. \\ \left. - \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = c, \\ \mathbf{RP}_0 \mathbf{S} \left(\frac{\partial(-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)}{\partial t} + \langle w, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a) \rangle \right. \\ \left. + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c. \end{aligned} \quad (40)$$

Если оператор $\mathbf{S}$ сохраняет подпространство

$$\mathrm{Im} \mathbf{L} = \mathrm{Im} \mathbf{D} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}),$$

то уравнение (39) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{RSP}_0 \mathbf{S} \left(\frac{\partial(-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)}{\partial t} + \langle w, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a) \rangle \right. \\ \left. + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{RSP}_0 \mathbf{S} \left(\frac{\partial(-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a)}{\partial t} + \langle w, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a) \rangle \right. \\ \left. + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c. \end{aligned} \quad (41)$$

Таким образом, уравнения (40) и (41) после упрощений примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{RP}_0 \left(\langle w, \mathbf{D}f \rangle \right. \\ \left. - \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = c, \\ \frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \mathbf{RSP}_0 \mathbf{S} \left(\langle w, (-\mathbf{D}f + ih\mathbf{D}a) \rangle \right. \\ \left. + \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = -c. \end{aligned}$$

Прибавляя первое уравнение ко второму, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{R} \frac{1}{ih} (\mathbf{P}_0 - \mathbf{S} \mathbf{P}_0 \mathbf{S}) \langle w, \mathbf{D} f \rangle + \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{P}_0 \mathbf{S} \langle w, \mathbf{D} a \rangle \\ - \mathbf{R} \frac{1}{ih} (\mathbf{P}_0 - \mathbf{S} \mathbf{P}_0 \mathbf{S}) \left(\int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D} f(\xi, \eta) \rangle \right. \\ \left. + \mathbf{D} a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) = 0. \end{aligned}$$

§ 5. Случай квадратичной функции Гамильтона

Допустим, что функция Гамильтона w имеет вид

$$w = \frac{1}{2} |p|^2 + u(q) - E = \frac{1}{2} (|p|^2 - p_0^2(q)),$$

а ядро интегральной части имеет вид

$$K(q, p; \xi, \eta) = K(q - \xi). \quad (42)$$

В этом случае в качестве оператора $\mathbf{D}$ можно взять оператор продолжения функции с многообразия L до функции на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, биоднородной степени нуль по переменным (p, h) . Более широко, рассмотрим подпространства $H_k^b \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, состоящие из функций, однородных степени k :

$$f(q, \lambda p, \lambda h) = \lambda^k f(q, p, h), \quad \lambda > 0.$$

Очевидно, что ограничение оператора $\mathbf{L}$ на подпространство H_k^b

$$\mathbf{L}|_{H_k^b}: H_k^b \rightarrow \mathcal{C}^\infty(L)$$

является изоморфизмом. Обозначим через

$$L_k^b: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

проектор на подпространство H_k вдоль ядра $\text{Ker } \mathbf{R}$ (см. (29)). Очевидно, что

$$L_k^b(f)(q, p, h) = f\left(q, p \frac{p_0}{|p|}, h \frac{p_0}{|p|}\right) \left(\frac{p_0}{|p|}\right)^k$$

или

$$L_k^b(f) = L_0^b(f) \left(\frac{p_0}{|p|}\right)^k.$$

Также очевидно, что имеет место следующее соотношение:

$$L_k^b(fg) = L_\alpha^b(f) L_\beta^b(g) \quad \text{для } \alpha + \beta = k.$$

Пусть $K_l = \text{Ker } \mathbf{P}_0$. Для любого k имеет место разложение

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) = H_k^b \oplus K_l.$$

Наконец, рассмотрим проекцию

$$\mathbf{P}_{k,s}^b: H_k^b \rightarrow H_{k+s}^b$$

вдоль подпространства K_l .

ТЕОРЕМА 3. Пусть w — произвольная функция. Тогда проекция

$$\mathbf{P}_{k,1}^b: H_k^b \rightarrow H_{k+1}^b$$

не зависит от номера k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H_k^b$, т.е.

$$f(q, p, h) = \left(\frac{p_0}{|p|} \right)^k g(q, p, h), \quad g \in H_0^b.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f &= \frac{|p|}{p_0} f + \left(1 - \frac{|p|}{p_0} \right) f \\ &= \frac{|p|}{p_0} f + w \frac{2}{p_0(|p| + p_0)} f \\ &= \frac{|p|}{p_0} f + w * \frac{2}{p_0(|p| + p_0)} f - \left(\sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} w}{(\partial p)^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial q)^\alpha} \right) \left(\frac{2}{p_0(|p| + p_0)} f \right) \\ &= \frac{|p|}{p_0} f + \sum_{|\alpha| \geq 0} h_\alpha(q, p, h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + w * g_1. \end{aligned}$$

Функции $h_\alpha(q, p, h) = O(h)$ не зависят от номера k , а

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \in H_k^b.$$

Далее,

$$\begin{aligned} h_\alpha(q, p, h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} &= L_{k+1}^b \left(h_\alpha(q, p, h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \right) \\ &\quad + w \frac{1}{w} (1 - L_{k+1}^b) \left(h_\alpha(q, p, h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \right) \\ &= L_1^b (h_\alpha(q, p, h)) L_k^b \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \right) \\ &\quad + w \frac{1}{w} \left(h_\alpha(q, p, h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} - L_1^b (h_\alpha(q, p, h)) L_k^b \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \right) \right) \\ &= L_1^b (h_\alpha(q, p, h)) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + w \frac{h_\alpha(q, p, h) - L_1(h_\alpha(q, p, h))}{w} \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \\ &= L_1^b (h_\alpha(q, p, h)) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + w * \frac{h_\alpha(q, p, h) - L_1(h_\alpha(q, p, h))}{w} \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \\ &\quad - \left(\sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} w}{(\partial p)^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial q)^\alpha} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{h_\alpha(q, p, h) - L_1(h_\alpha(q, p, h))}{w} \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} \right) \\ &= L_1^b (h_\alpha(q, p, h)) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + \sum_{|\alpha| \geq 0} h_\alpha^{(2)}(q, p, h) \frac{\partial^\alpha f}{\partial q^\alpha} + w * g_2, \end{aligned}$$

причем $h_\alpha^{(2)}(q, p, h) = O(h^2)$ и не зависят от номера k . Для завершения доказательства теоремы необходимо продолжить разложение индукцией по степеням k .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо следующее равенство: $\mathbf{P}_{k,2}^b = (\mathbf{P}_{k,1}^b)^2$.*

ТЕОРЕМА 4. *Проекция $\mathbf{P}_{k,2}^b: H_k^b \rightarrow H_{k+2}^b$ задается формулой*

$$\mathbf{P}_{k,2}^b = |p|^2(1 + D)\frac{1}{p_0^2},$$

где

$$D = \frac{2ih}{|p|^2}(p, \nabla_q) + \frac{(ih)^2}{|p|^2}(\nabla_q, \nabla_q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H_k^b$,

$$f(q, p, h) = \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^k g(q, p, h), \quad g \in H_0^b.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(q, p, h) &= \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q, p, h) + \left(1 - \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2\right) f(q, p, h) \\ &= \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q, p, h) - w \frac{2}{p_0^2} f(q, p, h) \\ &= \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 f(q, p, h) - w * \left(\frac{2}{p_0^2} f(q, p, h)\right) \\ &\quad + \left(ih(p, \nabla_q) + \frac{(ih)^2}{2}(\nabla_q, \nabla_q)\right) \left(\frac{2}{p_0^2} f(q, p, h)\right) \\ &= |p|^2(1 + D)\frac{1}{p_0^2} f - w * \left(\frac{2}{p_0^2} f(q, p, h)\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_{k,2}^b = |p|^2(1 + D)\frac{1}{p_0^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедливо следующее:*

$$\mathbf{P}_{k,1}^b = |p| \sqrt{(1 + D)\frac{1}{p_0^2}}.$$

Теоремы 3, 4 позволяют найти разложение квантовой скобки Пуассона. Пусть $f \in H_0^b$. Тогда

$$\langle w, f \rangle = \left((p, \nabla_q) + \frac{ih}{2}(\nabla_q, \nabla_q) \right) f + \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(ih)^{|\alpha|-1}}{2\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} p_0^2}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha} = \frac{|p|^2}{2ih} Df + Af.$$

Здесь

$$Af = \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{(ih)^{|\alpha|-1}}{2\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} p_0^2}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}.$$

Первое слагаемое

$$\frac{|p|^2}{2ih} Df \in H_1^b,$$

а второе $Af \in H_{-1}^b$. Следовательно,

$$\mathbf{P}_0^b \langle w, f \rangle = \mathbf{P}_{1,-1}^b \frac{|p|^2}{2ih} Df + \mathbf{P}_{-1,1}^b Af = \frac{1}{\sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}}} \frac{|p|}{2ih} Df + |p| \sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}} Af.$$

Поэтому уравнение

$$\rho * \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \langle w, f \rangle \right) = 0 \quad (43)$$

эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}}} \frac{|p|}{2ih} Df + |p| \sqrt{(1+D)\frac{1}{p_0^2}} Af = 0. \quad (44)$$

Аналогично уравнению (43) можно записать уравнение

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \langle w, g \rangle \right) * \rho = 0$$

в виде эквивалентного уравнения на пространстве H_0^b бигоромных функций

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sqrt{\left(1 + \frac{ih}{p_0^2} A\right) \frac{p_0^2}{|p|^2}} \frac{|p|^2}{2ih} Dg + \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{ih}{p_0^2} A\right) \frac{p_0^2}{|p|^2}}} Ag = 0. \quad (45)$$

В самом деле, нужно вычислить операторы проектирования

$$\mathbf{Q}_{k,s}^b: H_k^b \rightarrow H_{k+s}^b$$

вдоль подпространства $K_r = \text{Ker } \mathbf{Q}_0$. Пусть $f \in H_k^b$. Тогда

$$\begin{aligned} f(q, p, h) &= \left(\frac{|p|}{p_0} \right)^2 f(q, p, h) + \left(1 - \left(\frac{|p|}{p_0} \right)^2 \right) f(q, p, h) \\ &= \left(\frac{|p|}{p_0} \right)^2 f(q, p, h) - w \frac{2}{p_0^2} f(q, p, h) \\ &= \left(\frac{|p|}{p_0} \right)^2 f(q, p, h) - \left(\frac{2}{p_0^2} f(q, p, h) \right) * w - \frac{2ih}{p_0^2} Af. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_{k,2}^b &= \left(\frac{|p|}{p_0} \right)^2 \left(1 + \frac{2ih}{p_0^2} A \right)^{-1}, \\ Q_{k,1}^b &= \sqrt{\left(\frac{|p|}{p_0} \right)^2 \left(1 + \frac{2ih}{p_0^2} A \right)^{-1}}, \\ Q_{k,-2}^b &= \left(1 + \frac{2ih}{p_0^2} A \right) \left(\frac{p_0}{|p|} \right)^2, \\ Q_{k,1}^b &= \sqrt{\left(1 + \frac{2ih}{p_0^2} A \right) \left(\frac{p_0}{|p|} \right)^2}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим действие проекторов $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{Q}_0$ на интегральные члены. В случае, когда ядро интегральной части имеет вид (42), функция

$$\varphi = \int K(q, p; \xi, \eta) (\langle \rho(\xi, \eta), \mathbf{D}f(\xi, \eta) \rangle + \mathbf{D}a(\xi, \eta) * \rho(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

зависит только от q и h ,

$$\varphi = \varphi(q, h).$$

Следовательно,

$$\mathbf{Q}_0(\varphi(q, h)) = \varphi\left(q, h \frac{p_0}{|p|}\right).$$

Для проектора же $\mathbf{P}_0^b$ получается более сложная формула:

$$\mathbf{P}_0(\varphi(q, h)) = \varphi\left(\overbrace{x}^1, \overbrace{h\mathbf{P}_{k,-1}^b}^2\right)(1).$$

§6. Случай однородных функций

Рассмотрим пространство H_k однородных функций только по одной группе переменных p :

$$f(q, \lambda p, h) = \lambda^k f(q, p, h), \quad \lambda > 0.$$

Обозначим через

$$L_k: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

проектор на подпространство H_k вдоль ядра $\text{Ker } \mathbf{R}$ (см. (29)).

ТЕОРЕМА 5. *Проекция*

$$\mathbf{P}_{k,1}: H_k \rightarrow H_{k+1}$$

задается уравнением

$$\mathbf{P}_{k,1}^2(1 - A_0) = A_2 + 2\mathbf{P}_{k,1}A_1,$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= (ih)^2 (\nabla_q, \nabla_q) \frac{1}{p_0^2}, \\ A_1 &= ih(p, \nabla_q) \frac{1}{p_0^2}, \\ A_2 &= \frac{|p|^2}{p_0^2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H_k$. Тогда

$$\begin{aligned} f(q, p, h) &= \frac{|p|^2}{p_0^2} f(q, p, h) + \left(1 - \frac{|p|^2}{p_0^2}\right) f(q, p, h) \\ &= \frac{|p|^2}{p_0^2} f(q, p, h) - \left(w \frac{2}{p_0^2} f(q, p, h)\right) \\ &= \frac{|p|^2}{p_0^2} f(q, p, h) - \left(w * \frac{2}{p_0^2} f(q, p, h)\right) \\ &\quad + \left(ih(p, \nabla_q) + \frac{(ih)^2}{2} (\nabla_q, \nabla_q)\right) \left(\frac{2}{p_0^2} f(q, p, h)\right) \\ &\sim A_2 f + A_1 f + A_0 f. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_{k,1}^2 = A_2 + 2\mathbf{P}_{k,1}A_1 + \mathbf{P}_{k,1}^2A_0.$$

ТЕОРЕМА 6. *Проекция*

$$\mathbf{Q}_{k,1}: H_k \rightarrow H_{k+1}$$

задается уравнением

$$\mathbf{Q}_{k,1}^2 = A_2 - \sum_{|\alpha| \geq 1} (ih)^{|\alpha|} (\mathbf{Q}_{k,1})^{|\alpha|+2} B_\alpha,$$

где

$$B_\alpha = \left(\frac{1}{\alpha! p_0^2}\right) \frac{\partial^{|\alpha|} p_0^2}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial p^\alpha}.$$

§ 7. Случай нулевого потенциала

В этом случае $p_0(q) \equiv \text{Const}$, $A = 0$. Тогда

$$\rho(q, p) \equiv \rho(p) = \delta\left(\frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{2}p_0^2\right). \quad (46)$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} f(q, p, h) &= f_0(p, h) e^{i(\omega t + (k, q))}, \\ a(q, p, h) &= a_0(p, h) e^{i(\omega t + (k, q))}, \end{aligned} \quad (47)$$

где функции $f_0(p, h)$ и $a_0(p, h)$ однородные степени 0, т.е.

$$f_0(p, h), a_0(p, h) \in H_0^b.$$

Прежде всего, вычислим интегральный член:

$$I = \int V(q - \xi) (\langle \rho(\eta), f(\xi, \eta) \rangle + a(\xi, \eta) * \rho(\eta)) d\xi d\eta = I_1 - I_2 + I_3,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int V(q - \xi) \frac{1}{ih} \rho(\eta) * f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ I_2 &= \int V(q - \xi) \frac{1}{ih} f(\xi, \eta) * \rho(\eta) d\xi d\eta, \\ I_3 &= \int V(q - \xi) a(\xi, \eta) * \rho(\eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (48)$$

Подставляя (47) в (48), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{ih} \int V(q - \xi) (\rho(\eta) * f_0(\eta) e^{i(\omega t + (k, \xi))}) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{ih} \int V(q - \xi) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \eta^\alpha} \rho(\eta) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} e^{i(\omega t + (k, \xi))} f_0(\eta) \right) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{ih} e^{i\omega t} \int V(q - \xi) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \eta^\alpha} \rho(\eta) (ik)^\alpha e^{i(k, \xi)} f_0(\eta) \right) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{ih} e^{i\omega t} \int V(q - \xi) e^{i(k, \xi)} \rho(\eta - hk) f_0(\eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{ih} e^{i(\omega t + (q, k))} \tilde{V}(k) \int \rho(\eta - hk) f_0(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{ih} e^{i(\omega t + (q, k))} \tilde{V}(k) \int \rho(\eta) f_0(\eta) d\eta, \\ I_3 &= e^{i(\omega t + (q, k))} \tilde{V}(k) \int \rho(\eta) a_0(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I = I(q, h) &= e^{i(\omega t + (q, k))} \tilde{V}(k) \int \left(f_0(\eta) \frac{\rho(\eta - hk) - \rho(\eta)}{ih} + a_0(\eta) \rho(\eta) \right) d\eta \\ &= e^{i(\omega t + (q, k))} \tilde{V}(k) J(h). \end{aligned} \quad (49)$$

Вычислим теперь операторы $\mathbf{P}_{k,1}$ и $\mathbf{Q}_{k,1}$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{k,1} &= (A_1 + \sqrt{A_1^2 + (1 - A_0)A_2})(1 - A_0)^{-1} \\ &= \left(\sqrt{\left(1 - \frac{(ih)^2}{p_0^2}(\nabla_q, \nabla_q)\right) \frac{|p|^2}{p_0^2} + \frac{(ih)^2}{p_0^4}(p, \nabla_q)^2 + \frac{ih}{p_0^2}(p, \nabla_q)} \right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{(ih)^2}{p_0^2}(\nabla_q, \nabla_q)\right)^{-1}, \\ \mathbf{Q}_1 &= \sqrt{A_2} = \frac{|p|}{p_0}.\end{aligned}$$

Применим полученные формулы к уравнениям (36) и (37), которые мы запишем в следующем виде:

$$\mathbf{P}_0 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (p, \nabla_q) f + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q) f - I \right) = c, \quad (50)$$

$$\mathbf{Q}_0 \left(\frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + (p, \nabla_q)(-f + iha) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)(-f + iha) + I \right) = -c, \quad (51)$$

где $f, a \in H_0$. Тогда уравнения (50) и (51) упрощаются:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{P}_0((p, \nabla_q) f) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q) f - I &= c, \\ \frac{\partial(-f + iha)}{\partial t} + \mathbf{Q}_0((p, \nabla_q)(-f + iha)) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q)(-f + iha) + I &= -c\end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{P}_{k,-1}((p, \nabla_q) f) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q) f - I = c, \quad (52)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{Q}_{k,-1}((p, \nabla_q) a) + \frac{\mathbf{P}_{k,-1} - \mathbf{Q}_{k,-1}}{ih}((p, \nabla_q) f) + \frac{(ih)}{2}(\nabla_q, \nabla_q) a = 0. \quad (53)$$

Применение операторов к функциям вида (47) сводится к умножению, т.е.

$$\mathbf{P}_{k,-1} f = P(p, h, k) f,$$

где

$$\begin{aligned}P(p, h, k) &= \frac{p_0^2 - h^2(k, k)}{\sqrt{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2} - h(p, k)} \\ &= \frac{1}{|p|^2} \left(\sqrt{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2} + h(p, k) \right).\end{aligned}$$

Тогда уравнения (52), (53) имеют вид

$$\left(i\omega + iP(p, h, k)(p, k) - \frac{ih}{2}(k, k)\right)f_0 - \tilde{V}(k)J(h) = 0, \quad (54)$$

$$\left(i\omega + i\frac{p_0}{|p|}(p, k) - ih\frac{(k, k)}{2}\right)a_0 + \frac{P(p, h, k) - \frac{p_0}{|p|}}{h}(p, k)f_0 = 0. \quad (55)$$

Обозначим

$$A(p, h, k, \omega) = \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + P(p, k)(p, k) - h\frac{(k, k)}{2}}, \quad (56)$$

$$B(p, h, k, \omega) = \frac{(P(p, h, k) - \frac{p_0}{|p|})(p, k)A(p, h, k, \omega)}{h(\omega + \frac{p_0}{|p|}(p, k) - h\frac{(k, k)}{2})}. \quad (57)$$

Обе функции A и B являются однородными степени 0, т.е.

$$A, B \in H_0^b.$$

Тогда уравнения (54) и (55) имеют вид

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{i}J(h)A(p, h, k, \omega), \\ a_0 &= -J(h)B(p, h, k, \omega). \end{aligned} \quad (58)$$

Подставляя (58) в определение функции $J(h)$ (49), получаем соотношение на ω

$$\int \left(A(p, h, k, \omega) \frac{1}{h} (\rho(p - hk) - \rho(p)) - B(p, h, k, \omega) \rho(p) \right) dp = -1$$

или

$$\int \left(\frac{A(p + hk, h, k, \omega) - A(p, h, k, \omega)}{h} - B(p, h, k, \omega) \right) \rho(p) dp = -1. \quad (59)$$

Выражение (59) можно упростить следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} A(p, h, k, \omega) &= \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2}} \\ &\quad - \frac{\tilde{V}(k)(p, k)(P(p, k) - 1)}{(\omega + P(p, k)(p, k) - h\frac{(k, k)}{2})(\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2})} \\ &= \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2}} - \frac{(p, k)(P(p, k) - 1)}{(\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2})} A(p, h, k, \omega). \end{aligned} \quad (60)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 P(p, k) - 1 &= \frac{1}{|p|^2} \left(\sqrt{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2} - (|p|^2 - h(p, k)) \right) \\
 &= \frac{1}{|p|^2} \frac{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2 - (|p|^2 - h(p, k))^2}{\sqrt{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2} + (|p|^2 - h(p, k))} \\
 &= \frac{(p_0^2 - h^2(k, k)) - |p|^2 + 2h(p, k)}{\sqrt{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2} + (|p|^2 - h(p, k))} \\
 &= -\frac{|p - hk|^2 - p_0^2}{\sqrt{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2} + (|p|^2 - h(p, k))} \\
 &= (|p - hk|^2 - p_0^2)D(p, h, k).
 \end{aligned} \tag{61}$$

Подставим (61) в (60)

$$A(p, h, k, \omega) = \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2}} - \frac{(p, k)(|p - hk|^2 - p_0^2)D(p, h, k)}{(\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2})} A(p, h, k, \omega). \tag{62}$$

Теперь подставим (62) в (59) и учтем, что при интегрировании можно положить

$$|p|_2 = p_0^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 -1 &= \int \left(\frac{A(p + hk, h, k, \omega) - A(p, h, k, \omega)}{h} - B(p, h, k, \omega) \right) \rho(p) dp \\
 &= \int \left(\frac{1}{h} \left(\frac{\tilde{V}(k)}{\omega + (p, k) + h\frac{(k, k)}{2}} - \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(p, k)(P(p, k) - 1)}{h(\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2})} A(p, h, k, \omega) - B(p, h, k, \omega) \right) \rho(p) dp \\
 &= \int \left(\frac{1}{h} \left(\frac{\tilde{V}(k)}{\omega + (p, k) + h\frac{(k, k)}{2}} - \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(p, k)(P(p, k) - 1)}{h(\omega + (p, k) - h\frac{(k, k)}{2})} A(p, h, k, \omega) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(p, k)(P(p, h, k) - \frac{p_0}{|p|})}{h(\omega + \frac{p_0}{|p|}(p, k) - h\frac{(k, k)}{2})} A(p, h, k, \omega) \right) \rho(p) dp \\
 &= \int \left(-\frac{(k, k)\tilde{V}(k)}{(\omega + (p, k))^2 - h^2\frac{(k, k)^2}{4}} \right) \rho(p) dp.
 \end{aligned}$$

Окончательно

$$\int \left(\frac{(k, k)\tilde{V}(k)}{(\omega + (p, k))^2 - h^2\frac{(k, k)^2}{4}} \right) \rho(p) dp = 1. \tag{63}$$

Формула (63) дает соотношение на ω и k .

§ 8. Одномерный случай (случай Боголюбова)

В этом случае обе функции (56) и (57) не зависят от переменной p . Следовательно, уравнение (59) имеет вид:

$$\int (B(p, h, k, \omega)) \rho(p) dp = 1. \quad (64)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} P(p, h, k) &= \frac{p_0^2 - h^2(k, k)}{\sqrt{(p_0^2 - h^2(k, k))|p|^2 + h^2(p, k)^2} - h(p, k)} = \frac{p_0}{|p|} + \frac{hk}{p}, \\ A(p, h, k, \omega) &= \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + p_0 \frac{p}{|p|}k + hk^2 - \frac{hk^2}{2}} = \frac{\tilde{V}(k)}{\omega + p_0 \frac{p}{|p|}k + \frac{hk^2}{2}}, \\ B(p, h, k, \omega) &= \frac{hk^2 \tilde{V}(k)}{h(\omega + p_0 \frac{p}{|p|}k + \frac{hk^2}{2})(\omega + p_0 \frac{p}{|p|}k - \frac{hk^2}{2})} = \frac{k^2 \tilde{V}(k)}{(\omega + p_0 \frac{p}{|p|}k)^2 - \frac{h^2 k^4}{4}}. \end{aligned}$$

В качестве функции (46) можно взять функцию

$$\rho(p) = p_0 \delta\left(\frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{2}p_0^2\right) = (\delta(p - p_0) + \delta(p + p_0)). \quad (65)$$

Тогда уравнение (64) принимает следующий вид:

$$B(p_0, h, k, \omega) + B(-p_0, h, k, \omega) = 1,$$

т. е.

$$\frac{k^2 \tilde{V}(k)}{(\omega + p_0 k)^2 - \frac{h^2 k^4}{4}} + \frac{k^2 \tilde{V}(k)}{(\omega - p_0 k)^2 - \frac{h^2 k^4}{4}} = 1.$$

Следовательно,

$$\omega^2 = k^2 \left(p_0^2 + \tilde{V}(k) + h^2 \frac{k^2}{4} + \sqrt{(4p_0^2 \tilde{V}(k) + \tilde{V}^2(k)) + h^2 k^2 (p_0^2 + \tilde{V}(k)) + h^4 \frac{k^4}{8}} \right).$$

8.1. Случай Боголюбова. Носитель функции (65), очевидно, состоит из двух точек p_0 и $-p_0$, т. е. изоэнергетическая поверхность L состоит из двух компонент связности. Случай Боголюбова получается, если в качестве функции $\rho(p, q)$ взять ограничение функции (65) на компоненту $p = p_0$. Тогда уравнение (59) примет вид:

$$B(p_0, h, k, \omega) = 1,$$

т. е.

$$\omega = -kp_0 \pm \sqrt{k^2 \tilde{V}(k) + h^2 \frac{k^4}{4}}.$$

§ 9. Построение исчисления на римановом многообразии

Рассмотрим в качестве фазового пространства кокасательное расслоение T^*M к многообразию M . Пусть $q = \{q^1, \dots, q^n\}$, $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ — локальная система координат на фазовом пространстве T^*M . Если q', p' другая локальная система координат, то предполагается, что

$$q^j = q^j(q'^1, \dots, q'^n) \quad (66)$$

и

$$p_i = p'_j \frac{\partial q'^j}{\partial q^i}. \quad (67)$$

Рассмотрим функцию Гамильтона $H(q, p)$ на фазовом пространстве T^*M , которая является полиномиальной относительно переменных p для любой системы локальных координат (q, p) . Условия (66) и (67) показывают, что свойство функции H быть (однородным) полиномом не зависит от выбора системы локальных координат. В частности, если H является однородным полиномом степени m , то

$$H(q, p) = T^{i_1, i_2, \dots, i_m}(q^1, \dots, q^n) p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_m}, \quad (68)$$

где

$$T = \{T^{i_1, i_2, \dots, i_m}\}$$

ковариантное симметрическое тензорное поле валентности $(m, 0)$. Фиксируем на многообразии M риманову метрику и соответствующую ей симметрическую связность, задаваемую в виде операции ковариантного градиента

$$\nabla_k = \frac{\nabla}{\partial q^k},$$

применяемого к произвольным тензорным полям на многообразии M .

Тогда каждая однородная функция Гамильтона вида (68) задает дифференциальный оператор порядка m по формуле

$$H\left(q, ih \frac{\nabla}{\partial q}\right) = (ih)^m T^{j_1, j_2, \dots, j_m}(q^1, \dots, q^n) \nabla_{j_1} \nabla_{j_2} \cdots \nabla_{j_m}. \quad (69)$$

Причем формула (69) распространяется на произвольную функцию $H(q, p)$, полиномиальную по переменным p . Обратно, всякий дифференциальный оператор порядка m на многообразии M задается по формуле (69) для некоторой функции $H(q, p)$, являющейся полиномом степени m по переменным p .

Таким образом, операция композиции операторов $H\left(q, ih \frac{\nabla}{\partial q}\right)$ порождает некоммутативную операцию $*$ на пространстве функций на фазовом пространстве T^*M .

Опишем операцию $*$ в локальной системе координат (q, p) . Каждое векторное поле $\frac{\partial}{\partial q^j}$ порождает на многообразии T^*M векторное поле X_j по формуле

$$X_j = \frac{\partial}{\partial q^j} + \Gamma_{jl}^k p_k \frac{\partial}{\partial p_l},$$

соответствующей горизонтальному лифту векторного поля $\frac{\partial}{\partial q^j}$.

На фазовом пространстве T^*M задаем риманову метрику, которая на касательных векторах

$$\frac{\partial}{\partial p_j}, X_j$$

задается формулами

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{\partial}{\partial p_k} \right) = g^{jk}, \quad (X_j, X_k) = g_{jk}, \quad \left(X_j, \frac{\partial}{\partial p_k} \right) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(q, p) * g(q, p) &= \sum_{k \geq 0} \frac{(ih)^k}{k!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} \left(\frac{\nabla}{\partial p_{i_1}} \frac{\nabla}{\partial p_{i_2}} \dots \frac{\nabla}{\partial p_{i_k}} f(q, p) \right) \\ &\quad \times (\nabla_{X_{i_1}} \nabla_{X_{i_2}} \dots \nabla_{X_{i_k}} g(q, p)). \end{aligned}$$

Формулы (44), (45) могут быть применены, если операторы ∇_{q^i} заменить на операторы ∇_{X_i} .

§ 10. Асимптотические собственные функции

Рассматривается нелинейный оператор

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle H(q, p), \rho(q, p, t) \rangle - \left\langle \rho(q, p, t), \int K(q, p; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right\rangle = 0, \quad (70)$$

где ядро $K(q, p; \xi, \eta)$, как правило, представляется в более простом виде

$$K(q, p; \xi, \eta) = V(q - \xi),$$

V является гладкой финитной функцией. Положим

$$V_\rho = \int V(q - \xi) \rho(\xi, p) d\xi dp.$$

Тогда уравнение (70) записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle H(q, p), \rho(q, p, t) \rangle - \langle \rho(q, p, t), V_\rho \rangle = 0.$$

Рассмотрим понятие квазирешения, введенное в [4], несколько ослабив его условия. Уравнение (70) можно понимать как нелинейное уравнение с унитарной нелинейностью в смысле [5]. Решение этого уравнения является решением линейного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle H(q, p), \rho(q, p, t) \rangle - \left\langle \rho(q, p, t), \int K(q, p; \xi, \eta) v(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right\rangle = 0 \quad (71)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle H(q, p), \rho(q, p, t) \rangle - \langle \rho(q, p, t), V_v \rangle = 0$$

при условии

$$v(q, p, t) = \rho(q, p, t).$$

Следуя [5], рассмотрим на разбиении отрезка $[0, T]$ на N равных частей длины T/N такую функцию $\tilde{\rho}_T(q, p, t)$, что на каждом отрезке $[kT/N, (k+1)T/N]$ $\tilde{\rho}_T(q, p, t)$ удовлетворяет уравнению (71), в котором

$$v(q, p, t) \equiv \tilde{\rho}_T\left(q, p, \frac{kT}{N}\right),$$

где

$$\tilde{\rho}_T(q, p, 0) = \rho(q, p).$$

Тогда функцию

$$\rho(q, p, T) = \rho_N(q, p, T) = \tilde{\rho}_T(q, p, T) \quad (72)$$

назовем *квазирешением задачи Коши (70) с начальным условием*

$$\rho(q, p, t) = \rho_0(q, p). \quad (73)$$

Заметим, что это определение подходит и для обобщенных функций из пространства, сопряженного к пространству Шварца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что функция $\rho_0(q, p)$ является *слабым приближением k -порядка собственной функции уравнения (70)* (с нулевым собственным значением), если для любого N квазирешение $\rho_N(q, p, t)$ задачи Коши (70), (73) удовлетворяет условию: для любой функции φ из пространства Шварца выполнено неравенство

$$(\varphi, \rho_N(q, p, t) - \rho_0(q, p)) \leq Ch^k,$$

причем константа C зависит от выбора функции φ , но не зависит от $t \in [0, T]$.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{S}}$ пространство гладких функций, имеющих рост на бесконечности не выше некоторого полинома. Наша цель заключается в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\rho_0(q, p)$ – такая функция, что для любой функции φ из пространства функций $\tilde{S}$ имеет место неравенство

$$(\hat{H}(\rho_0), \varphi) \leq Ch^k. \quad (74)$$

Тогда функция ρ_0 является слабым приближением k -порядка собственной функции уравнения (70).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 1 требуется доказать неравенство

$$(\varphi, \rho_N(q, p, T) - \rho_0(q, p)) \leq Ch^k,$$

где $\rho_N(q, p, t)$ – квазирешение задачи Коши (70) с начальным условием (73). Согласно (72) имеем

$$\rho_N(q, p, T) = \tilde{\rho}_T(q, p, T).$$

Рассмотрим первый отрезок $[0, T/N]$. При $t = 0$

$$\tilde{\rho}_T(q, p, 0) = \rho_0(q, p).$$

На $[0, T/N]$ функция $\tilde{\rho}_T(q, p, t)$ удовлетворяет линейному уравнению (71), в котором

$$v(q, p, t) = \rho_0(q, p). \quad (75)$$

Проверим, что линейное уравнение (71) с условием (75) удовлетворяет условиям леммы 4 работы [4]. В самом деле, линейный оператор, задаваемый в уравнении (71), порождается символом

$$\tilde{H}(q, p) = H(q, p) + \int V(q - \xi) \rho_0(\xi, p) d\xi dp,$$

который, очевидно, является символом эллиптического оператора. Следовательно, согласно лемме 4 [4] имеем

$$\left(\tilde{\rho}_T\left(q, p, \frac{T}{N}\right) - \rho_0(q, p), \varphi \right) \leq Ch^k. \quad (76)$$

Для проведения индукции по номеру разбиения отрезка $[0, T]$ достаточно проверить, что функция $\rho_1 = \tilde{\rho}_T(q, p, T/N)$ удовлетворяет условию (74) теоремы. Имеем

$$(\hat{H}(\rho_1), \varphi) = (\hat{H}(\rho_0), \varphi) + (\hat{H}(\rho_1) - \hat{H}(\rho_0), \varphi). \quad (77)$$

Первое слагаемое в (77) оценивается по условию (74) теоремы. Второе слагаемое перепишем в следующем виде:

$$(\hat{H}(\rho_1) - \hat{H}(\rho_0), \varphi) = (\langle H(q, p), \rho_1 - \rho_0 \rangle, \varphi) + (\langle V_{\rho_1}, \rho_1 \rangle - \langle V_{\rho_0}, \rho_0 \rangle, \varphi). \quad (78)$$

Первое слагаемое в (78) имеет вид:

$$(\langle H(q, p), \rho_1 - \rho_0 \rangle, \varphi) = (\rho_1 - \rho_0, \langle H(q, p), \varphi \rangle)$$

и оценивается с помощью (76). Второе слагаемое представим в виде

$$\begin{aligned} (\langle V_{\rho_1}, \rho_1 \rangle - \langle V_{\rho_0}, \rho_0 \rangle, \varphi) &= (\langle V_{\rho_1}, \rho_1 - \rho_0 \rangle + \langle V_{\rho_1 - \rho_0}, \rho_0 \rangle, \varphi) \\ &= (\rho_1 - \rho_0, \langle V_{\rho_1}, \varphi \rangle) + (\langle V_{\rho_1 - \rho_0}, \rho_0 \rangle, \varphi) \\ &= (\rho_1 - \rho_0, \langle V_{\rho_1}, \varphi \rangle) + (\rho_0, \langle V_{\rho_1 - \rho_0}, \varphi \rangle). \end{aligned} \quad (79)$$

Первое слагаемое в (79) оценивается в силу (76). Второе слагаемое в (79) зависит от оценки функции

$$V_{\rho_1 - \rho_0}(q) = \int V(q - \xi)(\rho_1(\xi, p) - \rho_0(\xi, p)) d\xi dp. \quad (80)$$

Требуется доказать, что функция (80) удовлетворяет оценкам

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial q^\alpha} V_{\rho_1 - \rho_0}(q) \right| \leq \frac{C}{(1 + |q|)^N} h^k.$$

Для этого нам придется усовершенствовать леммы 1–4 из работы [4]. Предположим, что функция $H(q, p)$ удовлетворяет классическим условиям символа эллиптического самосопряженного оператора второго порядка, т.е.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|\alpha + \beta|}}{\partial q^\alpha \partial p^\beta} H(q, p) \right| &\leq C(1 + |p|)^{2 - |\beta|}, \\ |H(q, p)| &\geq c(1 + |p|)^2. \end{aligned}$$

В этом случае соболевская норма

$$(\|f\|_s^h)^2 = ((1 + h^2 \Delta)^s f, f) \quad (81)$$

эквивалентна норме, построенной по оператору $\widehat{H}$:

$$\|f\|_{2s}^h \sim \|(1 + \widehat{H})^s f\|_0.$$

Соответствующее пространство, пополненное по норме (81), будем обозначать через H_s^h . Тогда, как следует из леммы 1 [4], для решения задачи Коши

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \widehat{H} \Phi = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \Phi_0, \quad (82)$$

выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|(1 + |q|^2)^l \Phi\|_{2s}^h &\leq C(\|(1 + |q|^2)^l \Phi_0\|_{2s}^h + \|(1 + |q|^2)^{l - \frac{1}{2}} \Phi_0\|_{2s+1}^h + \dots + \|\Phi_0\|_{2s+2l}^h) \\ &\leq C(\|(1 + |q|^2)^l \Phi_0\|_{2s+2l}^h). \end{aligned} \quad (83)$$

Тогда имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть

$$\frac{\Phi_0}{(1 + |q|^2)^l} \in H_{2s}^h.$$

Тогда решение задачи Коши (82) удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi}{(1 + |q|^2)^l} \in H_{2s-2l}^h.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\psi_0 \in H_{-2s+2l}^h \quad (84)$$

— произвольная функция. Поскольку

$$\Phi = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \Phi_0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Phi}{(1 + |q|)^l}, \psi_0 \right) &= \left(\frac{1}{(1 + |q|)^l} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \Phi_0, \psi_0 \right) \\ &= \left(e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \Phi_0, \frac{1}{(1 + |q|)^l} \psi_0 \right) \\ &= \left(\Phi_0, e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \left(\frac{1}{(1 + |q|)^l} \psi_0 \right) \right). \end{aligned} \quad (85)$$

Пусть

$$u_0 = \left(\frac{1}{(1 + |q|)^l} \psi_0 \right), \quad u = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} u_0.$$

Очевидно, что

$$(1 + |q|)^l u_0 \in H_{-2s+2l}^h.$$

Следовательно, можно применить неравенство (83):

$$(1 + |q|)^l u \in H_{-2s}^h.$$

Тогда (85) ограничено для любой функции (84) и

$$\frac{\Phi}{(1 + |q|)^l} \in H_{2s-2l}^h.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\|(1 + |q|^2)^l \Phi\|_{2s}^h \leq C (\|(1 + |q|^2)^l \Phi_0\|_{2s+2l}^h).$$

Введем норму

$$\|f\|_{2l, 2s}^h = \|(1 + |q|^2)^l (1 + h^h \Delta)^s f\|_0 \quad (86)$$

и двойственную норму

$$\widetilde{\|f\|_{2l, 2s}^h} = \|(1 + h^2 \Delta)^s (1 + |q|^2)^l f\|_0. \quad (87)$$

ЛЕММА 4. *Нормы (86) и (87) эквивалентны.*

Применяя преобразование Фурье и учитывая лемму 4, получим также неравенство

$$\|(1 + |q|^2)^l \Phi\|_{2s}^h \leq C(\|(1 + |q|^2)^{l+|s|} \Phi_0\|_{2s}^h)$$

или

$$\|(1 + |q|^2)^l \Phi\|_{2s}^h \leq C(\|(1 + |q|^2)^{l+|s|} \Phi_0\|_{2s+2|l|}^h). \quad (88)$$

Теперь неравенства (88) можно применить к оператору $\langle \widehat{H}, \cdot \rangle$, который действует на функциях $f(q, p)$. Для этого определим норму

$$\|f\|_{2l_1, 2l_2, 2s_1, 2s_2}^h = \|(1 + |q|^2)^{l_1} (1 + |p|^2)^{l_2} (1 + h^2 \Delta_q)^{s_1} (1 + h^2 \Delta_p)^{s_2} f\|_0.$$

ЛЕММА 5. *Решения задачи Коши*

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \Phi + [\widehat{H}, \Phi] = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \Phi_0, \quad (89)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi\|_{2l_1, 2l_2, 2s_1, 2s_2}^h \leq C \|\Phi_0\|_{2(l_1+|s_2|), 2(l_2+|s_1|+|s_2|+|l_1|), 2(s_1+|l_1|), 2s_2}^h.$$

Таким образом, если функция Φ_0 , определяющая начальное условие задачи Коши (89), является достаточно гладкой и растет на бесконечности не быстрее некоторого полинома, то и само решение задачи Коши является достаточно гладкой функцией и растущей не быстрее некоторого полинома на бесконечности. В самом деле, если решение Φ должно быть гладким порядка (s_1, s_2) , а начальная функция Φ_0 имеет рост на бесконечности порядка $(-l_1, -l_2)$, то функция Φ_0 должна иметь гладкость порядка $(s_1 + |l_1|, s_2)$ и при этом рост на бесконечности функции Φ не будет превосходить порядок $(-l_1 - s_2, -l_2 - l_1 - s_1 - 2s_2)$. Доказательство леммы 3 из [4] остается без изменения. В формулировке леммы 4 из [4] следует пространство пробных функций заменить на пространство бесконечно гладких функций, имеющих рост на бесконечности не выше полиномиального.

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. № 1. С. 77–90.
2. Maslov V. P., Shvedov O. Yu. Quantization in the neighborhood of classical solutions in the N particle problem and superfluidity // Theoret. and Math. Phys. 1994. V. 98. № 2. P. 181–196.
3. Maslov V. P. Quasi-Particles Associated with Lagrangian Manifolds Corresponding to Classical Self-Consistent Fields. I // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 2. № 4. P. 527–534; II. 1995. V. 3. № 1. P. 123–132; III. 1995. V. 3. № 2. P. 1–6.
4. Маслов В. П. Об интегральном уравнении вида $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) u_+^{k/2}(\xi) d\xi / \int u_+^{k/2}(\xi) d\xi$ // Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 1. С. 41–50.
5. Маслов В. П. Об интегральном уравнении вида $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) u_+^{k/2}(\xi) d\xi / \int u_+^{k/2}(\xi) d\xi$ в случаях $n = 2$ и 3 // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 96–108.
6. Маслов В. П. Квазиклассическая асимптотика собственных функций уравнения Шрёдингера–Хартри. Новый вид классического самосогласованного поля // ТМФ. 1994. Т. 99. № 1. С. 141–154.

Московский институт электронного машиностроения;
 Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
 18.04.1997