Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Дефект допустимых шаров и октаэдров в решетке и системы общих представителей, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 6, 117–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:44:59

УДК 513.85+519.1

А. М. Райгородский

Дефект допустимых шаров и октаэдров в решетке и системы общих представителей

Рассмотрим репер $\mathcal{E} = O \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, состоящий из координатных ортов, решетку $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ такую, что $\mathbb{Z}^n \subset \Lambda$, единичный октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ и единичный шар $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$. Множество $\Omega \in \{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n, \mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n\}$ назовем *допустимым в Λ* , если $\Omega \cap \Lambda = \{O, \pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n\}$. *Дефектом* $d(\Omega; \Lambda)$ *допустимого в Λ множества Ω относительно Λ* назовем минимальное число векторов, которые необходимо удалить из $\mathcal{E}$, чтобы оставшаяся система была дополнима до базиса в Λ . Положим $d_n(\Omega) = \max_{\Lambda} d(\Omega; \Lambda)$ и $d_n^*(\Omega) = \max_{\Lambda}^* d(\Omega; \Lambda)$, где в первом случае максимум берется по всем Λ , а во втором случае по таким Λ , что $\Lambda/\mathbb{Z}^n$ – циклическая группа. В работе показано, что $d_n^*(\Omega) \gg \frac{n}{\log n} (\log \log n)^2$, $d_n(\Omega) \geq n - c \frac{n}{\log n}$, где c – абсолютная константа. Результаты получены с помощью методов геометрии чисел и комбинаторики.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Определения и обозначения

В настоящей работе исследуются комбинаторные свойства допустимых решеток (близких к экстремальным) для октаэдров и шаров.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – n -мерная решетка в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащая точку O . Пусть, кроме того, решетка Λ содержит n -мерную решетку целых чисел $\mathbb{Z}^n$ в качестве подрешетки. Рассмотрим набор единичных ортов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \Lambda$. Буквой $\mathcal{E}$ мы будем обозначать репер $O \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Обозначим через f максимально возможное количество векторов $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_f}$ из репера $\mathcal{E}$, обладающих тем свойством, что их можно дополнить до базиса решетки Λ . *Дефектом репера $\mathcal{E}$ относительно решетки Λ* мы будем называть величину $d(\mathcal{E}; \Lambda) = n - f$. Отметим, что величина $d(\mathcal{E}; \Lambda)$ оценивается снизу минимальным количеством порождающих элементов в конечной абелевой группе $\Lambda/\mathbb{Z}^n$ и что, кроме того, найдется репер $\mathcal{E}' = O \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ такой, что векторы $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ образуют базис в решетке $\mathbb{Z}^n$ и что величина $d(\mathcal{E}'; \Lambda)$ в точности равна количеству порождающих элементов в факторгруппе $\Lambda/\mathbb{Z}^n$.

Шаром $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$, соответствующим реперу $\mathcal{E}$ n -мерной решетки Λ , мы будем называть множество

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n, \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \leq 1\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00378).

Октаэдром $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$, соответствующим реперу $\mathcal{E}$ n -мерной решетки Λ , мы будем называть множество

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n, |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| \leq 1\}.$$

Допустимым относительно решетки Λ будем называть такое множество $\Omega \in \{\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n\}$, что

$$\Omega \cap \Lambda = \{O, \pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n\}.$$

Величину $d(\mathcal{E}; \Lambda)$ в том случае, когда репер $\mathcal{E}$ задает допустимый шар в решетке Λ , мы будем называть *дефектом допустимого шара* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$ и обозначать $d(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n; \Lambda) = d(\mathcal{E}; \Lambda)$. В случае же, когда репер $\mathcal{E}$ задает допустимый октаэдр в решетке Λ , величину $d(\mathcal{E}; \Lambda)$ мы будем называть *дефектом допустимого октаэдра* $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ и обозначать $d(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n; \Lambda) = d(\mathcal{E}; \Lambda)$. Теперь определим зависящие только от размерности и рассматриваемого множества величины $d_n(\mathcal{O})$, $d_n(\mathcal{B})$, $d_n^*(\mathcal{O})$ и $d_n^*(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned} d_n(\mathcal{O}) &= \max_{\Lambda} d(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n; \Lambda), & d_n(\mathcal{B}) &= \max_{\Lambda} d(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n; \Lambda), \\ d_n^*(\mathcal{O}) &= \max_{\Lambda} d^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n; \Lambda), & d_n^*(\mathcal{B}) &= \max_{\Lambda} d^*(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n; \Lambda). \end{aligned}$$

Здесь в случае $d_n(\mathcal{O})$ ($d_n(\mathcal{B})$) максимум берется по всем решеткам Λ , содержащим $\mathbb{Z}^n$ в качестве подрешетки, таким, что репер $\mathcal{E}$ задает допустимый октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ (допустимый шар $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$) в решетке Λ ; в случае $d_n^*(\mathcal{O})$ ($d_n^*(\mathcal{B})$) максимум берется по всем решеткам Λ , содержащим $\mathbb{Z}^n$ в качестве подрешетки, таким, что репер $\mathcal{E}$ задает допустимый октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ (допустимый шар $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$) в решетке Λ и факторгруппа $\Lambda/\mathbb{Z}^n$ является циклической, т.е. решетку Λ можно получить из $\mathbb{Z}^n$ присоединением всего лишь одного вектора: $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n: \Lambda = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Достаточно точные оценки величин $d_n^*(\mathcal{O})$, $d_n(\mathcal{O})$ были получены в работе [1]. Основным результатом настоящей работы является получение точных по порядку оценок для величин $d_n(\mathcal{O})$, $d_n(\mathcal{B})$, $d_n^*(\mathcal{O})$ и $d_n^*(\mathcal{B})$ при $n \rightarrow \infty$. Предлагаемые доказательства связаны с применением комбинаторных методов задачи о покрытии (см. работу [2]) и процедуры усреднения (см. теорему Минковского–Главки в [3], а также [4]). Отметим также, что значения величины $d_n(\mathcal{O})$ при $n \leq 5$ вычислены в работе [5], а результаты для $d_n(\mathcal{B})$ при $n \leq 8$ следуют из [6], [7].

§ 2. Формулировки результатов

В работе [1] была доказана следующая теорема, дающая верхние и нижние оценки величины $d_n^*(\mathcal{O})$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют абсолютные константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$\frac{c_1 n \log \log n}{\log n} < d_n^*(\mathcal{O}) < \frac{c_2 n (\log \log n)^2}{\log n}.$$

Совершенно аналогично тому, как в работе [1] была доказана теорема 1, может быть доказана

ТЕОРЕМА 1'. *Существуют абсолютные константы $c'_1, c'_2 > 0$ такие, что*

$$\frac{c'_1 n \log \log n}{\log n} < d_n^*(\mathcal{B}) < \frac{c'_2 n (\log \log n)^2}{\log n}.$$

Основным результатом настоящей работы является теорема 2, которая позволяет получить нижние оценки величин $d_n^*(\mathcal{B})$ и $d_n^*(\mathcal{O})$, показывающие, что как верхняя оценка из теоремы 1, так и верхняя оценка из теоремы 1' точны по порядку.

ТЕОРЕМА 2. *Существует абсолютная константа $c_3 > 0$ такая, что*

$$\min\{d_n^*(\mathcal{O}); d_n^*(\mathcal{B})\} > \frac{c_3 n (\log \log n)^2}{\log n}.$$

Кроме того, в работе [1] было доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При $n \geq 5$ выполняется $d_n(\mathcal{O}) \geq 2[n/5]$ ($[l]$ означает целую часть числа l).*

Мы покажем, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует абсолютная константа $c_4 > 0$ такая, что*

$$\min\{d_n(\mathcal{O}); d_n(\mathcal{B})\} \geq n - \frac{c_4 n}{\log n}.$$

Для доказательства теоремы 2, которое будет проведено в § 5, нам понадобится рассмотрение двух комбинаторных лемм. Доказательство предложения 2 мы проведем в § 6.

§ 3. Первая комбинаторная лемма

Пусть $\mathfrak{R}_n = \{1, \dots, n\}$ – множество, состоящее из n элементов. Рассматриваются подмножества $M_j \subset \mathfrak{R}_n$, $j = 1, \dots, s$, где s – количество подмножеств. Через $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}$ мы будем обозначать совокупность этих множеств. Пусть имеется несколько совокупностей множеств $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_g$. Тогда, в свою очередь, через $\mathfrak{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_g\}$ мы обозначим класс этих совокупностей.

Сделаем одно замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать множества $M \subset \mathfrak{R}_n$, совокупности множеств $\mathcal{M} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$, а также классы этих совокупностей $\mathfrak{M}$. Для удобства мощности множеств M мы будем обозначать $\text{card } M$, а мощности совокупностей множеств $\mathcal{M}$ и классов совокупностей $\mathfrak{M}$ обозначать $\#\mathcal{M}$ и $\#\mathfrak{M}$, соответственно.

Совокупность множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}$ будем называть *равномерно расположенной (р.р.) в $\mathfrak{R}_n$ с константой $c > 0$* , если для всякого натурального t , $1 \leq t \leq n$, и всякого подмножества $R \subset \mathfrak{R}_n$ такого, что $\text{card } R = t$, выполнено следующее:

$$\#\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq \frac{t \log t}{c \log n}.$$

ЛЕММА 1. *Каковы бы ни были натуральное число c и натуральное число k , делящееся на c , для числа n , заданного равенством $n = k^{k/c}$, и числа s , заданного равенством $s = n/c$, можно выделить класс $\mathfrak{M}$ таких р.р. в $\mathfrak{R}_n$*

с константой с совокупностей множеств, что для всякой совокупности $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ справедливо следующее:

$$\#\mathcal{M} = s, \quad (1)$$

$$\forall M \in \mathcal{M} \quad \text{card } M = k. \quad (2)$$

Доказательство сформулированной леммы мы проведем с помощью индуктивного процесса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. 1) *Основание индуктивного процесса.* Пусть $i \leq j$, $\mathfrak{R}_{i,j} = \{i, i+1, \dots, j\}$ — отрезок натурального ряда.

Положим $\nu = 1$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}_{1,k^\nu} = \mathfrak{R}_{1,k} \subset \mathfrak{R}_n$. (Вложение выполнено, так как $1 \leq k/c$.) Положим множество M равным $\mathfrak{R}_{1,k^\nu}$. Определим совокупность множеств $\mathcal{M}$ как совокупность, состоящую из единственного множества M . И, наконец, введем класс совокупностей $\mathfrak{M}_1$ — класс, состоящий из единственной совокупности $\mathcal{M}$. Покажем, что так определенный класс совокупностей $\mathfrak{M}_1$ обладает следующими свойствами:

- (i) $\forall \mathcal{M} \in \mathfrak{M}_1 \quad \#\mathcal{M} = 1 = \nu k^{\nu-1}$;
- (ii) любая совокупность $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_1$ р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с константой c .

Первое свойство, очевидно, вытекает из построения совокупности множеств $\mathcal{M}$ и того факта, что $\nu = 1$. Докажем справедливость второго утверждения. Для этого, исходя из определения, необходимо показать, что для всякого натурального t , $1 \leq t \leq n$, и всякого множества $R \subset \mathfrak{R}_n$ такого, что $\text{card } R = t$, выполняется неравенство

$$\#\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq \frac{t \log t}{c \log n}. \quad (3)$$

Нетрудно убедиться в том, что оценку (3) в наших предположениях о совокупности множеств $\mathcal{M}$ достаточно проводить для величин t таких, что $1 \leq t \leq k^\nu$, и для множеств $R \subset \mathfrak{R}_{1,k^\nu}$. Поэтому если $t = k^\nu = k$, то по построению в единственном существующем в $\mathfrak{R}_{1,k^\nu}$ t -элементном множестве $R = \mathfrak{R}_{1,k^\nu}$ опять же в силу построения лежит в точности одно множество из совокупности $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_1$, тогда как

$$\frac{t \log t}{c \log n} = \frac{k \log k}{c \frac{k}{c} \log k} = 1.$$

Значит, действительно, требуемое неравенство выполняется. Если же $1 \leq t < k^\nu$, то каково бы ни было множество $R \subset \mathfrak{R}_{1,k^\nu}$ такое, что $\text{card } R = t$, в нем нет ни одного множества из совокупности $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_1$, тогда как $\frac{t \log t}{c \log n} \geq 0$. Следовательно, нужное неравенство снова выполняется. Свойство (ii) доказано полностью.

Построением класса совокупностей $\mathfrak{M}_1$ со свойствами (i) и (ii) основание индуктивного процесса завершается.

2) *Шаг индуктивного процесса.* Пусть $1 < \nu \leq k/c$. Рассмотрим множество $\mathfrak{R}_{1,k^{\nu-1}} \subset \mathfrak{R}_n$. (Вложение выполнено, так как $\nu \leq k/c$.) Предположим, что уже

построен класс $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ такой, что для всякой совокупности множеств $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_{\nu-1}$ выполнено следующее:

$$\mathcal{M} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^{\nu-1}}}, \quad \#\mathcal{M} = (\nu-1)k^{\nu-2}, \quad (4)$$

$$\mathcal{M} \text{ р.р. в } \mathfrak{R}_n \text{ с константой } c. \quad (5)$$

Покажем, что, исходя из сделанного предположения, удастся построить класс $\mathfrak{M}_{\nu}$ такой, что для всякой совокупности множеств $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_{\nu}$

$$\mathcal{M} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^{\nu}}}, \quad \#\mathcal{M} = \nu k^{\nu-1}, \quad (6)$$

$$\mathcal{M} \text{ р.р. в } \mathfrak{R}_n \text{ с константой } c. \quad (7)$$

Для этого рассмотрим следующее разбиение:

$$\mathfrak{R}_{1,k^{\nu}} = \mathfrak{R}_{1,k^{\nu-1}} \sqcup \mathfrak{R}_{k^{\nu-1}+1,2k^{\nu-1}} \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_{(k-1)k^{\nu-1}+1,k^{\nu}}.$$

Определим теперь все совокупности множеств $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_{\nu}$ так, чтобы каждая из них удовлетворяла следующим условиям:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{M}_k \sqcup \mathcal{M}^{\nu},$$

$$\text{где } \mathcal{M}_j \subset 2^{\mathfrak{R}_{(j-1)k^{\nu-1}+1,jk^{\nu-1}}}, \quad \mathcal{M}_j \in \mathfrak{M}_{\nu-1}, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\mathcal{M}^{\nu} = \{M_1^{\nu}, \dots, M_{k^{\nu-1}}^{\nu}\}.$$

Здесь множества $M_1^{\nu}, \dots, M_{k^{\nu-1}}^{\nu}$ любые, определенные из условий:

- (i) $\text{card } M_j^{\nu} = k, j = 1, \dots, k^{\nu-1}$;
- (ii) $\text{card}(M_j^{\nu} \cap \mathfrak{R}_{(i-1)k^{\nu-1}+1,ik^{\nu-1}}) = 1 \quad \forall j = 1, \dots, k^{\nu-1} \text{ и } \forall i = 1, \dots, k$;
- (iii) $M_i^{\nu} \cap M_j^{\nu} = \emptyset$ при $i \neq j$ и $i, j = 1, \dots, k^{\nu-1}$.

Ясно, что для каждой таким образом построенной совокупности множеств $\mathcal{M}$ выполнено свойство (6). Покажем, что, кроме того, любая совокупность $\mathcal{M}$, построенная в рамках описанной конструкции, удовлетворяет условию (7).

Зафиксируем произвольную совокупность $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_{\nu}$. Заметим снова, что оценке (3), необходимую для обоснования равномерной расположенности совокупности множеств $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{R}_n$ с константой c , достаточно проводить лишь для величин t таких, что $1 \leq t \leq k^{\nu}$, и множеств R , $\text{card } R = t$, таких, что $R \subset \mathfrak{R}_{1,k^{\nu}}$. Доказательство того, что для любых натуральных t , $1 \leq t \leq k^{\nu}$, и для любых множеств R , $\text{card } R = t$, $R \subset \mathfrak{R}_{1,k^{\nu}}$, выполняется оценка (3), очевидно, равносильно доказательству того, что эта оценка выполняется для любых натуральных t , $1 \leq t \leq k^{\nu}$, для любых натуральных чисел $t_1, \dots, t_k$ таких, что $\forall j \quad 0 \leq t_j \leq k^{\nu-1}$ и $\sum_{\alpha=1}^k t_{\alpha} = t$, и для любых множеств R таких, что $\text{card } R = t$ и $\forall j \quad \text{card}(R \cap \mathfrak{R}_{(j-1)k^{\nu-1}+1,jk^{\nu-1}}) = t_j$. Возникают два случая.

Случай 1. Величина t , $1 \leq t \leq k^{\nu}$, произвольна, величины $t_1, \dots, t_k$ такие, что $\forall j \quad 0 \leq t_j \leq k^{\nu-1}$, $\sum_{\alpha=1}^k t_{\alpha} = t$ и найдется хотя бы одно $t_j = 0$, множество $R \subset \mathfrak{R}_{1,k^{\nu}}$, $\text{card } R = t$, $\forall j \quad \text{card}(R \cap \mathfrak{R}_{(j-1)k^{\nu-1}+1,jk^{\nu-1}}) = t_j$, произвольно. Пусть

и таково, что величины $t_{i_1}, \dots, t_{i_u}$ отличны от нуля, а все остальные величины из набора $t_1, \dots, t_k$ равны нулю. Тогда легко видеть, что

$$\#\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq \sum_{\alpha=1}^u \frac{t_{i_\alpha} \log t_{i_\alpha}}{c \log n} \leq \frac{t \log t}{c \log n},$$

чем оценка (3) в случае 1 доказана полностью.

Случай 2. Величина t , $1 \leq t \leq k^\nu$, произвольна, величины $t_1, \dots, t_k$ такие, что $\forall j \ 1 \leq t_j \leq k^{\nu-1}$, $\sum_{\alpha=1}^k t_\alpha = t$, множество $R \subset \mathfrak{R}_{1, k^\nu}$, $\text{card } R = t$, $\forall j \ \text{card}(R \cap \mathfrak{R}_{(j-1)k^{\nu-1}+1, jk^{\nu-1}}) = t_j$, произвольно. В этом случае ясно, что

$$\#\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq \sum_{\alpha=1}^k \frac{t_\alpha \log t_\alpha}{c \log n} + \min\{t_1; \dots; t_k\}.$$

Покажем, что всегда

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{t_\alpha \log t_\alpha}{c \log n} + \min\{t_1; \dots; t_k\} \leq \frac{t \log t}{c \log n}.$$

Доказательство этого факта проведем индукцией по величине t , $k \leq t \leq k^\nu$. (Нижняя оценка величины t обусловлена тем, что все $t_j \geq 1$ и $\sum_{\alpha=1}^k t_\alpha = t$.) Если $t = k$, то, очевидно, $t_1 = 1, \dots, t_k = 1$, и следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{t_\alpha \log t_\alpha}{c \log n} + \min\{t_1; \dots; t_k\} = 1 = \frac{k \log k}{c \log n} = \frac{t \log t}{c \log n},$$

в силу чего основание индукции доказано. Пусть $1 < r \leq k^\nu$. Предположим, уже доказано, что при $t = r - 1$ и любых $t_1, \dots, t_k$ таких, что $\forall j \ 1 \leq t_j \leq k^{\nu-1}$ и $\sum_{\alpha=1}^k t_\alpha = r - 1$,

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{t_\alpha \log t_\alpha}{c \log n} + \min\{t_1; \dots; t_k\} \leq \frac{(r-1) \log(r-1)}{c \log n}.$$

Докажем, что тогда при $t = r$ и любых $t_1, \dots, t_k$ таких, что $\forall j \ 1 \leq t_j \leq k^{\nu-1}$ и $\sum_{\alpha=1}^k t_\alpha = r$,

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{t_\alpha \log t_\alpha}{c \log n} + \min\{t_1; \dots; t_k\} \leq \frac{r \log r}{c \log n}.$$

В самом деле, если $t_1 = r/k, \dots, t_k = r/k$, то указанная оценка очевидна. Если же хотя бы одна величина t_j отлична от величины r/k , то найдется $t_{i_1} \geq [r/k] + 1$ и $t_{i_2} \leq [r/k]$. Рассмотрим новый набор величин $t'_1, \dots, t'_k$ таких, что $\forall i \neq i_1 \ t'_i = t_i$,

а при $i = i_1$ $t'_i = t_{i_1} - 1 \geq [r/k]$. Но тогда $\forall j$ $1 \leq t'_j \leq k^{\nu-1}$, $\sum_{\alpha=1}^k t'_\alpha = r - 1$ и $\min\{t'_1; \dots; t'_k\} = \min\{t_1; \dots; t_k\}$. Значит,

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^k \frac{t_\alpha \log t_\alpha}{c \log n} + \min\{t_1; \dots; t_k\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^k \frac{t'_\alpha \log t'_\alpha}{c \log n} - \frac{(t_{i_1} - 1) \log(t_{i_1} - 1)}{c \log n} + \frac{t_{i_1} \log t_{i_1}}{c \log n} + \min\{t'_1; \dots; t'_k\} \\ &\leq \frac{(r-1) \log(r-1)}{c \log n} - \frac{(t_{i_1} - 1) \log(t_{i_1} - 1)}{c \log n} + \frac{t_{i_1} \log t_{i_1}}{c \log n} \\ &\leq \frac{r \log r}{c \log n}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу монотонности возрастания функции $x \log x - (x-1) \log(x-1)$ при $x > 1$. Тем самым шаг индукции завершен, и оценка (3) в случае 2 также доказана полностью.

Итак, мы показали, что произвольная совокупность множеств $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}_\nu$ удовлетворяет условию (7), и шаг индуктивного процесса завершен.

3) *Вывод.* Сделав k/c шагов описанного индуктивного процесса, мы построим класс $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\frac{k}{c}}$ таких р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с константой c совокупностей множеств, что для всякой совокупности $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ выполнено следующее:

$$\#\mathcal{M} = \frac{k}{c} k^{k/c-1} = \frac{n}{c} = s, \quad (8)$$

$$\forall M \in \mathcal{M} \quad \text{card } M = k. \quad (9)$$

Этим построением лемма 1 доказана полностью.

§ 4. Вторая комбинаторная лемма

Пусть снова $\mathfrak{R}_n$ — множество, состоящее из n элементов, $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$ — совокупность подмножеств множества $\mathfrak{R}_n$. Подмножество S будем называть *системой общих представителей (с.о.п.) для $\mathcal{M}$* , если $S \cap M_j \neq \emptyset$ $\forall j = 1, \dots, s$. Обозначим

$$\tau = \tau(\mathcal{M}) = \min_S (\text{card } S) = \text{card } \Sigma,$$

где минимум берется по всем с.о.п. для $\mathcal{M}$. Здесь $\Sigma = \Sigma(\mathcal{M})$ есть та с.о.п., на которой этот минимум достигается ($\Sigma(\mathcal{M})$ определяется по $\mathcal{M}$, вообще говоря, неоднозначно). Множество $\Sigma(\mathcal{M})$ естественно называть *минимальной с.о.п. для $\mathcal{M}$* . Величину

$$Z(n, k, s) = \max_{\mathcal{M}} \tau(\mathcal{M}),$$

где максимум берется по всем совокупностям множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$, для которых $\text{card } M_j \geq k$ $\forall j$, мы будем называть *максимальным τ* . Общеизвестна верхняя оценка для величины $Z(n, k, s)$:

$$Z(n, k, s) < \max \left\{ \frac{n}{k}; \frac{n}{k} \log \frac{sk}{n} \right\} + \frac{n}{k} + 1 \quad \forall n, k, s.$$

Кроме того, в работе [2] при некоторых ограничениях на значения параметров n, k, s получено асимптотическое выражение для $Z(n, k, s)$.

В настоящей работе мы покажем, что выполнена следующая

ЛЕММА 2. *Если k – достаточно большое натуральное число, делящееся на 12, величина n задана равенством $n = k^{k/12}$, величина s задана равенством $s = n/12$, то существует совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$ такая, что*

$$\forall M_j \in \mathcal{M} \quad \text{card } M_j = k, \quad j = 1, \dots, s, \quad (10)$$

$$\mathcal{M} \text{ р.р. в } \mathfrak{R}_n \text{ с константой } 12, \quad (11)$$

$$\tau(\mathcal{M}) \gg \frac{n(\log \log n)^2}{\log n}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $\mathfrak{M}$ – класс равномерно расположенных в $\mathfrak{R}_n$ с константой 12 совокупностей множеств, построенный так же, как в лемме 1. Тогда для всякой совокупности множеств $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$, очевидно, выполнены условия (10) и (11) леммы 2. Покажем, что из класса $\mathfrak{M}$ можно выделить такую совокупность множеств $\mathcal{M}$, что для этой совокупности выполнено также условие (12) леммы 2. Ясно, что с построением такой совокупности доказательство леммы 2 будет завершено. Снова рассмотрим индуктивный процесс.

1) **Основание индуктивного процесса.** Рассмотрим натуральные числа ν и μ . Положим $\nu = 30$ и $\mu = 30$. Будем считать, что $k \geq 360$. Рассмотрим множество $\mathfrak{R}_{1,k^\nu} \subset \mathfrak{R}_n$. (Вложение выполнено, так как $k \geq 360$.) Пусть $\mathcal{N}_{\nu,\mu} = \{N_{\nu,\mu}^1, \dots, N_{\nu,\mu}^{\nu k^{\nu-1}}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^\nu}}$ – произвольная р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с константой 12 совокупность множеств, построенная на ν -ом шаге описанного в лемме 1 индуктивного процесса, т.е., пользуясь обозначениями леммы 1, $\mathcal{N}_{\nu,\mu} \in \mathfrak{M}_\nu$. Определим далее величину $l_{\nu,\mu} = \left\lfloor \frac{1}{4} k^{\nu-1} \log \mu \right\rfloor$. Тогда из предъявленного в лемме 1 построения сразу же вытекает, что $\tau(\mathcal{N}_{\nu,\mu}) \geq k^{\nu-1} > l_{\nu,\mu}$.

Построением совокупности множеств $\mathcal{N}_{30,30} = \{N_{30,30}^1, \dots, N_{30,30}^{30k^{29}}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^{30}}}$ такой, что эта совокупность р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с константой 12 и $\tau(\mathcal{N}_{30,30}) > l_{30,30} = \left\lfloor \frac{1}{4} k^{29} \log 30 \right\rfloor$, завершается основание индуктивного процесса.

2) **Шаг индуктивного процесса.** Будем рассматривать теперь величины ν и μ такие, что $\nu \geq 30, \mu \geq 30, \mu \leq \nu$ и $\nu + \eta \leq k/12$, где $\eta = 64[\mu \log \mu \log k]$. Рассмотрим множество $\mathfrak{R}_{1,k^\nu} \subset \mathfrak{R}_n$. (Вложение выполнено, так как $\nu \leq k/12$.) Допустим, что уже построена совокупность множеств $\mathcal{N}_{\nu,\mu} = \{N_{\nu,\mu}^1, \dots, N_{\nu,\mu}^{\nu k^{\nu-1}}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^\nu}}$ такая, что в обозначениях леммы 1 $\mathcal{N}_{\nu,\mu} \in \mathfrak{M}_\nu$ и $\tau(\mathcal{N}_{\nu,\mu}) > l_{\nu,\mu} = \left\lfloor \frac{1}{4} k^{\nu-1} \log \mu \right\rfloor$. Покажем, что тогда можно построить совокупность множеств $\mathcal{N}_{\nu+\eta,\mu+1} = \{N_{\nu+\eta,\mu+1}^1, \dots, N_{\nu+\eta,\mu+1}^{(\nu+\eta)k^{\nu+\eta-1}}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta}}}$ такую, что $\mathcal{N}_{\nu+\eta,\mu+1} \in \mathfrak{M}_{\nu+\eta}$ и $\tau(\mathcal{N}_{\nu+\eta,\mu+1}) > l_{\nu+\eta,\mu+1} = \left\lfloor \frac{1}{4} k^{\nu+\eta-1} \log(\mu+1) \right\rfloor$. Таким образом, шаг рассматриваемого индуктивного процесса заключается в переходе от пары величин (ν, μ) к паре величин $(\nu + \eta, \mu + 1)$.

Для построения совокупности множеств $\mathcal{N}_{\nu+\eta,\mu+1}$ рассмотрим следующие раз-

биения множества $\mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta}}$:

$$(1.1) \quad \mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta}} = \mathfrak{R}_{1,k^{\nu}} \sqcup \mathfrak{R}_{k^{\nu}+1,2k^{\nu}} \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_{(k^{\eta}-1)k^{\nu}+1,k^{\nu+\eta}};$$

$$(1.2) \quad \mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta}} = \mathfrak{R}_{1,k^{\nu+1}} \sqcup \mathfrak{R}_{k^{\nu+1}+1,2k^{\nu+1}} \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_{(k^{\eta-1}-1)k^{\nu+1}+1,k^{\nu+\eta}};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(1.\eta) \quad \mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta}} = \mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta-1}} \sqcup \mathfrak{R}_{k^{\nu+\eta-1}+1,2k^{\nu+\eta-1}} \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_{(k-1)k^{\nu+\eta-1}+1,k^{\nu+\eta}}.$$

Далее построение сведется к нахождению совокупностей множеств $\mathcal{N}_1 \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta}}}$, $\dots$, $\mathcal{N}_{\eta} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1,k^{\nu+\eta}}}$, каждая из которых отвечает разбиению с соответствующим номером в смысле выполнения следующих свойств:

$$\forall \alpha = 2, \dots, \eta \quad \mathcal{N}_{\alpha} = \mathcal{H}_{1,\alpha} \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{H}_{k^{\eta-\alpha}+1,\alpha}, \quad (13)$$

где $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$, $\beta = 1, \dots, k^{\eta-\alpha+1}$, — такая совокупность множеств, что

- (i) $\mathcal{H}_{\beta,\alpha} = \{H_{\beta,\alpha}^1, \dots, H_{\beta,\alpha}^{k^{\nu+\alpha-2}}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{(\beta-1)k^{\nu+\alpha-1}+1,\beta k^{\nu+\alpha-1}}}$;
- (ii) $\text{card } H_{\beta,\alpha}^{\gamma} = k \quad \forall \gamma = 1, \dots, k^{\nu+\alpha-2}$;
- (iii) $\forall \gamma_1, \gamma_2 = 1, \dots, k^{\nu+\alpha-2} \quad (\gamma_1 \neq \gamma_2) \quad H_{\beta,\alpha}^{\gamma_1} \cap H_{\beta,\alpha}^{\gamma_2} = \emptyset$;
- (iv) для разбиения

$$\mathfrak{R}_{(\beta-1)k^{\nu+\alpha-1}+1,\beta k^{\nu+\alpha-1}} = \bigsqcup_{u=1}^k \mathfrak{R}_{(\beta-1)k^{\nu+\alpha-1}+(u-1)k^{\nu+\alpha-2}+1,(\beta-1)k^{\nu+\alpha-1}+uk^{\nu+\alpha-2}}$$

$$\text{card}(H_{\beta,\alpha}^{\gamma} \cap \mathfrak{R}_{(\beta-1)k^{\nu+\alpha-1}+(u-1)k^{\nu+\alpha-2}+1,(\beta-1)k^{\nu+\alpha-1}+uk^{\nu+\alpha-2}}) = 1,$$

$$u = 1, \dots, k;$$

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{H}_{1,1} \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{H}_{k^{\eta},1}, \quad (14)$$

где $\mathcal{H}_{\beta,1}$, $\beta = 1, \dots, k^{\eta}$, — такая совокупность множеств, что $\mathcal{H}_{\beta,\alpha} \subset 2^{\mathfrak{R}_{(\beta-1)k^{\nu+1}+1,\beta k^{\nu}}}$ и $\mathcal{H}_{\beta,\alpha} = \mathcal{N}_{\nu,\mu}$.

Другими словами, необходимую для завершения шага индуктивного процесса совокупность множеств $\mathcal{N}_{\nu+\eta,\mu+1} \in \mathfrak{M}_{\nu+\eta}$ мы будем искать в виде $\mathcal{N}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_{\eta}$, последовательно выбирая совокупности множеств $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\eta}$, удовлетворяющие свойствам (13) и (14), с таким расчетом, чтобы было выполнено условие $\tau(\mathcal{N}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_{\eta}) > l_{\nu+\eta,\mu+1}$. (При этом принадлежность таким образом определенной совокупности множеств $\mathcal{N}_{\nu+\eta,\mu+1}$ классу $\mathfrak{M}_{\nu+\eta}$ обеспечена соответствием между конструкцией из доказательства леммы 1 и условиями (13), (14), наложенными на совокупности множеств $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\eta}$.) Покажем теперь, каким образом мы будем осуществлять выбор совокупностей множеств $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\eta}$. Сначала заметим, что в силу условия (14) совокупность $\mathcal{N}_1$ однозначно определяется индуктивным предположением о наличии совокупности $\mathcal{N}_{\nu,\mu}$. Пусть $1 \leq r < \eta$. Предположим, что совокупности множеств $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_r$ уже построены (в частности, при $r = 1$ это так). Тогда возникает два различных случая.

Случай 1. $\tau(\mathcal{N}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_r) > l_{\nu+\eta,\mu+1}$. В этом случае совокупности множеств $\mathcal{N}_{r+1}, \dots, \mathcal{N}_{\eta}$ выбираем произвольно так, чтобы для каждой из них выполнялось условие (13). Тогда тем более $\tau(\mathcal{N}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{N}_{\eta}) > l_{\nu+\eta,\mu+1}$ и, полагая $\mathcal{N}_{\nu+\eta,\mu+1} =$

$\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_\eta$, получаем, что $\mathcal{N}_{\nu+\eta, \mu+1} \in \mathfrak{M}_{\nu+\eta}$, $\tau(\mathcal{N}_{\nu+\eta, \mu+1}) > l_{\nu+\eta, \mu+1}$. Следовательно, шаг индуктивного процесса полностью завершен.

Случай 2. $\tau(\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_r) \leq l_{\nu+\eta, \mu+1}$. Это равносильно тому, что существует $\mathcal{L}_r = \{L_r^1, \dots, L_r^{\overline{s_r}}\}$ – совокупность таких множеств, что $\text{card } L_r^\alpha = l_{\nu+\eta, \mu+1}$, $\alpha = 1, \dots, \overline{s_r}$, и всякое множество L_r^α есть с.о.п. для $\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_r$. Рассмотрим разбиение $(1, r+1)$ множества $\mathfrak{R}_{1, k\nu+\eta}$. Определим $\mathfrak{N}_{r+1}$ – класс всех возможных совокупностей множеств, отвечающих этому разбиению и удовлетворяющих свойству (13). Через $\overline{n_{r+1}}$ обозначим мощность этого класса. Ясно, что

$$\overline{n_{r+1}} = \left(\frac{(k^{\nu+r-1}!)^k}{k^{\nu+r-1}!} \right)^{k^{\eta-r}}.$$

Таким образом, $\mathfrak{N}_{r+1} = \{\mathcal{A}_{r+1}^1, \dots, \mathcal{A}_{r+1}^{\overline{n_{r+1}}}\}$. Наша задача заключается в выборе совокупности множеств $\mathcal{N}_{r+1} \in \mathfrak{N}_{r+1}$ так, чтобы для совокупности множеств $\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_{r+1}$ оставалось как можно меньшее число $l_{\nu+\eta, \mu+1}$ -элементных с.о.п. Для этого каждой совокупности множеств $\mathcal{A}_{r+1}^\alpha \in \mathfrak{N}_{r+1}$ поставим во взаимнооднозначное соответствие элемент $w_\alpha \in \{w_1, \dots, w_{\overline{n_{r+1}}}\} = \mathfrak{R}_{\overline{n_{r+1}}}$. Каждому множеству $L_r^\beta \in \mathcal{L}_r$ поставим в соответствие множество $\Lambda_r^\beta = \{w_\alpha : L_r^\beta \text{ не является с.о.п. для отвечающей элементу } w_\alpha \text{ совокупности множеств } \mathcal{A}_{r+1}^\alpha \in \mathfrak{N}_{r+1}\}$. Таким образом, мы получим совокупность множеств $\mathcal{L}_r = \{\Lambda_r^1, \dots, \Lambda_r^{\overline{s_r}}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{\overline{n_{r+1}}}}$. При этом, если для некоторых $\beta_1 \neq \beta_2$ $\Lambda_r^{\beta_1} = \Lambda_r^{\beta_2}$, то эти множества не отождествляются, в силу чего в самом деле $\#\mathcal{L}_r = \overline{s_r}$. Тем самым будет установлено взаимнооднозначное соответствие между множествами L_r^β из совокупности $\mathcal{L}_r \subset 2^{\mathfrak{R}_{1, k\nu+\eta}}$ и множествами Λ_r^β из совокупности $\mathcal{L}_r \subset 2^{\mathfrak{R}_{\overline{n_{r+1}}}}$. Определим величину $\overline{k_{r, \beta}}$ равенством $\overline{k_{r, \beta}} = \text{card } \Lambda_r^\beta$. Положим $\overline{k_r} = \min_{\beta=1, \dots, \overline{s_r}} \overline{k_{r, \beta}}$. Рассмотрим элемент $w_{\max} \in \mathfrak{R}_{\overline{n_{r+1}}}$ такой, что

$$f_{r+1} = \#\{\Lambda_r^\beta \in \mathcal{L}_r : w_{\max} \in \Lambda_r^\beta\} = \max_{\alpha=1, \dots, \overline{n_{r+1}}} \#\{\Lambda_r^\beta \in \mathcal{L}_r : w_\alpha \in \Lambda_r^\beta\}.$$

Положим $\mathcal{N}_{r+1} = \mathcal{A}_{r+1, \max}$, где $\mathcal{A}_{r+1, \max} \in \mathfrak{N}_{r+1}$ – совокупность множеств, отвечающая элементу $w_{\max} \in \mathfrak{R}_{\overline{n_{r+1}}}$, определенному выше. Ясно, что для таким образом выбранной совокупности множеств $\mathcal{N}_{r+1}$

$$\begin{aligned} \overline{s_{r+1}} &= \#\mathcal{L}_{r+1} = \#\{L_{r+1}^\beta : \text{card } L_{r+1}^\beta = l_{\nu+\eta, \mu+1} \text{ и } L_{r+1}^\beta \text{ есть с.о.п.} \\ &\text{для совокупности множеств } \mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_{r+1}\} = \overline{s_r} - f_{r+1}. \end{aligned}$$

Легко видеть также, что $f_{r+1} \geq \frac{\overline{s_r} \overline{k_r}}{\overline{n_{r+1}}}$, благодаря чему $\overline{s_{r+1}} \leq \overline{s_r} - \frac{\overline{s_r} \overline{k_r}}{\overline{n_{r+1}}}$. Покажем теперь, что последняя величина, в свою очередь, не превосходит величины $\overline{s_r} e^{-k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)}$. Для этого найдем нижнюю оценку величины $\overline{k_r}$. Зафиксировав множество $L_r^j \in \mathcal{L}_r$, получим сначала нижнюю оценку величины $\overline{k_{r, j}} = \text{card } \Lambda_r^j$. Ясно, что для того чтобы получить эту оценку, достаточно получить верхнюю оценку величины $\overline{k_{r, j}}' = \#\{\mathcal{A}_{r+1} \in \mathfrak{N}_{r+1} : L_r^j \text{ есть с.о.п. для } \mathcal{A}_{r+1}\}$, поскольку $\overline{k_{r, j}} = \overline{n_{r+1}} - \overline{k_{r, j}}'$.

Прежде, чем переходить непосредственно к оценке величины $\overline{k_{r, j}}'$, а вместе с ней и величин $\overline{k_{r, j}}$ и $\overline{k_r}$, сделаем некоторые вспомогательные замечания. Рассмотрим

произвольный элемент $\mathfrak{R}_{(\alpha-1)k^\nu+1, \alpha k^\nu}$, $1 \leq \alpha \leq k^\eta$, разбиения (1.1). Покажем, что $\text{card}(L_r^j \cap \mathfrak{R}_{(\alpha-1)k^\nu+1, \alpha k^\nu}) > l_{\nu, \mu} \quad \forall j = 1, \dots, \overline{s_r} \text{ и } \forall \alpha = 1, \dots, k^\eta$. В самом деле, предположив противное, мы сразу убедимся в том, что L_r^j не является с.о.п. для совокупности множеств $\mathcal{N}_{\nu, \mu}$ и, следовательно, для совокупности множеств $\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_r$, что противоречит определению совокупности $\mathcal{L}_r$. Значит, мы можем зафиксировать множества $L_{r, \alpha}^j \subset \mathfrak{R}_{(\alpha-1)k^\nu+1, \alpha k^\nu}$, $1 \leq \alpha \leq k^\eta$, такие, что $L_{r, \alpha}^j \subset (L_r^j \cap \mathfrak{R}_{(\alpha-1)k^\nu+1, \alpha k^\nu})$ и $\text{card } L_{r, \alpha}^j = l_{\nu, \mu}$. Рассмотрим теперь множество $D_r^j = L_r^j \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{k^\eta} L_{r, \alpha}^j$. Это множество, очевидно, таково, что $D_r^j \subset \mathfrak{R}_{1, k^{\nu+\eta}}$ и

$$\begin{aligned} \text{card } D_r^j &= l_{\nu+\eta, \mu+1} - k^\eta l_{\nu, \mu} \\ &\leq \frac{1}{4} k^{\nu+\eta-1} \log(\mu+1) - \frac{1}{4} k^{\nu+\eta-1} \log \mu + k^\eta \leq \frac{1}{2} \frac{k^{\nu+\eta-1}}{\mu}. \end{aligned}$$

(Последнее неравенство выполнено, так как $\mu \leq \nu \leq k$ и $\nu \geq 30$.)

Вернемся вновь к рассмотрению разбиения $(1. r+1)$ множества $\mathfrak{R}_{1, k^{\nu+\eta}}$. Покажем, что существует набор индексов $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k^{\eta-r}/2})$ такой, что $\forall \beta = 1, \dots, k^{\eta-r}/2$

$$\text{card}(\mathfrak{R}_{(\alpha_\beta-1)k^{\nu+r}+1, \alpha_\beta k^{\nu+r}} \cap D_r^j) \leq \frac{k^{\nu+r-1}}{\mu}.$$

Действительно, предположим противное, т.е. что $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{k^{\eta-r}/2}) \exists \beta, 1 \leq \beta \leq k^{\eta-r}/2$, такое, что

$$\text{card}(\mathfrak{R}_{(\alpha_\beta-1)k^{\nu+r}+1, \alpha_\beta k^{\nu+r}} \cap D_r^j) > \frac{k^{\nu+r-1}}{\mu}.$$

Понятно, что тогда найдется набор индексов $(\gamma_1, \dots, \gamma_{k^{\eta-r}/2})$ такой, что для всякого $\beta = 1, \dots, k^{\eta-r}/2$

$$\text{card}(\mathfrak{R}_{(\gamma_\beta-1)k^{\nu+r}+1, \gamma_\beta k^{\nu+r}} \cap D_r^j) > \frac{k^{\nu+r-1}}{\mu}.$$

Отсюда немедленно следует, что $\text{card } D_r^j > k^{\nu+\eta-1}/(2\mu)$, что невозможно, благодаря сделанной выше оценке. (Запись $\frac{k^{\eta-r}}{2}$ как целого числа корректна, в силу предположения о том, что k делится на 12 нацело.) Тем самым мы нашли некоторый набор элементов разбиения $(1. r+1)$ множества $\mathfrak{R}_{1, k^{\nu+\eta}}$ такой, что каждый представитель этого набора пересекается с множеством D_r^j по множеству, мощность которого не превосходит величины $k^{\nu+r-1}/\mu$. Пусть $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \dots, k^{\eta-r}/2$, — эти элементы разбиения $(1. r+1)$.

Перейдем теперь непосредственно к оценке величины $\overline{k_{r,j}}'$. В силу определения класса $\mathfrak{N}_{r+1}$ как класса, состоящего из всех возможных совокупностей множеств, отвечающих разбиению $(1. r+1)$ и удовлетворяющих условию (13), получаем, что всякая совокупность $\mathcal{A}_{r+1} \in \mathfrak{N}_{r+1}$ имеет вид:

$$\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{H}_{1, r+1} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{H}_{k^{\eta-r}, r+1},$$

где совокупности множеств $\mathcal{H}_{1,r+1}, \dots, \mathcal{H}_{k^{\eta-r}, r+1}$ определяются так же, как и в условии (13) при $\alpha = r + 1$. Поэтому легко видеть, что

$$\overline{k_{r,j}}' = \prod_{\alpha=1}^{k^{\eta-r}} \# \{ \mathcal{H}_{\alpha, r+1} : L_r^j \text{ есть с.о.п. для } \mathcal{H}_{\alpha, r+1} \}.$$

Рассмотрим сначала

$$\bigsqcup_{\gamma=1}^{k^{\eta-r}} \mathfrak{R}_{(\gamma-1)k^{\nu+r}+1, \gamma k^{\nu+r}} \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k^{\eta-r}/2} \mathcal{R}_i = \bigsqcup_{\gamma=1}^{k^{\eta-r}/2} \mathfrak{R}_{(\alpha_{\gamma}-1)k^{\nu+r}+1, \alpha_{\gamma} k^{\nu+r}}.$$

Положим далее, что в обозначениях, принятых нами для записи разбиения $(1, r+1)$ множества $\mathfrak{R}_1, k^{\nu+\eta}$, всякий определенный выше элемент этого разбиения $\mathcal{R}_i$ имеет вид: $\mathcal{R}_i = \mathfrak{R}_{(u_i-1)k^{\nu+r}+1, u_i k^{\nu+r}}$. В таких обозначениях

$$\begin{aligned} \overline{k_{r,j}}' &= \prod_{\beta=1}^{k^{\eta-r}/2} \# \{ \mathcal{H}_{\alpha_{\beta}, r+1} \subset 2^{\mathfrak{R}_{(\alpha_{\beta}-1)k^{\nu+r}+1, \alpha_{\beta} k^{\nu+r}}} : L_r^j \text{ есть с.о.п. для } \mathcal{H}_{\alpha_{\beta}, r+1} \} \\ &\times \prod_{i=1}^{k^{\eta-r}/2} \# \{ \mathcal{H}_{u_i, r+1} \subset 2^{\mathcal{R}_i} : L_r^j \text{ есть с.о.п. для } \mathcal{H}_{u_i, r+1} \} \\ &\leq \left(\frac{(k^{\nu+r-1}!)^k}{k^{\nu+r-1}!} \right)^{k^{\eta-r}/2} \\ &\times \prod_{i=1}^{k^{\eta-r}/2} \# \{ \mathcal{H}_{u_i, r+1} \subset 2^{\mathcal{R}_i} : L_r^j \text{ есть с.о.п. для } \mathcal{H}_{u_i, r+1} \}. \end{aligned}$$

Зафиксируем теперь некоторое $\mathcal{R}_i$ и оценим величину

$$\#\mathfrak{H}_i = \# \{ \mathcal{H}_{u_i, r+1} \subset 2^{\mathcal{R}_i} : L_r^j \text{ есть с.о.п. для } \mathcal{H}_{u_i, r+1} \}.$$

Для этого рассмотрим разбиение

$$\mathcal{R}_i = \bigsqcup_{\gamma=1}^k \mathfrak{R}_{(u_i-1)k^{\nu+r}+(\gamma-1)k^{\nu+r-1}+1, (u_i-1)k^{\nu+r}+\gamma k^{\nu+r-1}}.$$

Определим совокупность множеств $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{(k^{\nu+r-1})^k}\} \subset 2^{\mathcal{R}_i}$ как совокупность, элементами которой являются все возможные множества K_{α} такие, что $\text{card } K_{\alpha} = k$ и

$$\begin{aligned} \text{card}(K_{\alpha} \cap \mathfrak{R}_{(u_i-1)k^{\nu+r}+(\gamma-1)k^{\nu+r-1}+1, (u_i-1)k^{\nu+r}+\gamma k^{\nu+r-1}}) &= 1 \\ \forall \alpha = 1, \dots, (k^{\nu+r-1})^k, \quad \forall \gamma = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\#\mathfrak{H}_i = \# \{ \{K_1, \dots, K_{k^{\nu+r-1}}\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha_1 \neq \alpha_2 \ K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \forall \alpha \ K_{\alpha} \cap L_r^j \neq \emptyset \},$$

и следовательно, задача нахождения верхней оценки величины $\#\mathfrak{H}_i$ равносильна задаче нахождения верхней оценки величины

$$\#\{K_1, \dots, K_{k^{\nu+r-1}}\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha_1 \neq \alpha_2 K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \forall \alpha K_{\alpha} \cap L_r^j \neq \emptyset\}.$$

Рассмотрим классы совокупностей множеств

$$\mathfrak{F}_v = \{\{K_1, \dots, K_v\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha_1 \neq \alpha_2 K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} = \emptyset, \forall \alpha K_{\alpha} \cap L_r^j \neq \emptyset\},$$

$v = 1, \dots, k^{\nu+r-1}$. Из всего сказанного выше ясно, что наша задача состоит в нахождении верхней оценки величины $\#\mathfrak{F}_{k^{\nu+r-1}}$. Получим эту оценку индукцией по величине v , $1 \leq v \leq k^{\nu+r-1}$. В качестве основания индукции найдем сначала оценку величины $\#\mathfrak{F}_1$. Ясно, что $\#\mathfrak{F}_1 = (k^{\nu+r-1})^k - m_1$, где $m_1 = \#\{K_1 \subset \mathcal{K} : K_1 \cap L_r^j = \emptyset\}$. Далее легко видеть, что

$$m_1 = (k^{\nu+r-1} - k^{r-1}l_{\nu,\mu} - x_1) \times \dots \times (k^{\nu+r-1} - k^{r-1}l_{\nu,\mu} - x_k),$$

где $\forall \gamma = 1, \dots, k$

$$x_\gamma = \text{card}(\mathfrak{R}_{(u_i-1)k^{\nu+r}+(\gamma-1)k^{\nu+r-1}+1, (u_i-1)k^{\nu+r}+\gamma k^{\nu+r-1}} \cap D_r^j).$$

Понятно, что, будучи так определены, величины $x_1, \dots, x_k$ устроены таким образом, что $x_\gamma \geq 0$, $\gamma = 1, \dots, k$, и $x_1 + \dots + x_k = \text{card}(\mathcal{R}_i \cap D_r^j)$. Определим величину y равенством $y = \text{card}(\mathcal{R}_i \cap D_r^j)$, а величину x равенством $x = k^{\nu+r-1} - k^{r-1}l_{\nu,\mu}$. Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= (x - x_1) \times \dots \times (x - x_k) = x^k - x^{k-1}\sigma_1 + x^{k-2}\sigma_2 - \dots \\ &= x^{k-1}(x - y) + x^{k-2}\sigma_2 - \dots \geq x^{k-1}(x - y). \end{aligned}$$

(Здесь через $\sigma_1, \dots$ обозначены элементарные симметрические многочлены.) По определению величин x и y , а также в силу выбора множества $\mathcal{R}_i$ такого, что $y \leq k^{\nu+r-1}/\mu$, получаем

$$x - y \geq \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - k^{r-1}l_{\nu,\mu}).$$

(Данная оценка выполнена, так как $\mu \geq 30$, $\mu \leq \nu \leq k$ и величина k достаточно большая.) Значит,

$$m_1 \geq \frac{1}{2}x^k = \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - k^{r-1}l_{\nu,\mu})^k$$

и, следовательно,

$$\#\mathfrak{F}_1 \leq (k^{\nu+r-1})^k - \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - k^{r-1}l_{\nu,\mu})^k,$$

чем завершается основание предлагаемой индукции.

Пусть $1 \leq v < k^{\nu+r-1}/2$. Предположим, уже доказано, что

$$\#\mathfrak{F}_v \leq \frac{1}{v!} \prod_{\gamma=0}^{v-1} \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2} (k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1} l_{\nu,\mu})^k \right).$$

Покажем тогда, что это предположение влечет оценку

$$\#\mathfrak{F}_{v+1} \leq \frac{1}{(v+1)!} \prod_{\gamma=0}^v \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2} (k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1} l_{\nu,\mu})^k \right).$$

В самом деле, легко видеть, что

$$\#\mathfrak{F}_{v+1} = \frac{1}{v+1} \sum_{\mathfrak{F}_v} \# \{ \{K_{v+1}\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha = 1, \dots, v \ K_{v+1} \cap K_\alpha = \emptyset, K_{v+1} \cap L_r^j \neq \emptyset \}.$$

(Здесь суммирование ведется по всем возможным наборам множеств $\{K_1, \dots, K_v\} \in \mathfrak{F}_v$.) Как и в основании индукции, ясно, что при любом фиксированном наборе множеств $\{K_1, \dots, K_v\} \in \mathfrak{F}_v$ выполнено следующее:

$$\begin{aligned} \# \{ \{K_{v+1}\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha = 1, \dots, v \ K_{v+1} \cap K_\alpha = \emptyset, K_{v+1} \cap L_r^j \neq \emptyset \} \\ = (k^{\nu+r-1} - v)^k - m_{v+1}, \end{aligned}$$

где

$$m_{v+1} = \# \{ \{K_{v+1}\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha = 1, \dots, v \ K_{v+1} \cap K_\alpha = \emptyset, K_{v+1} \cap L_r^j = \emptyset \}.$$

Далее легко видеть, что

$$m_{v+1} \geq \prod_{\gamma=1}^k (k^{\nu+r-1} - v - k^{r-1} l_{\nu,\mu} - x_\gamma),$$

где величины $x_1, \dots, x_k$ определены абсолютно так же, как это было сделано в основании индукции и, следовательно, обладают всеми прежними свойствами. Производя выкладки, полностью аналогичные тем, что были проделаны при доказательстве основания индукции, и пользуясь тем, что $v < k^{\nu+r-1}/2$, убеждаемся в том, что

$$m_{v+1} \geq \frac{1}{2} (k^{\nu+r-1} - v - k^{r-1})^k,$$

и следовательно, при любом фиксированном наборе $\{K_1, \dots, K_v\} \in \mathfrak{F}_v$

$$\begin{aligned} \# \{ \{K_{v+1}\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha = 1, \dots, v \ K_{v+1} \cap K_\alpha = \emptyset, K_{v+1} \cap L_r^j \neq \emptyset \} \\ \leq (k^{\nu+r-1} - v)^k - \frac{1}{2} (k^{\nu+r-1} - v - k^{r-1} l_{\nu,\mu})^k, \end{aligned}$$

откуда, в свою очередь, вытекает, что

$$\#\mathfrak{F}_{v+1} \leq \frac{\#\mathfrak{F}_v}{v+1} \left((k^{\nu+r-1} - v)^k - \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - v - k^{r-1}l_{\nu,\mu})^k \right).$$

Последняя величина в силу сделанного предположения индукции не превосходит величины

$$\frac{1}{(v+1)!} \prod_{\gamma=0}^v \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1}l_{\nu,\mu})^k \right),$$

благодаря чему шаг индукции полностью завершен, и при $v = k^{\nu+r-1}/2$ имеем

$$\#\mathfrak{F}_v \leq \frac{1}{v!} \prod_{\gamma=0}^{v-1} \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1}l_{\nu,\mu})^k \right).$$

Пусть теперь $k^{\nu+r-1}/2 \leq v < k^{\nu+r-1}$. Предположим, что

$$\begin{aligned} \#\mathfrak{F}_v &\leq \frac{1}{v!} \prod_{\gamma=0}^{k^{\nu+r-1}/2-1} \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1}l_{\nu,\mu})^k \right) \\ &\times \prod_{\gamma=k^{\nu+r-1}/2}^{v-1} (k^{\nu+r-1} - \gamma)^k. \end{aligned}$$

Покажем, что такое предположение влечет оценку

$$\begin{aligned} \#\mathfrak{F}_{v+1} &\leq \frac{1}{(v+1)!} \prod_{\gamma=k^{\nu+r-1}/2}^v (k^{\nu+r-1} - \gamma)^k \\ &\times \prod_{\gamma=0}^{k^{\nu+r-1}/2-1} \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2}(k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1}l_{\nu,\mu})^k \right). \end{aligned}$$

В самом деле, легко видеть, что, как и прежде,

$$\begin{aligned} \#\mathfrak{F}_{v+1} &= \frac{1}{v+1} \sum_{\mathfrak{F}_v} \#\{\{K_{v+1}\} \subset \mathcal{K} : \\ &\quad \forall \alpha = 1, \dots, v \ K_{v+1} \cap K_\alpha = \emptyset, K_{v+1} \cap L_r^j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Ясно, что при любом фиксированном наборе множеств $\{K_1, \dots, K_v\} \in \mathfrak{F}_v$ выполнено следующее:

$$\#\{\{K_{v+1}\} \subset \mathcal{K} : \forall \alpha = 1, \dots, v \ K_{v+1} \cap K_\alpha = \emptyset, K_{v+1} \cap L_r^j \neq \emptyset\} \leq (k^{\nu+r-1} - v)^k.$$

Следовательно,

$$\#\mathfrak{F}_{v+1} \leq \frac{\#\mathfrak{F}_v}{v+1} (k^{\nu+r-1} - v)^k.$$

Последняя величина в силу сделанного предположения не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(v+1)!} \prod_{\gamma=0}^{k^{\nu+r-1}/2-1} \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2} (k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1} l_{\nu,\mu})^k \right) \\ & \times \prod_{\gamma=k^{\nu+r-1}/2}^v (k^{\nu+r-1} - \gamma)^k, \end{aligned}$$

благодаря чему доказываемая оценка действительно имеет место. Таким образом, из всего сказанного выше следует, что

$$\begin{aligned} \#\mathfrak{F}_{k^{\nu+r-1}} & \leq \frac{1}{(k^{\nu+r-1})!} \prod_{\gamma=k^{\nu+r-1}/2}^{k^{\nu+r-1}-1} (k^{\nu+r-1} - \gamma)^k \\ & \times \prod_{\gamma=0}^{k^{\nu+r-1}/2-1} \left((k^{\nu+r-1} - \gamma)^k - \frac{1}{2} (k^{\nu+r-1} - \gamma - k^{r-1} l_{\nu,\mu})^k \right) \\ & \leq \frac{(k^{\nu+r-1})^k}{k^{\nu+r-1}!} e^{-k^{\nu+r-1}/(8\mu)}. \end{aligned}$$

Значит, при любом фиксированном $\mathcal{R}_i$

$$\#\mathfrak{H}_i = \#\mathfrak{F}_{k^{\nu+r-1}} \leq \frac{(k^{\nu+r-1})^k}{k^{\nu+r-1}!} e^{-k^{\nu+r-1}/(8\mu)}.$$

Тем самым получаем, что

$$\overline{k_{r,j}}' \leq \left(\frac{(k^{\nu+r-1})^k}{k^{\nu+r-1}!} \right)^{k^{\eta-r}/2} \times \prod_{i=1}^{k^{\eta-r}/2} \#\mathfrak{H}_i \leq \overline{n_{r+1}} e^{-k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)}.$$

Это в точности означает, что $\overline{k_{r,j}} \geq \overline{n_{r+1}} - \overline{n_{r+1}} e^{-k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)}$, т.е. оценка величины $\overline{k_{r,j}}$ не зависит от j , и следовательно, в свою очередь,

$$\overline{k_r} \geq \overline{n_{r+1}} - \overline{n_{r+1}} e^{-k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\overline{s_{r+1}} = \overline{s_r} - f_{r+1} \leq \overline{s_r} - \frac{\overline{s_r k_r}}{\overline{n_{r+1}}} \leq \overline{s_r} e^{-k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)}.$$

Построением такой совокупности множеств $\mathcal{N}_{r+1} \in \mathfrak{N}_{r+1}$, что для нее выполняется доказанная выше оценка, завершается рассмотрение случая 2.

Итак, если при некотором $r < \eta$ $\tau(\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_r) > l_{\nu+\eta, \mu+1}$, то, как это было показано при рассмотрении случая 1, шаг индуктивного процесса полностью завершен, и все в порядке. Если же при всех $r < \eta$ $\tau(\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_r) \leq l_{\nu+\eta, \mu+1}$, то

$$\begin{aligned} \overline{s_\eta} &\leq \overline{s_{\eta-1}} e^{-k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)} \leq \dots \leq \overline{s_1} e^{-(\eta-1)k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)} \\ &\leq C_{k^{\nu+\eta}}^{l_{\nu+\eta, \mu+1}} e^{-32\mu \log \mu \log k k^{\nu+\eta-1}/(16\mu)} < 1 \end{aligned}$$

и, очевидно, $\tau(\mathcal{N}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{N}_\eta) > l_{\nu+\eta, \mu+1}$. Значит, и в этом случае шаг индуктивного процесса завершен.

3) *Вывод.* Пусть k – достаточно большое натуральное число. Определим величину α равенством

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k/12 - 30}{64 \log k} \right)^{1/3} - 61 \right],$$

величину ν равенством

$$\nu = 30 + 64 \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} [(30 + \gamma) \log(30 + \gamma) \log k]$$

и, наконец, величину μ равенством $\mu = 30 + \alpha$. Сделаем далее α шагов описанного в пп. 1) и 2) индуктивного процесса. Понятно, что в результате мы получим совокупность множеств $\mathcal{N}_{\nu, \mu} = \{N_{\nu, \mu}^1, \dots, N_{\nu, \mu}^{\nu k^{\nu-1}}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{1, k^\nu}}$ такую, что $\mathcal{N}_{\nu, \mu} \in \mathfrak{M}_\nu$ и $\tau(\mathcal{N}_{\nu, \mu}) > l_{\nu, \mu} = \lceil \frac{1}{4} k^{\nu-1} \log \mu \rceil \gg k^{\nu-1} \log k$. (Здесь вложение множества $\mathfrak{R}_{1, k^\nu}$ в множество $\mathfrak{R}_n$ обеспечено выполнением неравенства $\nu \leq k/12$.) Теперь рассмотрим разбиение

$$\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_{1, k^\nu} \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_{(k^{k/12-\nu}-1)k^\nu+1, k^{k/12}}.$$

Построим совокупность множеств $\mathcal{M}'$, отвечающую этому разбиению в смысле выполнения следующих условий:

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}'_{k^{k/12-\nu}},$$

где каждое $\mathcal{M}'_\beta$ – такая совокупность множеств, что $\mathcal{M}'_\beta \subset 2^{\mathfrak{R}_{(\beta-1)k^\nu+1, \beta k^\nu}}$ и $\mathcal{M}'_\beta = \mathcal{N}_{\nu, \mu}$, $\beta = 1, \dots, k^{k/12-\nu}$. Пополним совокупность множеств $\mathcal{M}'$ k -элементами подмножествами множества $\mathfrak{R}_n$ так, чтобы вновь образованная совокупность множеств $\mathcal{M}$ принадлежала классу $\mathfrak{M}$. Тогда понятно, что

$$\tau(\mathcal{M}) \geq \tau(\mathcal{M}') \gg \frac{n}{k} \log k \gg \frac{n(\log \log n)^2}{\log n},$$

и кроме того, в силу принадлежности совокупности множеств $\mathcal{M}$ классу $\mathfrak{M}$ выполнены утверждения (10) и (11) леммы 2. Тем самым лемма 2 доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 2. Если n – достаточно большое натуральное число, то существуют натуральное число k такое, что $k \asymp \log n / \log \log n$, натуральное число s такое, что $s \leq n$, и р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с константой 11 совокупность множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}$ такая, что $\forall j \text{ card } M_j = k$ и $\tau(\mathcal{M}) \gg n(\log \log n)^2 / \log n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Определим величину k_0 следующим образом: $k_0 = 12[\log n / \log \log n]$, положим $n_0 = k_0^{k_0/12}$. По доказанной лемме 2 если n достаточно велико и, следовательно, k_0 достаточно велико, то для величины n_0 и для величины s_0 , заданной равенством $s_0 = n_0/12$, найдется такая р.р. в $\mathfrak{R}_{n_0}$ с константой 12 совокупность множеств $\mathcal{M}' = \{M_1, \dots, M_{s_0}\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{n_0}}$, что $\forall j \text{ card } M_j = k_0$ и $\tau(\mathcal{M}') \gg n_0(\log \log n_0)^2 / \log n_0$. Поскольку $n_0 = k_0^{k_0/12} = e^{k_0 \log k_0/12} \leq n$, то $\mathfrak{R}_{n_0} \subset \mathfrak{R}_n$. Значит, можно определить разбиение

$$\mathfrak{R}_{[n/n_0]n_0} = \mathfrak{R}_{1,n_0} \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_{([n/n_0]-1)n_0+1, [n/n_0]n_0}.$$

Рассмотрим совокупность множеств $\mathcal{M} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$, отвечающую этому разбиению в смысле выполнения условия

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}_{[n/n_0]},$$

где $\mathcal{M}_\beta$ — такая совокупность множеств, что $\mathcal{M}_\beta \subset 2^{\mathfrak{R}_{(\beta-1)n_0+1, \beta n_0}}$ и $\mathcal{M}_\beta = \mathcal{M}'$, $\beta = 1, \dots, [n/n_0]$. Определим теперь величину k равенством $k = k_0$, а величину s равенством $s = [n/n_0]s_0$. Тогда легко видеть, что $\#\mathcal{M} = s \leq n$, $k \asymp \log n / \log \log n$, $\tau(\mathcal{M}) \gg n(\log \log n)^2 / \log n$ и, наконец, для всякого t , $1 \leq t \leq n$, и для всякого множества $R \subset \mathfrak{R}_n$, $\text{card } R = t$, выполнено

$$\#\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq \frac{t \log t}{12 \log n_0} \leq \frac{t \log t}{11 \log n}.$$

(Последнее неравенство выполнено при достаточно большом n .) Этим построением следствие из леммы 2 доказано полностью.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Докажем, что найдется вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n$ такой, что октаэдр $\mathcal{O}_{\mathbf{a}}^n$ будет допустим относительно решетки $\Lambda_{\mathbf{a}} = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{Z}}$, $d(\mathcal{O}_{\mathbf{a}}^n; \Lambda_{\mathbf{a}}) \gg n(\log \log n)^2 / \log n$, и вектор $\mathbf{a}' \in \mathbb{Q}^n$ такой, что шар $\mathcal{B}_{\mathbf{a}'}^n$ будет допустим относительно решетки $\Lambda_{\mathbf{a}'} = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a}' \rangle_{\mathbb{Z}}$, $d(\mathcal{B}_{\mathbf{a}'}^n; \Lambda_{\mathbf{a}'}) \gg n(\log \log n)^2 / \log n$.

Не ограничивая общности, можно считать, что n — достаточно большое натуральное число. Воспользуемся следствием леммы 2. Рассмотрим построенную в нем р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с константой 11 совокупность множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}$ такую, что $s \leq n$, $\forall j \text{ card } M_j = k \asymp \log n / \log \log n$ и $\tau(\mathcal{M}) \gg n(\log \log n)^2 / \log n$. Каждому множеству $M_j \in \mathcal{M}$ поставим в соответствие простое число p_j , $j = 1, \dots, s$, так, чтобы были выполнены следующие условия: $p_j \geq n$ и $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ — последовательные простые числа. Определим величину q равенством $q = \prod_{j=1}^s p_j$. Каждому элементу $w_i \in \mathfrak{R}_n$ поставим в соответствие рациональное число $\overline{p^i}/q = 1/p^i$, где $\overline{p^i} = \prod_{\{j: w_i \notin M_j\}} p_j$, а $p^i = \prod_{\{j: w_i \in M_j\}} p_j$. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — произвольные натуральные числа, не превосходящие q и взаимнопростые с ним. Определим семейство n -мерных рациональных векторов

$$\mathbf{V} = \left\{ \left(\frac{\overline{p^1} a_1}{q}, \dots, \frac{\overline{p^n} a_n}{q} \right) \right\}_{a_1, \dots, a_n=1}^q, \quad (a_\nu, q) = 1 \quad \forall \nu = 1, \dots, n.$$

В других обозначениях

$$\mathbf{V} = \left\{ \left(\frac{a_1}{p^1}, \dots, \frac{a_n}{p^n} \right) \right\}_{a_1, \dots, a_n=1}^q, \quad (a_\nu, q) = 1 \quad \forall \nu = 1, \dots, n.$$

Ясно, что мощность этого семейства векторов равна $[\varphi(q)]^n$, где φ — это φ -функция Эйлера. Кроме того, при таких определениях нетрудно видеть, что выполняются следующие 2 простых утверждения:

- (i) для любых $a_1, \dots, a_n$ таких, что все они меняются в пределах от 1 до q и все они взаимнопросты с q $(\overline{p^1}a_1, \dots, \overline{p^n}a_n, q) = 1$;
- (ii) при таких же $a_1, \dots, a_n$

$$\left(\frac{\overline{p^1}a_1}{q}, \dots, \frac{\overline{p^n}a_n}{q} \right) \notin \mathbb{Z}^n.$$

Покажем теперь, что имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Каков бы ни был вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, $d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) = \tau(\mathcal{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$. В работе [1] было показано, что $d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) \leq \tau(\mathcal{M})$. Покажем, что, кроме того, $d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) \geq \tau(\mathcal{M})$. Положим $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_m}$ — координатное подпространство, отвечающее координатам $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$. Покажем, что для всякого набора $\{i_1, \dots, i_{n-\tau(\mathcal{M})+1}\} \subset \{1, \dots, n\}$ в координатном подпространстве $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_{n-\tau(\mathcal{M})+1}}$ есть рациональная точка решетки $\Lambda_{\mathbf{a}}$. Зафиксируем произвольное координатное подпространство $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_{n-\tau(\mathcal{M})+1}}$. По определению решетки $\Lambda_{\mathbf{a}} = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{Z}}$ любая ее точка имеет вид: $l\mathbf{a} + \mathbf{b}$, где $l \in \mathbb{Z}$, а $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$. Поэтому для доказательства сформулированного утверждения достаточно предъявить такие $l \in \mathbb{Z}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$, что $l\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_{n-\tau(\mathcal{M})+1}} \cap \mathbb{Q}$. Пусть $\nu_1, \dots, \nu_{\tau(\mathcal{M})-1}$ — номера координатных направлений, отвечающих ортогональному дополнению к $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_{n-\tau(\mathcal{M})+1}}$. Выделим в векторе $\mathbf{a}$ компоненты с номерами $\nu_1, \dots, \nu_{\tau(\mathcal{M})-1}$. Они имеют вид: $a_{\nu_1}/p^{\nu_1}, \dots, a_{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}}/p^{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}}$, соответственно. Покажем, что $\text{НОК}(p^{\nu_1}, \dots, p^{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}}) < q$. В самом деле, предположив противное, мы придем к выводу, что $\forall p_j \exists \nu_\alpha$ такое, что $(p^{\nu_\alpha}, p_j) \neq 1$. А это в точности означает, что $\forall M_j \in \mathcal{M} \exists \nu_\alpha$ такое, что $w_{\nu_\alpha} \in M_j$. Таким образом, по определению с.о.п. получаем, что множество $S = \{w_{\nu_1}, \dots, w_{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}}\} \subset \mathfrak{R}_n$ есть с.о.п. для совокупности множеств $\mathcal{M}$, а это противоречит определению величины $\tau(\mathcal{M})$ как мощности минимальной с.о.п. для совокупности множеств $\mathcal{M}$. С другой стороны, в силу сформулированного выше утверждения (i) $\text{НОК}(p^1, \dots, p^n) = q$. Положим $l = \text{НОК}(p^{\nu_1}, \dots, p^{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}})$, а $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ — целый вектор такой, что

$$b_{i_1} = 0, \dots, b_{i_{n-\tau(\mathcal{M})+1}} = 0, \quad b_{\nu_1} = -\frac{a_{\nu_1}l}{p^{\nu_1}}, \dots, b_{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}} = -\frac{a_{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}}l}{p^{\nu_{\tau(\mathcal{M})-1}}}.$$

Тогда ясно, что вектор $l\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_{n-\tau(\mathcal{M})+1}} \cap \mathbb{Q}$. Значит, действительно, наше утверждение, что $d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) \geq \tau(\mathcal{M})$, доказано полностью, чем доказательство утверждения 1, очевидно, завершено.

Итак, мы продемонстрировали, что $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V} \ d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) \gg n(\log \log n)^2 / \log n$, откуда следует, что для завершения доказательства теоремы 2 достаточно показать возможность выделить из семейства векторов $\mathbf{V}$ такие рациональные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$, что присоединение первого из них к $\mathbb{Z}^n$ влечет получение решетки, в которой октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ является допустимым, а присоединение второго из них к $\mathbb{Z}^n$ влечет получение решетки, в которой шар $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$ допустим. Без ограничения общности проведем доказательство этого факта для октаэдра, поскольку для шара все дальнейшие рассуждения абсолютно аналогичны. Определим решетку Γ равенством $\Gamma = \langle \mathbb{Z}^n, (1/p^1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1/p^n) \rangle_{\mathbb{Z}}$, а множество $\mathcal{X}$ равенством $\mathcal{X} = (\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n \cap \Gamma) \setminus \{O, \pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n\}$. Далее, если $\mathbf{x}$ – вектор, то величину $\delta(\mathbf{x})$ положим равной единице или нулю, в зависимости от того, является вектор $\mathbf{x}$ целым или нет. Понятно, что в таких обозначениях выполнено

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Каков бы ни был вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, необходимым и достаточным условием допустимости октаэдра $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ в решетке $\Lambda_{\mathbf{a}}$ является выполнение равенства*

$$\sum_{l=1}^q \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \delta(\mathbf{a}l - \mathbf{x}) = 0.$$

Доказательство этого утверждения мы в настоящей работе не приводим.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 (усреднение). *Существует вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ такой, что октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ допустим в решетке $\Lambda_{\mathbf{a}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Доказательство этого утверждения проведем с помощью процесса усреднения. Другими словами, полагая

$$\mathcal{A} = \{a_\nu = 1, \dots, q, (a_\nu, q) = 1 \ \forall \nu = 1, \dots, n\},$$

покажем, что

$$\frac{1}{(\varphi(q))^n} \sum_{a_1, a_n \in \mathcal{A}} \sum_{l=1}^q \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \delta(\mathbf{a}l - \mathbf{x}) < 1.$$

Здесь $\mathbf{a} = (a_1/p^1, \dots, a_n/p^n)$ – произвольный вектор из семейства $\mathbf{V}$, а внешнее суммирование ведется по всем возможным наборам чисел $a_1, \dots, a_n$ из множества $\mathcal{A}$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{(\varphi(q))^n} \sum_{a_1, a_n \in \mathcal{A}} \sum_{l=1}^q \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \delta(\mathbf{a}l - \mathbf{x}) = \frac{1}{(\varphi(q))^n} \sum_{l=1}^{q-1} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{a_1, a_n \in \mathcal{A}} \delta(\mathbf{a}l - \mathbf{x}).$$

Определим величину l_ν равенством $l_\nu = (l, p^\nu)$, $\nu = 1, \dots, n$, решетку Γ_l равенством

$$\Gamma_l = \left\langle \mathbb{Z}^n, \left(\frac{l_1}{p^1}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(0, \dots, 0, \frac{l_n}{p^n} \right) \right\rangle_{\mathbb{Z}},$$

а множество $\mathcal{X}_l$ равенством

$$\mathcal{X}_l = (\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n \cap \Gamma_l) \setminus \{O, \pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n\}.$$

Тогда получим, что

$$\frac{1}{(\varphi(q))^n} \sum_{l=1}^{q-1} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{\overline{a_1, a_n} \in \mathcal{A}} \delta(\mathbf{al} - \mathbf{x}) = \frac{1}{(\varphi(q))^n} \sum_{l=1}^{q-1} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_l} \sum_{\overline{a_1, a_n} \in \mathcal{A}} \delta(\mathbf{al} - \mathbf{x}).$$

Справедливость последнего утверждения немедленно следует из того факта, что при $\mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_l$ и при любых $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ $\delta(\mathbf{al} - \mathbf{x}) = 0$. Теперь рассмотрим произвольное натуральное число ρ , $1 \leq \rho \leq s$, зафиксируем ρ некоторых простых чисел $p_{i_1}, \dots, p_{i_\rho}$ из множества $\{p_1, \dots, p_s\}$ и определим множество

$$\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho} = \{l, 1 \leq l \leq q-1 : l \text{ не делится на } p_{i_1}, \dots, p_{i_\rho} \\ \text{и делится на все остальные простые числа из множества } \{p_1, \dots, p_s\}\}.$$

Ясно, что тогда для всякого числа l , $1 \leq l < q$, существует и притом единственное множество $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$ такое, что $l \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$. Теперь зафиксируем некоторое множество $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$ и число l , ему принадлежащее. Определим величину $t(l)$ равенством $t(l) = \text{card}\{\nu : l_\nu \neq p^\nu\}$ и покажем, что $\rho \leq t(l) \log t(l) / (11 \log n)$. Пусть $p_{i_1}, \dots, p_{i_\rho}$ — простые числа, по которым построено фиксированное выше множество $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$, а $M_{i_1}, \dots, M_{i_\rho}$ — отвечающие им множества из совокупности $\mathcal{M}$. Определим далее множество $R \subset \mathfrak{R}_n$ равенством $R = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_\rho}$. Из предложенной в начале этого параграфа конструкции вытекает, что $\text{card } R = t(l)$. С другой стороны, ясно, что $\rho \leq \#\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\}$. В силу же равномерной расположенности в $\mathfrak{R}_n$ с константой 11 рассматриваемой нами совокупности $\mathcal{M}$ $\#\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq t(l) \log t(l) / (11 \log n)$, в следствие чего $\rho \leq t(l) \log t(l) / (11 \log n)$.

Пусть, как и прежде, фиксированы множество $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$ и величина l , принадлежащая ему. Зафиксируем также некоторый вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_l$ и оценим мощность множества

$$\mathcal{A}_{l, \mathbf{x}} = \{a_\nu = 1, \dots, q, (a_\nu, q) = 1 \ \forall \nu = 1, \dots, n : \delta(\mathbf{al} - \mathbf{x}) = 1\}.$$

Понятно, что

$$\text{card } \mathcal{A}_{l, \mathbf{x}} = \prod_{\nu=1}^n \text{card } \mathcal{A}_{l, \mathbf{x}}^\nu,$$

где

$$\mathcal{A}_{l, \mathbf{x}}^\nu = \left\{ a_\nu = 1, \dots, q, (a_\nu, q) = 1 : \frac{a_\nu l}{p^\nu} - \frac{x_\nu}{p^\nu} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(Здесь предполагается, что всякий вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_l$ имеет вид $(x_1/p^1, \dots, x_n/p^n)$, где $x_1, \dots, x_n$ — некоторые целые числа.) Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{t(l)}$ такие, что $\forall \gamma = 1, \dots, t(l)$ $l_{\alpha_\gamma} \neq p^{\alpha_\gamma}$, а $\beta_1, \dots, \beta_{n-t(l)}$ такие, что $\forall \gamma = 1, \dots, n-t(l)$ $l_{\beta_\gamma} = p^{\beta_\gamma}$. Тогда очевидно, что $\forall \gamma = 1, \dots, n-t(l)$ $\text{card } \mathcal{A}_{l, \mathbf{x}}^{\beta_\gamma} = \varphi(q)$, и следовательно,

$$\text{card } \mathcal{A}_{l, \mathbf{x}} = (\varphi(q))^{n-t(l)} \prod_{\gamma=1}^{t(l)} \text{card } \mathcal{A}_{l, \mathbf{x}}^{\alpha_\gamma}.$$

Легко видеть, что при фиксированном γ , $1 \leq \gamma \leq t(l)$,

$$\text{card } \mathcal{A}_{l,\mathbf{x}}^{\alpha_\gamma} \leq \text{card } \overline{\mathcal{A}_{l,\mathbf{x}}^{\alpha_\gamma}} = \text{card} \left\{ a_{\alpha_\gamma} = 1, \dots, q : \frac{a_{\alpha_\gamma} l}{p^{\alpha_\gamma}} - \frac{x_{\alpha_\gamma}}{p^{\alpha_\gamma}} \in \mathbb{Z} \right\} = \frac{q l^{\alpha_\gamma}}{p^{\alpha_\gamma}}.$$

Значит,

$$\text{card } \mathcal{A}_{l,\mathbf{x}} \leq (\varphi(q))^{n-t(l)} \prod_{\gamma=1}^{t(l)} \frac{q l^{\alpha_\gamma}}{p^{\alpha_\gamma}} = q^{t(l)} (\varphi(q))^{n-t(l)} \det \Gamma_l.$$

С другой стороны, понятно, что

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{X}_l &\leq \text{Vol } \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{t(l)} (\det \Gamma_l)^{-1} \left(1 + \frac{l_{\alpha_1}}{p^{\alpha_1}} + \dots + \frac{l_{\alpha_{t(l)}}}{p^{\alpha_{t(l)}}} \right)^{t(l)} \\ &\leq e^{3t(l)-t(l) \log t(l)} (\det \Gamma_l)^{-1}. \end{aligned}$$

(Последнее неравенство выполняется в силу требования, что $p_j \geq n \forall j = 1, \dots, s$.) Тем самым при фиксированных множестве $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$ и числе l , принадлежащем ему, мы получаем оценку

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_l} \sum_{\overline{a_1, a_n} \in \mathcal{A}} \delta(\mathbf{a}l - \mathbf{x}) \leq e^{3t(l)-t(l) \log t(l)} (\varphi(q))^{n-t(l)} q^{t(l)}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\varphi(q))^n} \sum_{l=1}^{q-1} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_l} \sum_{\overline{a_1, a_n} \in \mathcal{A}} \delta(\mathbf{a}l - \mathbf{x}) \\ &\leq \frac{1}{(\varphi(q))^n} \sum_{\rho=1}^s \sum_{p_{i_1}, \dots, p_{i_\rho}} \sum_{l \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}} e^{3t(l)-t(l) \log t(l)} (\varphi(q))^{n-t(l)} q^{t(l)} \\ &\leq \sum_{\rho=1}^s \sum_{p_{i_1}, \dots, p_{i_\rho}} \sum_{l \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}} e^{4t(l)-t(l) \log t(l)}. \end{aligned}$$

Кроме того, из условия $\rho \geq 1$ следует, что $\forall l \ t(l) \gg \log n / \log \log n$, и следовательно, учитывая, что $\rho \leq t(l) \log t(l) / (11 \log n)$, получаем $e^{4t(l)-t(l) \log t(l)} < 1/n^{4\rho}$. Далее, в силу закона распределения простых чисел $\text{card } \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho} \leq p_{i_1} \times \dots \times p_{i_\rho} \leq n^{2\rho}$. Отсюда окончательно имеем

$$\sum_{\rho=1}^s \sum_{p_{i_1}, \dots, p_{i_\rho}} \sum_{l \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}} e^{4t(l)-t(l) \log t(l)} < \sum_{\rho=1}^s \sum_{p_{i_1}, \dots, p_{i_\rho}} \frac{1}{n^{2\rho}} \leq \sum_{\rho=1}^s \frac{C_n^\rho}{n^{2\rho}} \leq 1.$$

Этой оценкой утверждение 3 доказано полностью, а вместе с ним полностью доказана и теорема 2.

§ 6. Доказательство предложения 2

Доказательство оценки из предложения 2 мы проведем только для октаэдра, поскольку для шара все рассуждения аналогичны. Покажем, что найдется такая натуральная величина t и такой набор рациональных n -мерных векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\}$, что октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ допустим относительно решетки $\Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t} = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t \rangle_{\mathbb{Z}}$ и $d(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n; \Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t}) \geq n - [10n/\log n]$.

Пусть p – наибольшее простое число, не превосходящее n . Положим $t = n - [10n/\log n]$. Определим семейство $\mathbf{W}_t$ наборов рациональных n -мерных векторов следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_t = \left\{ \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} : \mathbf{a}_1 = \left(\frac{a_{1,1}}{p}, \dots, \frac{a_{1,n-t+1}}{p}, 0, \dots, 0 \right), \right. \\ \mathbf{a}_2 = \left(\frac{a_{2,1}}{p}, \dots, \frac{a_{2,n-t+2}}{p}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \mathbf{a}_t = \left(\frac{a_{t,1}}{p}, \dots, \frac{a_{t,n}}{p} \right), \\ \left. 1 \leq a_{i,j} \leq p-1 \ \forall i = 1, \dots, t, \ \forall j = 1, \dots, n-t+i \right\}. \end{aligned}$$

При таком определении ясно, что каков бы ни был набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} \in \mathbf{W}_t$, решетку $\Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t} = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t \rangle_{\mathbb{Z}}$ нельзя получить из решетки $\mathbb{Z}^n$ присоединением менее чем t векторов. Кроме того, нетрудно показать, что тем самым $d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t}) \geq t$. В самом деле, предположив противное и воспользовавшись определением дефекта, получим противоречие со сказанным выше, так как в этом случае

$$\Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t} = \langle \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_f}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

(Здесь f – величина, фигурирующая в определении дефекта, а $d = d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t})$.) Из всего сказанного немедленно следует, что для завершения доказательства предложения 2, достаточно показать существование такого набора векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} \in \mathbf{W}_t$, что октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ допустим в соответствующей решетке $\Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t}$. Как и при доказательстве теоремы 2, воспользуемся критерием допустимости октаэдра $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ в решетке $\Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t}$. Определим решетку Γ равенством

$$\Gamma = \left\langle \mathbb{Z}^n, \left(\frac{1}{p}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(0, \dots, 0, \frac{1}{p} \right) \right\rangle_{\mathbb{Z}},$$

а множество $\mathcal{X}$ равенством $\mathcal{X} = (\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n \cap \Gamma) \setminus \{O, \pm \mathbf{e}_1, \dots, \pm \mathbf{e}_n\}$. Далее, если $\mathbf{x}$ – вектор, то, как и прежде, величину $\delta(\mathbf{x})$ положим равной единице или нулю, в зависимости от того, является вектор $\mathbf{x}$ целым или нет. Тогда имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Каков бы ни был набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} \in \mathbf{W}_t$, необходимым и достаточным условием допустимости октаэдра $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ в решетке $\Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t}$ является выполнение равенства*

$$\sum_{l_1, \dots, l_t=1}^p \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \delta(\mathbf{a}_1 l_1 + \dots + \mathbf{a}_t l_t - \mathbf{x}) = 0.$$

Доказательство утверждения 4, как и доказательство утверждения 2, мы также не приводим в настоящей работе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 (усреднение). *Существует набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} \in \mathbf{W}_t$ такой, что октаэдр $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ допустим в решетке $\Lambda_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 5. Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве утверждения 3, покажем, что

$$\frac{1}{(p-1)^{nt-t(t-1)/2}} \sum_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t} \sum_{l_1, \dots, l_t=1}^p \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \delta(\mathbf{a}_1 l_1 + \dots + \mathbf{a}_t l_t - \mathbf{x}) < 1.$$

Здесь внешнее суммирование ведется по всем возможным наборам векторов из семейства $\mathbf{W}_t$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p-1)^{nt-t(t-1)/2}} \sum_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t} \sum_{l_1, \dots, l_t=1}^p \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \delta(\mathbf{a}_1 l_1 + \dots + \mathbf{a}_t l_t - \mathbf{x}) \\ & \leq \frac{1}{(p-1)^{nt-t(t-1)/2}} \sum_{l_1, \dots, l_t=1}^p \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum'_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t} \delta(\mathbf{a}_1 l_1 + \dots + \mathbf{a}_t l_t - \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Здесь внутреннее суммирование в последнем выражении ведется по всем векторам из $\mathbf{W}'_t$, где $\mathbf{W}'_t$ — следующее семейство наборов векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'_t = \left\{ \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} : \mathbf{a}_1 = \left(\frac{a_{1,1}}{p}, \dots, \frac{a_{1,n-t+1}}{p}, 0, \dots, 0 \right), \right. \\ \mathbf{a}_2 = \left(\frac{a_{2,1}}{p}, \dots, \frac{a_{2,n-t+2}}{p}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \mathbf{a}_t = \left(\frac{a_{t,1}}{p}, \dots, \frac{a_{t,n}}{p} \right), \\ \left. 1 \leq a_{i,j} \leq p \ \forall i = 1, \dots, t, \ \forall j = 1, \dots, n-t+i \right\}. \end{aligned}$$

Выражение же $\sum'_{l_1, \dots, l_t=1}^p$ означает, что суммирование распространяется на все наборы величин $l_1, \dots, l_t$, каждая из которых меняется от единицы до p , кроме набора $l_1 = \dots = l_t = p$. Зафиксируем теперь величину ρ такую, что $0 \leq \rho \leq t-1$. Зафиксируем, далее, такой набор различных чисел $\{i_1, \dots, i_\rho\}$, что $\forall \nu = 1, \dots, \rho$ $1 \leq i_\nu \leq t$, и определим множество $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$ равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho} = \{l_i = 1, \dots, p, \ i = 1, \dots, t : l_{i_\nu} = p \ \forall \nu = 1, \dots, \rho, \\ 1 \leq l_i \leq p-1 \ \forall i \notin \{i_1, \dots, i_\rho\}\}. \end{aligned}$$

Тогда понятно, что для всякого набора чисел $l_1, \dots, l_t$ из соответствующей области суммирования существует и притом единственное множество $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$, содержащее этот набор чисел. Итак, пусть фиксировано число ρ , набор различных чисел $\{i_1, \dots, i_\rho\}$, отвечающее ему множество $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$ и набор величин $l_1, \dots, l_t$, принадлежащих этому множеству. Зафиксируем, кроме того, вектор $\mathbf{x} = (x_1/p, \dots, x_n/p) \in \mathcal{X}$ и определим множество

$$\mathcal{A}_{l_1, \dots, l_t, \mathbf{x}} = \{\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\} \in \mathbf{W}'_t : \delta(\mathbf{a}_1 l_1 + \dots + \mathbf{a}_t l_t - \mathbf{x}) = 1\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\text{card } \mathcal{A}_{l_1, \dots, l_t, \mathbf{x}} \leq \frac{p^{nt-t(t-1)/2}}{p^{n-\rho}}.$$

Отсюда немедленно получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p-1)^{nt-t(t-1)/2}} \sum'_{l_1, \dots, l_t=1}^p \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum'_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t} \delta(\mathbf{a}_1 l_1 + \dots + \mathbf{a}_t l_t - \mathbf{x}) \\ & \leq \frac{1}{(p-1)^{nt-t(t-1)/2}} \sum_{\rho=0}^{t-1} \sum_{i_1, \dots, i_\rho} \sum_{\overline{l_1, l_t} \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{p^{nt-t(t-1)/2}}{p^{n-\rho}}. \end{aligned}$$

Здесь под выражением $\sum_{i_1, \dots, i_\rho}$ следует понимать суммирование по всем наборам различных чисел $i_1, \dots, i_\rho$, каждое из которых меняется в определенных выше пределах, а под выражением $\sum_{\overline{l_1, l_t} \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}}$ следует понимать суммирование по всем наборам чисел $l_1, \dots, l_t$ из множества $\mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}$. Далее, ясно, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p-1)^{nt-t(t-1)/2}} \sum_{\rho=0}^{t-1} \sum_{i_1, \dots, i_\rho} \sum_{\overline{l_1, l_t} \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{p^{nt-t(t-1)/2}}{p^{n-\rho}} \\ & < \sum_{\rho=0}^{t-1} \sum_{i_1, \dots, i_\rho} \sum_{\overline{l_1, l_t} \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{e^{2n}}{p^{n-\rho}} \\ & \leq \sum_{\rho=0}^{t-1} \sum_{i_1, \dots, i_\rho} \sum_{\overline{l_1, l_t} \in \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_\rho}} \frac{2^n}{n!} p^n \left(1 + \frac{n}{p}\right)^n \frac{e^{2n}}{p^{n-\rho}} \leq \frac{p^t e^{6n}}{n^n} \leq 1, \end{aligned}$$

в следствие чего утверждение 5, а вместе с ним и предложение 2 доказаны полностью.

Список литературы

1. *Мощевитин Н. Г.* Дефект допустимого октаэдра в решетке // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 4. С. 558–568.
2. *Кузюрин Н. Н.* Асимптотическое исследование задачи о покрытии // Проблемы кибернетики. 1980. № 37. С. 19–56.
3. *Gruber P. M., Lekkerkerker C. G.* Geometry of numbers. Amsterdam: North-Holland, 1987.
4. *Коробов Н. М.* Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматлит, 1963.
5. *Wessels U.* Die Sätze von White und Mordell über kritische hitter von polytopen in der dimensionen 4 und 5 // Preprint. Diplomarbeit: Mathematisches Institute der Ruhr – Universität Bochum, 1989.
6. *Рышков С. С.* К проблеме отыскания совершенных квадратичных форм от многих переменных // Труды МИАН. 1976. Т. 142. С. 215–239.
7. *Захарова Н. В.* Центрировки 8-мерных решеток, сохраняющие репер последовательных минимумов // Труды МИАН. 1980. Т. 152. С. 97–123.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31.10.1996