Общероссийский математический портал

О. В. Пугачев, Формула Остроградского–Гаусса в бесконечномерном пространстве,
Матем. сб., 1998, том 189, номер 5, 115–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:53:11

УДК 519.21

О. В. Пугачев

Формула Остроградского–Гаусса в бесконечномерном пространстве

Цель данной работы – обобщить теорему Остроградского–Гаусса на случай бесконечномерного пространства X . При этом рассматриваются не только гауссовские меры на этом пространстве, но и более широкий класс мер, дифференцируемых вдоль некоторого гильбертова пространства, непрерывно вложенного в X . В статье рассмотрена конструкция поверхностной меры, которая использует идеи исчисления Маллявена и теорию соболевских емкостей и является обобщением поверхностного интегрирования, разработанного П. Маллявеном для винеровской меры.

Библиография: 10 названий.

В работах [1], [2] и [3] некоторые классические формулы, связывающие поверхностные интегралы с объемными, были обобщены на бесконечномерный случай при помощи конструкции поверхностной меры, предложенной А. В. Скороходом в работе [1] и развитой в работах А. В. Угланова [4], [5]. Этот метод основан на построении локальной поверхностной меры на достаточно малых окрестностях точек поверхности. Недостаток этого метода заключается в его технической сложности и в том, что из существования локальных поверхностных мер не всегда вытекает существование глобальной поверхностной меры. Принципиально иной подход был предложен П. Маллявеном в работе [6] для случая винеровской меры (его метод описан в [7, гл. 6]). При этом подходе мера строится сразу на всей поверхности, а условия гладкости поверхности связаны с геометрией пространства Камерона–Мартина, а не с геометрией объемлющего пространства.

Автору удалось обобщить метод Маллявена и построить поверхностную меру для достаточно гладких негауссовских мер в случае более широкого класса пространств и поверхностей. В данной работе формула Остроградского–Гаусса будет получена при помощи именно этой конструкции поверхностной меры. Есть основания ожидать, что результаты данной работы окажутся технически более простыми, чем в [2] и [3].

Работа посвящается П. Л. Ульянову в честь его семидесятилетия.

§ 1. Дифференцируемость мер и функций

Пусть X – банахово или секвенциально полное локально выпуклое пространство, H – гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в X . Обозначим через $\langle \cdot; \cdot \rangle$ скалярное произведение в H , через $|\cdot|$ – норму в H . Отображение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96865) и германского гранта 436 RUS 113/343/0(R).

j_H , заданное соотношением

$$\langle j_H(l); h \rangle = l(h) \quad \forall h \in H,$$

осуществляет непрерывное вложение X^* в H . Если f дифференцируема в том или ином смысле, то ковектору $f'(x) \in X^*$ будем ставить в соответствие вектор $\nabla f(x) = j_H(f'(x))$.

Обозначим через $\mathcal{FC}_b^\infty(X)$ класс функций вида $\varphi(x) = u(l_1(x), \dots, l_k(x))$, $l_j \in X^*$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^k)$; $\mathcal{FC}_b^\infty(X, H)$ – класс векторных полей $v(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) e_j$, $\varphi_j \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$, $\{e_j\}$ – ортонормированный базис H , $n \in \mathbb{N}$. Такие функции и векторные поля будем называть *гладкими цилиндрическими*.

Пусть μ – радоновская мера ограниченной вариации на X , возможно, знакопеременная.

Всюду далее мы будем предполагать, что мера μ такова, что если функция $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ равна нулю μ -почти всюду, то $\nabla \varphi = 0$ μ -почти всюду. В частности, это верно для меры с полным носителем.

Введем на пространствах $\mathcal{FC}_b^\infty(X)$ и $\mathcal{FC}_b^\infty(X, H)$ нормы:

$$\|\varphi\|_{m,p} = \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int_X (N_{m,\varphi}(x))^p |\mu|(dx) \right)^{1/p},$$

$$\|v\|_{m,p} = \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int_X (N_{m,v}(x))^p |\mu|(dx) \right)^{1/p},$$

где

$$N_{m,\varphi}^2(x) = \varphi^2(x) + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_k=1}^{\infty} (\partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} \varphi(x))^2 \right);$$

$$N_{m,v}^2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{m,\langle v, e_j \rangle}^2(x).$$

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пополнив пространства $\mathcal{FC}_b^\infty(X)$ и $\mathcal{FC}_b^\infty(X, H)$ по указанным нормам $\|\cdot\|_{m,p}$, получим соответственно соболевские пространства $\mathcal{W}^{m,p}(X)$ и $\mathcal{W}^{m,p}(X, H)$, где m – целое неотрицательное, $1 \leq p < \infty$. Нормы в пространствах $\mathcal{W}^{0,p} = L^p$ будем обозначать без индекса 0.

Легко проверить, что построенные пространства и нормы в них не зависят от выбора ортонормированного базиса в H .

1.2. ЛЕММА. Если $f \in \mathcal{W}^{m,p}(X)$, $g \in \mathcal{W}^{m,q}(X)$, $1 \leq p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1/r \leq 1$, то $fg \in \mathcal{W}^{m,r}(X)$, причем $\|fg\|_{m,r} \leq C(m, p, q, r) \cdot \|f\|_{m,p} \cdot \|g\|_{m,q}$.

Из леммы 1.2 можно получить оценки норм производных φ вдоль векторного поля v через нормы φ и v (при условии, что φ и v принадлежат соответствующим соболевским классам):

$$\|\partial_v \varphi\|_r \leq C_1(p, q, r) \cdot \|\varphi\|_{1,p} \cdot \|v\|_q, \quad \text{где } 1/r \geq 1/p + 1/q;$$

$$\|\partial_v^k \varphi\|_r \leq C_k(p, q, r) \cdot \|\varphi\|_{k,p} \cdot \|v\|_{k-1,q}^k, \quad \text{где } 1/r \geq 1/p + k/q.$$

В частности, если $v \in \mathcal{W}^{m-1,q}(X, H)$, то для каждой $\varphi \in \mathcal{W}^{m,p}(X)$ имеем $\partial_v^k \varphi \in L^r(X, \mu)$ при всех $r \leq (1/p + k/q)^{-1}$ и $k \leq m$.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $v \in \mathcal{W}^{m-1,q}(X, H)$, $q, p \geq 1$. Обозначим через $\mathcal{W}_v^{m,p}(X)$ замыкание $\mathcal{FC}_b^\infty(X)$ по норме

$$\|\varphi\|_{v,m,p} = \left(\frac{1}{\|\mu\|} \sum_{k=0}^m \int |\partial_v^k \varphi(x)|^p |\mu|(dx) \right)^{1/p}.$$

Таким образом, мы имеем: если $v \in \mathcal{W}^{m-1,q}(X, H)$, то $\mathcal{W}^{m,p}(X) \subset \mathcal{W}_v^{m,r}(X)$ при всех $r \in [1; (1/p + m/q)^{-1}]$.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мера μ на X называется *дифференцируемой вдоль вектора* или *векторного поля* v в смысле Фомина (далее это будет называться просто “дифференцируемостью”), если существует такая знакопеременная мера ограниченной вариации $d_v \mu$, что для всякой $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ справедливо равенство

$$\int \partial_v \varphi(x) \mu(dx) = - \int \varphi(x) d_v \mu(dx),$$

где $\partial_v \varphi(x) = \varphi'(x)(v(x))$, и при этом $d_v \mu$ абсолютно непрерывна относительно μ .

Если v – фиксированный вектор, то плотность меры $d_v \mu$ относительно μ будем обозначать $\beta^\mu(v)$. В общем случае плотность меры $d_v \mu$ относительно μ будем называть дивергенцией векторного поля v и обозначать δv .

1.5. ЛЕММА. Если $f \in \mathcal{W}_v^{1,2}(X)$ или $f \in \mathcal{W}^{1,2}(X)$, мера μ дифференцируема вдоль векторного поля $v \in L^2(X, \mu, H)$, причем $\delta v \in L^2(X, \mu)$, то мера $f\mu$ также дифференцируема вдоль v . При этом

$$d_v(f\mu) = (f \cdot \delta v + \partial_v f)\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $f \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$. Тогда для всякой $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ имеем:

$$\begin{aligned} \int \partial_v \varphi(x) f(x) \mu(dx) &= \int \partial_v (\varphi(x) f(x)) \mu(dx) - \int \varphi(x) \partial_v f(x) \mu(dx) \\ &= - \int \varphi(x) f(x) d_v \mu(dx) - \int \varphi(x) \partial_v f(x) \mu(dx) \\ &= - \int \varphi(x) (f(x) \delta v(x) + \partial_v f(x)) \mu(dx). \end{aligned} \quad (1)$$

Вариация меры $(f \cdot \delta v + \partial_v f)\mu$ не превышает $\|f\|_2 \cdot \|\delta v\|_2 + \|f\|_{v,1,1}$, что при фиксированном v оценивается как через $\|f\|_{v,1,2}$, так и через $\|f\|_{1,2}$. Благодаря этому формула (1) остается справедливой при переходе к пределу в $\mathcal{W}_v^{1,2}(X)$ или в $\mathcal{W}^{1,2}(X)$.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $H(\mu)$ пространство

$$\{h \in X : \mu \text{ дифференцируема вдоль } h \text{ и } \|\beta^\mu(h)\|_2 < \infty\},$$

наделенное нормой $\|h\|_{H(\mu)} = \|\beta^\mu(h)\|_2$.

Пространство $H(\mu)$ является гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в X , и в силу радоновости μ сепарабельным (см. [8, гл. 5]).

§ 2. Отображение меры на прямую.

2.1. ТЕОРЕМА. Если $F \in \mathcal{W}^{2,q}(X)$, $|\nabla F|^{-1} \in L^p(X, \mu)$, где $3/q + 4/p \leq 1$, и если μ дифференцируема вдоль ∇F , причем $\delta \nabla F \in L^2(X, \mu)$, то образы мер $|\mu| \circ F^{-1}$ и $\mu \circ F^{-1}$ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$, и их плотности k и k_1 можно выбрать с ограниченной вариацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим векторное поле $v = \nabla F$. $F \in \mathcal{W}^{2,q}(X)$, $v \in \mathcal{W}^{1,q}(X, H)$, следовательно, по лемме 1.2 $F \in \mathcal{W}_v^{2,q/3}(X)$. Заметим, что мера $|\mu|$ обладает такой же однократной дифференцируемостью, что и μ (см. [8, гл. 2]); соболевские нормы, порожденные этими мерами, совпадают; $|d_v \mu| = |d_v |\mu||$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением случая положительной меры μ . Для доказательства существования лебеговской плотности $\mu \circ F^{-1}$ класса $B(\mathbb{R})$ достаточно показать, что существуют такие константы C_0, C_1 , зависящие только от H , F и μ , что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполнена оценка:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(j)}(t) \mu \circ F^{-1}(dt) \right| \leq C_j \cdot \sup_t |\varphi(t)|, \quad j = 0, 1.$$

Докажем, что существует мера η на X , такая, что

$$\int \varphi'(t) \mu \circ F^{-1}(dt) \equiv \int \varphi'(F(x)) \mu(dx) = \int \varphi(F(x)) \eta(dx).$$

Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int \varphi'(F(x)) \mu(dx) &= \int \varphi'(F(x)) \langle \nabla F(x); \nabla F(x) \rangle \frac{\mu(dx)}{|\nabla F(x)|^2} \\ &= \int \partial_v (\varphi(F(x))) \frac{\mu(dx)}{|\nabla F(x)|^2} \\ &= - \int \varphi(F(x)) \cdot d_v \left(\frac{\mu}{|\nabla F|^2} \right) (dx) \end{aligned}$$

(последнее равенство пока формально). Положим

$$\eta = -d_v \left(\frac{\mu}{|\nabla F|^2} \right) = \left(\frac{\partial_v^2 F}{|\nabla F|^4} - \frac{\delta v}{|\nabla F|^2} \right) \mu.$$

Ограниченность вариации меры η доказывается при помощи оценок через нормы. Поскольку функция $\partial_v(\varphi \circ F)$ интегрируема по $|\nabla F|^{-2} \mu$, а ограниченная функция $\varphi \circ F$ интегрируема по η , то проделанные преобразования законны. В результате мы имеем искомые константы $C_0 = \|\mu\|$, $C_1 = \|\eta\|$.

2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. $\max_t |k_1(t)| \leq \max_t k(t) \leq C_1 = \|\eta\|$.

Для доказательства этой оценки надо рассмотреть функции $\varphi_{\delta, \varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, равные нулю вне $(a - \delta; b + \delta)$ и единице в $[a; b]$, где a и b , $a < b$, — такие точки непрерывности k , что $|k(a) - k(b)| \geq \sup k - \inf k - \varepsilon$. Тогда мы получим:

$$|k(a) - k(b)| = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int \varphi'_{\delta, \varepsilon}(t) k(t) dt \right| \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup |\varphi_{\delta, \varepsilon}| \cdot \|\eta\| = \|\eta\|.$$

Очевидно, что $|k_1(t)| \leq k(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

2.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Пусть $g \in \mathcal{W}^{1,r}(X)$ или $g \in \mathcal{W}_v^{1,r}(X)$, или, более общим образом, g представима в виде $g = g_1 g_2$, где $g_1 \in \mathcal{W}^{1,r_1}(X)$, $g_2 \in \mathcal{W}_v^{1,r_2}(X)$, $1/r_1 + 1/r_2 = 1/r$, а константы p и q удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{2}{p} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{q} + \frac{4}{p} + \frac{1}{r} \leq 1. \quad (2)$$

Тогда мера $g\mu$ дифференцируема вдоль векторного поля ∇F , и ее образ $(g\mu) \circ F^{-1}$ имеет плотность k_g класса $B(\mathbb{R})$. При этом выполнена оценка:

$$\max_t |k_g(t)| \leq \text{const} \cdot A(g),$$

где $A(g)$ соответственно равна $\|g\|_{1,r}$, $\|g\|_{v,1,r}$ или $\|g_1\|_{1,r_1} \cdot \|g_2\|_{v,1,r_2}$, а константа зависит от μ, F, p, q, r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из леммы 1.5. Второе доказывается построением меры η^g по мере $g\mu$ по той же формуле, что и в теореме 2.1:

$$\eta^g = -d_v \left(\frac{g\mu}{|\nabla F|^2} \right) = \left(\frac{\partial_v^2 F}{|\nabla F|^4} g - \frac{\partial_v g + g \delta v}{|\nabla F|^2} \right) \mu;$$

при помощи леммы 1.2 получаем искомую оценку для $\|\eta^g\| \geq \max_t |k_g(t)|$.

2.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия предыдущего следствия. Пусть ρ_1 – положительная четная C^∞ -функция с носителем $[-1; 1]$,

$$\int \rho_1(t) dt = 1; \quad \rho_N(t) = N \rho_1(Nt).$$

Тогда для всех g , удовлетворяющих условиям предыдущего следствия, имеем при $N \rightarrow \infty$:

$$\int_X g(x) \rho_N(F(x)) \mu(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_g(t) \rho_N(t) dt \rightarrow k_g(0) \equiv \frac{1}{2} (k_g(-0) + k_g(+0)).$$

Если X – банахово или секвенциально полное локально выпуклое пространство, μ – радоновская мера, то существуют выпуклые центрально-симметричные компакты K_t , исчерпывающие меру, т.е.

$$\forall t \geq 1 \quad |\mu|(X \setminus K_t) \leq \frac{\|\mu\|}{t}; \quad \text{при } s < t \quad K_s \subset K_t.$$

(Это вытекает из того, что замкнутая абсолютно выпуклая оболочка компакта в секвенциально полном линейном топологическом пространстве также является компактом.)

2.5. ПОСТРОЕНИЕ. Пусть μ радоновская, $H \subset H(\mu)$; дано векторное поле $v \in L^q(X, \mu, H)$. Мы хотим построить семейство функций $\{\theta_t \mid t \geq 4\}$ из класса $\mathcal{W}_v^{1,q}(X)$ со следующими свойствами: $0 \leq \theta_t \leq 1$; $\theta_t(x) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ для μ -почти всех x ; $\theta_t = 0$ μ -почти всюду вне $2K_t$, где K_t — выпуклые симметричные компакты, исчерпывающие меру; $\|1 - \theta_t\|_{v,1,q} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Введем обозначение при $h \in H$

$$\varepsilon_h(t) = \frac{1}{\|\mu\|} \int_{X \setminus K_t} |\beta^\mu(h)(y)|^2 |\mu|(dy);$$

очевидно, что $\varepsilon_h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon_h(0) \leq C_H^2 |h|^2$, где C_H — норма оператора вложения H в гильбертово пространство $H(\mu)$ (которое изометрично вложено в $H(|\mu|)$). Обозначим μ_{sym} вероятностную меру, заданную формулой $\mu_{\text{sym}}(A) = (2\|\mu\|)^{-1}(|\mu|(A) + |\mu|(-A))$. Введем функцию $\psi_t(x) = \mu_{\text{sym}}(2K_t - x)$. Тогда при $h \in H$

$$\begin{aligned} \partial_h \psi_t(x) &= \frac{1}{2\|\mu\|} (d_h |\mu|(2K_t + x) - d_h |\mu|(2K_t - x)) \\ &= \frac{1}{2\|\mu\|} \left(\int_{2K_t + x} - \int_{2K_t - x} \right) \beta^{|\mu|}(h)(y) |\mu|(dy). \end{aligned} \quad (3)$$

При $x \notin 2K_t$ через 0 можно провести гиперплоскость, разбивающую X на полупространства X_+ и X_- , так, что $(2K_t - x) \subset X_+$. Тогда $\mu_{\text{sym}}(2K_t - x) \leq \mu_{\text{sym}}(X_+) \leq 1/2$. При $x \in K_t$ $\mu_{\text{sym}}(2K_t - x) \geq \mu_{\text{sym}}(K_t) \geq 1 - t^{-1} \geq 3/4$. Кроме того, $\forall x$ $0 \leq \psi_t(x) \leq 1$. Оценим норму функции ψ_t . При $x \in K_t$ имеем $X \setminus (2K_t - x) \subset X \setminus K_t$, следовательно, $|\partial_h \psi_t(x)|^2 \leq \varepsilon_h(t)$ (в силу неравенства Коши–Шварца это следует из (3) и из соотношения $\int \beta^{|\mu|}(h) |\mu| = 0$); при всех x $|\partial_h \psi_t(x)|^2 \leq \varepsilon_h(0)$. Следовательно,

$$\int |\partial_v \psi_t(x)|^q |\mu|(dx) \leq \int_{K_t} (\varepsilon_{v(x)}(t))^{q/2} |\mu|(dx) + \int_{X \setminus K_t} C_H^q \cdot |v(x)|^q |\mu|(dx).$$

Подынтегральное выражение в обоих слагаемых оценивается через $C_H^q \cdot |v(x)|^q$, что интегрируемо по $|\mu|$. Следовательно, по теореме Лебега $\int |\partial_v \psi_t|^q |\mu| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Наконец, ψ_t приближается по нормам $\|\cdot\|_{v,1,q}$ $\mathcal{W}^{1,\infty}$ -функциями $\mu_{\text{sym}}(x - E_n)$, где $\{E_n\}$ — последовательность цилиндрических множеств, сходящаяся к $2K_t$. Следовательно, $\psi_t \in \mathcal{W}_v^{1,q}(X)$. Пусть монотонная функция $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $f(t) = 0$ при $t \leq 1/2$, $f(t) = 1$ при $t \geq 3/4$. Пусть $\theta_t(x) = f(\psi_t(x))$. Функция θ_t обладает всеми нужными свойствами: $0 \leq \theta_t \leq 1$, $\theta_t = 1$ на K_t , $\theta_t = 0$ вне $2K_t$, $\|1 - \theta_t\|_q \rightarrow 0$ и $\|\partial_v \theta_t\|_q \leq \sup_\tau f'(\tau) \cdot \|\partial_v \psi_t\|_q \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $1 \leq p < \infty$. Емкость $\text{Cap}_{1,p}$ открытого множества U равна

$$\text{Cap}_{1,p}(U) = \inf \{ \|\varphi\|_{1,p} : \varphi \in \mathcal{W}^{1,p}(X), \varphi \geq 0; \varphi \geq 1 \text{ на } \mu\text{-почти всем } U \};$$

для произвольного множества A

$$\text{Cap}_{1,p}(A) = \inf \{ \text{Cap}_{1,p}(U) : U \text{ открыто, } A \subset U \}.$$

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если X – сепарабельное банахово пространство, то при любом $q \geq 1$ емкость $\text{Cap}_{1,q}$ плотна, т.е. существуют такие компакты K_t , что $\text{Cap}_{1,q}(X \setminus K_t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (см. [9]).

То же будет справедливо и для произвольного секвенциально полного локально выпуклого пространства X , если μ радоновская гауссовская и $H \subset H(\mu)$ (см. [7, гл. 5]).

2.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Если H вложено посредством оператора Гильберта–Шмидта в $H(\lambda)$, где λ – какая-нибудь симметричная радоновская вероятностная мера, например, гауссовская, или μ_{sym} (в последнем случае $H(\mu) \subset H(\lambda)$), то емкость $\text{Cap}_{1,q}$ плотна при всех $q \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_t – абсолютно выпуклые компакты, исчерпывающие меру $|\mu| + \lambda$. Рассмотрим функцию $\psi_t(x) = \lambda(2K_t - x)$ при достаточно больших t , чтобы $\lambda(K_t) > 3/4$. Тогда $0 \leq \psi_t \leq 1$, $\psi_t|_{K_t} \geq 3/4$, $\psi_t|_{X \setminus 2K_t} \leq 1/2$;

$$|\nabla \psi_t(x)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{2K_t - x} \beta^\lambda(e_j)(x) \lambda(dx) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_{H(\lambda)}^2 = \text{const} < \infty;$$

отсюда следует интегрируемость $|\nabla \psi_t|$. Наконец, положим $g_t(x) = 1 - f(\psi_t(x))$, где f такая же, как в построении 2.5. Тогда $g_t \in \mathcal{W}^{1,\infty}(X)$, $g_t \geq 0$, $g_t = 1$ на $X \setminus 2K_t$, и при всех $q \geq 1$ $\|g_t\|_{1,q} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (рассуждение аналогично 2.5), следовательно, $\text{Cap}_{1,q}(X \setminus 2K_t) \rightarrow 0$.

2.9. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда емкость $\text{Cap}_{1,q}$ плотна, компакты K_t можно выбрать такими (не обязательно центрально симметричными и выпуклыми), что $\text{Cap}_{1,q}(X \setminus 2K_t) < 1/t$. В этом случае существуют функции $\vartheta_t: X \rightarrow [0; 1]$ со свойствами: $\vartheta_t = 0$ μ -почти всюду на $X \setminus 2K_t$; $\vartheta_t \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ μ -почти всюду; $\vartheta_t \in \mathcal{W}^{1,q}(X)$; $\|1 - \vartheta_t\|_{1,q} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть C – некоторая емкость. Будем говорить, что:

- 1) некоторое свойство выполнено C -квазивсюду, если оно имеет место на $X \setminus A$, где $C(A) = 0$;
- 2) функция f C -квазинепрерывна, если существуют замкнутые множества Q_n такие, что $f|_{Q_n}$ непрерывна $\forall n$, и $C(X \setminus Q_n) < 1/n$.

Заметим, что если емкость C плотна, то множества Q_n можно выбрать компактными.

Известно, что функции $f \in \mathcal{W}^{1,q}(X)$ всегда имеют $\text{Cap}_{1,q}$ -квазинепрерывные версии (см. [7, гл. 5]).

§ 3. Построение поверхностной меры

Будем всюду далее предполагать, что пространство радоновских мер на пространстве X слабо секвенциально полно. Этим свойством обладают, в частности, сепарабельные банаховы пространства и сепарабельные пространства Фреше.

3.1. ЛЕММА. Пусть μ – радоновская мера на X ; $H \subset H(\mu)$; $F \in \mathcal{W}^{2,12}(X)$; μ дифференцируема вдоль ∇F , причем $\delta \nabla F \in L^2(X, \mu)$; $|\nabla F|^{-1} \in L^{12}(X, \mu)$. Тогда:

1) меры

$$\nu_N^t(dx) = \rho_N(F(x))\theta_t(x)\mu(dx)$$

слабо сходятся при $N \rightarrow \infty$ к некоторой радоновской мере ν^t ;

2) если π_N^t и π^t – аналогичные меры, построенные для меры $|\mu|$, то $\nu_N^t \ll \pi_N^t$, $\nu^t \ll \pi^t$, и соответствующие плотности Радона–Никодима можно выбрать принимающими значения в $[-1; 1]$; все эти меры сосредоточены на $2K_t$;

3) если $\text{Cap}_{1,3}(A) = 0$, то для всех t $|\nu^t|(A) = 0$;

4) для всех $g \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ выполнено равенство

$$\int g(x)\nu^t(dx) = k_{g\theta_t}(0).$$

Если емкость $\text{Cap}_{1,6}$ плотна, то это равенство справедливо и для всех $\text{Cap}_{1,6}$ -квазинепрерывных $g \in \mathcal{W}^{1,6}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = 3$. Тогда константы $p = q = 12$ и r удовлетворяют условию (2).

1) Пусть $\varphi \in C_b(X)$. Зададим $\varepsilon > 0$. На компакте $2K_t$ φ равномерно непрерывна, поэтому существует такая функция $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$, что

$$\sup_{x \in 2K_t} |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi_\varepsilon(x)\nu_N^t(dx) = \int \varphi(x)\nu_N^t(dx)$$

равномерно при всех N , поскольку меры ν_N^t равномерно ограничены:

$$|\nu_N^t|(X) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau)\rho_N(\tau)d\tau \rightarrow k(0).$$

При каждом ε $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{W}_v^{1,6}(X)$; при всех t $\theta_t \in \mathcal{W}_v^{1,6}(X)$, отсюда $\varphi_\varepsilon\theta_t \in \mathcal{W}_v^{1,3}(X)$, и по следствию 2.4 существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi_\varepsilon(x)\nu_N^t(dx) = k_{\varphi_\varepsilon\theta_t}(0).$$

(Это было бы верно и при $\theta_t \in \mathcal{W}^{1,6}(X)$.) Отсюда существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi(x)\nu_N^t(dx).$$

Поскольку это верно для всех $\varphi \in C_b(X)$, существует радоновская мера ν^t , к которой слабо сходятся меры ν_N^t .

2) Утверждение для мер ν_N^t непосредственно вытекает из того, что μ абсолютно непрерывна относительно $|\mu|$ и соответствующая плотность при $|\mu|$ -почти всех x лежит в пределах $[-1; 1]$. Для каждой $\varphi \in C_b(X)$, $\varphi \geq 0$, имеем:

$$\left| \int \varphi \nu^t \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int \varphi \nu_N^t \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi \pi_N^t = \int \varphi \pi^t,$$

откуда следует утверждение для мер ν^t . По свойству слабо сходящихся положительных мер для открытого множества (см. [10]),

$$\pi^t(X \setminus 2K_t) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \pi_N^t(X \setminus 2K_t) = 0.$$

3) В силу п. 2) мы можем ограничиться рассмотрением случая положительной меры μ . Пусть $\text{Cap}_{1,3}(A) = 0$. Для каждого натурального m возьмем открытое множество U_m , содержащее A , такое, что $\text{Cap}_{1,3}(U_m) < 2^{-m}$. Существует функция $g_m \in \mathcal{W}^{1,3}(X)$: $g_m \geq 0$, $g_m \geq 1$ на μ -почти всем (следовательно, и на ν_N^t -почти всем) U_m , $\|g_m\|_{1,3} < 2^{1-m}$. При всех N имеем:

$$\begin{aligned} \nu_N^t(U_m) &\leq \int g_m(x) \nu_N^t(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{g_m \theta_t}(\tau) \rho_N(\tau) d\tau \\ &\leq \text{ess sup}_{\tau} |k_{g_m \theta_t}(\tau)| \leq \sup_{\tau} |k_{g_m}(\tau)| \leq \text{const} \cdot \|g_m\|_{1,3} \end{aligned}$$

в силу следствия 2.3. Следовательно, $\forall t, \forall N$ $\nu_N^t(U_m) \leq \text{const} / 2^m$; по свойству слабо сходящихся мер имеем:

$$\nu^t(U_m) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \nu_N^t(U_m) \leq \text{const} / 2^m; \quad \nu^t(A) \leq \inf_m \nu^t(U_m) = 0.$$

4) Поскольку функции $g_{\pm}(x) = \max\{\pm g(x); 0\}$ также принадлежат $\mathcal{W}^{1,6}(X)$, достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных g . В случае непрерывности (и ограниченности) g на $2K_t$ утверждение непосредственно вытекает из существования предела $\lim_{N \rightarrow \infty} \int g \nu_N^t$ (заметим, что $|k_{\theta_t g}| \leq |k_g|$). Общий случай сводится к этому случаю в виду замечаний 2.9 и 3.4 (см. ниже).

3.2. ЛЕММА. Пусть ν^t – меры, построенные в предыдущей лемме. Тогда:

- 1) меры ν^t слабо сходятся к радоновской мере ν и сходятся к ней же по вариации;
- 2) если $\text{Cap}_{1,3}(A) = 0$, то $|\nu|(A) = 0$;
- 3) для всех $g \in \mathcal{FC}_b^{\infty}(X)$ выполнено равенство

$$\int g(x) \nu(dx) = k_g(0).$$

Если емкость $\text{Cap}_{1,6}$ плотна, то это равенство справедливо для всех $\text{Cap}_{1,6}$ -квазинепрерывных $g \in \mathcal{W}^{1,6}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi \in C_b(X)$, $\sup |\varphi(x)| = 1$; $t > s \geq 4$.

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi \nu^t - \int \varphi \nu^s \right| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int \varphi \nu_N^t - \int \varphi \nu_N^s \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int |\nu_N^t - \nu_N^s| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int (\pi_N^t - \pi_N^s) = \int \pi^t - \int \pi^s. \end{aligned}$$

Поскольку $\pi^s(X) \rightarrow k(0)$ при $s \rightarrow \infty$, мы получаем, что искомая разность равномерно по $t \geq s$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$, т.е. выполнен критерий Коши для слабой сходимости мер ν^t . Следовательно, эти меры слабо сходятся к некоторой радоновской мере ν . При этом

$$\begin{aligned} \|\nu - \nu^t\| &= \sup \left\{ \int \psi \cdot (\nu - \nu^t) : \psi \text{ борелевская, } |\psi| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \varphi \cdot (\nu - \nu^t) : \varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X), |\varphi| \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

так как в силу радоновости мер ν и ν^t функция ψ приближается в $L^1(X, |\nu| + |\nu^t|)$ цилиндрическими функциями (см. [7, дополнения]). Если $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$, $|\varphi| \leq 1$, то

$$\left| \int \varphi \nu - \int \varphi \nu^t \right| = \left| \lim_{s \rightarrow \infty} k_{\varphi \theta_s}(0) - k_{\varphi \theta_t}(0) \right| = |k_{(1-\theta_t)\varphi}(0)| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

2) Этот пункт непосредственно вытекает из 1) и из пункта 3) предыдущей леммы.

3) Пусть $g \in \mathcal{W}^{1,6}(X)$, $g|_{Q_n}$ непрерывна для каждого n , где замкнутые множества Q_n возрастают и $\text{Cap}_{1,6}(X \setminus Q_n) \rightarrow 0$. В силу плотности емкости $\text{Cap}_{1,6}$ мы можем считать Q_n компактными. Поскольку $|\mu|(X \setminus Q_n) \rightarrow 0$, мы можем выбрать $Q_{n(t)}$ в качестве компактов K_t , где $n(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (см. замечания 2.9 и 3.4). Тогда $\forall t \int g \nu^t = k_{g \theta_t}(0)$. Как уже было замечено, достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных g . На Q_n функция g интегрируема, так как ограничена. Пусть $Q = \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$. Тогда $\text{Cap}_{1,3}(X \setminus Q) \leq \text{Cap}_{1,6}(X \setminus Q) = 0$, следовательно, $|\nu|(X \setminus Q) = 0$. Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_n} g |\nu| &= \int g |\nu| \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \int g |\nu^s| \leq \text{const} \cdot \|g\|_{1,6}; \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \quad &\left| \int g |\nu| - \int_{Q_n} g |\nu| \right| < \frac{\varepsilon}{3}; \end{aligned}$$

такая же оценка будет выполняться для мер $|\nu^s|$ при всех s ;

$$\exists s_0 \geq 4 : \quad \left| \int_{Q_n} g |\nu| - \int_{Q_n} g |\nu^s| \right| \leq \|\nu - \nu^s\| \cdot \sup_{Q_n} g < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall s \geq s_0.$$

Тогда

$$\left| \int g |\nu| - \int g |\nu^s| \right| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int g \nu = \lim_{s \rightarrow \infty} \int g \nu^s = k_g(0).$$

3.3. ТЕОРЕМА. Пусть X – сепарабельное банахово пространство или сепарабельное пространство Фреше, μ – радоновская мера, $H \subset H(\mu)$, $F \in \mathcal{W}^{2,12}(X)$ и мера μ дифференцируема вдоль векторного поля ∇F , причем $\delta \nabla F \in L^2(X, \mu)$; $|\nabla F|^{-1} \in L^{12}(X, \mu)$. Тогда существует единственная радоновская мера ν со свойством:

$$\int \varphi(x) \nu(dx) = k_\varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование такой меры доказано ее построением. Единственность следует из того, что радоновская мера однозначно определяется интегралами цилиндрических функций.

Важнейшим следствием этой теоремы является

3.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Результат построения меры ν не зависит ни от выбора компактов, исчерпывающих меру, ни от выбора функций θ_t , обладающих вышеописанными свойствами.

3.5. ТЕОРЕМА. Пусть выполнены те же условия на X , H , μ , F . Пусть $F|_{Q_n}$ непрерывна и $\text{Cap}_{1,3}(X \setminus Q_n) < 1/n$. Пусть F $\text{Cap}_{1,3}$ -квазинепрерывна. Тогда мера ν сосредоточена на поверхности $F^{-1}(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F|_{Q_n}$ непрерывна и $\text{Cap}_{1,3}(X \setminus Q_n) < 1/n$. Пусть $U = F^{-1}((-\infty; a - \delta) \cup (a + \delta; +\infty))$;

$$U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n, \quad \text{где } U_n = U \cup (X \setminus Q_n) \text{ — открытые.}$$

При всех $N > 1/\delta$ для достаточно больших t мы имеем:

$$\pi_N^t(U_n) = \pi_N^t(X \setminus Q_n) \leq \text{const} \cdot \text{Cap}_{1,3}(X \setminus Q_n) = \text{const}/n,$$

отсюда $\pi^t(U_n) \leq \text{const}/n$; $\pi(U_n) \leq \text{const}/n$;

$$|\nu|(U) \leq \pi(U) \leq \inf_n \pi(U_n) = 0.$$

§ 4. Формула Остроградского–Гаусса

Пусть по-прежнему μ – радоновская мера на локально выпуклом пространстве X , $H \subset H(\mu)$. Далее будем предполагать, что емкость $\text{Cap}_{1,6}$ плотна. Пусть U – борелевское подмножество X , обладающее следующим свойством: существует $\text{Cap}_{1,12}$ -квазинепрерывная функция $F \in \mathcal{W}^{2,12}(X)$ такая, что $|\nabla F|^{-1} \in L^{12}(X, \mu)$, μ дифференцируема вдоль векторного поля ∇F , $\delta \nabla F \in L^2(X, \mu)$, и

$$U = F^{-1}((-\infty; 0)).$$

Будем называть множество $\Sigma = F^{-1}(0)$ поверхностью U . Функция F и векторное поле ∇F удовлетворяют условиям лемм 3.1 и 3.2 и теорем 3.3 и 3.5. На Σ мы имеем

меру ν ; введем меру $\mu_\sigma(dx) = |\nabla F(x)|\nu(dx)$, где для $|\nabla F| \in \mathcal{W}^{1,12}(X)$ выбрана $\text{Car}_{1,12}$ -квазинепрерывная версия. Эта мера имеет конечную вариацию:

$$\int |\mu_\sigma|(dx) = \int |\nabla F(x)| \cdot |\nu|(dx) \leq \int |\nabla F(x)|\pi(dx) < \infty$$

в силу следствия 2.3 и пункта 3) леммы 3.2. Нормалью к поверхности Σ будем называть вектор $n(x) = |\nabla F|^{-1} \cdot \nabla F$, $x \in \Sigma$.

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть $u \in \mathcal{W}^{1,12}(X, H)$ – векторное поле, для которого дивергенция δu определена (следовательно, принадлежит $L^1(X, \mu)$). Тогда функция $\langle n(x); u(x) \rangle$ интегрируема по мере μ_σ и справедлива формула Остроградского–Гаусса:

$$\int_U \delta u(x) \mu(dx) = \int_\Sigma \langle n(x); u(x) \rangle \mu_\sigma(dx), \quad (4)$$

где из эквивалентных версий функции $\langle n(x); u(x) \rangle$ выбрана $\text{Car}_{1,6}$ -квазинепрерывная. В частности, правая часть (4) не зависит от конкретного выбора такой версии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу заметим, что интеграл в правой части равен

$$\int \frac{\langle \nabla F(x); u(x) \rangle}{|\nabla F(x)|} \mu_\sigma(dx) = \int \partial_u F(x) \nu(dx),$$

где для $\partial_u F \in \mathcal{W}^{1,6}(X)$ выбрана $\text{Car}_{1,6}$ -квазинепрерывная версия, и по следствию 2.3

$$\int |\partial_u F(x)| \cdot |\nu|(dx) \leq \int |\partial_u F(x)|\pi(dx) \leq \text{const} \cdot \|\partial_u F\|_{1,3} \leq \text{const}' \cdot \|u\|_{1,4} < \infty.$$

Пусть ρ_1 – положительная C^∞ -функция с носителем $[-1; 1]$, $\rho_1(-t) = \rho_1(t)$,

$$\int \rho_1(t) dt = 1; \quad \rho_N(t) = N \rho_1(Nt).$$

Введем функции

$$\chi_N(x) = \int_{F(x)}^{+\infty} \rho_N(t) dt.$$

Очевидно, что $\chi_N \in \mathcal{W}^{2,12}(X)$, $\chi_N = 1$ на $F^{-1}((-\infty; -1/N))$, $\chi_N = 0$ на $F^{-1}((1/N; +\infty))$. Пусть $\chi_{N,k} \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$, $k = 1, 2, \dots$, равномерно ограничены и приближают χ_N по норме $\|\cdot\|_{2,12}$. Перейдя к подпоследовательности, можем также считать, что $\chi_{N,k} \rightarrow \chi_N$ μ -почти всюду. По определению дивергенции

$$\int \chi_{N,k}(x) \delta u(x) \mu(dx) = - \int \partial_u \chi_{N,k}(x) \mu(dx).$$

В обеих частях этого равенства можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$:

$$\int \chi_N(x) \delta u(x) \mu(dx) = - \int \partial_u \chi_N(x) \mu(dx).$$

Ввиду того, что $|\mu|(\Sigma) = 0$ и $\forall x \notin \Sigma \quad \chi_N(x) \rightarrow I_U(x)$ при $N \rightarrow \infty$, левая часть стремится по теореме Лебега к $\int_U \delta u(x) \mu(dx)$ при $N \rightarrow \infty$. Правая часть равна

$$\int \partial_u F(x) \rho_N(F(x)) \mu(dx) = \int_{-1/N}^{1/N} k_{\partial_u F}(t) \rho_N(t) dt$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} k_{\partial_u F}(0) = \int \partial_u F(x) \nu(dx),$$

поскольку к функции $\partial_u F \in \mathcal{W}^{1,6}$ применим пункт 3) леммы 3.2.

4.2. СЛЕДСТВИЕ. Рассмотрим векторное поле $u(x) = \varphi(x)h$, $\varphi \in \mathcal{W}^{1,12}(X)$, $h \in H$. Тогда существует и формула (4) примет вид:

$$\int_U (\partial_h \varphi(x) + \varphi(x) \beta^\mu(h)(x)) \mu(dx) = \int_\Sigma \varphi(x) \langle n(x); h \rangle \mu_\sigma(dx)$$

(формула интегрирования по частям).

4.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть H вложено в $H(\mu)$ посредством оператора Гильберта–Шмидта. Пусть $f \in \mathcal{W}^{2,12}(X)$. Тогда выполнена первая формула Грина:

$$\int_U \Delta f(x) \mu(dx) + \int_U \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{e_j} f(x) \beta^\mu(e_j)(x) \mu(dx) = \int_\Sigma \partial_{n(x)} f(x) \mu_\sigma(dx),$$

где $\Delta f = \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{e_j}^2 f \in L^{12}(X, \mu)$ не зависит от выбора базиса H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим векторное поле ∇f . Нетрудно проверить, что его дивергенция существует и имеет вид

$$\delta \nabla f = \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{e_j}^2 f + \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{e_j} f \cdot \beta^\mu(e_j),$$

поскольку оба ряда сходятся в $L^1(X, \mu)$.

4.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть μ неотрицательная мера. Пусть F и G – две $\text{Car}_{1,12}$ -квазинепрерывные функции, удовлетворяющие всем условиям, перечисленным в начале главы, отвечают одним и тем же U и Σ . Тогда для всех векторных полей $u \in \mathcal{FC}_b^\infty(X, H)$ формула (4) дает:

$$\int_\Sigma \langle n_F(x); u(x) \rangle \mu_\sigma^{(F)}(dx) = \int_\Sigma \langle n_G(x); u(x) \rangle \mu_\sigma^{(G)}(dx),$$

следовательно, при всех $j = 1, 2, \dots$ радоновские меры $\langle e_j; n_F(x) \rangle \mu_\sigma^{(F)}(dx)$ и $\langle e_j; n_G(x) \rangle \mu_\sigma^{(G)}(dx)$ совпадают. Обозначим эти меры ξ_j . Рассмотрим меру $\lambda = |\mu_\sigma^{(F)}| + |\mu_\sigma^{(G)}|$. Меры ξ_j абсолютно непрерывны относительно λ и имеют плотность f_j . Определим меру μ_σ формулой

$$\mu_\sigma(dx) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(x) \right)^{1/2} \lambda(dx).$$

Легко видеть, что $\mu_\sigma(dx) = |n_F(x)| \mu_\sigma^{(F)}(dx) = |n_G(x)| \mu_\sigma^{(G)}(dx)$, и поскольку $|n_F| = 1$ $\mu_\sigma^{(F)}$ -почти всюду, а $|n_G| = 1$ $\mu_\sigma^{(G)}$ -почти всюду, из этого вытекает совпадение мер $\mu_\sigma^{(F)}$ и $\mu_\sigma^{(G)}$, а также совпадение n_F и n_G μ_σ -почти всюду. Именно из этих соображений был введен нормировочный множитель $|\nabla F|$.

Автор благодарит В. И. Богачева за научное руководство и постановку задачи.

Список литературы

1. *Скорород А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.
2. *Ефимова Е. И., Угланов А. В.* Формула Грина на гильбертовом пространстве // Матем. сб. 1982. Т. 119. № 2. С. 225–232.
3. *Ефимова Е. И., Угланов А. В.* Формулы векторного анализа на банаховом пространстве // Докл. АН. 1983. Т. 271. № 6. С. 1302–1306.
4. *Угланов А. В.* Поверхностные меры в банаховом пространстве // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 189–217.
5. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в линейных топологических пространствах // Докл. АН. 1995. Т. 344. № 4. С. 450–453.
6. *Airault H., Malliavin P.* Integration geometrique sur l'espace de Wiener // Bull. Sci. Math. (2). 1988. V. 112. P. 3–52.
7. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.
8. *Bogachev V. I.* Differentiable measures and the Malliavin calculus // J. Math. Sci. 1997. V. 87. № 5. P. 3577–3731.
9. *Röckner M., Schmuland B.* Tightness of general $C_{1,p}$ capacities on Banach space // J. Funct. Anal. 1992. V. 108. № 1. P. 1–12.
10. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
08.12.1997