Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Талалян, Г. Г. Геворкян, Г. А. Карагулян, О некоторых линейных методах суммирования рядов Фурье, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 5, 129–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:28:50

УДК 517.51

А. А. Талалян, Г. Г. Геворкян, Г. А. Карагулян

О некоторых линейных методах суммирования рядов Фурье

В работе даны новые нетрадиционные методы суммирования тригонометрических рядов Фурье от непрерывных функций, обеспечивая их равномерную сходимость.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Обозначения и вспомогательные замечания

Через $C_{2\pi}$ будем обозначать класс непрерывных на действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ периодических, с периодом 2π , функций, а

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin x/2}, \quad (1.1)$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin x/2} \right)^2 \quad (1.2)$$

— ядра Дирихле и Фейера. Обозначим через

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.3)$$

частные суммы ряда Фурье интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ периодической, с периодом 2π , функции $f(x)$, т.е.

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.4)$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.5)$$

Хорошо известно, что если $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ — бесконечная треугольная матрица, где $n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, n$, и

$$u_n(f, x, \Lambda) = \frac{a_0 \lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.6)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке АО “Закнефтегазпром-Прометей”.

то для равномерной сходимости последовательности $u_n(f, x, \Lambda)$ к $f(x)$ для всех $f(x) \in C_{2\pi}$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.7)$$

$$L_n(\Lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(x, \Lambda)| dx = 2 \int_0^{\pi} |u_n(x, \Lambda)| dx = O(1), \quad (1.8)$$

где

$$u_n(x, \Lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kx \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

называется ядром линейного оператора $u_n(f, x, \Lambda)$. Получению достаточных условий на матрицу Λ для выполнимости соотношения (1.8) при предположении, что (1.7) выполнено, посвящено много глубоких исследований (см. [1]–[4], [13]–[15]). Эффективное достаточное условие для сходимости последовательности $u_n(f, x, \Lambda)$ установлено в фундаментальной работе С. М. Никольского [1]:

ТЕОРЕМА (С. М. Никольский). *Для того чтобы последовательность $u_n(f, x, \Lambda)$ сходилась равномерно к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ необходимо, а в случае, когда $\Delta^2 \lambda_k^{(n)} \leq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$, $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, \dots$) или $\Delta^2 \lambda_k^{(n)} \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$, $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, \dots$) также и достаточно, чтобы выполнялись условие (1.7) и следующие условия*

$$\lambda_k^{(n)} = O(1) \quad (1.10)$$

равномерно относительно всех n и k ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} = O(1), \quad (1.11)$$

$$\text{где } \Delta^2 \lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)}.$$

Более того, доказано также, что при выполнении указанных условий на $\lambda_k^{(n)}$ средние (1.6), где $f(x)$ – интегрируемая на $[0, 2\pi]$ функция, сходятся к $f(x)$ во всех точках Лебега.

Важный класс линейных методов суммирования представляют линейные методы, порожденные последовательностями обобщенных мер $\{\mu_n\}$, определенных на σ -алгебре борелевских множеств действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющих следующим четырем условиям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}) = 1, \quad (1.12)$$

$$\sup_n |\mu_n| \mathbb{R} < +\infty, \quad (1.13)$$

где $|\mu_n| = \mu_n^+ + \mu_n^-$, а μ_n^+ и μ_n^- – положительная и отрицательная части в разложении Хана меры μ_n .

Для любого $A > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(-\infty, -A) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(A, +\infty) = 0. \quad (1.14)$$

Для любого борелевского множества $E \subset (-\infty, 0)$ имеем

$$\mu_n(E) = \mu_n(-E), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.15)$$

где $-E_n = \{x : -x \in E\}$.

Обозначив

$$\lambda_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx d\mu_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (1.16)$$

легко видеть, что условие (1.7) для этих $\lambda_k^{(n)}$ выполнено.

Легко видеть также, что если обозначить

$$u_{\mu_n}(f, x) = \frac{a_0 \lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.17)$$

$$u_{\mu_n}(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kx \right), \quad (1.18)$$

где $\lambda_k^{(n)}$ определены равенствами (1.16), то

$$\begin{aligned} u_{\mu_n}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} D_n(x-t) d\mu_n(t), \\ u_{\mu_n}(f, x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) u_{\mu_n}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} S_n(f, x-t) d\mu_n(t). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из вышеизложенного ясно, что для равномерной сходимости последовательности полиномов $u_{\mu_n}(f, x)$ к $f(x)$ на всем классе $C_{2\pi}$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |u_{\mu_n}(x)| dx < +\infty, \quad (1.20)$$

ибо согласно (1.12)–(1.15) и (1.16) числа $\lambda_k^{(n)} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $k = 1, 2, \dots$. В общем же случае, как это следует из (1.13) и (1.19), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u_{\mu_n}(x)| dx \leq \frac{4}{\pi^2} |\mu_n|(\mathbb{R}) \ln n + O(1) \leq c \ln n + O(1), \quad (1.21)$$

где $c = 4/\pi^2 \sup_n |\mu_n|(\mathbb{R})$.

Если меры μ_n сосредоточены на интервалах $(-1/p_n, 1/p_n)$ и $\sup_n n/p_n < +\infty$, то порожденный ими линейный метод суммирования регулярен, так как

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)}| + |\lambda_n^{(n)}| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left| \int_{\mathbb{R}} \cos kt d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} \cos(k+1)t d\mu_n \right| \right) + \left| \int_{\mathbb{R}} \cos nt d\mu_n \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1/p_n}^{1/p_n} 2|\sin t/2| d|\mu_n| + |\mu_n|(\mathbb{R}) \\ &\leq |\mu_n|(\mathbb{R}) + 2n \sin 1/2 p_n |\mu_n|(\mathbb{R}) \leq c < +\infty \end{aligned} \quad (1.22)$$

для всех n .

С другой стороны, для любой последовательности $p_n \rightarrow +\infty$, для которой последовательность $\{n/p_n\}$ не ограниченная, существует удовлетворяющая условиям (1.12)–(1.15) последовательность мер μ_n , с носителями $(-1/p_n, 1/p_n)$, для которых соответствующий линейный метод нерегулярен. В этом можно убедиться, взяв $\lambda_0^{(n)} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, и

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\sin k \cdot 1/p_n}{k \cdot 1/p_n}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Этот метод порожден последовательностью μ_n , которая удовлетворяет условиям (1.12)–(1.15) (см. § 2 настоящей статьи), но, как легко видеть,

$$\sup_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\sin k \cdot 1/p_n}{k \cdot 1/p_n} - \frac{\sin(k+1)1/p_n}{(k+1)1/p_n} \right| + \left| \frac{\sin n \cdot 1/p_n}{n \cdot 1/p_n} \right| \right) = +\infty.$$

Однако, как легко видеть, на классе рядов Фурье, сходящихся равномерно или в метриках L_p , $1 \leq p < +\infty$, на $[0, 2\pi]$, все методы, порожденные последовательностями мер μ_n , удовлетворяющих условиям (1.12)–(1.15), регулярен. Точнее, из сходимости последовательности $S_n(f, x)$ к $f(x)$ равномерно или в метриках $L_p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$, следует соответственно равномерная сходимость или сходимость в метриках $L_p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$, последовательности $u_{\mu_n}(f, x)$ к той же функции $f(x)$.

Было бы интересно выяснить “регулярны” ли эти методы на классе почти всюду сходящихся рядов Фурье? В частности, сходятся ли почти всюду полиномы $u_{\mu_n}(f, x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$? Заметим также, что в рассматриваемый класс линейных методов суммирования входят многие хорошо известные методы. В частности, ядра Бернштейна

$$R_n(x) = \frac{1}{2}[D_n(x - \gamma_n) - D_n(x + \gamma_n)] \quad (1.23)$$

представляются в виде

$$R_n(x) = \int_R D_n(x - t) d\mu_n(t), \quad (1.24)$$

где дискретная мера μ_n сосредоточена в точках $-\gamma_n$, γ_n и на каждой из них равна $1/2$.

Методы суммирования с ядрами (1.23), представляющие обобщения методов Бернштейна–Рогозинского, введены и обстоятельно исследованы Б. С. Стечкиным [9]. Для оценки норм ядер (1.18) во многих случаях применяется равенство (см. [1])

$$\begin{aligned} u_{\mu_n}(x) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) F_k(x) \Delta^2 \lambda_k^{(n)} + (\lambda_{n-1}^{(n)} - \lambda_n^{(n)}) n F_{n-1}(x) + \lambda_n^{(n)} D_n(x) \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Пусть $g(t)$ – определенная на $\mathbb{R}$ функция ограниченной вариации, которая непрерывна слева в каждой точке и

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 1. \quad (1.26)$$

Если кроме того $g(t)$ такова, что порожденная ею мера $\mu(t)$ обладает свойством

$$\mu([a, b)) = g(b) - g(a) = \mu((-b, -a]) = g(-a + 0) - g(-b + 0) \quad (1.27)$$

для всех $[a, b) \subset (-\infty, 0)$, то как легко видеть, если $\{P_n\}$ – монотонно стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел и если через μ_{P_n} обозначена мера, порожденная функцией $g(P_n x)$, то последовательность мер $\{\mu_{P_n}\}$ будет обладать свойствами (1.12)–(1.15).

Обозначим

$$u_{\mu_{P_n}}(f, x) = u_{g, P_n}(f, x), \quad u_{\mu_{P_n}}(x) = u_{g, P_n}(x). \quad (1.28)$$

Согласно приведенным выше обозначениям имеем

$$u_{g, P_n} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} D_n(x-t) dg(P_n t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kx \right), \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} u_{g, P_n}(f, x) &= \int_{\mathbb{R}} S_n(f, x-t) dg(P_n t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) u_{g, P_n}(t) dt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \end{aligned} \quad (1.30)$$

в которых интегралы на $\mathbb{R}$ понимаются как несобственные интегралы Стильеса. Далее, учитывая четность меры μ_{P_n} , можно обозначить

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(n)} &= \int_{\mathbb{R}} \cos kt d\mu_{P_n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos kt dg(P_n t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{k}{P_n} t dg(t) = \widehat{g}\left(\frac{k}{P_n}\right), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\widehat{g}(x)$ – преобразование Фурье–Стилтьеса функции $g(x)$.

Заметим также, что согласно (1.26) $\lambda_0^{(n)} = 1$.

Основная часть настоящей статьи посвящена исследованию операторов $u_{g, P_n}(f, x)$ для некоторых конкретных $g(x)$ (см. §2), здесь же мы докажем две простые общие теоремы, которые будут использованы в дальнейшем.

Обозначим для краткости

$$\begin{aligned} L_n(g, P_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} |u_{g, P_n}(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} |u_{g, P_n}(x)| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kx \right| dx, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где $\lambda_k^{(n)}$ определены равенствами (1.31).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть последовательность мер $\{\mu_n\}$ удовлетворяет условиям (1.12)–(1.15), причем для некоторой последовательности P_n положительных чисел, где

$$\sup_n \frac{n}{P_n} < +\infty, \quad (1.33)$$

выполняются равенства

$$|\mu_n|((-\infty, -1/P_n)) = |\mu_n|((1/P_n, +\infty)) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.34)$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u_{\mu_n}(x)| dx = \left| \int_{\mathbb{R}} \cos nt d\mu_n(t) \right| \cdot \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1). \quad (1.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (\cos kt - 2 \cos(k+1)t + \cos(k+2)t) d\mu_n(t) \right| \\ &\leq \int_{-1/P_n}^{1/P_n} 4 \sin^2 \frac{t}{2} d|\mu_n| \leq \frac{|\mu_n|(\mathbb{R})}{P_n^2} \leq \frac{c}{P_n^2}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} |\lambda_{n-1}^{(n)} - \lambda_n^{(n)}| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (\cos(n-1)t - \cos nt) d\mu_n \right| \\ &\leq \int_{-1/P_n}^{1/P_n} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| d|\mu_n| \leq \frac{|\mu_n|(\mathbb{R})}{P_n} \leq \frac{c}{P_n}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где $c = \sup_n |\mu_n|(\mathbb{R}) < +\infty$. Из (1.35), (1.36) и из равенства (1.25), учитывая (1.33), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |u_{\mu_n}(x)| dx &\leq |\lambda_n^{(n)}| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx + \frac{c}{P_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) + \frac{cn}{P_n} \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \cos nt d\mu_n(t) \right| \cdot \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Обратное неравенство легко следует из (1.25), (1.35) и (1.36). Из доказанной теоремы следует, что при выполнении условий (1.12)–(1.15), (1.33) и (1.34) для

равномерной сходимости последовательности полиномов $u_{\mu_n}(f, x)$ к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx \, d\mu_n \right| = O\left(\frac{1}{\ln n}\right). \quad (1.39)$$

В частности, если

$$\frac{1}{P_n} = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad (1.40)$$

то рассматривая меры μ_n , сосредоточенные в точках $1/P_n$, $-1/P_n$ и равные $1/2$ в каждой из них, получим, что последовательность

$$\frac{1}{2}(S_n(f, x - 1/P_n) + S_n(f, x + 1/P_n))$$

равномерно сходится к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $g(t)$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям (1.26) и (1.27), а ее преобразование Фурье–Стилтьеса $\widehat{g}(x)$ дважды дифференцируемо и удовлетворяет условиям

$$|(\widehat{g}(x))'| \leq \frac{c_g}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad |(\widehat{g}(x))''| \leq \frac{c_g}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.41)$$

где c_g — постоянная, зависящая только от g . Тогда для любой последовательности $P_n \rightarrow +\infty$ выполняется неравенство

$$L(g, P_n) = \frac{4}{\pi^2} \left| \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \right| \ln n + O(1). \quad (1.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.32), (1.31) и (1.25) имеем

$$\begin{aligned} L(g, P_n) &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-2} |\lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} - \lambda_{k+2}^{(n)}| (k+1) \int_0^\pi F_k(x) \, dx \\ &\quad + \frac{2}{\pi} |\lambda_{n-1}^{(n)} - \lambda_n^{(n)}| \cdot n \int_0^\pi F_{n-1}(x) \, dx + \frac{2}{\pi} |\lambda_n^{(n)}| \int_0^\pi |D_n(x)| \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left| \widehat{g}\left(\frac{k}{P_n}\right) - 2\widehat{g}\left(\frac{k+1}{P_n}\right) + \widehat{g}\left(\frac{k+2}{P_n}\right) \right| \cdot (k+1) \\ &\quad + \left| \widehat{g}\left(\frac{n-1}{P_n}\right) - \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \right| \cdot n + \left| \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \right| \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + 3 \right) \\ &= I_1(g, P_n) + I_2(g, P_n) + I_3(g, P_n). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Так как

$$\left| \widehat{g}\left(\frac{k}{P_n}\right) - 2\widehat{g}\left(\frac{k+1}{P_n}\right) + \widehat{g}\left(\frac{k+2}{P_n}\right) \right| \leq |\widehat{g}''(\xi_k^{(n)})| \cdot \frac{2}{P_n^2}, \quad (1.44)$$

$$\frac{k}{P_n} \leq \xi_k^{(n)} \leq \frac{k+2}{P_n}, \quad (1.45)$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 I_1(g, P_n) &\leq \sum_{k=0}^{n-2} |\widehat{g}''(\xi_k^{(n)})| \cdot \frac{k+1}{P_n^2} \leq 2c_g \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k+1}{(1+k/P_n)^{2+\varepsilon} P_n^2} \\
 &\leq 2c_g \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(1+(k-1)/P_n)^{2+\varepsilon} P_n^2} = 2c_g \sum_{k=1}^{n-1} \frac{kP_n^\varepsilon}{(P_n+k-1)^{2+\varepsilon}} \\
 &\leq 2c_g \left(\sum_{k=1}^{[P_n]} \frac{kP_n^\varepsilon}{P_n^{2+\varepsilon}} + \sum_{k=[P_n]+1}^{n-1} \frac{P_n^\varepsilon}{k^{1+\varepsilon}} \right), \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

которое имеет место, начиная с тех номеров n , для которых $P_n \geq 1$.

Из (1.46) следует, что

$$I_1(g, P_n) = O(1). \tag{1.47}$$

Далее, используя первое условие (1.41), можно писать

$$I_2(g, P_n) = n \left| \widehat{g}\left(\frac{n-1}{P_n}\right) - \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \right| = \frac{n}{P_n} \left| \widehat{g}'\left(\frac{n}{P_n} - \frac{\theta_n}{P_n}\right) \right|, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1. \tag{1.48}$$

Из (1.48) и (1.41) следует

$$I_2(g, P_n) \leq 2 \left| \left(\frac{n}{P_n} - \frac{\theta_n}{P_n} \right) \cdot \widehat{g}'\left(\frac{n}{P_n} - \frac{\theta_n}{P_n}\right) \right| \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq n/P_n} |t \widehat{g}'(t)| = O(1). \tag{1.49}$$

Так как $\widehat{g}(x)$ – ограниченная функция на $\mathbb{R}$, то

$$I_3(g, P_n) = \left| \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \right| \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + 3 \right) = \frac{4}{\pi^2} \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \ln n + O(1). \tag{1.50}$$

Из (1.49), (1.47) и (1.43) следует

$$L(g, P_n) \leq \frac{4}{\pi^2} \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \ln n + O(1). \tag{1.51}$$

С другой стороны, из (1.25) и (1.29) следует

$$L(g, P_n) \geq \frac{4}{\pi^2} \widehat{g}\left(\frac{n}{P_n}\right) \ln n + O(1), \tag{1.52}$$

что вместе с (1.51) влечет (1.42) и теорема доказана.

Рассмотрим теперь тот случай, когда

$$g(x) = \int_{-\infty}^x \Phi(t) dt, \tag{1.53}$$

где $\Phi(x)$ – интегрируемая на $\mathbb{R}$ четная функция и

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x) dx = 1. \tag{1.54}$$

В этом случае обозначим

$$u_{g, P_n}(f, x) = \Phi_{n, P_n}(f, x), \quad u_{g, P_n}(x) = u_{\Phi, P_n}(x), \quad (1.55)$$

$$L_n(g, P_n) = L_n(\Phi, P_n). \quad (1.56)$$

Тогда согласно (1.29), (1.30) и (1.31) будем иметь

$$u_{\Phi, P_n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} D_n(x-t) P_n \Phi(P_n t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kx \right), \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} L_n(\Phi, P_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} |u_{\Phi, P_n}(x)| dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} D_n(x-t) P_n \Phi(P_n t) dt \right| dx, \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n, P_n}(f, x) &= \int_{\mathbb{R}} S_n(f, x-t) P_n \Phi(P_n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) u_{\Phi, P_n}(t) dt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \end{aligned} \quad (1.59)$$

где

$$\lambda_0^{(n)} = 1, \quad \lambda_k^{(n)} = \int_{\mathbb{R}} \cos kt P_n \Phi(P_n t) dt = \int_{\mathbb{R}} \cos \frac{k}{P_n} t \Phi(t) dt = \widehat{\Phi} \left(\frac{k}{P_n} \right). \quad (1.60)$$

Здесь $\widehat{\Phi}(x)$ — преобразование Фурье функции Φ .

Из теоремы 1.1 следует

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\Phi(x)$ — четная финитная функция с носителем, лежащем на отрезке $[-A, A]$, $A > 0$. Тогда для любой монотонно стремящейся к $+\infty$ последовательности P_n , удовлетворяющей условию (1.33), имеет место равенство

$$L_n(\Phi, P_n) = \left| \int_{\mathbb{R}} \cos nt P_n \Phi(P_n t) dt \right| \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1) = \widehat{\Phi} \left(\frac{n}{P_n} \right) \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1) \quad (1.61)$$

и при $P_n = n$ последовательность $\Phi_{n, P_n}(f, x) = \Phi_{n, n}(f, x)$ равномерно стремится к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда

$$\widehat{\Phi}(1) = \int_{\mathbb{R}} \cos t \Phi(t) dt = 0. \quad (1.62)$$

При выполнении же условия (1.62) верна оценка

$$L_n(\Phi, n) \leq \int_{\mathbb{R}} |\Phi(t)| dt \cdot \left(2 \sin^2 \frac{A}{2n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2 \left| \sin \frac{A}{2n} \right| \cdot n \right) \leq A \left(\frac{A}{4} + 1 \right) \int_{\mathbb{R}} |\Phi(t)| dt. \quad (1.63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нуждается в проверке только вторая часть утверждения теоремы. Во первых заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} n\Phi(nt) \cos nt \, dt = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) \cos t \, dt = \widehat{\Phi}(1). \quad (1.64)$$

Пользуясь условием (1.62) и неравенствами (1.35), (1.36) и (1.38), где меры $\mu_n(E)$ определены равенством

$$\mu_n(E) = \int_E n\Phi(nt) \, dt, \quad (1.65)$$

а вместо P_n взяты числа n/A , мы получим неравенство (1.63).

Для применения удобна также следующая теорема, представляющая частный случай теоремы 1.2.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $\Phi(x)$ – четная интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая условию (1.54), а ее преобразование Фурье $\widehat{\Phi}(x)$ дважды дифференцируемо и выполнены условия

$$|(\widehat{\Phi}(x))'| < \frac{C_{\Phi}}{1+|x|}, \quad |(\widehat{\Phi}(x))''| < \frac{C_{\Phi}}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.66)$$

где C_{Φ} – постоянная, зависящая только от Φ .

Тогда для любой последовательности $\{P_n\}$ положительных чисел, монотонно стремящейся к $+\infty$, имеет место равенство

$$L(\Phi, P_n) = \left| \widehat{\Phi}\left(\frac{n}{P_n}\right) \right| \ln n + O(1). \quad (1.67)$$

Отметим, что здесь условие на $(\widehat{\Phi}(x))'$ в (1.66) на самом деле следует из условия на $(\widehat{\Phi}(x))''$. То же самое верно относительно условий (1.41) в теореме 1.2. В этом нетрудно убедиться, пользуясь тем, что $\widehat{g}(x)$ и $\widehat{\Phi}(x)$ – ограниченные на $\mathbb{R}$ функции.

Доказанные теоремы 1.1–1.4 полезны тем, что условиям этих теорем удовлетворяют многие известные методы суммирования и кроме того, взяв в их формулировках конкретные функции $g(x)$, $\Phi(x)$ можно построить в явном виде различные методы суммирования, имеющие ограниченные постоянные Лебега $L_n(g, n)$, $L_n(\Phi, n)$. Например, взяв в теореме 1.3

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1/4 |\cos x|, & x \in (-\pi, \pi), \\ 0, & x \notin (-\pi, \pi), \end{cases} \quad (1.68)$$

и, полагая

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \cos kx \cdot |\cos nx| \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.69)$$

получим

$$\lambda_n^{(n)} = 0, \quad \lambda_0^{(n)} = 1, \quad \lambda_k^{(n)} = \frac{\cos k\pi/2n}{1 - (k/n)^2} \left(1 - \frac{k}{n} \sin k\pi/2n\right), \quad 1 \leq k < n. \quad (1.70)$$

Согласно второй части формулировки теоремы 1.3 последовательность полиномов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \Phi_{n,n}(f, x) \quad (1.71)$$

равномерно сходится к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ и при этом

$$|L_n(\Phi, n)| \leq \pi \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) < 2\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.72)$$

Из теоремы 1.4 следует

ТЕОРЕМА 1.5. Если четная интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция удовлетворяет условиям (1.54) и (1.66), то для любой последовательности $P_n \uparrow +\infty$, $P_n > 0$, удовлетворяющей условию

$$P_n = O(n|\ln n|^{-1/\varepsilon}) \quad (\varepsilon \geq 0), \quad (1.73)$$

последовательность полиномов $\Phi_{n,P_n}(f, x)$ равномерно сходится к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$.

Действительно, так как $\widehat{\Phi}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, имеем

$$-\widehat{\Phi}(x) = \int_x^\infty (\widehat{\Phi}(t))' dt, \quad x > 0, \quad \widehat{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^x (\widehat{\Phi}(t))' dt, \quad x < 0. \quad (1.74)$$

Поэтому из (1.66) следует

$$\widehat{\Phi}(x) = O(|x|^{-\varepsilon}). \quad (1.75)$$

Отсюда из неравенства (1.73) и из равенства (1.67) получим

$$L(\Phi, P_n) = O(1). \quad (1.76)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как в теоремах 1.3 и 1.4 $\widehat{\Phi}(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$, то из равенств (1.67) и (1.61) следует, что для любой финитной функции Φ или функции Φ , удовлетворяющей условию (1.66), существует зависящая от Φ постоянная C_Φ такая, что при $P_n \leq C_\Phi n$, $n = 1, 2, \dots$, последовательность $L(\Phi, P_n)$ стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда согласно известной теореме для такой последовательности $\{P_n\}$ существует $f \in C_{2\pi}$ такая, что последовательность полиномов $\Phi_{n,P_n}(f, x)$ в некоторой точке x неограниченно расходится.

В §2 подробно изучается поведение средних $\Phi_{n,P_n}(f, x)$ для некоторых конкретных $\Phi(x)$.

§2. Средние Стеклова частных сумм рядов Фурье

Пусть $h > 0$ и положим

$$\Phi_h^{(1)}(t) = \Phi_h(t) = \begin{cases} 1/(2h), & t \in [-h, h], \\ 0, & t \notin [-h, h], \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\Phi_h^{(m)}(x) = (\Phi_h^{(m-1)} * \Phi_h^{(1)})(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_h^{(m-1)}(x-t) \Phi_h^{(1)}(t) dt, \quad m \geq 2. \quad (2.2)$$

Нетрудно убедиться (см. [5, т. I, с. 264]), что $\Phi_h^{(m)}$ — четные положительные функции с носителями $[-mh, mh]$, причем

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_h^{(m)}(t) dt = \int_{-mh}^{mh} \Phi_h^{(m)}(t) dt = 1, \quad (2.3)$$

а из (2.1) и (2.2) следует

$$\widehat{\Phi}_h^{(m)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt \Phi_h^{(m)}(t) dt = \left(\frac{\sin hx}{hx} \right)^m. \quad (2.4)$$

Обозначим

$$\Phi_{h,n,P_n}^{(m)}(f, x) = \int_{\mathbb{R}} S_n(f, x-t) P_n \Phi_h^{(m)}(P_n t) dt. \quad (2.5)$$

Тогда в силу четности $\Phi_h^{(m)}(t)$ и в силу (2.4) получаем

$$\Phi_{h,n,P_n}^{(m)}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k \cdot h/P_n}{k \cdot h/P_n} \right)^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (2.6)$$

Таким образом, полиномы (2.6) представляют средние Стеклова (порядка m и с шагом h/P_n) частной суммы $S_n(f, x)$.

При $m = 1$ полиномы (2.6) согласно (2.1) и (2.5) имеют вид

$$\Phi_{h,n,P_n}^{(1)}(f, x) = \frac{P_n}{2h} \int_{-h/P_n}^{h/P_n} S_n(f, x-t) dt. \quad (2.7)$$

Из (2.4) и теоремы 1.3 немедленно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Для того чтобы полиномы*

$$\begin{aligned} \Phi_{h,n,n}^{(m)}(f, x) &= n \int_{\mathbb{R}} S_n(f, x-t) \Phi_h^{(m)}(nt) dt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k \cdot h/n}{k \cdot h/n} \right)^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned} \quad (2.8)$$

равномерно сходились к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ необходимо и достаточно, чтобы h/π было целым числом.

Таким образом, для любых натуральных p и m и для любой функции $f \in C_{2\pi}$ полиномы

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin \frac{\pi k p}{n}}{\frac{\pi k}{n} p} \right)^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.9)$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f , равномерно сходятся к $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Это утверждение следует из теоремы 2.1, если в ней полагать $h = p\pi$.

Так как носитель функции $\Phi_{\pi P}^{(m)}(x)$ лежит в интервале $(-\pi P m, \pi P m)$, то пользуясь теоремой 1.3 (см. неравенство (1.63)), получаем следующую оценку сверху констант Лебега $L_n(\Phi_{\pi P}^{(m)}(x), n)$ ядер метода суммирования (2.6)

$$L_n(\Phi_{\pi P}^{(m)}, n) \leq m P \pi \left(\frac{m P \pi}{4} + 1 \right). \quad (2.10)$$

Так как при $m \geq 3$ из (2.4) вытекает

$$(\widehat{\Phi}_h^{(m)}(x))'' \leq \frac{c}{1 + |x|^{2+\varepsilon}}, \quad (\widehat{\Phi}_h^{(m)}(x))' \leq \frac{c}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}, \quad (2.11)$$

то согласно теореме 1.4 имеет место

ТЕОРЕМА 2.2. Если $m \geq 3$ и $\Phi(x) = \Phi_\pi^{(m)}(x)$, то для любой последовательности $P_n \uparrow +\infty$

$$L_n(\Phi, P_n) = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\sin \pi n / P_n}{\pi n / P_n} \right)^m \ln n + O(1). \quad (2.12)$$

Из теоремы 2.2 следует

ТЕОРЕМА 2.3. Если $m \geq 3$ и $P_n = O(n(\ln n)^{-1/m})$, то для любой функции $f \in C_{2\pi}$ последовательность полиномов

$$\Phi_{\pi, n, P_n}^{(m)}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k \cdot \pi / P_n}{k \cdot \pi / P_n} \right)^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.13)$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f , равномерно сходится к $f(x)$.

Равенство (2.12) дает необходимое и достаточное условие на P_n , при котором константы Лебега операторов $\Phi_{\pi, n, P_n}^{(m)}(f, x)$, $m \geq 3$, равномерно ограничены. Тем самым получено необходимое и достаточное условие на P_n , при котором $\Phi_{\pi, n, P_n}^{(m)}(f, x)$, $m \geq 3$, равномерно сходится к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$. Это условие выражается равенством

$$\left(\frac{P_n}{n} \right)^m \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right|^m \ln n = O(1). \quad (2.14)$$

Получение такого условия в случае $m = 1$ и $m = 2$ требует более детального изучения соответствующих ядер преобразований.

В случае $m = 1$ имеем

$$\Phi(t) = \Phi_\pi^{(1)}(t) = \begin{cases} 1/(2\pi), & t \in [-\pi, \pi], \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi], \end{cases} \quad (2.15)$$

и тогда согласно (1.57) и (1.59) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{n, P_n}(f, x) &= \int_{\mathbb{R}} S_n(f, x-t) P_n \Phi(P_n t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) u_{\Phi, P_n}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) F_{n, P_n}(x-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} F_{n, P_n}(x) &= u_{\Phi, P_n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} D_n(x-t) P_n \Phi(P_n t) dt \\ &= \frac{P_n}{2\pi^2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} D_n(x-t) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Константы Лебега $L_n(\Phi, P_n)$ имеют вид

$$L_n(\Phi, P_n) = \int_{-\pi}^{\pi} |F_{n, P_n}(x)| dx = \frac{P_n}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} D_n(x-t) dt \right| dx. \quad (2.18)$$

Согласно теореме 1.3 и равенству (2.4), в котором положено $m = 1$ и $h = \pi$, если

$$\sup_n \frac{n}{P_n} < +\infty, \quad (2.19)$$

то

$$L_n(\Phi, P_n) = \widehat{\Phi}\left(\frac{n}{P_n}\right) \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \left| \frac{\sin \pi \cdot n/P_n}{\pi \cdot n/P_n} \right| \ln n + O(1). \quad (2.20)$$

Из (2.20) следует, что если

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{P_n} < 1, \quad (2.21)$$

то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(\Phi, P_n) = +\infty, \quad (2.22)$$

и тогда последовательность

$$\Phi_{n, P_n}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k \cdot \pi / P_n}{k \cdot \pi / P_n} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.23)$$

не может равномерно сходиться к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$. Ниже проводим исследование ядер $F_{n, P_n}(x)$ в случае, когда $P_n = O(n)$. Прежде всего отметим, что $F_{n, P_n}(x)$ — четная периодическая функция с периодом 2π и

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_{n, P_n}(x) dx = 1.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} F_{n, P_n}(x) &= \frac{P_n}{2\pi^2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin(n+1/2)(x-t)}{2 \sin(x-t)/2} dt \\ &= \frac{P_n}{2\pi^2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin(x-t)}{2 \operatorname{tg}(x-t)/2} dt + \frac{P_n}{4\pi^2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \cos n(x-t) dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Откуда следует

$$F_{n, P_n}(x) = \frac{P_n}{2\pi^2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin(x-t)}{2 \operatorname{tg}(x-t)/2} dt + \frac{P_n}{4\pi^2} \frac{\sin n\pi/P_n \cos x}{n}. \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует

$$|F_{n, P_n}(x)| \leq \frac{P_n}{2\pi^2} \left| \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin n(x-t)}{2 \operatorname{tg}(x-t)/2} dt \right| + c_1 \frac{P_n}{n} |\sin n\pi/P_n|. \quad (2.26)$$

Так как для любого интервала (a, b) имеем

$$\left| \int_a^b D_n(t) dt \right| \leq 4\pi, \quad (2.27)$$

то из (2.27) следует

$$|F_{n, P_n}(x)| \leq \frac{2P_n}{\pi}, \quad |x| \leq \pi. \quad (2.28)$$

Теперь оценим второе слагаемое правой части (2.26). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin n(x-t)}{2 \operatorname{tg}(x-t)/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \sin n(x-t) \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x-t)/2} - \frac{1}{(x-t)/2} \right) dt + \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin n(x-t)}{x-t} dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

При $P_n > 2$, что имеет место начиная с некоторого N , если $|x| \leq \pi$ и $|t| \leq \pi/P_n$, имеем

$$-\frac{3}{4}\pi \leq \frac{x-t}{2} \leq \frac{3}{4}\pi. \quad (2.30)$$

Так как функция

$$Q(u) = \frac{1}{\operatorname{tg} u} - u \quad (2.31)$$

непрерывно дифференцируема на отрезке $[-3/4\pi, 3/4\pi]$, то к первому слагаемому правой части (2.29) можно применить формулу интегрирования по частям. Получим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \sin n(x-t) \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x-t)/2} - \frac{1}{(x-t)/2} \right) dt \right| \\ &= \left| \int_{x/2-\pi/2P_n}^{x/2+\pi/P_n} \sin 2nu Q(u) du \right| = \left| -\frac{1}{2n} \int_{x/2-\pi/2P_n}^{x/2+\pi/P_n} Q(u) d \cos 2nu \right| \\ &\leq |Q(x/2 + \pi/2P_n) \cos n(x + \pi/P_n) - Q(x/2 - \pi/2P_n) \cos n(x - \pi/P_n)| \cdot \frac{1}{2n} \\ &\quad + \left| \frac{1}{2n} \int_{x/2-\pi/2P_n}^{x/2+\pi/P_n} \cos 2nu Q'(u) du \right|. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Так как

$$Q(x/2 + \pi/2P_n) = Q(x/2) + Q'(\xi_1) \frac{\pi}{2P_n}, \quad \xi_1 \in \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2P_n} \right), \quad (2.33)$$

$$-Q(x/2 - \pi/2P_n) = -Q(x/2) + Q'(\xi_2) \frac{\pi}{2P_n}, \quad \xi_2 \in \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2P_n}, \frac{x}{2} \right), \quad (2.34)$$

то

$$\begin{aligned} & |Q(x/2 + \pi/2P_n) \cos n(x + \pi/P_n) - Q(x/2 - \pi/2P_n) \cos n(x - \pi/P_n)| \\ &\leq |Q(x/2)| |\cos n(x + \pi/P_n) - \cos n(x - \pi/P_n)| + \frac{\pi}{P_n} \max_{\xi \in (-3/4\pi, 3/4\pi)} |Q'(\xi)| \\ &\leq c_2 |\sin n\pi/P_n| + c_3 \pi/P_n, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где c_2 и c_3 — абсолютные постоянные. Из (2.32) и (2.35) следует

$$\left| \frac{1}{2} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \sin n(x-t) \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x-t)/2} - \frac{1}{(x-t)/2} \right) dt \right| \leq c_2 \frac{1}{n} \left| \sin \frac{n\pi}{P_n} \right| + \frac{c_3}{nP_n}. \quad (2.36)$$

Таким образом, из (2.26), (2.29) и (2.36) получим

$$|F_{n,P_n}(x)| \leq c_1 \frac{P_n}{n} \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| + \frac{c_2}{n} + \frac{P_n}{2\pi^2} \left| \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin n(x-t)}{x-t} dt \right| \quad (2.37)$$

для всех x , где c_1 и c_2 — абсолютные постоянные. Теперь оценим последнее слагаемое правой части (2.37) при $|x| > 2\pi/P_n$. Тогда при $t \in (-\pi/P_n, \pi/P_n)$ имеем

$$|x^2 - xt| > x^2 - |xt| > \frac{x^2}{2}, \quad (2.38)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} & \left| P_n \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin(x-t)}{x-t} dt \right| \\ & \leq \left| P_n \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \left(\frac{\sin n(x-t)}{x-t} - \frac{\sin n(x-t)}{x} \right) dt \right| + \left| P_n \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{\sin(x-t)}{x} dt \right| \\ & \leq 2P_n \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} \frac{|t|}{x^2} dt + \frac{P_n \sin n\pi/P_n}{n|x|}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Из (2.37) и (2.39) получаем

$$|F_{n,P_n}(x)| \leq c_1 \frac{P_n}{n} \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| + \frac{c_2}{n} + \frac{c_3}{P_n x^2} + \frac{c_4 P_n |\sin n\pi/P_n|}{n|x|}, \quad (2.40)$$

которое имеет место для всех $|x| > 2\pi/P_n$. Учитывая неравенства (2.40) и (2.28), получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |F_{n,P_n}(x)| dx \\ & \leq \int_{-2\pi/P_n}^{2\pi/P_n} |F_{n,P_n}(x)| dx \\ & \quad + \int_{|x| > 2\pi/P_n} \left(\frac{c_1 P_n}{n} \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| + \frac{c_2}{n} + \frac{c_3}{P_n x^2} + \frac{c_4 P_n}{|x|} \frac{|\sin \pi n/P_n|}{n} \right) dx \\ & \leq c_1 + \frac{c_2 P_n}{n} \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| + c_3 \ln P_n \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| \cdot \frac{P_n}{n}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где c_1, c_2, c_3 — абсолютные постоянные. Таким образом, (2.41) означает, что

$$L_n(\Phi, P_n) = \int_{-\pi}^{\pi} |F_{n,P_n}(x)| dx \leq c \frac{P_n \ln P_n}{n} |\sin \pi n/P_n|.$$

Аналогичным образом можно доказывать обратное неравенство. Таким образом, имеем

$$c_2 \frac{P_n \ln P_n}{n} |\sin \pi n/P_n| \leq L_n(\Phi, P_n) \leq c_1 \frac{P_n \ln P_n}{n} |\sin \pi n/P_n|. \quad (2.42)$$

Из неравенства (2.42) вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2.4. *Последовательность средних*

$$\begin{aligned}\Phi_{n,P_n}(f, x) &= \frac{P_n}{2\pi} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} S_n(f, x-t) dt \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k\pi/P_n}{k\pi/P_n} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx),\end{aligned}\quad (2.43)$$

где $P_n \rightarrow \infty$, равномерно сходится к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \left(\frac{P_n \ln P_n}{n} \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| \right) < +\infty. \quad (2.44)$$

Отсюда вытекает, что каждое из перечисленных ниже условий на $\{P_n\}$ достаточно, чтобы полиномы (2.43) сходились равномерно к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$, когда

$$P_n \leq c \frac{n}{\ln n}, \quad (2.45)$$

$$n \left(1 - \frac{1}{\ln n} \right) \leq P_n \leq n \left(1 + \frac{1}{\ln n} \right) \quad (2.46)$$

и, наконец, когда n/P_n — натуральное число.

Если же, например,

$$1 < \sup_n \frac{n}{P_n} < +\infty \quad \text{и} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{P_n} \right\} > 0, \quad (2.47)$$

где $\{q\}$ означает расстояние от числа q до ближайшего целого, то (2.46) не выполняется и средние (2.43) для некоторых $f \in C_{2\pi}$ расходятся.

Условие (2.44) означает, что равномерная сходимость средних (2.43) к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ зависит как от быстроты роста последовательности $\{P_n\}$, так и от арифметических свойств чисел P_n . Например, при $P_n = 2n/3$ соответствующие средние

$$\Phi_{n,2n/3}(f, x) = \frac{n}{3\pi} \int_{-3\pi/2n}^{3\pi/2n} S_n(f, x-t) dt \quad (2.48)$$

для некоторых $f \in C_{2\pi}$ будут неограниченно расходиться.

А. Ф. Тиман [6] рассматривал средние

$$\frac{1}{2} [S_n(f, x) + S_n(f, x + 2\pi/P_n)] \quad (2.49)$$

и показал, что они равномерно сходятся к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{P_n} = \frac{k}{2n+1} + O(1/n \ln n), \quad (2.50)$$

а $k = k(n)$ — целочисленная функция от $n = 1, 2, \dots$, принимающая лишь конечное число нечетных значений.

Из неравенств (2.40) и (2.28) немедленно следует также

ТЕОРЕМА 2.5. Если $P_n > 0$, $P_n \rightarrow +\infty$ и

$$\sup_n \left(\frac{P_n \ln P_n}{n} \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| \right) < +\infty, \quad (2.51)$$

то для любой интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ периодической с периодом 2π функции $f(x)$ средние (2.43) сходятся к $f(x)$ в точках Лебега этой функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.51) следует

$$\frac{P_n}{n} \left| \sin \frac{\pi n}{P_n} \right| < \frac{c_{\{P_n\}}}{\ln P_n}, \quad (2.52)$$

где $c_{\{P_n\}}$ — постоянная, зависящая от последовательности $\{P_n\}$.

Поэтому из (2.40) следует неравенство

$$|F_{n,P_n}(x)| \leq \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{P_n x^2} + \frac{c^{(1)}(\{P_n\})}{\ln P_n} + \frac{c^{(2)}(\{P_n\})}{|x| \ln P_n}, \quad |x| \geq \frac{2\pi}{P_n}, \quad (2.53)$$

где c_1, c_2 — абсолютные постоянные, а $c^{(1)}(\{P_n\}), c^{(2)}(\{P_n\})$ — постоянные, зависящие от последовательности $\{P_n\}$.

Обозначим

$$\Gamma_{n,P_n}(x) = \min \left\{ \frac{2P_n}{\pi}, \left(\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{P_n x^2} + \frac{c^{(1)}(\{P_n\})}{\ln P_n} + \frac{c^{(2)}(\{P_n\})}{|x| \ln P_n} \right) \right\}, \quad |x| \leq \pi. \quad (2.54)$$

Очевидно, $\Gamma_{n,P_n}(x)$ возрастает на $[-\pi, 0]$ и убывает на $[0, \pi]$ и при этом согласно (2.53) и (2.28) имеем

$$|F_{n,P_n}(x)| \leq \Gamma_{n,P_n}(x). \quad (2.55)$$

Очевидно также, что

$$\Gamma_{n,P_n}(x) \geq 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{n,P_n}(x) dx \leq c(\{P_n\}), \quad (2.56)$$

где $c(\{P_n\})$ — постоянная, зависящая от последовательности $\{P_n\}$. Кроме того, из (2.54) следует, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|x| > \delta} \Gamma_{n,P_n}(x) = 0. \quad (2.57)$$

Так как (см. (2.16))

$$\Phi_{n,P_n}(f, x) = \frac{P_n}{2\pi} \int_{-\pi/P_n}^{\pi/P_n} S_n(f, x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_{n,P_n}(t) dt, \quad (2.58)$$

то из (2.55)–(2.58) и (2.23) следует, что можно применить теорему Д. К. Фадеева (см. [7] и [8, с. 265]). Согласно этой теореме средние (2.58) при $n \rightarrow \infty$ будут сходиться к $f(x)$ во всех точках x , являющимися точками Лебега функции f . Теорема 2.5 доказана.

Аналогичным методом доказывается, что верна

ТЕОРЕМА 2.6. *Средние*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k\pi/P_n}{k\pi/P_n} \right)^2 (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.59)$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, сходятся равномерно к $f(x)$ для всех $f \in C_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \left(\frac{P_n^2 \ln P_n}{n^2} \sin^2 \frac{\pi n}{P_n} \right) < +\infty, \quad (2.60)$$

и при выполнении (2.60) средние (2.59) для любой интегрируемой 2π -периодической функции $f(x)$ сходятся к $f(x)$ во всех ее точках Лебега.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $P_n = n$ имеем

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k\pi/n}{k\pi/n} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{n}{2\pi} \int_{x-\pi/n}^{x+\pi/n} S_n(f, x-t) dt, \quad (2.61)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k\pi/n}{k\pi/n} \right)^2 (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \int_{x-2\pi/n}^{x+2\pi/n} S_n(f, x-t) n\Phi(nt) dt, \quad (2.62)$$

где

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{|t|}{2\pi} \right), & |t| < 2\pi, \\ 0, & |t| \geq 2\pi, \end{cases} \quad (2.63)$$

и согласно теоремам 2.5 и 2.6 средние (2.61) и (2.62) сходятся к $f(x)$ во всех ее точках Лебега. С другой стороны, согласно теореме А. Н. Колмогорова (см. [5, т. I]) ряд Фурье интегрируемой функции может почти всюду неограниченно расходиться. Сходимость же почти всюду средних (2.61) и (2.62) такого ряда означает, что в интервалах типа $(x_0 - \pi/n, x_0 + \pi/n)$, $(x_0 - 2\pi/n, x_0 + 2\pi/n)$ для почти всех x_0 происходит интерференция значений частных сумм $S_n(f, x)$ отклоняющихся от значения $f(x_0)$ в большую и меньшую стороны. Любопытно, что это явление не имеет места в интервалах вида, например, $(x_0 - \pi/3n, x_0 + \pi/3n)$, $(x_0 - 2\pi/3n, x_0 + 2\pi/3n)$.

Точнее, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.7. *Если число $h > 0$ не целое и $n/P_n = h$, $n = 1, 2, \dots$, то существует интегрируемая на $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ такая, что средние (2.43) и (2.59) расходятся почти всюду.*

Это утверждение можно доказать дословным повторением рассуждений доказательств теоремы А. Н. Колмогорова о существовании интегрируемой функции с расходящимся почти всюду рядом Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теоремах 2.5 и 2.6 матрицы $\lambda_k^{(n)}$, $1 \leq k \leq n$, средние (2.23) и (2.59), вообще говоря, не обладают свойством выпуклости вышеприведенной теоремы С. М. Никольского, и поэтому для их доказательства понадобилось отдельное изучение соответствующих ядер.

§3. О сходимости почти всюду средних Римана и Стеклова частных сумм кратных рядов Фурье

Пусть $\mathbb{R}^q$ – пространство векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_q)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_q)$ с вещественными координатами,

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{t} = \sum_{j=1}^q \alpha x_j + \beta t_j, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{j=1}^q x_j t_j,$$

$\mathbf{T}_q = [-\pi, \pi]^q$, а $C(\mathbf{T}_q)$ есть множество непрерывных на $\mathbb{R}^q$ периодических, с периодом 2π по каждой переменной, функций $f(\mathbf{x})$, $L_1(\mathbf{T}_q)$ – множество интегрируемых на $\mathbf{T}_q$ периодических функций, $L(1 + \log^{m-1} L)(\mathbf{T}_q)$ – множество тех функций $f(\mathbf{x}) \in L(\mathbf{T}_q)$, для которых конечен интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{T}_q} |f(\mathbf{x})| [1 + (\log^+ |f(\mathbf{x})|)^{q-1}] d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1, \dots, x_q)| [1 + (\log^+ |f(x_1, \dots, x_q)|)^{q-1}] dx_1 \cdots dx_q. \end{aligned}$$

Определяемая вектором $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_q)$, где n_j – натуральные числа, прямоугольная частная сумма ряда Фурье функции $f(x_1, \dots, x_q)$ обозначается через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ или $S_{n_1, \dots, n_q}(f, x_1, \dots, x_q)$, т.е. полагается

$$S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq \mathbf{n}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_q=-n_q}^{n_q} a_{k_1 \dots k_q} e^{i(k_1 x_1 + \cdots + k_q x_q)}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= a_{k_1 \dots k_q} = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbf{T}_q} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{n}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \dots, x_q) e^{-i(n_1 x_1 + \cdots + n_q x_q)} dx_1 \cdots dx_q. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть $\{P_{n_j}^{(j)}\}_{n_j=1}^{\infty}$, $1 \leq j \leq q$, – последовательности положительных чисел, каждая из которых монотонно стремится к $+\infty$ при $n_j \rightarrow +\infty$. Обозначим $P_{\mathbf{n}} = (P_{n_1}^{(1)}, \dots, P_{n_q}^{(q)})$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_q)$, и положим

$$Q_{\pi, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^q P_{n_j}^{(j)} \Phi_{\pi}^{(m)}(P_{n_j}^{(j)} t_j), \quad (3.3)$$

$$\Phi_{\pi, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(f, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^q} S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x} - \mathbf{t}) Q_{\pi, P_{\mathbf{n}}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (3.4)$$

где

$$\Phi_{\pi}^{(1)} = \begin{cases} 1/2\pi, & x \in [-\pi, \pi], \\ 0, & x \notin [-\pi, \pi], \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\Phi_{\pi}^{(m)}(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \Phi_{\pi}^{(m-1)}(x - t) \Phi_{\pi}^{(1)} dt. \quad (3.6)$$

Обозначим через $F_{\mathbf{n}, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(\mathbf{x})$ ядро преобразования (3.4), т.е

$$F_{\mathbf{n}, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^q} \int_{\mathbb{R}^q} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) Q_{\pi, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (3.7)$$

где

$$D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^q D_{n_j}(x_j). \quad (3.8)$$

Очевидно,

$$F_{\mathbf{n}, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^q F_{n_j, P_{n_j}^{(j)}}^{(m)}(x_j), \quad (3.9)$$

где

$$F_{n_j, P_{n_j}^{(j)}}^{(m)}(x_j) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_1} D_{n_j}(x_j - t_j) P_{n_j}^{(j)} \Phi_{\pi}(P_{n_j}^{(j)} t_j) dt_j.$$

Легко видеть также, что

$$\begin{aligned} & \Phi_{\pi, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(f, \mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbf{T}_q} f(\mathbf{t}) F_{\mathbf{n}, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{\mathbf{T}_q} f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) F_{\mathbf{n}, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \\ &= \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_q=-n_q}^{n_q} a_{k_1 \dots k_q} \left(\frac{\sin k_1 \frac{\pi}{P_{n_1}^{(1)}}}{k_1 \frac{\pi}{P_{n_1}^{(1)}}} \right)^m \cdots \left(\frac{\sin k_q \frac{\pi}{P_{n_q}^{(q)}}}{k_q \frac{\pi}{P_{n_q}^{(q)}}} \right)^m e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_q x_q}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В предыдущем параграфе были найдены необходимые и достаточные условия на последовательности $P_{n_j}^{(j)}$, $n_j = 1, 2, \dots$, при выполнении которых нормы в L_1 ядер $F_{n_j, P_{n_j}^{(j)}}^{(m)}(x_j)$ ограничены (см. теоремы 2.2, 2.3, 2.4 и 2.6). В силу (3.9) эти условия приводят к необходимым и достаточным условиям на векторы $P_{\mathbf{n}} = (P_{n_1}^{(1)}, \dots, P_{n_q}^{(q)})$, при выполнении которых для всех $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_q)$

$$\int_{\mathbf{T}_q} |F_{\mathbf{n}, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}| d\mathbf{x} \leq M(m), \quad m \geq 1. \quad (3.11)$$

Условимся писать $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \rightarrow \infty$, если все координаты n_j независимо друг от друга стремятся к ∞ .

Из указанных теорем 2.2, 2.3, 2.4, и 2.6 следует

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того чтобы средние $\Phi_{\pi, P_{\mathbf{n}}}^{(m)}(f, \mathbf{x})$, $m \geq 3$, при $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ равномерно сходились к $f(\mathbf{x})$ для всех $f(\mathbf{x}) \in C(\mathbf{T}_q)$, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\sup_{n_j} \left(\frac{P_{n_j}^{(j)}}{n_j} \right)^m \left| \sin \frac{\pi n_j}{P_{n_j}^{(j)}} \right|^m |\ln n_j| < +\infty, \quad 1 \leq j \leq q. \quad (3.12)$$

Для равномерной сходимости средних $\Phi_{\pi}^{(m)}(f, \mathbf{x})$ при $m = 1$ и $m = 2$ на всем классе $f \in C(\mathbf{T}_q)$ необходимо и достаточно соответственно выполнение неравенств

$$\sup_{n_j} \left(\frac{P_{n_j}^{(j)}}{n_j} \right) \left| \sin \frac{\pi n_j}{P_{n_j}^{(j)}} \right| |\ln P_{n_j}| < +\infty, \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.13)$$

$$\sup_{n_j} \left(\frac{P_{n_j}^{(j)}}{n_j} \right)^2 \left| \sin^2 \frac{\pi n_j}{P_{n_j}^{(j)}} \right| |\ln P_{n_j}| < +\infty, \quad 1 \leq j \leq q. \quad (3.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $P_{n_j}^{(j)} = n_j$, $1 \leq j \leq q$, условия (3.12)–(3.14) выполнены. Поэтому из теоремы 3.1 и из равенства (3.10) следует

ТЕОРЕМА 3.2. Для любого $m \geq 1$ и $f(\mathbf{x}) \in C(\mathbf{T}_q)$ полиномы

$$\begin{aligned} \Phi_{\pi, \mathbf{n}}^{(m)}(f, \mathbf{x}) &= \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_q=-n_q}^{n_q} a_{k_1 \dots k_q} \\ &\times \left(\frac{\sin k_1 \pi / n_1}{k_1 \pi / n_1} \right)^m \cdots \left(\frac{\sin k_q \pi / n_q}{k_q \pi / n_q} \right)^m e^{ik_1 x_1} \cdots e^{ik_q x_q}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $a_{k_1 \dots k_q}$ – коэффициенты Фурье функции $f(\mathbf{x})$, равномерно на $\mathbb{R}^q$ сходятся к $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{n} \rightarrow \infty$.

Как видно из вышеизложенных результатов, средние $\Phi_{\pi, \mathbf{n}}^{(m)}(f, \mathbf{x})$ при выполнении условий (3.12)–(3.14) как в одномерном, так и в многомерном случае обладают свойствами, близкими к свойствам чезаровских и абелевских средних. Следующая теорема представляет аналог известной теоремы о $(C, 1)$ -средних (см. [5, т. 2, с. 463]).

ТЕОРЕМА 3.3. Если векторы $P_{\mathbf{n}} = (P_{n_1}^{(1)}, \dots, P_{n_q}^{(q)})$ таковы, что $P_{n_j}^{(j)} > 0$, $n_j = 1, 2, \dots, P_{n_j} \uparrow +\infty$ при $n_j \rightarrow +\infty$, $1 \leq j \leq q$, и выполнены неравенства (3.13), то для любой функции $f(\mathbf{x}) \in L(\mathbf{T}_q)$, для которой на $\mathbf{T}_q$ интегрируема также функция $|f(\mathbf{x})| \ln^+ |f(\mathbf{x})|^{q-1}$, средние $\Phi_{\pi, \mathbf{n}}^{(1)}(f, \mathbf{x})$ при $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ сходятся к $f(\mathbf{x})$ почти всюду на $\mathbf{T}_q$.

Ниже мы проводим доказательство одной общей теоремы, из которой в частности вытекает также теорема 3.3.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть функции $\{\varphi_{n_j}^{(j)}(x_j)\}_{n_j=1}^{\infty}$, $1 \leq j \leq q$, удовлетворяют следующим условиям.

1) Существуют определенные на $[-\pi, \pi]$ неотрицательные ограниченные четные и монотонно убывающие на $[0, \pi]$ функции $\{\Psi_{n_j}^{(j)}(x_j)\}_{n_j=1}^{\infty}$, $1 \leq j \leq q$, такие, что

$$\varphi_{n_j}^{(j)}(x_j) \leq \psi_{n_j}^{(j)}(x_j), \quad x_j \in [-\pi, \pi], \quad n_j = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.16)$$

$$\sup_{n_j} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{n_j}^{(j)}(x_j) dx_j < +\infty, \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.17)$$

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} \Psi_{n_j}^{(j)}(x_j) = 0, \quad x_j \neq 0, \quad 1 \leq j \leq q. \quad (3.18)$$

2) Для всех j , $1 \leq j \leq q$, выполняются равенства

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{n_j}(x_j) dx_j = 1. \quad (3.19)$$

Тогда для любой функции $f(\mathbf{x}) \in L(\mathbf{T}_q)$, для которой на $\mathbf{T}_q$ интегрируема также функция $|f(bfx)| (\ln^+ |f(\mathbf{x})|^{q-1})$, почти всюду на $\mathbf{T}_q$ имеет место равенство

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}_q} f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad (3.20)$$

где

$$Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^q \varphi_{n_j}^{(j)}(t_j), \quad n = (n_1, \dots, n_q), \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_q). \quad (3.21)$$

Из доказательства теоремы 2.5 видно, что ядра $F_{n_j, P_{n_j}^{(j)}}^{(1)}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$, при выполнении условий (3.13) удовлетворяют всем условиям сформулированной теоремы 3.4 (см. (2.23), (2.56)–(2.58)). Поэтому если положить в теореме 3.4

$$\varphi_{n_j}^{(j)}(x_j) = F_{n_j, P_j^{(j)}}^{(1)}(x_j), \quad \psi_{n_j}^{(j)}(x_j) = \Gamma_{n_j, P_j^{(j)}}^{(1)}(x_j), \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.22)$$

получим теорему 3.3.

Точно таким же образом можно убедиться, что при выполнении условий (3.14) утверждение теоремы 3.3 верно для средних $\Phi_{\pi, P_{\mathbf{n}}}^{(2)}(f, \mathbf{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4 в некоторой степени аналогично доказательству подобных теорем для кратных средних Чезаро (см. [10], [11]). Покажем, что для любой функции $f \in L^1(\mathbf{T}_q)$ выполняется неравенство

$$\sup_{\mathbf{n}} \left| \int_{\mathbf{T}_q} f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right| \leq cM(f, \mathbf{x}), \quad (3.23)$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная, а $M(f, \mathbf{x})$ есть максимальная функция, определенная равенством

$$M(f, \mathbf{x}) = \sup_{t_1 > 0, \dots, t_q > 0} \int_{-t_1}^{t_1} \dots \int_{-t_q}^{t_q} |f(\mathbf{x} - \mathbf{t})| dt.$$

Из (3.21) и (3.16) имеем

$$Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \leq \prod_{j=1}^q \Psi_{n_j}^{(j)}(|t_j|). \quad (3.24)$$

Легко убедиться, что для любой функции $\Psi_{n_j}^{(j)}(t)$ существует кусочно-постоянная функция $\tilde{\Psi}_{n_j}^{(j)}(t)$, монотонно убывающая на $[0, \pi]$, так, что почти всюду на $[0, \pi]$ выполняется неравенство

$$\Psi_{n_j}^{(j)}(t) \leq \tilde{\Psi}_{n_j}^{(j)}(t) \leq 2\Psi_{n_j}^{(j)}(t).$$

Далее очевидно, что каждую функцию $\tilde{\Psi}_{n_j}^{(j)}(|t|)$, определенную на $[-\pi, \pi]$, можно представить в виде конечной линейной комбинации функций вида $1/2h\chi_{[-h, h]}$. Причем все коэффициенты этой комбинации положительны и их сумма ограничена некоторым числом $c > 0$. Из последнего с учетом (3.24) следует, что

$$|Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})| \leq \sum \alpha_j \frac{1}{|I_j|} \chi_{I_j}(\mathbf{t})$$

для каких-то параллелепипедов $I_j \subset \mathbb{R}^n$ с центром 0, где $\alpha_j > 0$, $\sum \alpha_j < c$. Отсюда вытекает неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) dt \right| \leq \sum \alpha_j \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f(\mathbf{x} - \mathbf{t})| dt \leq M(f, \mathbf{x}),$$

которое дает нам (3.23). Для непрерывных функций $g \in C(\mathbf{T}_q)$ из (3.16)–(3.19) очевидно следует равномерная сходимость в (3.20). Далее, как обычно делается, надо приблизить f непрерывной функцией $g \in C(\mathbf{T}_q)$ и применить неравенство типа (1, 1) для максимальной функции $M(f, \mathbf{x})$ (см. [12, с. 32]). Теорема 3.4 доказана.

Список литературы

1. *Никольский С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12. № 3. С. 259–278.
2. *Nagy B.* Methodes de sommation des series de Fourier. III // Acta Sci. Math. (Szeged). V. 13. P. 247–351.
3. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. № 2. С. 213–242.
4. *Тригуб Р. М.* Связь суммируемостью и абсолютной сходимостью рядов и преобразований Фурье // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 34–37.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I, II. М.: Мир, 1965.
6. *Тилман А. Ф.* О некоторых методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1950. Т. 14. С. 85–94.
7. *Фадеев Д. К.* О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Лебега // Матем. сб. 1936. Т. 1 (43). № 3. С. 351–368.
8. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
9. *Стечкин С. Б.* Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского. Г. Харди. Расходящиеся ряды (обзорная статья редактора). М.: ИЛ, 1951.
10. *Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Note on differentiability of multiple integrals // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 217–234.
11. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* On summability of double Fourier series // Fund. Math. 1939. V. 32. P. 112–132.
12. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1977.
13. *Nagy B.* Sur une class generale de procedes de sommation pour les series de Fourier // Acta. Math. Hungar. 1948. V. 1. № 3. P. 14–52.
14. *Ефимов А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. С. 743–756.
15. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Труды МИАН. 1961. Т. 62. С. 61–97.