Общероссийский математический портал

В. А. Окулов, Некоторые структурные свойства сопряженных функций в пространстве $L(T^N)$, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 5, 87–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:29:07

УДК 517.518.475

В. А. Окулов

Некоторые структурные свойства сопряженных функций в пространстве $L(T^N)$

В статье приведены оценки частных интегральных модулей непрерывности сопряженной функции многих переменных через аналогичные модули непрерывности исходной функции. Полученный результат является окончательным для сопряженной к функции, частные модули непрерывности которой удовлетворяют условию Липшица.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Посвящаю эту статью П. Л. Ульянову в честь семидесятилетнего юбилея.

В работе исследуются некоторые структурные свойства сопряженных в смысле Чезари функций многих переменных в зависимости от частных модулей непрерывности исходной функции. Так получены точные оценки частных интегральных модулей непрерывности сопряженной функции, у которой исходная функция имеет аналогичные модули непрерывности липшицевого типа. Кроме того, приводится одно достаточное условие интегрируемости сопряженной функции и верхняя оценка ее частных модулей непрерывности.

В настоящей статье предполагается пользоваться следующими обозначениями: N – натуральное число, M – множество чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, B – непустое подмножество множества M , $|B|$ – количество элементов в множестве B . Все рассматриваемые ниже функции предполагаются 2π -периодическими по каждой переменной, если специально не оговорено противное. Через $L_p(T^N)$, где $T = [-\pi, \pi]$ и $1 \leq p < \infty$, обозначается пространство 2π -периодических по каждой переменной функций, интегрируемых на T^N с нормой

$$\|f(\mathbf{x})\|_p = \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{T^N} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Определим частные и смешанные модули непрерывности в пространствах $L_p(T^N)$ при $1 \leq p < \infty$. Пусть $f \in L_p(T^N)$, где $1 \leq p < \infty$, $1 \leq j \leq N$ и $t \in T$. Тогда для всех $\mathbf{x}$ положим

$$\Delta_j(f, \mathbf{x}, t) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_N) - f(\mathbf{x})$$

и определим частный модуль непрерывности по j -й переменной равенством

$$\omega_j(f, \delta)_p = \sup_{|t| \leq \delta} \|\Delta_j(f, \mathbf{x}, t)\|_p.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00240).

Далее, если $B = (i_1, \dots, i_k) \subseteq M$, и $\mathbf{t} = (t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$, то обозначим через $\Delta_B(f, \mathbf{x}, \mathbf{t})$ результат последовательного применения операторов $\Delta_{i_1}(f, \mathbf{x}, t_{i_1}), \dots, \Delta_{i_k}(f, \mathbf{x}, t_{i_k})$ и положим смешанный модуль непрерывности по множеству B

$$\omega_B(f, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k})_p = \sup_{|t_{i_1}| \leq \delta_{i_1}, \dots, |t_{i_k}| \leq \delta_{i_k}} \|\Delta_B(f, \mathbf{x}, \mathbf{t})\|_p.$$

Функцию $\omega(\delta)$, обладающую следующими свойствами:

1. $\omega(0) = 0$,
2. $\omega(\delta)$ не убывает на $[0, \pi]$,
3. $\omega(\delta)$ непрерывна на $[0, \pi]$,
4. $\omega(\xi + \eta) \leq \omega(\xi) + \omega(\eta)$ при $0 \leq \xi \leq \xi + \eta \leq \pi$,

будем называть просто *модулем непрерывности*. Далее, для $B = (i_1, \dots, i_k)$ будем говорить, что функция $\omega_B(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}): [0, \pi]^{|B|} \rightarrow [0, \infty)$ является *модулем непрерывности смешанного типа*, если выполнены следующие условия:

1. $\omega_B = 0$, если хотя бы одна из координат переменной $(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k})$ обращается в нуль,

2. ω_B — непрерывная функция на $[0, \pi]^{|B|}$,
3. ω_B — неубывающая в смысле Харди функция на $[0, \pi]^{|B|}$,
4. ω_B — полуаддитивная функция относительно каждой переменной $\delta_{i_j}, i_j \in B$.

Через C ниже обозначаются положительные абсолютные постоянные (не обязательно равные в различных случаях), через $C(j)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от j , и т.д.

Если $B = (i_1, \dots, i_k)$ и заданы модули непрерывности $\omega_{i_1}(u), \dots, \omega_{i_k}(u)$ (модуль непрерывности смешанного типа $\omega_B(u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$), то через $H_p(\omega_j, j \in B, T^N)$ ($H_p(\omega_B, T^N)$) будем обозначать класс тех $f \in L_p(T^N)$, для которых

$$\omega_j(f, \delta) = O(\omega_j(\delta)) \quad (\omega_B(f, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k})_p = O(\omega_B(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k})))$$

при $\delta \rightarrow +0$ ($(\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}) \rightarrow +0$) и для всех $j \in B$. В частности, для случая $\omega_j(\delta) = \delta^\alpha$ при всех $j, 1 \leq j \leq N$, и $0 < \alpha \leq 1$ положим

$$\text{Lip}_p(\alpha, T^N) = H_p(\omega_j, j \in B, T^N)$$

и будем говорить, что функция $f(\mathbf{x})$ из этого класса удовлетворяет условию Липшица порядка α .

Теперь определим сопряженную к $f \in L(T^N)$ функцию по переменным, индексы которых образуют множество $B = (r_1, \dots, r_k)$ (или B -сопряженную функцию, $B \subseteq M$), равенством

$$\bar{f}_B(\mathbf{x}) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \lim_{\varepsilon(B) \rightarrow 0} \int_{T_{\varepsilon(B)}^{|B|}} f(\mathbf{x} + \mathbf{s}_B) \left(\prod_{j=1}^k \text{ctg} \frac{s_{r_j}}{2} ds_{r_j}\right), \quad (1)$$

где $\varepsilon(B) = (\varepsilon_{r_1}, \dots, \varepsilon_{r_k}), \varepsilon_{r_j} > 0$ при $j = 1, \dots, k$,

$$T_{\varepsilon(B)}^{|B|} = \prod_{i=1}^k T \setminus (-\varepsilon_{r_i}, \varepsilon_{r_i}),$$

N -мерный вектор $\mathbf{s}_B$ имеет координаты

$$(\mathbf{s}_B)_l = \begin{cases} s_{r_j} & \text{при } l = r_j, \text{ где } j = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{при остальных } l. \end{cases}$$

Предел в (1) берется при независимом стремлении к нулю компонент вектора $\varepsilon(B)$, т.е. в смысле Штольца–Прингсхайма. Ясно, что всего можно определить $2^N - 1$ сопряженных функций.

§ 2. Формулировка основных результатов

Определенная равенством (1) B -сопряженная функция может не существовать почти всюду (см., например, [1, с. 124–130]).

Л. В. Жижиашвили (см. [1, с. 124–130], [2]) установил результаты окончательного характера по вопросам существования B -сопряженной функции.

ТЕОРЕМА (Л. В. Жижиашвили). Пусть число $\beta \geq 1$ и функция $f(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^\beta(T^N)$. Тогда при любом $B \subseteq M$ с $1 \leq |B| \leq \beta + 1$ сопряженная функция $\bar{f}_B(\mathbf{x})$ существует почти всюду. Если же $|B| > \beta + 1$, то $\bar{f}_B(\mathbf{x})$ может не существовать почти всюду, даже если предел в (1) берется только по кубам.

Хорошо известно (см., например, [3, с. 555]), что уже в одномерном случае сопряженная функция не обязана быть интегрируемой. А. Зигмунду [4] принадлежит следующая теорема.

ТЕОРЕМА (А. Зигмунд). Если $f(x) \in L(\ln^+ L)(T)$, то $\bar{f}(x) \in L(T)$.

М. Рисс [5], [3, с. 571] дополнил этот результат А. Зигмунда.

ТЕОРЕМА (М. Рисс). Если $f(x) \geq 0$ и $\bar{f}(x) \in L(T)$, то $f(x) \in L(\ln^+ L)(T)$.

К. Сокол-Соколовски [6] принадлежит первый результат об интегрируемости сопряженной функции многих переменных.

ТЕОРЕМА (К. Сокол-Соколовски). Если число $\nu \geq N + 1$ и функция $f(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^\nu(T^N)$, то $\bar{f}_M(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^{\nu-N}(T^N)$.

Л. В. Жижиашвили [2] установил результаты окончательного характера об интегрируемости B -сопряженной функции.

ТЕОРЕМА (Л. В. Жижиашвили). Пусть число $\beta \geq 1$ и функция $f(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^\beta(T^N)$. Тогда при любом $B \subseteq M$ с $1 \leq |B| \leq \beta$ сопряженная функция $\bar{f}_B(\mathbf{x}) \in L(T^N)$. Если же $|B| > \beta$, то возможно, что $\bar{f}_B(\mathbf{x}) \notin L(T^N)$.

Л. В. Жижиашвили [7] также получил многомерный аналог выше сформулированной теоремы М. Рисса. Л. К. Панджикидзе [8] доказал следующий критерий интегрируемости сопряженных функций многих переменных в терминах смешанных модулей непрерывности.

ТЕОРЕМА (Л. К. Панджикидзе). Пусть $B = (r_1, \dots, r_k) \subseteq M$, $\omega_B(\delta_{r_1}, \dots, \delta_{r_k})$ – модуль непрерывности смешанного типа. Тогда для того чтобы для любой функции $f \in H_1(\omega_B, T^N)$ сопряженная функция $\bar{f}_B \in L(T^N)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{[0,1]^{|B|}} \omega_B(\delta_1, \dots, \delta_k) \prod_{j=1}^k \frac{d\delta_j}{\delta_j} < \infty.$$

Можно сформулировать достаточное условие интегрируемости сопряженных функций многих переменных в терминах частных модулей непрерывности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B \subseteq M$, $\omega_j(\delta)$ ($j \in B$) – модули непрерывности. Тогда для того чтобы для любой функции $f \in H_1(\omega_j, j \in B, T^N)$ сопряженная функция $\bar{f}_B \in L(T^N)$ достаточно, чтобы

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{|B|}} \min_{j \in B} \omega_j(\delta_j) \prod_{j \in B} \frac{d\delta_j}{\delta_j} < \infty. \quad (2)$$

Кроме того, в случае, когда интеграл (2) конечен, мы можем получить оценки частных интегральных модулей непрерывности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L(T^N)$, $\omega_i(f, \delta)_1 = \omega_i(\delta)$ при $0 \leq \delta \leq \pi$, $1 \leq i \leq N$, $B \subseteq M$ и

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{|B|}} \min_{j \in B} \omega_j(\delta_j) \prod_{j \in B} \frac{d\delta_j}{\delta_j} < \infty.$$

Тогда если $k \in B$, то

$$\omega_k(\bar{f}_B, \delta)_1 = O \left\{ \int_{[0, \pi]^{|B|}} \min(\delta, s_k) s_k^{-1} \min_{i \in B} \omega_i(s_i) \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i \right\} \quad (3)$$

при $\delta \rightarrow +0$, а если $k \notin B$ (в случае, когда $B \neq M$), то

$$\omega_k(\bar{f}_B, \delta)_1 = O \left\{ \int_{[0, \pi]^{|B|}} \min \left\{ \min_{i \in B} \omega_i(s_i), \omega_k(\delta) \right\} \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i \right\} \quad (4)$$

при $\delta \rightarrow +0$.

Теорема 1 следует из теоремы 2.

В пространстве $C(T^N)$ теоремы 1 и 2 также имеют место. Это доказано нами в работе [9]. Более того, там же показана точность приведенных оценок в самом общем случае. В пространстве же $L(T^N)$ мы можем показать точность оценок в теореме 2 лишь для одного важного класса функций с частными модулями непрерывности липшицевого типа.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $B \subseteq M$, $0 < \alpha_i < 1$ для любого $i \in M$. Тогда

а) если $f \in H_1(\delta^{\alpha_j}, j \in M, T^N)$, то частные интегральные модули непрерывности B -сопряженной функции имеют порядки:

$$\begin{aligned} \omega_j(\bar{f}_B, \delta)_1 &= O[\delta^{\alpha_j} |\log \delta|^{|B|-1}] && \text{при } \delta \rightarrow +0, && \text{если } j \in B, \\ \omega_j(\bar{f}_B, \delta)_1 &= O[\delta^{\alpha_j} |\log \delta|^{|B|}] && \text{при } \delta \rightarrow +0, && \text{если } j \notin B, \end{aligned}$$

б) существует функция $f \in H_1(\delta^{\alpha_j}, j \in M, T^N)$ такая, что

$$\begin{aligned} \omega_j(\bar{f}_B, \delta)_1 &\geq C \delta^{\alpha_j} |\log \delta|^{|B|-1} && \text{при } 0 \leq \delta \leq \delta_0, && \text{если } j \in B, \\ \omega_j(\bar{f}_B, \delta)_1 &\geq C \delta^{\alpha_j} |\log \delta|^{|B|} && \text{при } 0 \leq \delta \leq \delta_0, && \text{если } j \notin B, \end{aligned}$$

где C и δ_0 – положительные константы, не зависящие от δ .

Отметим здесь, что М. М. Лекишвили [10], [11] исследовал вопрос о зависимости интегральных модулей непрерывности функции f и сопряженных с ней функций $\bar{f}_B$, $|B| > 2$, в весовых пространствах Лебега. Однако для частных интегральных модулей непрерывности и при тождественно равном единице весе теоремы 2 и 3 дают более точные оценки.

В пространствах $L_p(T^N)$ при $p > 1$ зависимость между интегральными модулями непрерывности характеризуется многомерным аналогом теоремы М. Рисса [5], доказанным К. Сокол-Соколовски [6]:

ТЕОРЕМА (К. Сокол-Соколовски). Если функция $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^N)$ при $1 < p < \infty$, то

$$\|\bar{f}_B(\mathbf{x})\|_p \leq A_{p,|B|} \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

Переходим к изложению доказательств сформулированных выше теорем.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Прежде всего докажем лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $g \in L(T)$. Тогда при $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Delta_h \bar{g}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta_{\frac{s+h}{2}} \Delta_{\frac{s-h}{2}} g(x) \frac{\sin h}{|\cos s - \cos h|} ds,$$

где

$$\Delta_h g(x) = g(x+h) - g(x-h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения сопряженной функции

$$(-2\pi) \bar{g}(x+h) = \int_T [g(x+h+s) - g(x+h)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds.$$

Отсюда в силу 2π -периодичности функции g вытекает, что

$$(-2\pi) \bar{g}(x+h) = \left\{ \int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 \right\} [g(x+s) - g(x+h)] \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds,$$

и, разбивая интеграл по отрезку $[-\pi, 0]$ на сумму двух интегралов, получаем, что

$$\begin{aligned} (-2\pi) \bar{g}(x+h) &= \int_0^\pi [g(x+s) - g(x+h)] \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds \\ &\quad + \int_{-\pi}^0 g(x+s) \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds + g(x+h) \int_0^\pi \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} ds. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} (-2\pi) \bar{g}(x-h) &= \int_{-\pi}^0 [g(x+s) - g(x-h)] \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} ds \\ &\quad + \int_0^\pi g(x+s) \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} ds + g(x-h) \int_{-\pi}^0 \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (-2\pi) \Delta_h \bar{g}(x) &= \int_0^\pi [g(x+s) - g(x+h)] \left[\operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} \right] ds \\ &\quad - \int_{-\pi}^0 [g(x+s) - g(x-h)] \left[\operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} \right] ds \\ &= \int_0^\pi [g(x+s) - g(x+h) + g(x-s) - g(x-h)] \frac{\sin h}{\cos h - \cos s} ds \\ &= 2 \int_0^\pi \Delta_{\frac{s+h}{2}} \Delta_{\frac{s-h}{2}} g(x) \frac{\sin h}{\cos s - \cos h} ds. \end{aligned}$$

Так как $\Delta_t g(x) = -\Delta_{-t} g(x)$ и при $0 \leq s \leq \pi$ знаки $\frac{s-h}{2}$ и $\cos h - \cos s$ совпадают, то из последнего выражения следует доказываемое в лемме равенство.

Для $f \in L(T^N)$ положим по определению

$$\Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{h})$$

при $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ (учитывается 2π -периодичность функции $f(\mathbf{x})$ по каждому переменному).

Не ограничивая общности, предположим, что $B = \{1, \dots, n\}$, где $1 \leq n \leq N$. Пусть $\bar{f} = \bar{f}_B$, а $\mathbf{e}_i$ — i -й единичный базисный вектор в $\mathbb{R}^N$.

По определению сопряженной функции

$$\begin{aligned} (-2\pi)^n \bar{f}(\mathbf{x}) &= \int_{T^n} f\left(\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{e}_i\right) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &= \int_{[0, \pi]^n} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_n \mathbf{e}_n} f(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned} \quad (5)$$

При $0 < h < \frac{\pi}{2}$ из равенства (5) вытекает, что

$$(2\pi)^n \|\Delta_{h\mathbf{e}_k} \bar{f}(\mathbf{x})\| = \left\| \int_{[0, \pi]^n} \Delta_{h\mathbf{e}_k} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_n \mathbf{e}_n} f(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \right\|.$$

Воспользуемся обобщенным неравенством Минковского, получаем следующее

$$(2\pi)^n \|\Delta_{h\mathbf{e}_k} \bar{f}(\mathbf{x})\| \leq \int_{[0, \pi]^n} \|\Delta_{h\mathbf{e}_k} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_n \mathbf{e}_n} f(\mathbf{x})\| \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i, \quad (6)$$

где норма в подынтегральном выражении берется по x .

Легко видеть, что при $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^N$, где $i = 1, \dots, m$,

$$\|\Delta_{\mathbf{a}_1} \dots \Delta_{\mathbf{a}_m} f(\mathbf{x})\| \leq 2^{m-1} \min_{1 \leq i \leq m} \|\Delta_{\mathbf{a}_i} f(\mathbf{x})\|. \quad (7)$$

Теперь определим функцию $\alpha: T \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-\pi, 0), \\ x & \text{при } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - x & \text{при } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Так как функция f по условию 2π -периодическая по всем переменным, то

$$\Delta_{s\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}) = -\Delta_{(\pi-s)\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x} + \pi\mathbf{e}_i)$$

при $1 \leq i \leq N$, $s \in \mathbb{R}$.

Поэтому

$$\|\Delta_{s\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x})\| \leq \omega_i(2\alpha(s)) \quad (8)$$

при $1 \leq i \leq N$, $s \in [0, \pi]$.

Неравенства (6)–(8) дают следующую оценку:

$$\omega_k(\bar{f}, 2h) \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0, \pi]^n} 2^n \min\left\{\min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2\alpha(s_i)), \omega_k(2h)\right\} \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \quad (9)$$

Поскольку функция $\alpha(x)$ симметрична относительно $\frac{\pi}{2}$ на отрезке $[0, \pi]$, то из неравенства (9) следует, что

$$\omega_k(\bar{f}, 2h) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^n} \min\left\{\min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i), \omega_k(2h)\right\} \prod_{i=1}^n \frac{ds_i}{\sin s_i}.$$

Теперь для получения соотношения (4) остается применить неравенство $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и сделать тривиальную замену переменных.

При доказательстве соотношения (3) предположим, не ограничивая общности, что $k = n$.

Согласно лемме 1

$$\begin{aligned} \Delta_{h\mathbf{e}_n} \bar{f}(\mathbf{x}) &= \Delta_{h\mathbf{e}_n} (\overline{f_{\{1, \dots, n-1\}}})_{\{n\}}(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta_{\frac{s_n+h}{2}\mathbf{e}_n} \Delta_{\frac{s_n-h}{2}\mathbf{e}_n} \bar{f}_{\{1, \dots, n-1\}}(\mathbf{x}) \frac{\sin h}{|\cos s_n - \cos h|} ds_n. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая равенство (5), получим

$$\begin{aligned} \Delta_{h\mathbf{e}_n} \bar{f}(\mathbf{x}) &= 2 \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0, \pi]^n} \Delta_{s_1\mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}} \Delta_{\frac{s_n+h}{2}\mathbf{e}_n} \Delta_{\frac{s_n-h}{2}\mathbf{e}_n} \bar{f}(\mathbf{x}) \\ &\quad \times \frac{\sin h ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \|\Delta_{h\mathbf{e}_n} \bar{f}(\mathbf{x})\| &= 2 \left\| \int_{[0, \pi]^n} \Delta_{s_1\mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}} \Delta_{\frac{s_n+h}{2}\mathbf{e}_n} \Delta_{\frac{s_n-h}{2}\mathbf{e}_n} \bar{f}(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\sin h ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \right\|. \end{aligned}$$

Далее, применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \|\Delta_{h\mathbf{e}_n} \bar{f}(\mathbf{x})\| &\leq 2 \int_{[0, \pi]^n} \left\| \Delta_{s_1\mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}} \Delta_{\frac{s_n+h}{2}\mathbf{e}_n} \Delta_{\frac{s_n-h}{2}\mathbf{e}_n} \bar{f}(\mathbf{x}) \right\| \\ &\quad \times \frac{\sin h ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i, \end{aligned} \quad (10)$$

где норма в подынтегральном выражении берется по $\mathbf{x}$.

Из неравенств (7), (8) и (10) следует, что

$$\begin{aligned} (\pi)^n \omega_n(\bar{f}, 2h) &\leq 2 \int_{[0, \pi]^n} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \omega_i(2\alpha(s_i)), \omega_n \left(2\alpha \left(\left| \frac{s_n - h}{2} \right| \right) \right) \right\} \\ &\quad \times \frac{\sin h ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметричностью функции $\alpha(x)$ относительно $\frac{\pi}{2}$ на отрезке $[0, \pi]$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \omega_n(\bar{f}, 2h) &\leq \left\{ \int_0^h + \int_h^{2h} + \int_{2h}^\pi \right\} \frac{\sin h \, ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \\ &\times \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{n-1}} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \omega_i(2s_i), \omega_n(|s_n - h|) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i} = \sum_{i=1}^3 I_i(h). \end{aligned} \quad (11)$$

Оценим интегралы $I_i(h)$ ($i = 1, 2, 3$) по отдельности. Положим

$$I(s_n) = \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{n-1}} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i}.$$

В интеграле $I_1(h)$ сделаем замену $2s'_n = h - s_n$. Опуская штрих при s_n , получаем

$$I_1(h) = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sin h}{\cos(h - 2s_n) - \cos h} I(s_n) \, ds_n.$$

В интегралах $I_2(h)$ и $I_3(h)$ сделаем замену $2s'_n = s_n - h$:

$$I_2(h) + I_3(h) = 2 \left\{ \int_0^{\frac{h}{2}} + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{\pi-h}{2}} \right\} \frac{\sin h}{\cosh - \cos(2s_n + h)} I(s_n) \, ds_n.$$

Теперь сложим интегралы $I_1(h)$ и $I_2(h)$, учитывая, что

$$\frac{1}{\cosh - \cos(2s_n + h)} + \frac{1}{\cos(h - 2s_n) - \cos h} = \frac{\sin h \operatorname{ctg} s_n}{\sin(s_n + h) \sin(h - s_n)}.$$

В итоге преобразованное неравенство (11) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \omega_n(\bar{f}, 2h) &\leq 2 \left\{ \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sin^2 h \operatorname{ctg} s_n \, ds_n}{\sin(s_n + h) \sin(h - s_n)} + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{\pi-h}{2}} \frac{\sin h \, ds_n}{2 \sin s_n \sin(s_n + h)} \right\} \\ &\times \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{n-1}} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

При $0 \leq s \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\pi}{4}$, используя неравенства $\sin h \leq h$, $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}(s + h) \leq \sin(s + h)$, $\frac{2}{\pi}(s - h) \leq \sin(h - s)$, $\operatorname{ctg} s \leq s^{-1}$, получаем

$$\frac{\sin^2 h \operatorname{ctg} s}{\sin(s + h) \sin(h - s)} \leq \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \frac{h^2}{(s + h)(h - s)s} \leq \frac{11}{s}. \quad (13)$$

Далее, при $0 \leq \frac{h}{2} \leq s \leq \frac{\pi-h}{2}$ выполнены неравенства

$$\frac{\sin h}{2 \sin s \sin(s + h)} \leq \frac{h}{2 \frac{2}{\pi} s \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} (s + h)} \leq \frac{3h}{s^2}. \quad (14)$$

Подставляя оценки (13) и (14) в неравенство (12), получим

$$\omega_n(\bar{f}, 2h) = O \left\{ \int_0^{\frac{\pi-h}{2}} ds_n \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{n-1}} \frac{\min(\frac{h}{2}, s_n)}{s_n^2} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i} \right\}.$$

В силу неравенства $\sin s \geq \frac{2}{\pi}s$ при $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ и неотрицательности подынтегральной функции получаем

$$\omega_n(\bar{f}, h) \leq \omega_n(\bar{f}, 4h) = O \left\{ \int_{[0, \pi]^n} \frac{\min(h, s_n)}{s_n^2} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(s_i) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{s_i} \right\}.$$

Таким образом, соотношение (3) и вместе с ним и теорема 2 доказаны.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Прежде всего мы докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Если $a \geq b$, то $\min(a, x) - \min(b, x) = \min(a - b, \max(0, x - b))$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы 2 сводится к перебору случаев взаимного расположения чисел a , b , и x на вещественной оси.

Дадим два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть класс A_0 состоит из неотрицательных чисел. Далее, при $m \geq 1$ будем говорить, что функция $g(t_1, \dots, t_m): [0, 2\pi]^m \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу A_m , если выполнены следующие условия:

1. $g(t_1, \dots, t_m) = 0$ при $(t_1, \dots, t_m) \in [0, 2\pi]^m \setminus [0, \pi]^m$,
2. при любых $x, y \in [0, 2\pi]$, $x < y$, для всех j ($1 \leq j \leq m$) функция

$$g(t_1, \dots, t_{j-1}, x, t_j, \dots, t_{m-1}) - g(t_1, \dots, t_{j-1}, y, t_j, \dots, t_{m-1}) \in A_{m-1}$$

(иными словами функция $g(t_1, \dots, t_m)$ монотонна в смысле Харди).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция $g: [0, 2\pi]^m \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу B_m , если найдутся функции $f_i(t)$ ($1 \leq i \leq m$): $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f_i(t) \in A_1$ при всех i ($1 \leq i \leq m$) и $g(t_1, \dots, t_m) = \min(f_1(t), \dots, f_m(t))$.

Докажем ряд свойств функций из классов A_m и B_m .

ЛЕММА 3. Если $g \in B_m$ и $C \geq 0$, то $\min(C, g) \in B_m$ и $\max(g - C, 0) \in B_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $m = 1$. Покажем, что $\min(C, g(t)) \in A_1$ для любой функции $g(t) \in A_1$. Действительно, выполнение п. 1 в определении 1 очевидно, так как $C \geq 0$ по условию.

Пусть теперь x, y — любые числа из отрезка $[0, 2\pi]$ такие, что $x < y$. Так как $g(t) \in A_1$, то $g(x) \geq g(y)$. Поэтому разность $\min(C, g(x)) - \min(C, g(y))$ равна либо нулю, либо $C - g(y)$ при $g(y) \leq C \leq g(x)$, либо $g(x) - g(y)$. Следовательно, во всех случаях $\min(C, g(x)) - \min(C, g(y)) \geq 0$.

Таким образом, мы проверили и п. 2 определения 1 и установили, что из условия $g(t) \in A_1$ следует $\min(C, g(t)) \in A_1$ при $C \geq 0$.

Рассмотрим теперь для тех же x и y разность $\max(g(x) - C, 0) - \max(g(y) - C, 0)$, равную либо нулю, либо $g(x) - C$ при $g(y) \leq C \leq g(x)$, либо $g(x) - g(y)$. Снова видим, что $\max(g(x) - C, 0) - \max(g(y) - C, 0) \geq 0$ при любых выбранных x и y . Поэтому п. 2 определения 1 выполнен для функции $\max(g(t) - C, 0)$. Отсюда, отмечая очевидность п. 1 определения 1 для функции $\max(g(t) - C, 0)$, следует, что для $g(t) \in A_1$ будем иметь $\max(g(t) - C, 0) \in A_1$. Остается отметить, что классы A_1 и B_1 совпадают и утверждение леммы при $m = 1$ доказано.

Пусть теперь $m \geq 2$. Так как $g \in B_m$, то существуют функции $f_i(t)$ ($1 \leq i \leq m$) такие, что $f_i(t) \in A_1$ ($1 \leq i \leq m$) и $g(t_1, \dots, t_m) = \min\{f_1(t_1), \dots, f_m(t_m)\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \min\{C, g(t_1, \dots, t_m)\} &= \min\{C, \min\{f_1(t_1), \dots, f_m(t_m)\}\} \\ &= \min\{\min(f_1(t_1), C), \dots, \min(f_m(t_m), C)\} \in B_m, \end{aligned}$$

так как $\min(f_i(t), C) \in A_1$ ($1 \leq i \leq m$) по доказанному выше. Аналогично,

$$\begin{aligned} \max\{g(t_1, \dots, t_m) - C, 0\} &= \max\{\min\{f_1(t_1), \dots, f_m(t_m)\} - C, 0\} \\ &= \max\{\min\{(f_1(t_1) - C, \dots, \min(f_m(t_m) - C)\}, 0\} \\ &= \min\{\max\{f_1(t_1) - C, 0\}, \dots, \max\{f_m(t_m) - C, 0\}\} \in B_m, \end{aligned}$$

так как мы уже показали, что $\max\{f_i(t) - C, 0\} \in A_1$ ($1 \leq i \leq m$). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Имеет место включение $B_m \subseteq A_m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать по индукции. При $m = 1$ все очевидно. Пусть лемма верна для $m = k - 1$. Покажем, что в этом случае утверждение леммы верно и для $m = k$. Возьмем любую функцию $g(t_1, \dots, t_m) \in B_k$ и согласно определению 2 представим ее в виде $g(t_1, \dots, t_k) = \min\{f(t_1, \dots, t_{k-1}), f_k(t_k)\}$, где $f(t_1, \dots, t_{k-1}) \in B_{k-1}$ и $f_k(t) \in A_1$. Выполнение п. 1 определения 1 класса A_k для функции $g(t_1, \dots, t_k)$ очевидно. Следовательно, остается проверить п. 2.

Пусть x и y — любые числа из отрезка $[0, 2\pi]$ такие, что $x < y$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta(t_1, \dots, t_k) &= g(t_1, \dots, t_{k-1}, x) - g(t_1, \dots, t_{k-1}, y) \\ &= \min\{f(t_1, \dots, t_{k-1}), f_k(x)\} - \min\{f(t_1, \dots, t_{k-1}), f_k(y)\}. \end{aligned}$$

Так как $f_k(t) \in A_1$, то $f_k(x) \geq f_k(y) \geq 0$ и по лемме 2

$$\Delta(t_1, \dots, t_k) = \min\{f_k(x) - f_k(y), \max\{f(t_1, \dots, t_{k-1}) - f_k(y), 0\}\}.$$

Поэтому по лемме 3

$$\Delta(t_1, \dots, t_{k-1}) = \min\{f_k(x) - f_k(y), h(t_1, \dots, t_{k-1})\},$$

где $h(t_1, \dots, t_{k-1}) \in B_{k-1}$. Отсюда снова по лемме 3 следует, что $\Delta(t_1, \dots, t_{k-1}) \in B_{k-1}$ и поэтому $\Delta(t_1, \dots, t_{k-1}) \in A_{k-1}$, так как по предположению индукции $B_{k-1} \subseteq A_{k-1}$.

Таким образом, п. 2 определения 1 класса A_k для функции $g(t_1, \dots, t_k)$ также имеет место. Следовательно, $g(t_1, \dots, t_k) \in A_k$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 5. *Если $g(t_1, \dots, t_m) \in A_m$, то при любых*

$$(t_1, \dots, t_m) \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]^m$$

и $(s_1, \dots, s_m) \in [0, \pi]^m$ выполнено неравенство

$$\alpha = \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_m \mathbf{e}_m} g(t_1, \dots, t_m) \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать по индукции. Рассмотрение случая $m = 1$ мы опускаем, так как он доказывается точно так же, как и переход от $m = k - 1$ к $m = k$.

Допустим лемма верна для $m = k - 1$. Проверим утверждение для $m = k$. Пусть $g(t_1, \dots, t_k) \in A_k$. По определению

$$\alpha = \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{k-1} \mathbf{e}_{k-1}} (g(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k + s_k) - g(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k - s_k)).$$

Если $t_k + s_k < 2\pi$, то $s_k < \frac{\pi}{2}$ и поэтому $t_k - s_k > \pi$, так как $\frac{3}{2}\pi \leq t_k \leq 2\pi$ по условию леммы. Следовательно, $\alpha = 0$ при $t_k + s_k < 2\pi$ в силу того, что $g(x_1, \dots, x_m) = 0$ при $\pi < x_m < 2\pi$.

Если же $t_k + s_k \geq 2\pi$, то

$$\alpha = \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{k-1} \mathbf{e}_{k-1}} (g(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k + s_k - 2\pi) - g(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k - s_k)).$$

В силу определения класса A_k разность

$$(g(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k + s_k - 2\pi) - g(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k - s_k)) \in A_{k-1}.$$

Отсюда по определению индукции следует, что $\alpha \geq 0$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Если $f(t_1, \dots, t_m) \in A_m$ и $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$, то для фиксированного t_m функция $\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) = f(t_1, \dots, t_m + h) - f(t_1, \dots, t_m) \in A_{m-1}$ при $2\pi - h \leq t_m \leq 2\pi$ и $-\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \in A_{m-1}$ при $0 \leq t_m \leq 2\pi - h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2\pi - h \leq t_m \leq 2\pi$ и t_m фиксировано. По определению класса A_m для любых $x, y \in [0, 2\pi]$, $x < y$, получаем

$$f(t_1, \dots, t_{m-1}, x) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, y) \in A_{m-1}.$$

Отсюда, положив $x = t_m + h - 2\pi$ и $y = t_m$, получаем

$$f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h - 2\pi) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) \in A_{m-1}.$$

Но в силу 2π -периодичности функции $f(t_1, \dots, t_m)$ имеет место равенство

$$f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h - 2\pi) = f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h).$$

Поэтому $\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f \in A_{m-1}$.

Пусть теперь $0 \leq t_m \leq 2\pi - h$. Беря в определении класса A_m $x = t_m$ и $y = t_m + h$, получаем

$$f(t_1, \dots, t_m) - f(t_1, \dots, t_m + h) \in A_{m-1},$$

т.е. $-\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \in A_{m-1}$.

ЛЕММА 7. Если $f \in A_m$, то для любого k , $1 \leq k \leq m$, имеет место равенство

$$\omega_k(f, \delta) = 2 \int_{[0, 2\pi]^{m-1}} dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \int_0^\delta f(t_1, \dots, t_m) dt_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, положим $k = m$, так как для остальных k доказательство аналогично.

Заметим, что функция $f \in A_m$ неотрицательна. Действительно, для класса A_0 нечего доказывать. Пусть это верно для класса A_{m-1} . Тогда значение функции f в произвольной точке $(t_1, \dots, t_m)$ куба $[0, 2\pi]^m$ можно представить в виде разности

$$f(t_1, \dots, t_m) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, y)$$

где $\max(t_m, \pi) < y < 2\pi$, так как в этом случае $f(t_1, \dots, t_{m-1}, y) = 0$ по определению 1. Написанная разность является значением функции от первых $m - 1$ аргументов, которая согласно определению 1 принадлежит классу A_{m-1} и, следовательно, по предположению индукции принимает неотрицательные значения.

Таким образом, $f(t_1, \dots, t_m) \geq 0$ на $[0, 2\pi]^m$ для $f \in A_m$.

Кроме того, для функции $f \in A_m$ разность

$$f(t_1, \dots, t_m) - f(t_1, \dots, t_m + h)$$

при $0 \leq h \leq \pi$, $0 \leq t_m \leq \pi - h$ также будет неотрицательной. Действительно, в этом случае написанная разность как функция первых $m - 1$ аргументов принадлежит классу A_{m-1} и, следовательно, по доказанному выше принимает неотрицательные значения.

Пусть теперь $0 \leq \delta \leq \pi$. Пользуясь определением 1, получаем

$$\begin{aligned} \|\overline{\Delta}_{\delta \mathbf{e}_m} f\| &= \int_{[0, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \left\{ \int_0^{\pi-\delta} |f(t_1, \dots, t_m) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + \delta)| dt_m \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi-\delta}^{\pi} |f(t_1, \dots, t_m)| dt_m + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + \delta)| dt_m \right\}. \end{aligned}$$

По доказанному выше во всех трех слагаемых последнего равенства подынтегральные функции неотрицательны, и мы можем снять знаки модуля. Далее, воспользовавшись 2π -периодичностью функции $f(t_1, \dots, t_m)$ и элементарной заменой переменной интегрирования, получаем

$$\|\overline{\Delta}_{\delta \mathbf{e}_m} f\| = 2 \int_{[0, 2\pi]^{m-1}} dt_1 \dots dt_{m-1} \int_0^{\delta} |f(t_1, \dots, t_m)| dt_m,$$

откуда следует утверждение леммы 7.

ЛЕММА 8. Если $f(t) = \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i) \in B_m$, то для любого k , $1 \leq k \leq m$, имеет место равенство

$$\omega_k(f, \delta) = 2 \int_0^\infty dy \prod_{i=1}^m g_{i,k}(y),$$

где

$$\begin{aligned} g_{i,k}(y) &= \min\{c_{i,k}, f_i^{-1}(y)\}, \\ c_{i,k} &= \begin{cases} \delta & \text{при } i = k, \\ \pi & \text{при } i \neq k, \end{cases} \\ f_i^{-1}(y) &= \inf_{f_i(x) \leq y} x \end{aligned}$$

для $y \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова, не ограничивая общности, предположим, что $k = m$. Так как по лемме 5 $B_m \subseteq A_m$, то можем воспользоваться равенством из леммы 7. Получаем, что

$$\begin{aligned}\omega_m(f, \delta) &= 2 \int_{[0, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^\delta \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i) dt_m \\ &= 2 \int_{[0, \pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^\delta \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i) dt_m,\end{aligned}$$

так как $f_i(t_i) = 0$ при $\pi < t_i < 2\pi$. Иначе можем записать это так:

$$\omega_m(f, \delta) = 2 \int_D dy \prod_{i=1}^{m-1} dt_i,$$

где $D = \{(t_1, \dots, t_m, y) \mid 0 \leq t_m < \delta, 0 \leq t_i < \pi \text{ при } i = 1, \dots, m-1, 0 \leq y < \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i)\} = \{(t_1, \dots, t_m, y) \mid 0 \leq t_m < \delta, 0 \leq t_i < \pi \text{ при } i = 1, \dots, m-1, 0 \leq y \leq f_i(t_i) \text{ при } i = 1, \dots, m\}$.

Положим $D^* = \{(t_1, \dots, t_m, y) \mid y > 0, 0 \leq t_i \leq g_{i,m}(y) \text{ при } i = 1, \dots, m\}$. Тогда $D \subseteq D^*$. Действительно, рассуждая от противного, предположим, что для некоторого j , $1 \leq j \leq m-1$, выполнены неравенства $0 \leq t_j \leq \pi$, $0 \leq y < f_j(t_j)$, но $t_j > g_{j,m}(y)$. Поскольку $0 \leq t_j < \pi$, то из того, что $t_j > g_{j,m}(y)$, следует, что $t_j > f_j^{-1}(y)$, а отсюда и из определения функции $f_j^{-1}(y)$, а также в силу невозрастания функции $f_j(t_j) \in A_1$ заключаем, что $f_j(t_j) \leq y$. Мы пришли к противоречию с неравенством $0 \leq y < f_j(t_j)$. Для $j = m$ неравенство $0 \leq y < \pi$ в вышеприведенном рассуждении заменяется на $0 \leq y < \delta$. Таким образом, для любой точки из множества D выполнены неравенства $0 \leq t_i \leq g_{i,m}(y)$. Отсюда, очевидно, следует, что $D \subseteq D^*$.

Легко видеть, что $D^* \setminus D \subseteq \{(t_1, \dots, t_m, y) \in D^* \mid t_j = g_{j,m}(y) \text{ при некотором } j, 1 \leq j \leq m\} = E$, а $\mu E = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\omega_m(f, \delta) &= 2 \int_{\substack{0 \leq t_i \leq \pi \\ i=1, \dots, m-1 \\ 0 \leq t_m \leq \delta \\ 0 \leq y < f_i(t_i) \\ i=1, \dots, m}} dy \prod_{i=1}^m dt_i = 2 \int_{\substack{0 \leq t_i < g_{i,m}(y) \\ i=1, \dots, m \\ y \geq 0}} dy \prod_{i=1}^m dt_i \\ &= 2 \int_0^\infty dy \prod_{i=1}^m g_{i,m}(y),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 9. Пусть $f \in A_m$, $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ и $B = \{1, \dots, m-1\}$. Тогда

$$\omega_m(\bar{f}_B, \delta) \geq \frac{2}{\pi^{m-1}} \int_0^\delta dt_m \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} \right| dt_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\|\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\|$. По определению сопряженной функции

$$\begin{aligned} (2\pi)^{m-1} \|\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| &= \int_{T^m} \prod_{i=1}^m dt_i \\ &\times \left| \int_{[0, \pi]^{m-1}} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \right| \\ &\geq \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^{2\pi} dt_m \\ &\times \left| \int_{[0, \pi]^{m-1}} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \right|. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись леммами 5 и 6, получаем

$$\begin{aligned} (2\pi)^{m-1} \|\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| &\geq \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} dt_m \\ &\times \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{[0, \pi]^{m-1}} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \\ &\times \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned}$$

Согласно леммам 5 и 6 подынтегральная функция в последнем неравенстве неотрицательна. Поэтому мы можем, сохраняя знак неравенства, уменьшить область интегрирования:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{m-1} \|\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| &\geq \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} dt_m \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \\ &\times \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned}$$

Раскрыв в подынтегральном выражении все знаки Δ , мы получим сумму из 2^{m-1} слагаемых вида

$$\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m}(t_1 \pm s_1, \dots, t_{m-1} \pm s_{m-1}, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i.$$

Заметим, что все они, кроме

$$\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m}(t_1 + s_1, \dots, t_{m-1} + s_{m-1}, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i,$$

равны нулю, так как $f(t_1, \dots, t_m) = 0$ при $(t_1, \dots, t_m) \notin [0, \pi]^m$. Поэтому

$$\begin{aligned} (2\pi)^{m-1} \|\overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| &\geq \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} dt_m \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \\ &\times \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \overline{\Delta}_{h\mathbf{e}_m}(t_1 + s_1, \dots, t_{m-1} + s_{m-1}, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме Фубини

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{m-1} \|\bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| &\geq \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} dt_m \\
 &\times \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \int_{\prod_{i=1}^{m-1} [\frac{3}{2}\pi + s_i, 2\pi + s_i]} \bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \\
 &= \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} dt_m \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\
 &\times \int_{\prod_{i=1}^{m-1} [0, s_i]} \bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \\
 &= \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} dt_m \int_{0 \leq t_i \leq s_i \leq \frac{\pi}{2}, i=1, \dots, m-1} \bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i dt_i \\
 &= \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} dt_m \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \\
 &\times \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{[t_i, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\int_t^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds = 2 \ln \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{t}{2}} = 2 \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}},$$

то

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{m-1} \|\bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| &\geq (2\pi)^{m-1} \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} 2 \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\
 &\times \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} - \int_0^{2\pi-h} \right\} \bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) dt_m \\
 &= (2\pi)^{m-1} \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} 2 \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \right) J(t_1, \dots, t_{m-1}). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Преобразуем интеграл $J(t_1, \dots, t_{m-1})$.

$$\begin{aligned}
 J(t_1, \dots, t_{m-1}) &= \int_{2\pi-h}^{2\pi} f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h) dt_m \\
 &\quad - \int_0^{2\pi-h} f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h) dt_m \\
 &\quad + \int_0^{2\pi-h} f(t_1, \dots, t_m) dt_m \\
 &= \int_0^h f(t_1, \dots, t_m) dt_m - \int_h^{2\pi} f(t_1, \dots, t_m) dt_m \\
 &\quad + \int_0^{2\pi-h} f(t_1, \dots, t_m) dt_m = 2 \int_0^h f(t_1, \dots, t_m) dt_m.
 \end{aligned}$$

Подставим преобразованное значение $J(t_1, \dots, t_{m-1})$ в (5). Получим, что

$$\begin{aligned} & (\pi)^{m-1} \|\bar{\Delta}_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| \\ & \geq 2 \int_0^h dt_m \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 10. Если

$$f(t) = \min_{1 \leq i \leq m} \{f_i(t_i)\} \in B_m, \quad B = \{1, \dots, m-1\}, \quad 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2},$$

то

$$\omega_m(\bar{f}_B, \delta) \geq \frac{2}{\pi^{m-1}} \int_0^\infty g_m(y) \left(\prod_{i=1}^{m-1} g_i(y) \ln \frac{e\sqrt{2}}{g_i(y)} \right) dy,$$

где функции $g_i(x)$ определены в формулировке леммы 8 ($g_i(x) = g_{i,m}(x)$ и $g_m(x) = g_{m,m}(x)$ при $1 \leq i \leq m-1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 $B_m \subseteq A_m$ и мы можем воспользоваться неравенством из утверждения леммы 9. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{m-1}}{2} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) & \geq \int_0^\delta dt_m \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i) \prod \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\ & = \int_{\substack{0 \leq t_i \leq \frac{\pi}{2} \\ i=1, \dots, m-1 \\ 0 \leq t_m \leq \delta \\ 0 \leq y \leq f_i(t_i) \\ i=1, \dots, m}} dy dt_m \prod_{i=1}^{m-1} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\ & = \int_{\substack{0 \leq t_i \leq g_i(y) \\ i=1, \dots, m \\ y \geq 0}} dy dt_m \prod_{i=1}^{m-1} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\ & = \int_0^\infty dy \left\{ \prod_{i=1}^{m-1} \int_0^{g_i(y)} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \right\} \int_0^{g_m(y)} dt_m. \quad (16) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^a \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}} dt & \geq \int_0^a \ln \frac{\sqrt{2}}{t} dt = a \ln \frac{\sqrt{2}}{a} + \int_0^a dt \\ & = a \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{a} + 1 \right) = a \ln \frac{e\sqrt{2}}{a}, \end{aligned} \quad (17)$$

то из (16) следует, что

$$\frac{\pi^{m-1}}{2} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) \geq \int_0^\infty g_m(y) \left\{ \prod_{i=1}^{m-1} g_i(y) \ln \frac{e\sqrt{2}}{g_i(y)} \right\} dy,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 11. Пусть $f \in A_m$, $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ и $B = \{1, \dots, m\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq 2^{1-m} \pi^{-m} \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{\pi - \frac{\delta}{2}} f(t_1, \dots, t_m) \ln \left| \frac{\sin \frac{t_m + \delta}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{\delta}{2}} f(t_1, \dots, t_m) \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta - t_m}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $h = \frac{\delta}{2}$. По определению сопряженной функции

$$\begin{aligned} &(-2\pi)^{m-1} \bar{f}_{\{1, \dots, m-1\}}(t_1, \dots, t_m) \\ &= \int_{[0, 2\pi]^{m-1}} f(t_1 + s_1, \dots, t_{m-1} + s_{m-1}, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &= \int_{[0, \pi]^{m-1}} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned}$$

Согласно лемме 1

$$\begin{aligned} \Delta_{h \mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m) &= \Delta_{h \mathbf{e}_m} (\overline{f_{\{1, \dots, m-1\}}})_{\{m\}}(t_1, \dots, t_m) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta_{\frac{s_m+h}{2} \mathbf{e}_m} \Delta_{\left| \frac{s_m+h}{2} \right| \mathbf{e}_m} \bar{f}_{\{1, \dots, m\}} f(t_1, \dots, t_m) \frac{\sin h ds_m}{|\cos s_m - \cos h|}. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая предыдущее равенство, получаем

$$\begin{aligned} &(2\pi)^m \left\| \Delta_{h \mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m) \right\| \\ &= 2 \int_{[0, 2\pi]^m} \prod_{i=1}^m dt_i \left| \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \Delta_{\frac{s_m+h}{2} \mathbf{e}_m} \Delta_{\left| \frac{s_m+h}{2} \right| \mathbf{e}_m} f(t_1, \dots, t_m) \right. \\ &\quad \times \frac{\sin h ds_m}{|\cos s_m - \cos h|} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \left. \right| \geq 2 \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_\pi^{2\pi-h} dt_m |\dots| \\ &\quad + 2 \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^h dt_m |\dots| = 2I_1 + 2I_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Будем осуществлять преобразования над интегралами I_1 и I_2 по отдельности. Раскрывая знак $\Delta_{\frac{s_m+h}{2} \mathbf{e}_m} \Delta_{\left| \frac{s_m+h}{2} \right| \mathbf{e}_m}$, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_\pi^{2\pi-h} dt_m \\ &\quad \times \left| \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} (f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) \right. \\ &\quad + f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - h) \\ &\quad \left. - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h)) \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \right|. \end{aligned}$$

При $\pi \leq t_m < 2\pi - h$ функция $f(t_1, \dots, t_m + h) = 0$ и поэтому

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{\pi}^{2\pi-h} dt_m \left| \int_{[0, \pi]^m} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \right. \\
 &\quad \times f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\
 &\quad + \int_{[0, \pi]^m} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} (f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) \\
 &\quad - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - h)) \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \Big| \\
 &= \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{\pi}^{2\pi-h} dt_m |J_1 + J_2|. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Покажем, что $J_1 \geq 0$ и $J_2 \geq 0$. Действительно,

$$g(t_1, \dots, t_m) = f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) \frac{\sin h}{\cos h - \cos s_m} \in A_{m-1}$$

при $h \leq s_m \leq \pi$ и $f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) = 0$ при $0 \leq s_m < h$, так как $\pi \leq t_m \leq 2\pi - h$. По лемме 5 $g(t_1, \dots, t_m) \geq 0$. Следовательно, подынтегральное выражение в J_1 неотрицательно. Поэтому $J_1 \geq 0$.

Оценим J_2 . В области интегрирования имеют место неравенства $0 \leq t_m - s_m \leq 2\pi$, $0 \leq t_m - h \leq 2\pi$. В случае, когда $t_m - s_m \leq t_m - h$, будет выполнено неравенство $h \leq s_m$, следовательно, $\cos h - \cos s_m \geq 0$. Если же $t_m - s_m \geq t_m - h$, то $s_m \leq h$ и $\cos h - \cos s_m \leq 0$. Отсюда и из определения 1 заключаем, что

$$\frac{f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - h)}{\cos h - \cos s_m} \in A_{m-1},$$

и мы можем применить лемму 5, из которой следует неотрицательность подынтегральной функции в J_2 .

Таким образом, мы показали, что $J_1 \geq 0$ и $J_2 \geq 0$. Отсюда, возвращаясь к равенству (19), имеем оценку

$$I_1 \geq \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{\pi}^{2\pi-h} dt_m J_1(t_1, \dots, t_m). \tag{20}$$

Аналогичным образом оценим интеграл I_2 .

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^h dt_m \left| \int_{[0, \pi]^m} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \right. \\
 &\quad \times (f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) + f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) \\
 &\quad - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - h) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h)) \\
 &\quad \times \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \Big|.
 \end{aligned}$$

При $0 \leq t_m < h$ функция $f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - h) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^h dt_m \left| \int_{[0, \pi]^m} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} \right. \\
 &\quad \times f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\
 &\quad + \int_{[0, \pi]^m} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} (f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) \\
 &\quad - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h)) \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \left| \right. \\
 &= \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^h dt_m |J_3 + J_4|. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Покажем, что $J_3 \geq 0$ и $J_4 \geq 0$. Действительно,

$$f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) \frac{\sin h}{\cos s_m - \cos h} \in A_{m-1}$$

при $0 \leq s_m \leq h$ и $f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) = 0$ при $h < s_m \leq h$. По лемме 5 $l(t_1, \dots, t_m) \geq 0$. Следовательно, подынтегральное выражение в J_3 неотрицательно. Поэтому, $J_3 \geq 0$.

Переходим к оценке J_4 . В области интегрирования имеют места неравенства

$$0 \leq t_m + s_m \leq 2\pi, \quad 0 \leq t_m + h \leq 2\pi.$$

При $t_m + s_m \geq t_m + h$ имеем $s_m \geq h$ и, следовательно, $\cos h - \cos s_m \geq 0$. Если же $t_m + s_m \leq t_m + h$, то $s_m \leq h$ и $\cos h - \cos s_m \leq 0$. Отсюда и из определения 1 следует, что

$$\frac{f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) - f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + h)}{\cos s_m - \cos h} \in A_{m-1}$$

и поэтому в силу леммы 5 $J_4 \geq 0$.

Таким образом, мы показали, что $J_3 \geq 0$ и $J_4 \geq 0$. Поэтому из неравенства (21) вытекает оценка

$$I_2 \geq \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^h dt_m J_3(t_1, \dots, t_m). \tag{22}$$

Подставляя оценки (20) и (22) в неравенство (18), получаем

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^m \|\Delta_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| &\geq 2 \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{\pi}^{2\pi-h} dt_m \\
 &\quad \times \int_{[0, \pi]^m} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + s_m) \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i + 2 \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^h dt_m \\
 &\quad \times \int_{[0, \pi]^m} \Delta_{s_1 \mathbf{e}_1} \dots \Delta_{s_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}} f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m - s_m) \\
 &\quad \times \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Так как мы показали неотрицательность подынтегральной функции, то, сохраняя знак неравенства, можем сузить область интегрирования внутренних интегралов $[0, \pi]^m$ до множества

$$\left\{ (s_1, \dots, s_m) \mid 0 \leq s_i \leq \frac{\pi}{2} \text{ при } 1 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq s_m \leq \pi \right\}.$$

Далее, раскрыв в подынтегральном выражении все знаки Δ , мы получим в каждом из внутренних интегралов 2^{m-1} слагаемых вида

$$f(t_1 \pm s_1, \dots, t_{m-1} \pm s_{m-1}, t_m + s_m) \frac{\sin h}{\cos h - \cos s_m} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i$$

в первом слагаемом в правой части неравенства (23) и вида

$$f(t_1 \pm s_1, \dots, t_{m-1} \pm s_{m-1}, t_m - s_m) \frac{\sin h}{\cos s_m - \cos h} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i$$

— во втором. Заметим, что все они, кроме

$$f(t_1 + s_1, \dots, t_{m-1} + s_{m-1}, t_m + s_m) \frac{\sin h}{\cos h - \cos s_m} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i$$

и

$$f(t_1 + s_1, \dots, t_{m-1} + s_{m-1}, t_m - s_m) \frac{\sin h}{\cos s_m - \cos h} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i,$$

равны нулю, так как $f(t_1, \dots, t_m) = 0$ при $(t_1, \dots, t_m) \notin [0, \pi]^m$. Поэтому из (23) следует, что

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|\Delta_{h\epsilon_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| \\ & \geq 2 \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{\pi}^{2\pi-h} dt_m \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ & \quad \times \int_0^{\pi} \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} f(t_1 + s_1, \dots, t_m + s_m) \\ & + 2 \int_{[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^h dt_m \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ & \quad \times \int_0^{\pi} \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} f(t_1 + s_1, \dots, t_{m-1} + s_{m-1}, t_m - s_m). \end{aligned}$$

Отсюда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} & 2^{m-1} \pi^m \|\Delta_{h\epsilon_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| \\ & \geq \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \int_0^{\pi} \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} \\ & \quad \times \int_{\prod_{i=1}^{m-1} [\frac{3}{2}\pi + s_i, 2\pi + s_i]} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{\pi + s_m}^{2\pi - h + s_m} f(t_1, \dots, t_m) dt_m \\ & + \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \int_0^{\pi} \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} \\ & \quad \times \int_{\prod_{i=1}^{m-1} [\frac{3}{2}\pi + s_i, 2\pi + s_i]} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_{-s_m}^{h - s_m} f(t_1, \dots, t_m) dt_m. \end{aligned}$$

Учитывая, что $f(t_1, \dots, t_m) = 0$, если $(t_1, \dots, t_m) \notin [0, \pi]^m$, сужаем пределы интегрирования. Получаем, что

$$\begin{aligned}
 & 2^{m-1} \pi^m \|\Delta_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| \\
 & \geq \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \int_h^\pi \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} \\
 & \quad \times \int_{\substack{0 \leq t_i \leq s_i \\ i=1, \dots, m-1 \\ 0 \leq t_m \leq s_m - h}} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m dt_i \\
 & \quad + \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \int_0^h \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} \\
 & \quad \times \int_{\substack{0 \leq t_i \leq s_i \\ i=1, \dots, m-1 \\ 0 \leq t_m \leq h - s_m}} f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m dt_i.
 \end{aligned}$$

Снова меняем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned}
 & 2^{m-1} \pi^m \|\Delta_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| \\
 & \geq \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_0^{\pi-h} dt_m f(t_1, \dots, t_m) \\
 & \quad \times \int_{\prod_{i=1}^{m-1} [t_i, \frac{\pi}{2}]} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \int_{t_m+h}^\pi \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} \\
 & \quad + \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} dt_i \int_h^0 dt_m f(t_1, \dots, t_m) \\
 & \quad \times \int_{\prod_{i=1}^{m-1} [t_i, \frac{\pi}{2}]} \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \int_0^{h-t_m} \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\int \frac{\sin h ds}{\cos h - \cos s} = \ln \left| \frac{\sin \frac{s-h}{2}}{\sin \frac{s+h}{2}} \right| + C,$$

то

$$\int_{t_m+h}^\pi \frac{\sin h ds_m}{\cos h - \cos s_m} = \ln \left| \frac{\sin(\frac{t_m}{2} + h)}{\sin \frac{t_m}{2}} \right|$$

и

$$\int_0^{h-t_m} \frac{\sin h ds_m}{\cos s_m - \cos h} = \ln \left| \frac{\sin \frac{2h-t_m}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right|.$$

Подставляя вычисленные интегралы в (24), получаем

$$\begin{aligned}
& 2^{m-1} \pi^m \|\Delta_{h\mathbf{e}_m} \bar{f}_B(t_1, \dots, t_m)\| \\
& \geq \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \right) \\
& \quad \times \left\{ \int_0^{\pi-h} f(t_1, \dots, t_m) \ln \left| \frac{\sin(\frac{t_m+2h}{2})}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right. \\
& \quad \left. + \int_h^0 f(t_1, \dots, t_m) \ln \left| \frac{\sin \frac{2h-t_m}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right\},
\end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы 11.

ЛЕММА 12. Пусть

$$I(a) = \int_0^a \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta-t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt$$

и

$$J(a) = \int_0^a \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta+t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt.$$

Тогда

$$I(a) \geq a \ln \frac{\sin \frac{\delta-a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$$

при $a \leq \frac{\delta}{2}$ и

$$J(a) \geq a \ln \frac{\sin \frac{\delta+a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$$

при $0 < a \leq \pi - \frac{\delta}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned}
I(a) &= a \ln \frac{\sin \frac{\delta-a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{2} \sin \frac{\delta}{2} \int_0^a \frac{t dt}{\sin \frac{\delta-t}{2} \sin \frac{t}{2}} \\
&\geq a \ln \frac{\sin \frac{\delta-a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} + 2 \sin \frac{\delta}{2} \int_0^a \frac{dt}{\delta-t} \\
&= a \ln \frac{\sin \frac{\delta-a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} + 2 \sin \frac{\delta}{2} \ln \frac{\delta}{\delta-a} \geq a \ln \frac{\sin \frac{\delta-a}{2}}{\sin \frac{a}{2}},
\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Для оценки $J(a)$ вновь воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
J(a) &= a \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta+a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right| + \frac{1}{2} \sin \frac{\delta}{2} \int_0^a \frac{t dt}{\sin \frac{\delta+t}{2} \sin \frac{t}{2}} \\
&\geq a \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta+a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right| + 2 \sin \frac{\delta}{2} \int_0^a \frac{dt}{\delta+t} \geq a \ln \frac{\sin \frac{\delta+a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}
\end{aligned}$$

и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 13. Если

$$f(t) = \min_{1 \leq i \leq m} \{f_i(t_i)\} \in B_m,$$

$B = \{1, \dots, m-1\}$ и $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq 2^{1-m} \pi^{-m} \int_0^\infty dy \prod_{i=1}^{m-1} a_i(y) \ln \frac{e\sqrt{2}}{a_i(y)} \\ &\times \left\{ b_m(y) \ln \left| \frac{\sin \frac{b_m(y)+\delta}{2}}{\sin \frac{b_m(y)}{2}} \right| + c_m(y) \ln \frac{\sin \frac{\delta-c_m(y)}{2}}{\sin \frac{c_m(y)}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

$a_i(y) = \min \left\{ \frac{\pi}{2}, f_i^{-1}(y) \right\}$, $b_m(y) = \min \left\{ \pi - \frac{\delta}{2}, f_m^{-1}(y) \right\}$, $c_m(y) = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, f_m^{-1}(y) \right\}$,
а $f_i^{-1}(y)$ ($1 \leq i \leq m$) определены в лемме 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 $B_m \subseteq A_m$ и мы можем воспользоваться неравенством из леммы 11. Получаем

$$\begin{aligned} 2^{m-1} \pi^m \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\ &\times \left\{ \int_0^{\pi - \frac{\delta}{2}} \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i) \ln \left| \frac{\sin \frac{t_m + \delta}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right. \\ &+ \left. \int_0^{\frac{\delta}{2}} \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i) \left| \frac{\sin \frac{\delta - t_m}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right\} = \int_{[0, \frac{\pi}{2}]^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\ &\times \left\{ \int_{\substack{0 \leq t_m \leq \pi - \frac{\delta}{2} \\ 0 \leq y \leq f_i(t_i) \\ 1 \leq i \leq m}} dy \ln \left| \frac{\sin \frac{t_m + \delta}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m + \int_{\substack{0 \leq t_m \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 \leq y \leq f_i(t_i) \\ 1 \leq i \leq m}} dy \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta - t_m}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right\} \\ &= \int_0^\infty dy \prod_{i=1}^{m-1} \int_0^{a_i(y)} \ln \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{t_i}{2}} dt_i \\ &\times \left\{ \int_0^{b_m(y)} \ln \left| \frac{\sin \frac{t_m + \delta}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m + \int_0^{c_m(y)} \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta - t_m}{2}}{\sin \frac{t_m}{2}} \right| dt_m \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть

$$I(a) = \int_0^a \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta - t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt$$

и

$$J(a) = \int_0^a \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta + a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right| dt.$$

Тогда по лемме 12

$$I(c_m(y)) \geq c_m(y) \ln \frac{\sin \frac{\delta - c_m(y)}{2}}{\sin \frac{c_m(y)}{2}} \quad (26)$$

и

$$J(b_m(y)) = b_m(y) \ln \left| \frac{\sin \frac{\delta + b_m(y)}{2}}{\sin \frac{b_m(y)}{2}} \right| dt. \quad (27)$$

Пользуясь оценками (17), (26) и (27), из неравенства (25) получаем

$$2^{m-1}\pi^m\omega_m(\bar{f}_B, \delta) \geq \int_0^\infty dy \prod_{i=1}^{m-1} \int_0^{a_i(y)} \ln \frac{e\sqrt{2}}{a_i(y)} \\ \times \left\{ b_m(y) \ln \left| \frac{\sin \frac{b_m(y)+\delta}{2}}{\sin \frac{b_m(y)}{2}} \right| + c_m(y) \ln \frac{\sin \frac{\delta-c_m(y)}{2}}{\sin \frac{c_m(y)}{2}} \right\}.$$

Таким образом, лемма 13 доказана.

Переходим к непосредственному доказательству теоремы. Рассмотрим сначала случай, когда $k \notin B$. Снова предположим, не ограничивая общности, что $M = \{1, \dots, m\}$, $B = \{1, \dots, m-1\}$ и $k = m$. Общий случай сводится к рассматриваемому простым переобозначением переменных.

Пусть $f_i(t_i) = t_i^{\varphi_i}$ при $0 < t_i \leq \pi$ и $f_i(t_i) = 0$ при $\pi < t_i \leq 2\pi$, $1 \leq i \leq m$, где $\varphi_i < 0$ при $1 \leq i \leq m$ и

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1} < -1. \quad (28)$$

Легко видеть, что

$$f(t) = \min_{1 \leq i \leq m} f_i(t_i) \in B_m.$$

Пользуясь леммой 8, вычислим частные интегральные модули непрерывности данной функции $f(t)$.

Так как для $f(t)$ функции

$$g_{m,m}(x) = \min\{\delta, x^{\varphi^{-1}}\}, \\ g_{i,m}(x) = \min\{\pi, x^{\varphi^{-1}}\}$$

при $1 \leq i \leq m-1$, то по лемме 8 для $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{4}$

$$\omega_m(f, \delta) = 2 \int_0^\infty dy \left\{ \prod_{i=1}^{m-1} \min\{\pi, y^{\varphi_i^{-1}}\} \right\} \min\{\delta, y^{\varphi^{-1}}\} \\ = 2 \left\{ \int_0^1 + \int_1^\delta + \int_{\delta^{\varphi_m}}^\infty \right\} = 2\{I_1 + I_2 + I_3\}. \quad (29)$$

Оценим $I_i(\delta)$ ($i = 1, 2, 3$) по отдельности.

$$I_1 \leq 2 \int_0^1 dy \left(\prod_{i=1}^{m-1} \pi \right) \delta = O(\delta). \quad (30)$$

Далее,

$$I_2 \leq \delta \int_1^{\delta^{\varphi_m}} dy \prod_{i=1}^{m-1} y^{\varphi_i^{-1}} = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \varphi_i^{-1} + 1 \right)^{-1} (\delta^{\sigma_m} - \delta), \quad (31)$$

где

$$\sigma_m = \varphi_m \left(\sum_{i=1}^{m-1} \varphi_i^{-1} + 1 \right) + 1 = \varphi_m \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1} + 1 \right) \quad (32)$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varphi_i^{-1} + 1 \neq 0. \quad (33)$$

Наконец,

$$I_3 \leq \int_{\delta^{\varphi_m}}^{\infty} dy \prod_{i=1}^m y^{\varphi_i^{-1}} = - \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1} + 1 \right)^{-1} \delta^{\sigma_m}. \quad (34)$$

Таким образом, из равенства (29) и оценок (30), (31), (34) следует

$$\omega_m(f, \delta) = O(\delta^{\sigma_m})$$

при условиях (28), (33) и $\sigma_m < 1$.

Отсюда в силу симметричности функции $f(t)$ вытекает, что

$$\omega_k(f, \delta) = O(\delta^{\sigma_k}) \quad (35)$$

при условиях (28),

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \varphi_i^{-1} + 1 \neq 0 \quad (36)$$

и

$$\sigma_k < 1 \quad (37)$$

для любого $k, 1 \leq k \leq m$.

Покажем теперь, что для любых $0 < \alpha_j < 1$ ($1 \leq j \leq m$) можно подобрать такие $\varphi_j < 0$ ($1 \leq j \leq m$), что будут выполнены условия (28), (36), (37) и, кроме того, $\sigma_j = \alpha_j$ ($1 \leq j \leq m$). Для этого решим систему уравнений $\sigma_j = \alpha_j$ ($1 \leq j \leq m$). Согласно (32) эту систему можно представить в следующем виде:

$$\varphi_j \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1} + 1 \right) = \alpha_j$$

для $1 \leq j \leq m$.

Пусть $s = \sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1} + 1$. Тогда $\varphi_j^{-1} = s\alpha_j^{-1}$ и поэтому

$$s = 1 + \sum_{i=1}^m s\alpha_i^{-1}$$

или

$$s = - \left(\sum_{i=1}^m \alpha_j^{-1} - 1 \right)^{-1}.$$

Отсюда

$$\varphi_i = -\alpha_i \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j^{-1} - 1 \right). \quad (38)$$

Проверяем выполнение условий. Во-первых, очевидно, что $\varphi_i < 0$ ($1 \leq i \leq m$). Во-вторых,

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j^{-1} = - \left(\sum_{i=1}^m \alpha_j^{-1} - 1 \right)^{-1} \sum_{j=1}^m \alpha_j^{-1} = -1 - \left(\sum_{i=1}^m \alpha_j^{-1} - 1 \right)^{-1} < -1$$

и, следовательно, условие (28) выполнено.

Проверяем условия (36):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \varphi_i^{-1} &= \sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1} - \varphi_k^{-1} = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^{-1} - 1 \right)^{-1} \left(\alpha_k^{-1} - \sum_{i=1}^m \alpha_i^{-1} \right) \\ &= -1 + (\alpha_k^{-1} - 1) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^{-1} - 1 \right)^{-1} > -1, \end{aligned}$$

так как $0 < \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq m$. Следовательно, условия (36) выполнены.

Наконец, отметим, что условия (37) при заданных α_j ($1 \leq j \leq m$) выполнены автоматически.

Таким образом, для любых $0 < \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq m$ мы нашли такие $\varphi_j < 0$, $1 \leq j \leq m$, что выполнены условия (28), (36), (37), и, кроме того,

$$\sigma_j(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = \alpha_j,$$

$1 \leq i \leq m$. Значит, для любого набора $0 < \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq m$, мы можем предъявить в силу (35) функцию $f(t) \in B_m$ такую, что

$$\omega_j(f, \delta) = O(\delta^{\alpha_j}), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Оценим теперь $\omega_m(\bar{f}_B, \delta)$ снизу. По лемме 10

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pi^{1-m} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq \int_0^\infty \min\{\delta, y^{\varphi_m^{-1}}\} \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^{m-1} \min\{\pi, y^{\varphi_i^{-1}}\} \ln \frac{e\sqrt{2}}{\min\{\pi, y^{\varphi_i^{-1}}\}} \right) \\ &\geq \int_{\delta^{\varphi_m}}^\infty y_m^{\varphi_m^{-1}} \prod_{i=1}^{m-1} y^{\varphi_i^{-1}} \ln y^{-\varphi_i^{-1}} dy \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} (-\varphi_i^{-1}) \int_{\delta^{\varphi_m}}^\infty y^{\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1}} \ln^{m-1} y dy. \end{aligned} \quad (39)$$

Сделаем замену переменных $y' = y^{\varphi_m^{-1}}$ и, опуская штрих, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pi^{1-m} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq (-\varphi_m) \prod_{i=1}^{m-1} (\varphi_m \varphi_i^{-1}) \int_0^\delta y^{\varphi_m (\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1} + 1) - 1} \ln^{m-1} \frac{1}{y} dy \\ &= (-\varphi_m) \prod_{i=1}^{m-1} (\varphi_m \varphi_i^{-1}) \int_0^\delta y^{\alpha_m - 1} \ln^{m-1} \frac{1}{y} dy \\ &\geq C \delta^{\alpha_m} \ln^{m-1} \frac{1}{\delta} = C \delta^{\alpha_m} \ln |B| \frac{1}{\delta}, \end{aligned}$$

где C — положительная константа, не зависящая от δ , что и требовалось показать в теореме.

Переходим к рассмотрению случая $k \in B$. Вновь, не ограничивая общности, считаем, что $B = \{1, \dots, m\}$, $k = m$ и снова принимаем к рассмотрению выше-определенную функцию $f(t) \in B_m$. По лемме 13

$$\begin{aligned} \pi^m 2^{m-1} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq \int_0^\infty dy \left(\prod_{i=1}^{m-1} \min \left\{ \frac{\pi}{2}, y^{\varphi_i^{-1}} \right\} \ln \frac{e\sqrt{2}}{\min \left\{ \frac{\pi}{2}, y^{\varphi_i^{-1}} \right\}} \right) \\ &\times \left(\min \left\{ \pi - \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} \ln \left| \frac{\sin 2^{-1} \left(\min \left\{ \pi - \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} + \delta \right)}{\sin 2^{-1} \min \left\{ \pi - \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\}} \right| \right. \\ &\left. + \min \left\{ \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} \ln \frac{\sin 2^{-1} \left(\delta - \min \left\{ \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} \right)}{\sin 2^{-1} \min \left\{ \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\}} \right), \end{aligned}$$

а так как при $0 \leq y \leq \infty$

$$\min \left\{ \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} \ln \frac{\sin 2^{-1} \left(\delta - \min \left\{ \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} \right)}{\sin 2^{-1} \min \left\{ \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\}} \geq 0$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \pi^m 2^{m-1} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq \int_0^\infty dy \left(\prod_{i=1}^{m-1} \min \left\{ \frac{\pi}{2}, y^{\varphi_i^{-1}} \right\} \ln \frac{e\sqrt{2}}{\min \left\{ \frac{\pi}{2}, y^{\varphi_i^{-1}} \right\}} \right) \\ &\times \left(\min \left\{ \pi - \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} \ln \left| \frac{\sin 2^{-1} \left(\min \left\{ \pi - \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\} + \delta \right)}{\sin 2^{-1} \min \left\{ \pi - \frac{\delta}{2}, y^{\varphi_m^{-1}} \right\}} \right| \right). \end{aligned}$$

Поскольку в последнем неравенстве подынтегральная функция неотрицательна, то, сужая в нем интервал интегрирования, получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} \pi^m 2^{m-1} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) &\geq \int_{(\frac{\delta}{2})^{\varphi_m}}^\infty \left(\prod_{i=1}^{m-1} y^{\varphi_i^{-1}} \ln \frac{e\sqrt{2}}{y^{\varphi_i^{-1}}} \right) y^{\varphi_m^{-1}} \ln \frac{\sin 2^{-1}(y^{\varphi_m^{-1}} + \delta)}{\sin 2^{-1} y^{\varphi_m^{-1}}} dy \\ &\geq \prod_{i=1}^{m-1} (-\varphi_i^{-1}) \int_{(\frac{\delta}{2})^{\varphi_m}}^\infty y^{\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1}} \ln^{m-1} y \ln \frac{\sin \frac{3}{4}\delta}{\sin \frac{\delta}{4}} dy, \end{aligned}$$

поскольку функция $\frac{\sin 2^{-1}(t + \delta)}{\sin 2^{-1}t}$ убывает на отрезке $(0, \frac{\delta}{2})$.

Отсюда в силу того, что при $0 < \delta \leq \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\sin \frac{3}{4}\delta}{\sin \frac{\delta}{4}} dy \geq \frac{6}{\pi},$$

получаем

$$\pi^m 2^{m-1} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) \geq \ln \frac{6}{\pi} \prod_{i=1}^{m-1} (-\varphi_i^{-1}) \int_{(\frac{\delta}{2})^{\varphi_m}}^\infty y^{\sum_{i=1}^m \varphi_i^{-1}} \ln^{m-1} y dy. \quad (40)$$

Интеграл, стоящий в правой части неравенства (40), оценивается снизу так же, как и интеграл в правой части выражения (39). Поэтому

$$\pi^m 2^{m-1} \omega_m(\bar{f}_B, \delta) \geq C \delta^{\alpha_m} \ln^{m-1} \frac{1}{\delta} = C \delta^{\alpha_m} \ln^{|B|-1} \frac{1}{\delta},$$

где C — положительная константа, не зависящая от δ . Теорема полностью доказана.

В заключение я выражаю свою благодарность моему научному руководителю М. И. Дьяченко за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. *Жижиашвили Л. В.* Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1969.
2. *Жижиашвили Л. В.* О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1973. Т. 28. № 2. С. 65–119.
3. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
4. *Zygmund A.* Sur les fonctions conjuguées // Fund. Math. 1929. V. 13. P. 284–303.
5. *Riesz M.* Sur les fonctions conjuguées // Math. Z. 1927. V. 27. P. 218–244.
6. *Sokol-Sokolowski K.* On trigonometric series conjugate to Fourier series of two variables // Fund. Math. 1947. V. 34. P. 166–182.
7. *Жижиашвили Л. В.* Обобщение одной теоремы М. Рисса на случай функций многих переменных // Матем. заметки. 1963. Т. 4. № 3. С. 269–280.
8. *Панджикидзе Л. К.* О сходимости кратных тригонометрических рядов в метрике $L(\mathbb{R}^m)$ и об интегрируемости сопряженных функций многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1989. Т. 133. № 2. С. 265–267.
9. *Окулов В. А.* Многомерный аналог одной теоремы Привалова // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 93–104.
10. *Лекишвили М. М.* О сопряженных функциях многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1972. Т. 68. № 2. С. 33–34.
11. *Лекишвили М. М.* Обобщенные интегральные модули непрерывности и сопряженные функции многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1972. Т. 68. № 2. С. 277–280.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
11.11.1997