Общероссийский математический портал

М. И. Анохин, О базисе тождеств многообразия, порожденного конечно базирuемым квазимногообразием групп, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 8, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:05:06

УДК 512.54.01

М. И. Анохин

О базисе тождеств многообразия, порожденного конечно базлируемым квазимногообразием групп

Построены примеры разрешимых (в том числе степени не более 7) конечно базлируемых квазимногообразий групп, которые порождают не конечно базлируемое многообразие.

Библиография: 6 названий.

Введение и формулировка основного результата

В настоящей работе будет доказана

ТЕОРЕМА 1. *Существуют разрешимые (в том числе степени не более 7) конечно базлируемые квазимногообразия групп, которые порождают не конечно базлируемое многообразие.*

Это дает отрицательный ответ на вопрос А. В. Кузнецова [1, вопрос 8.28]. Явное описание примеров квазимногообразий, удовлетворяющих условию теоремы 1, приведено в начале §4.

Основным методом работы является метод, развитый Ю. Г. Клейманом в [2], который, в свою очередь, восходит к идеям работ [3], [4]. Этот метод позволяет сводить изучение некоторых подгрупп некоторой относительно свободной группы к изучению подмножеств в более просто устроенных (например, нильпотентных) относительно свободных группах.

§1. Определения, обозначения и необходимые факты

Пусть $F = F_\infty$ – свободная группа счетного ранга. Зафиксируем алфавит $t_1, t_2, \dots$ в качестве системы свободных порождающих F и будем называть элементы этой группы *словами* от $t_1, t_2, \dots$. Для множества M символ M^* обозначает множество всех бесконечных последовательностей $m_1, m_2, \dots$ элементов M . Буквы t_i можно рассматривать как переменные, тогда *значением* слова $v(t) = v(t_1, t_2, \dots)$ в произвольной группе G называется любой элемент вида $v(g) = v(g_1, g_2, \dots)$, где $g = g_1, g_2, \dots \in G^*$ (разумеется, $v(g)$ зависит лишь от некоторой конечной подпоследовательности последовательности g). Множество всех значений слова $v(t)$ в группе G мы обозначим через $v[G]$, а соответствующую вербальную подгруппу, т.е. $\langle v[G] \rangle$, через $v(G)$ ($\langle M \rangle$ обозначает группу, порожденную множеством M). Вербальная подгруппа группы G , соответствующая многообразию групп $\mathfrak{B}$, обозначается через $\mathfrak{B}(G)$.

Под $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}_e$, $\mathfrak{B}_e$, $\mathfrak{A}_e$ понимается, соответственно, единичное многообразие, многообразие всех групп, многообразие всех абелевых групп, многообразие

всех нильпотентных групп класса не более c , бернсайдово многообразие экспоненты e (т.е. многообразие, определенное тождеством $t_1^e = 1$) и многообразие $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}_e$. Пусть также $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – поле из двух элементов, $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$, RG – групповое кольцо группы G над кольцом R , $G = G_{(1)} \supseteq G_{(2)} \supseteq \dots$ – нижний центральный ряд группы G , $G' = G_{(2)}$ – коммутант группы G , $G^e = \mathfrak{B}_e(G)$ – подгруппа, порожденная e -ми степенями всевозможных элементов G , $a^b = b^{-1}ab$, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ (коммутатор a и b), $[M, N] = \{[x, y] : x \in M, y \in N\}$, где a, b – элементы, а M, N – подмножества произвольной группы. Коммутатор вида $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ предполагается левонормированным, т.е. равным $[\dots [[a_1, a_2], a_3], \dots, a_n]$. Для удобства вхождение в коммутатор подряд n одинаковых элементов a мы будем записывать через na , т.е.

$$[\dots, \underbrace{a, \dots, a}_{n \text{ раз}}, \dots] = [\dots, na, \dots].$$

Напомним, что для многообразий групп $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ через $[\mathfrak{U}, \mathfrak{V}]$ обозначается многообразие, определенное множеством тождеств $\{w(t) = 1 : w(t) \in [\mathfrak{U}(F), \mathfrak{V}(F)]\}$ (см. также [5, гл. 2, §1]).

Пусть $\mathfrak{C}$ – некоторый класс групп. Через $\text{var } \mathfrak{C}$ будет обозначаться многообразие, порожденное классом $\mathfrak{C}$. Для произвольной формулы Φ исчисления предикатов в групповой сигнатуре запись $\mathfrak{C} \models \Phi$ будет означать, что формула Φ тождественно истинна в классе $\mathfrak{C}$. Если класс $\mathfrak{C}$ состоит из одной группы G , то вместо $\{G\} \models \Phi$ мы будем писать $G \models \Phi$.

Следуя [2], определим следующие объекты: $\mathfrak{R}$ – произвольное многообразие, отличное от $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_2^3 \cap [\mathfrak{A}_2^2, \mathfrak{E}]$; $R = F_\infty(\mathfrak{R})$, $A = F_\infty(\mathfrak{A}_2\mathfrak{R})$, $S = F_\infty(\mathfrak{L}\mathfrak{R})$, $H = F_\infty(\mathfrak{A}_2)$ – свободные группы счетного ранга соответствующих многообразий; $\{x_1, x_2, \dots\}$, $\{y_1, y_2, \dots\}$, $\{s_1, s_2, \dots\}$, $\{h_1, h_2, \dots\}$ – системы свободных порождающих R, A, S, H , соответственно. Пусть также $L = \mathfrak{R}(S)$, тогда легко видеть, что L – свободная группа счетного ранга многообразия $\mathfrak{L}$ и L^4 – элементарная абелева 2-группа, содержащаяся в центре L .

ЛЕММА 1.1 ([2, лемма 4.1]). 1) Пусть U – множество представителей всех смежных классов $L \setminus L^2$ по L^2 . Тогда множество $\{u^4 : u \in U\}$ является базисом элементарной абелевой 2-группы L^4 .

2) Пусть $v_1(t), v_2(t) \in \mathfrak{R}(F)$. Тогда

$$v_1^4(s) = v_2^4(s) \iff v_1(y) = v_2(y).$$

Очевидно, что ядром естественного эпиморфизма $S \rightarrow A$ (т.е. эпиморфизма, отображающего s_i в y_i для всех $i \in \mathbb{N}_1$) является L^2 . Поэтому если $v_1(s) \equiv v_2(s) \pmod{L^2}$, где $v_1(t), v_2(t) \in \mathfrak{R}(F)$, то $v_1(y) = v_2(y)$ и $v_1^4(s) = v_2^4(s)$ по 2) леммы 1.1. Отсюда следует, что базис из 1) леммы 1.1 совпадает с множеством $t_1^4[L] \setminus \{1\}$ всех неединичных четвертых степеней элементов L (так как если $g^4 \neq 1$, где $g \in L$, то $g \notin L^2$) и, в частности, не зависит от выбора множества представителей U . Из 2) леммы 1.1 также вытекает, что отображение η , заданное формулой

$$v(y)\eta = v^4(s), \quad v(t) \in \mathfrak{R}(F),$$

определено корректно и отображает взаимно однозначно $\mathfrak{R}(A)$ на $t_1^4[L]$. В частности, $\mathfrak{R}(A) \setminus \{1\}$ отображается на базис из 1) леммы 1.1.

Из сказанного выше легко вывести следующую лемму.

ЛЕММА 1.2 ([2, теорема 4.3]). Пусть W_1, W_2 – множества элементов $\mathfrak{R}(A)$, содержащие 1. Тогда

$$W_1 \subseteq W_2 \iff \langle W_1 \eta \rangle \subseteq \langle W_2 \eta \rangle.$$

В заключение этого параграфа приведем утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

ЛЕММА 1.3 ([2, лемма 4.6]). Если $\mathfrak{R}$ конечно базисуемо, то и $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ конечно базисуемо.

§ 2. Некоторые цепи вербальных подгрупп и подмножеств

В [6, п. 11.2] описан стандартный процесс построения алгебраической системы по ее порождающим и определяющим соотношениям в произвольном квазимногообразии $\mathfrak{Q}$. В частности, при пустом множестве определяющих соотношений получается $\mathfrak{Q}$ -свободная группа, которая также является $\text{var } \mathfrak{Q}$ -свободной группой. Нам потребуется следующий вариант этого процесса.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ некоторое многообразие групп, а через $\mathfrak{Q}$ – квазимногообразие, заданное в $\mathfrak{U}$ тождеством $v_0(t) = 1$ и квазитожеством $v_1(t) = 1 \longrightarrow v_2(t) = 1$ при некоторых $v_0(t), v_1(t), v_2(t) \in F$. Пусть также G – $\mathfrak{U}$ -свободная группа счетного ранга, а $\mathfrak{V} = \text{var } \mathfrak{Q}$. Построим с помощью индукции по $i \in \mathbb{N}_0$ следующее семейство подгрупп G :

$$\begin{aligned} V_0 &= v_0(G), \\ V_{i+1} &= \langle V_i \cup \{v_2(g) : g \in G^*, v_1(g) \in V_i\} \rangle, \quad i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Очевидно, что все V_i – вполне характеристические подгруппы G и

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots, \tag{2}$$

поэтому $\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ – вполне характеристическая (равносильно, вербальная) подгруппа G ; мы обозначим ее через V .

ЛЕММА 2.1. Справедливо следующее: $V = \mathfrak{V}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем индукцией по $i \in \mathbb{N}_0$, что $V_i \subseteq \mathfrak{V}(G)$. При $i = 0$ это следует из того, что $\mathfrak{Q} \models v_0(t) = 1$ и, следовательно, $\mathfrak{V} \models v_0(t) = 1$. Пусть теперь $z_1, z_2, \dots$ – некоторая система свободных порождающих G . Заметим, что для произвольной последовательности $f(t) = f_1(t), f_2(t), \dots \in F^*$

$$\begin{aligned} v_1(f(z)) \in \mathfrak{V}(G) &\iff \mathfrak{V} \models v_1(f(t)) = 1 \\ &\iff \mathfrak{Q} \models v_1(f(t)) = 1 \\ &\implies \mathfrak{Q} \models v_2(f(t)) = 1 \\ &\quad (\text{так как } \mathfrak{Q} \models (v_1(t) = 1 \longrightarrow v_2(t) = 1)) \\ &\iff \mathfrak{V} \models v_2(f(t)) = 1 \iff v_2(f(z)) \in \mathfrak{V}(G) \end{aligned}$$

(здесь $f(z)$ обозначает последовательность $f_1(z), f_2(z), \dots \in G^*$). Из этого легко вытекает, что если $V_i \subseteq \mathfrak{V}(G)$, то $V_{i+1} \subseteq \mathfrak{V}(G)$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, $V_i \subseteq \mathfrak{V}(G)$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$ и, следовательно, $V \subseteq \mathfrak{V}(G)$.

Для доказательства обратного включения заметим, что $G/V \in \mathfrak{U}$, $G/V \models v_0(t) = 1$ (так как $v_0(G) = V_0 \subseteq V$) и $G/V \models (v_1(t) = 1 \longrightarrow v_2(t) = 1)$ (ввиду того, что если $v_1(g) \in V$ для некоторой последовательности $g \in G^*$, то $v_1(g) \in V_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_0$ и, следовательно, $v_2(g) \in V_{i+1} \subseteq V$). Это значит, что $G/V \in \Omega \subseteq \mathfrak{V}$, поэтому $\mathfrak{V}(G) \subseteq V$. Лемма доказана.

Пусть теперь $w_0(t), w_1(t), w_2(t) \in \mathfrak{R}(F)$. Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{R}$, $G = S$, $v_j(t) = w_j^4(t)$ для $j = 0, 1, 2$ и построим подгруппы V_i , $i \in \mathbb{N}_0$, согласно правилам (1). Определим индукцией по $i \in \mathbb{N}_0$ также следующие подмножества W_i группы A :

$$\begin{aligned} W_0 &= w_0[A], \\ W_{i+1} &= W_i \cup \{w_2(a) : a \in A^*, w_1(a) \in W_i\}, \quad i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, что $1 \in W_i \subseteq \mathfrak{R}(A)$, $W_i \varphi \subseteq W_i$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$ и любого эндоморфизма φ группы A и

$$W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots \quad (4)$$

ЛЕММА 2.2. *Справедливо следующее: $V_i = \langle W_i \eta \rangle$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по i . При $i = 0$ утверждение леммы вытекает непосредственно из определений. Пусть теперь $V_i = \langle W_i \eta \rangle$, тогда

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= \langle V_i \cup \{v_2(g) : g \in S^*, v_1(g) \in V_i\} \rangle \\ &= \langle V_i \cup \{w_2^4(g) : g \in S^*, w_1^4(g) \in V_i\} \rangle \\ &= \langle V_i \cup \{w_2^4(g) : g \in S^*, \langle 1, w_1^4(g) \rangle \subseteq V_i\} \rangle \\ &= \langle \langle W_i \eta \rangle \cup \{w_2(a) \eta : a \in A^*, \langle 1, w_1(a) \rangle \eta \subseteq \langle W_i \eta \rangle\} \rangle \\ &= \langle \langle W_i \eta \rangle \cup \{w_2(a) \eta : a \in A^*, \{1, w_1(a)\} \subseteq W_i\} \rangle \quad (\text{по лемме 1.2}) \\ &= \langle W_i \eta \cup \{w_2(a) \eta : a \in A^*, w_1(a) \in W_i\} \rangle = \langle W_{i+1} \eta \rangle. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§3. Определение и свойства некоторых слов

Мы начнем с одного замечания о базисных коммутаторах (для конечного алфавита их определение можно найти, например, в [5, определение 31.51]).

ЛЕММА 3.1. *Пусть a и b – базисные коммутаторы в одном и том же алфавите, причем a имеет вес k , $a b$ – вес l . Тогда если $k > l$ и $k/2 < l$, то $[a, b]$ – базисный коммутатор (веса $k + l$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $a > b$, так как $k > l$. Если $a = [a_1, a_2]$, где a_1 и a_2 – базисные коммутаторы весов k_1 и k_2 , соответственно, то $k_1 \geq k_2$ (иначе $a_1 < a_2$ и a – не базисный коммутатор). Поэтому $k_2 \leq (k_1 + k_2)/2 = k/2 < l$, следовательно, $a_2 < b$. Таким образом, $[a, b]$ – базисный коммутатор. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что для четного числа c существуют $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\begin{aligned} 3 &\leq k_i \leq c - 3, \quad k_1 \neq k_2, \\ k_i &> l_i, \quad \frac{k_i}{2} < l_i, \\ \text{где } l_i &= c - k_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

если и только если $c \geq 14$. Зафиксируем некоторое четное число $c \geq 14$ и положим $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}_c$ в обозначениях, введенных в §1. Выберем также некоторые $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условиям (5), и произвольное число $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Определим следующие слова из F :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= [[t_2, (k_1 - 2)t_1, t_3], [t_2, (l_1 - 2)t_1, t_3]], \\ f_2(t) &= [[t_2, (k_2 - 1)t_1], [t_2, (l_2 - 1)t_1]], \\ u_1(t) &= f_1(t_1, t_2, t_3)f_2(t), \\ u_2(t) &= f_1(t_1, t_2, t_3^m)f_2(t) = u_1(t_1, t_2, t_3^m), \\ u_0(t) &= f_1(t_1, t_2, t_1)f_2(t) = u_1(t_1, t_2, t_1), \end{aligned} \tag{6}$$

где l_1, l_2 определены в (5).

ЛЕММА 3.2. Если $r_1 r_2 = r'_1 r'_2$, где $r_i, r'_i \in f_i(R)$, то $r_i = r'_i$ при $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B(j)$ – множество всех базисных коммутаторов от $x_1, x_2, \dots$ веса j . Легко видеть, что

$$f_i[R] \subseteq [R_{(k_i)}, R_{(l_i)}] = [\langle B(k_i) \rangle, \langle B(l_i) \rangle] \subseteq \langle [B(k_i), B(l_i)] \rangle,$$

значит, $f_i(R) \subseteq \langle [B(k_i), B(l_i)] \rangle$. Но ввиду условий (5) и леммы 3.1 $[B(k_1), B(l_1)]$ и $[B(k_2), B(l_2)]$ – непересекающиеся подмножества $B(c)$, которое является базисом $R_{(c)}$ как свободной абелевой группы. Из этого непосредственно следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3.3. Если $f_2(r_1, r_2) = f_2(x_1, x_2)^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $r_1, r_2 \in R$, то $\varepsilon = 1$ и $r_1 \equiv x_1^{\varepsilon_1} \pmod{R'}$, $r_2 \equiv x_1^{\xi} x_2^{\varepsilon_2} \pmod{R'}$ для некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, $\xi \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_1 \equiv \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{\alpha_i} \pmod{R'}$ и $r_2 \equiv \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{\beta_i} \pmod{R'}$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ (здесь $\alpha_i = \beta_i = 0$ для всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}_1$, поэтому произведения определены). Зафиксируем произвольные $i, j \in \mathbb{N}_1$ такие, что $i > j$. Обозначим через π_{ij} эндоморфизм R , определенный на свободных порождающих $x_1, x_2, \dots$ следующим образом:

$$x_n \pi_{ij} = \begin{cases} x_n, & \text{если } n \in \{i, j\}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для произвольных $n_1, \dots, n_{c-4} \in \{i, j\}$ положим

$$b_{n_1 \dots n_{c-4}} = [[x_i, x_j, x_{n_1}, \dots, x_{n_{k_2-2}}], [x_i, x_j, x_{n_{k_2-1}}, \dots, x_{n_{c-4}}]].$$

Тогда легко видеть, что

$$f_2(r_1, r_2) \pi_{ij} = f_2(x_j^{\alpha_j} x_i^{\alpha_i}, x_j^{\beta_j} x_i^{\beta_i}) = \prod_{n_1, \dots, n_{c-4} \in \{i, j\}} b_{n_1 \dots n_{c-4}}^{\gamma_{ij}^2 \alpha_{n_1} \dots \alpha_{n_{c-4}}},$$

где $\gamma_{ij} = \alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j$. Из этого ввиду равенства $f_2(r_1, r_2) \pi_{ij} = f_2(x_1, x_2)^\varepsilon \pi_{ij}$ следует, что

$$b_{ii\dots i}^{\gamma_{ij}^2 \alpha_i^{c-4}} b_{jj\dots j}^{\gamma_{ij}^2 \alpha_j^{c-4}} r = [[x_2, (k_2 - 1)x_1], [x_2, (l_2 - 1)x_1]]^\varepsilon \pi_{ij},$$

где r — произведение степеней базисных коммутаторов от $x_1, x_2, \dots$ веса c , отличных от $b_{ii\dots i}$ и $b_{jj\dots j}$ (очевидно, что $b_{ii\dots i}$ и $b_{jj\dots j}$ — базисные коммутаторы от $x_1, x_2, \dots$ веса c). Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^2 \alpha_i^{c-4} &= 0, \\ \gamma_{ij}^2 \alpha_j^{c-4} &= \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } i = 2 \text{ и } j = 1, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

ввиду независимости базисных коммутаторов от $x_1, x_2, \dots$ веса c . В частности,

- 1) $\varepsilon = 1$ и $\alpha_1, \gamma_{21} \in \{-1, 1\}$, так как $(\gamma_{21} \alpha_1^{(c-4)/2})^2 = \varepsilon$;
- 2) $\alpha_2 = 0$, так как $\alpha_2^{c-4} = \gamma_{21}^2 \alpha_2^{c-4} = 0$;
- 3) $\beta_2 \in \{-1, 1\}$, так как $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \gamma_{21} \in \{-1, 1\}$;
- 4) $\alpha_i = 0$ при $i \in \mathbb{N}_3$, так как $\alpha_i^{c-2} = \alpha_i^{c-2} \beta_2^2 = (\alpha_2 \beta_i - \alpha_i \beta_2)^2 \alpha_i^{c-4} = \gamma_{i2}^2 \alpha_i^{c-4} = 0$;
- 5) $\beta_i = 0$ при $i \in \mathbb{N}_3$, так как $\beta_i^2 = \alpha_1^{c-2} \beta_i^2 = (\alpha_1 \beta_i - \alpha_i \beta_1)^2 \alpha_1^{c-4} = \gamma_{i1}^2 \alpha_1^{c-4} = 0$,

что и требовалось. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Если $f_1(r_1, r_2, r_3) = f_1(x_1, x_2, r)$, где $r_1, r_2, r_3, r \in R$, причем $r_1 \equiv x_1^{\varepsilon_1} \pmod{R'}$, $r_2 \equiv x_1^\xi x_2^{\varepsilon_2} \pmod{R'}$ для некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, $\xi \in \mathbb{Z}$, то $r_3 \equiv r^{\varepsilon_3} \pmod{R'}$ при некотором $\varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$f_1(r_1, r_2, r_3) = f_1(x_1^{\varepsilon_1}, x_2^{\varepsilon_2}, r_3) = f_1(x_1, x_2, r_3)^{\varepsilon_1^{c-4} \varepsilon_2^2} = f_1(x_1, x_2, r_3),$$

так как c четно. Пусть $r_3 \equiv \prod_{i=1}^\infty x_i^{\gamma_i} \pmod{R'}$, $r \equiv \prod_{i=1}^\infty x_i^{\alpha_i} \pmod{R'}$, где $\gamma_i, \alpha_i \in \mathbb{Z}$ (здесь $\gamma_i = \alpha_i = 0$ для всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}_1$, поэтому произведения определены). Тогда

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2, r_3) &= \prod_{i,j=1}^\infty [[x_2, (k_1 - 2)x_1, x_i], [x_2, (l_1 - 2)x_1, x_j]]^{\gamma_i \gamma_j}, \\ f_1(x_1, x_2, r) &= \prod_{i,j=1}^\infty [[x_2, (k_1 - 2)x_1, x_i], [x_2, (l_1 - 2)x_1, x_j]]^{\alpha_i \alpha_j}, \end{aligned}$$

где для произвольных $i, j \in \mathbb{N}_1$ $[[x_2, (k_1 - 2)x_1, x_i], [x_2, (l_1 - 2)x_1, x_j]]$ является базисным коммутатором веса c . Следовательно,

$$\gamma_i \gamma_j = \alpha_i \alpha_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_1 \quad (7)$$

ввиду условия леммы и независимости базисных коммутаторов от $x_1, x_2, \dots$ веса c .

Пусть $I = \{i \in \mathbb{N}_1 : \alpha_i \neq 0\}$. Для каждого $i \in I$ положим $\delta_i = \gamma_i / \alpha_i$. Ввиду формулы (7) $\gamma_i^2 = \alpha_i^2$ для всех $i \in \mathbb{N}_1$. Следовательно, если $i \in I$, то $\delta_i^2 = 1$ и $\delta_i \in \{-1, 1\}$, а если $i \in \mathbb{N}_1 \setminus I$ (т.е. $\alpha_i = 0$), то $\gamma_i = 0 = \alpha_i$. Кроме того, для любых $i, j \in I$ из (7) следует, что $\delta_i \delta_j = 1$, поэтому $\delta_i = \delta_j$. Таким образом, если ε_3 — общее значение δ_i для всех $i \in I$ (принадлежащее $\{-1, 1\}$), то $\gamma_i = \varepsilon_3 \alpha_i$ для всех $i \in \mathbb{N}_1$ и, следовательно, $r_3 \equiv r^{\varepsilon_3} \pmod{R'}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $r_1, r_2, r_3, r \in R$. Тогда если $u_1(r_1, r_2, r_3) = u_1(x_1, x_2, r)^\varepsilon$, то $\varepsilon = 1$ и

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv x_1^{\varepsilon_1} \pmod{R'}, & r_2 &\equiv x_1^\xi x_2^{\varepsilon_2} \pmod{R'}, & r_3 &\equiv r^{\varepsilon_3} \pmod{R'} \\ &\text{для некоторых } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}, & \xi &\in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Обратно, если выполнены условия (8), то $u_1(r_1, r_2, r_3) = u_1(x_1, x_2, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $u_1(r_1, r_2, r_3) = u_1(x_1, x_2, r)^\varepsilon$, т.е.

$$f_1(r_1, r_2, r_3)f_2(r_1, r_2) = f_1(x_1, x_2, r)^\varepsilon f_2(x_1, x_2)^\varepsilon.$$

Ввиду леммы 3.2

$$f_1(r_1, r_2, r_3) = f_1(x_1, x_2, r)^\varepsilon, \quad (9)$$

$$f_2(r_1, r_2) = f_2(x_1, x_2)^\varepsilon. \quad (10)$$

По лемме 3.3 из формулы (10) следует, что $\varepsilon = 1$ и $r_1 \equiv x_1^{\varepsilon_1} \pmod{R'}$, $r_2 \equiv x_1^\xi x_2^{\varepsilon_2} \pmod{R'}$ для некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, $\xi \in \mathbb{Z}$. Из этого и из формулы (9) согласно лемме 3.4 вытекает, что $r_3 \equiv r^{\varepsilon_3} \pmod{R'}$ при некотором $\varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$. Таким образом, условия (8) выполнены.

Обратно, если выполнены условия (8), то

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2, r_3) &= f_1(x_1^{\varepsilon_1}, x_2^{\varepsilon_2}, r^{\varepsilon_3}) = f_1(x_1, x_2, r)^{\varepsilon_1^{c-4} \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2} = f_1(x_1, x_2, r), \\ f_2(r_1, r_2) &= f_2(x_1^{\varepsilon_1}, x_2^{\varepsilon_2}) = f_2(x_1, x_2)^{\varepsilon_1^{c-2} \varepsilon_2^2} = f_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

так как c четно. Поэтому $u_1(r_1, r_2, r_3) = u_1(x_1, x_2, r)$. Лемма доказана.

§ 4. Доказательство основного результата

Пусть, как и в § 3, c — произвольное четное число, не меньшее 14, k_1, k_2 — некоторые целые числа, удовлетворяющие условиям (5), m — произвольное целое число, не принадлежащее $\{-1, 0, 1\}$, а $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}_c$. Определим следующие слова из F :

$$\begin{aligned} f_0(t) &= [t_2, ct_1], \\ w_j(t) &= [f_0(t), u_j(t)], \quad j = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

где $u_j(t)$ — слова из (6). Обозначим через $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(c, k_1, k_2, m)$ квазимногообразие, определенное в многообразии $\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}_2^3 \mathfrak{N}_c \cap [\mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{N}_c, \mathfrak{N}_c]$ тождеством $w_0^4(t) = 1$ и квазитождеством $w_1^4(t) = 1 \longrightarrow w_2^4(t) = 1$, как в § 2. Цель этого параграфа — показать, что квазимногообразия $\mathfrak{Q}(c, k_1, k_2, m)$ удовлетворяют условию теоремы 1. Очевидно, что $\mathfrak{Q}$ разрешимо (так как $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ разрешимо), причем при $c = 14$ степень разрешимости $\mathfrak{Q}$ не превосходит 7 (ввиду того, что $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}^4$ и, следовательно, $\mathfrak{L}\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}^7$). Кроме того, квазимногообразие $\mathfrak{Q}$ конечно базируемо, так как многообразие $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$ конечно базируемо по лемме 1.3.

Докажем теперь, что $\mathfrak{V} = \text{var } \mathfrak{Q}$ не конечно базируемо. Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{R}$, $G = S$, $v_j(t) = w_j^4(t)$ при $j = 0, 1, 2$ и построим цепь (2) вербальных подгрупп V_i

группы S согласно правилам (1). По лемме 2.1 объединение цепи (2) совпадает с $\mathfrak{V}(S)$, поэтому для доказательства отсутствия конечного базиса тождеств $\mathfrak{V}$ достаточно показать, что цепь (2) не стабилизируется ни на каком шаге. В свою очередь, ввиду лемм 2.2 и 1.2 последнее условие равносильно тому, что цепь (4) подмножеств W_i группы A , построенная по правилам (3), не стабилизируется ни на каком шаге. Таким образом, отсутствие конечного базиса тождеств $\mathfrak{V}$ будет доказано, если мы покажем, что элемент

$$d_i = w_1(y_1, y_2, y_1^{m^i}) = [f_0(y), u_1(y_1, y_2, y_1^{m^i})], \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

группы A принадлежит W_i , но не принадлежит W_{i-1} для всех $i \in \mathbb{N}_1$. Это будет сделано в леммах 4.3 и 4.4.

Пусть $H \operatorname{wr} R$ – дискретное сплетение групп H и R . Мы считаем базу B этого сплетения мультипликативно записываемым свободным правым $\mathbb{Z}_2 R$ -модулем с базисом $h_1, h_2, \dots$. Согласно известной теореме Магнуса–Шмелькина о вложении (см., например, [5, теорема 22.48]) гомоморфизм $A \rightarrow H \operatorname{wr} R$, отображающий y_i в $x_i h_i$ для всех $i \in \mathbb{N}_1$, инъективен; мы обозначим этот гомоморфизм через μ . Нам потребуются также следующая формула, проверяемая непосредственно:

$$[r_1 \alpha_1, r_2 \alpha_2] = [r_1, r_2] \alpha_1^{r_2 - [r_1, r_2]} \alpha_2^{1 - r_1^2}, \quad (11)$$

где $r_1, r_2 \in R$, а $\alpha_1, \alpha_2 \in B$. В частности, для любых $a \in \mathfrak{A}(A)$, $g(t) \in F$

$$[a, g(y)]\mu = [a\mu, g(x)\alpha] = a\mu^{g(x)-1}, \quad (12)$$

так как $a\mu \in B$ (здесь α – некоторый элемент B).

Мы будем называть элемент $r \in R$ *истинной степенью* в R , если $r = r_0^e$ для некоторых $r_0 \in R$, $e \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Аналог следующей леммы был доказан в [4, лемма 1.9].

ЛЕММА 4.1. Пусть $[a, g_1(y)] = [f_0(y), g_2(y)]$, где $a \in \mathfrak{A}(A) = A_{(c+1)}$, $g_1(t), g_2(t) \in F_{(c)}$, причем $g_2(x)$ не является истинной степенью в R . Тогда $g_1(x) = g_2(x)^\varepsilon$ при некотором $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (11) и (12), вычислим координаты при h_2 элементов $[a, g_1(y)]\mu$ и $[f_0(y), g_2(y)]\mu$. Приравняв эти координаты, получим, что

$$\begin{aligned} \alpha(g_1(x) - 1) &= (x_1 - [x_2, x_1])(x_1 - [x_2, 2x_1]) \cdots (x_1 - [x_2, cx_1])(g_2(x) - 1) \\ &= \sum_{r_1, \dots, r_c} r_1 \cdots r_c (g_2(x) - 1), \end{aligned}$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_2 R$ – координата при h_2 элемента $a\mu$ и суммирование производится по всевозможным упорядоченным наборам $(r_1, \dots, r_c)$, в которых r_i независимо друг от друга пробегают множества $\{x_1, [x_2, ix_1]\}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} (r_1, \dots, r_c) \neq (x_1, x_1, \dots, x_1) &\implies x_1^c \not\equiv r_1 \cdots r_c \pmod{R'} \\ &\implies x_1^c \not\equiv r_1 \cdots r_c \pmod{R_{(c)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выберем некоторое множество M представителей всех смежных классов R по $R_{(c)}$, содержащее x_1^c . Тогда M является базисом $\mathbb{Z}_2 R$ как свободного правого $\mathbb{Z}_2 R_{(c)}$ -модуля. Из (13) следует, что в этом базисе координата при x_1^c элемента $\sum_{r_1, \dots, r_c} r_1 \cdots r_c (g_2(x) - 1)$ равна $g_2(x) - 1$. Приравняв эту координату к координате при x_1^c элемента $\alpha(g_1(x) - 1)$, получим, что $g_2(x) - 1$ делится на $g_1(x) - 1$ в кольце $\mathbb{Z}_2 R_{(c)}$. Следовательно, $g_2(x) = g_1(x)^\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ (переходим от $R_{(c)}$ к $R_{(c)}/\langle g_1(x) \rangle$), причем $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ввиду того, что $g_2(x)$ не является истинной степенью в R . Поэтому $g_1(x) = g_1(x)^{\varepsilon^2} = g_2(x)^\varepsilon$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Справедливо следующее: $d_i \notin W_0$ для любого $i \in \mathbb{N}_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив,

$$\begin{aligned} d_i &= [f_0(y), u_1(y_1, y_2, y_1^{m^i})] \\ &= [f_0(a_1(y), a_2(y)), u_0(a_1(y), a_2(y))] \\ &= [f_0(a_1(y), a_2(y)), u_1(a_1(y), a_2(y), a_1(y))] \end{aligned} \quad (14)$$

при некоторых $i \in \mathbb{N}_1$, $a_1(t), a_2(t) \in F$. Очевидно, что $u_1(x_1, x_2, x_1^{m^i})$ не является истинной степенью в R , так как $u_1(x_1, x_2, x_1^{m^i}) = f_1(x_1, x_2, x_1)^{m^{2i}} f_2(x)$, где $f_1(x_1, x_2, x_1)$ и $f_2(x)$ — различные базисные коммутаторы от $x_1, x_2 \dots$ веса s . По лемме 4.1 из (14) следует, что $u_1(a_1(x), a_2(x), a_1(x)) = u_1(x_1, x_2, x_1^{m^i})^\varepsilon$ при некотором $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Согласно лемме 3.5 $x_1^{m^i \varepsilon_3} \equiv a_1(x) \equiv x_1^{\varepsilon_1} \pmod{R'}$ при некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$. Но тогда $m^i \varepsilon_3 = \varepsilon_1$ и, следовательно, $m \in \{-1, 1\}$ (так как $i \geq 1$), что противоречит выбору m . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Справедливо следующее: $d_i \in W_i$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по i . При $i = 0$ $d_0 = w_0(y) \in w_0[A] = W_0$, а если $d_i = w_1(y_1, y_2, y_1^{m^i}) \in W_i$, то $d_{i+1} = w_1(y_1, y_2, y_1^{m^{i+1}}) = w_2(y_1, y_2, y_1^{m^i}) \in W_{i+1}$ по определению W_{i+1} . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. *Справедливо следующее: $d_i \notin W_{i-1}$ для любого $i \in \mathbb{N}_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют $j \in \mathbb{N}_1$, для которых $d_j \in W_{j-1}$. Пусть $i = \min\{j \in \mathbb{N}_1 : d_j \in W_{j-1}\}$ и $n = \min\{j \in \mathbb{N}_0 : d_i \in W_j\}$. Из леммы 4.2 вытекает, что $i \geq 2$ и $n \geq 1$. Кроме того, $n \leq i - 1$ в силу выбора i и n . По определению W_n $d_i = w_1(y_1, y_2, y_1^{m^i}) = w_2(a_1(y), a_2(y), a_3(y))$ и $w_1(a_1(y), a_2(y), a_3(y)) \in W_{n-1}$ для некоторых $a_1(t), a_2(t), a_3(t) \in F$, так как $d_i \notin W_{n-1}$. Первое из этих условий означает, что

$$[f_0(y), u_1(y_1, y_2, y_1^{m^i})] = [f_0(a_1(y), a_2(y)), u_2(a_1(y), a_2(y), a_3(y))]. \quad (15)$$

Как мы уже видели при доказательстве леммы 4.2, $u_1(x_1, x_2, x_1^{m^i})$ не является истинной степенью в R . По лемме 4.1 из (15) следует, что $u_2(a_1(x), a_2(x), a_3(x)) = u_1(a_1(x), a_2(x), a_3^m(x)) = u_1(x_1, x_2, x_1^{m^i})^\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Согласно лемме 3.5 $\varepsilon = 1$ и

$$a_1(x) \equiv x_1^{\varepsilon_1} \pmod{R'}, \quad a_2(x) \equiv x_1^\xi x_2^{\varepsilon_2} \pmod{R'}, \quad a_3^m(x) \equiv x_1^{m^i \varepsilon_3} \pmod{R'}$$

для некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$, $\xi \in \mathbb{Z}$. Из последнего сравнения следует, что $a_3(x) \equiv x_1^{m^{i-1}\varepsilon_3} \pmod{R'}$, так как $m \neq 0$. Поэтому $u_1(a_1(x), a_2(x), a_3(x)) = u_1(x_1, x_2, x_1^{m^{i-1}})$ ввиду леммы 3.5. Применяя к равенству (15) гомоморфизм μ и воспользовавшись формулой (12), получим, что если $r = u_2(a_1(x), a_2(x), a_3(x)) = u_1(x_1, x_2, x_1^{m^i})$, то

$$f_0(y)\mu^{r-1} = f_0(a_1(y), a_2(y))\mu^{r-1}.$$

Из этого равенства следует, что $f_0(y)\mu = f_0(a_1(y), a_2(y))\mu$, так как $r - 1$ не является делителем нуля в кольце $\mathbb{Z}_2 R$. Используя формулу (12), получаем, что

$$\begin{aligned} d_{i-1}\mu &= f_0(y)\mu^{u_1(x_1, x_2, x_1^{m^{i-1}})-1} \\ &= f_0(a_1(y), a_2(y))\mu^{u_1(a_1(x), a_2(x), a_3(x))-1} \\ &= w_1(a_1(y), a_2(y), a_3(y))\mu. \end{aligned}$$

Следовательно, $d_{i-1} = w_1(a_1(y), a_2(y), a_3(y)) \in W_{n-1} \subseteq W_{i-2}$ (напомним, что μ инъективно), что противоречит выбору i . Лемма доказана.

Список литературы

1. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск: Изд-во НИИ математико-информационных основ обучения НГУ, 1995.
2. Клейман Ю. Г. О некоторых вопросах теории многообразий групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 37–74.
3. Vaughan-Lee M. R. Uncountably many varieties of groups // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2. Pt. 3. № 6. P. 280–286.
4. Клейман Ю. Г. О тождествах в группах // Труды ММО. 1982. Т. 44. С. 62–108.
5. Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
6. Малышев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.06.1997