Общероссийский математический портал

В. В. Беньш-Кривец, О разложении свободного произведения циклических групп с одним соотношением в амальгамированное свободное произведение, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 8, 13–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:51:13

УДК 512.543.76

В. В. Беньш-Кривец

О разложении свободного произведения циклических групп с одним соотношением в амальгамированное свободное произведение

Данная работа посвящена изучению проблемы разложения свободного произведения циклических групп с одним соотношением в нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Доказаны две теоремы, из которых отметим следующую.

Пусть $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $n \geq 0$, $m \geq 2$, $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной a и b , которое содержит b . Тогда G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

В качестве следствия этой теоремы получаем доказательство гипотезы Файна, Левина и Розенбергера о том, что любая группа с двумя образующими и одним соотношением с кручением является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Библиография: 13 названий.

Введение

Свободным произведением семейства групп $\{G_i\}$, $i \in I$, с одним соотношением называется группа $G = (*G_i)/N(S)$, где S – циклически редуцированное слово в свободном произведении $*G_i$, $N(S)$ – его нормальное замыкание; S называется *соотношением*. Свободные произведения с одним соотношением имеют много общих свойств с группами с одним соотношением [1]. Мы рассматриваем случай, когда G_i является циклической группой и соотношение является собственной степенью, т.е. $S = R^m$, где R – циклически редуцированное слово в $*G_i$ и $m \geq 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа G , имеющая копредставление

$$G = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^{l_1} = \dots = a_n^{l_n} = R^m(a_1, \dots, a_n) = 1 \rangle,$$

где $n \geq 2$, $m \geq 2$, $l_i = 0$ или $l_i \geq 2$ для всех i , $R(a_1, \dots, a_n)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной $a_1, \dots, a_n$, называется *свободным произведением n циклических групп с одним соотношением* (*one relator product of cyclics* в англоязычной литературе).

Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры”.

В данной работе рассматривается проблема разложения свободных произведений циклических групп с одним соотношением в нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Первый общий результат о разложении таких групп был получен в [2]. Теорема 3 из [2] утверждает, что если G является свободным произведением с одним соотношением n циклических групп, $n \geq 3$, то G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Случай свободного произведения двух циклических групп с одним соотношением, т.е. групп вида

$$G = \langle a, b \mid a^m = b^n = R^l(a, b) = 1 \rangle,$$

где $l \geq 2$, $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной a и b , является значительно более сложным. Группы такого вида называют *обобщенными треугольными группами*. Эти группы иногда допускают разложение в нетривиальное амальгамированное свободное произведение, а иногда нет. Например, известно (см. [3]), что обычные треугольные группы

$$T(m, n, p) = \langle a, b \mid a^m = b^n = (ab)^p = 1 \rangle,$$

где $m, n, p \geq 2$, неразложимы в нетривиальное амальгамированное свободное произведение. В [3] Цишанг исследовал проблему разложения в амальгамированное свободное произведение для плоских разрывных групп. Он дал полный ответ, когда такая группа является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, за исключением групп $H_1 = \langle a, b \mid [a, b]^n = 1 \rangle$ и $H_2 = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^n = 1 \rangle$, $n \geq 2$. Розенбергер [4] доказал, что группы H_1 и H_2 являются нетривиальным амальгамированным свободным произведением в случае, когда n не является степенью 2. В недавних работах [5], [6] этот факт доказан для произвольного n . Отметим, что этот результат является также непосредственным следствием теоремы 1. Следующая гипотеза высказана в [2]:

ГИПОТЕЗА 1. *Произвольная группа с двумя образующими и одним соотношением с кручением является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Отметим, что если группа G имеет более двух образующих, то утверждение гипотезы 1 справедливо в силу упоминавшейся выше теоремы 3 из [2]. Кроме того, в [2] эта гипотеза доказана в случае, когда группа G имеет копредставление $G = \langle a, b \mid R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $m \geq 2$ и $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово, не лежащее в коммутанте свободной группы, порожденной a и b .

В предлагаемой работе доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $G = \langle a, b \mid a^{2n} = R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $n \geq 0$, $m \geq 2$, $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной a и b , которое содержит b . Тогда G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $G = \langle a, b \mid a^n = R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $n = 0$ или $n \geq 2$, $m \geq 3$ и $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе с образующими a и b , содержащее b . Если $R(a, b) = a^{u_1} b^{v_1} \dots a^{u_s} b^{v_s}$, где $0 < u_i < n$, $v_i \neq 0$ для $i = 1, \dots, s$ и $\prod_{i=1}^s |v_i| \geq 3$, то G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – группа с двумя образующими и одним соотношением с кручением. Тогда G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Хорошо известно, (см., например, [7]), что если G – конечно порожденная группа с одним соотношением с кручением, то G имеет копредставление вида $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid R^m(a_1, \dots, a_n) = 1 \rangle$, где $m \geq 2$, $R(a_1, \dots, a_n)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной $a_1, \dots, a_n$. В нашем случае $G = \langle a, b \mid R^m(a, b) = 1 \rangle$ и согласно теореме 2 G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

СЛЕДСТВИЕ 2. Группы $H_1 = \langle a, b \mid [a, b]^n = 1 \rangle$ и $H_2 = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^n = 1 \rangle$ являются нетривиальным амальгамированным свободным произведением для любого $n \geq 2$.

§ 1. Некоторые вспомогательные результаты

Здесь мы докажем ряд вспомогательных утверждений. Далее через E мы будем обозначать единичную матрицу в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}$ – кольцо целых алгебраических чисел в $\mathbb{C}$, $F_2 = \langle g, h \rangle$ – свободную группу ранга 2 с образующими g и h , $\mathrm{tr} X$ – след матрицы X . Следующий результат Басса [8] играет ключевую роль в доказательстве теорем 1 и 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [8]). Пусть H – конечно порожденная подгруппа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- 1) существует эпиморфизм $f: H \rightarrow \mathbb{Z}$ такой, что $f(u) = 0$ для всех унитарных элементов $u \in H$;
- 2) H сопряжена подгруппе группы треугольных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где a и c – корни из единицы;
- 3) H сопряжена подгруппе группы $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$;
- 4) H является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Следующее наблюдение полезно для построения матриц конечного порядка в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

ЛЕММА 1. Пусть $m > 1$ и $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Если $\mathrm{tr} X = \pm 2 \cos(r\pi/m)$, где $r \in \{1, \dots, m-1\}$, то $X^{2m} = E$. В частности, если $\mathrm{tr} X = 0$, то $X^2 = -E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $\mathrm{tr} X = 2 \cos(r\pi/m)$. Тогда характеристический многочлен матрицы X имеет корни $\alpha = \cos(r\pi/m) + i \sin(r\pi/m)$ и $\alpha^{-1} = \cos(r\pi/m) - i \sin(r\pi/m)$, где α является корнем степени $2m$ из 1. Таким образом, X сопряжена матрице $X_1 = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha^{-1})$, следовательно, $X^{2m} = E$.

Далее нам потребуются так называемые “характеры Фрике” (см. [9]–[11]). Для произвольного элемента $w = w(g, h) \in F_2$ рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_w: \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_w(A, B) = \mathrm{tr}(w(A, B)).$$

В [9] доказано (см. также [12]), что для произвольного $w \in F_2$

$$\tau_w = Q_w(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh}),$$

где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ – многочлен с целыми коэффициентами. Функцию τ_w обычно называют *характером Фрике*, а многочлен Q_w – *многочленом Фрике* элемента $w \in F_2$. Пусть u, v – произвольные элементы F_2 . Следующие соотношения между характеристами Фрике следуют из соотношений между следами произвольных матриц в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и могут быть легко проверены:

$$1) \quad \tau_{u^{-1}} = \tau_u; \quad 2) \quad \tau_{uv} = \tau_{vu}; \quad 3) \quad \tau_{vuv^{-1}} = \tau_u; \quad 4) \quad \tau_{uv} = \tau_u \tau_v - \tau_{uv^{-1}}. \quad (1)$$

Следующее утверждение достаточно хорошо известно и его легко доказать непосредственным вычислением, хотя трудно указать точную ссылку.

ЛЕММА 2. *Для произвольных $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ существуют такие матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, что*

$$\tau_g(A, B) = \mathrm{tr} A = \alpha, \quad \tau_h(A, B) = \mathrm{tr} B = \beta, \quad \tau_{gh}(A, B) = \mathrm{tr} AB = \gamma.$$

Эта лемма означает, в частности, что характеры Фрике $\tau_g, \tau_h, \tau_{gh}$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ и, следовательно, многочлен Фрике Q_w элемента w определен однозначно. Далее, нам нужна явная формула для нахождения многочлена Фрике, полученная в [13]. Чтобы сформулировать этот результат, рассмотрим многочлены $P_n(\lambda)$, которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$$

и начальным условиям

$$P_0(\lambda) = 1, \quad P_{-1}(\lambda) = 0.$$

Если $n < 0$, положим

$$P_n(\lambda) = -P_{|n|-2}(\lambda)$$

Степень многочлена $P_n(\lambda)$ равна n , если $n > 0$, и равна $|n| - 2$, если $n < 0$.

ЛЕММА 3. 1) *Многочлен $P_n(\lambda)$, $n \geq 1$, имеет n нулей, определенных формулой*

$$\lambda_{n,k} = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2) $P_{n-1}(2) = n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

3) Пусть $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$. Тогда

$$Q_{gh^n}(x, y, z) = P_{n-1}(y)z - P_{n-2}(y)x. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Индукцией по n легко проверить, что

$$P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}.$$

Теперь утверждение п. 1) получается непосредственным вычислением.

Пункты 2) и 3) доказываются индукцией по n (по поводу (2) см. также [12, формула (6)]).

Далее, пусть $w = g^{\alpha_1} h^{\beta_1} \dots g^{\alpha_s} h^{\beta_s} \in F_2$ — циклически редуцированное слово в F_2 и пусть $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$. Рассмотрим многочлен Фрике $Q_w(x, y, z)$ как многочлен от z . Пусть

$$Q_w(x, y, z) = M_n(x, y)z^n + M_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \dots + M_0(x, y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [13]). *Степень многочлена Фрике $Q_w(x, y, z)$ относительно z равна s , т.е. равна числу блоков вида $g^{\alpha_i} h^{\beta_i}$ в w . Старший коэффициент $M_s(x, y)$ многочлена $Q_w(x, y, z)$ имеет вид:*

$$M_s(x, y) = \prod_{i=1}^s P_{\alpha_i-1}(x) P_{\beta_i-1}(y).$$

Следующая лемма играет важную роль в доказательстве теорем 1 и 2.

ЛЕММА 4. Пусть $G = \langle a, b \mid a^n = R^m(a, b) = 1 \rangle$ и пусть $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие матрицы, что $\mathrm{tr} A = \alpha$, где $\alpha = \pm 2 \cos(t\pi/n)$ для некоторого $t \in \{1, \dots, n-1\}$, и $Q_R(\alpha, y, z) = c$, где Q_R — многочлен Фрике элемента $R(g, h) \in F_2$, $c = \pm 2 \cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$, $y = \mathrm{tr} B$, $z = \mathrm{tr} AB$. Положим $H = \langle A, B \rangle$. Предположим, что выполнены следующие два условия:

- 1) существует унитарный (либо конечного порядка) элемент $u \in H$ вида $u = A^{\alpha_1} B^{\beta_1} \dots A^{\alpha_s} B^{\beta_s}$ такой, что $l = \sum_{i=1}^s \beta_i \neq 0$;
- 2) существует элемент $h \in H$ такой, что $\mathrm{tr} h \notin \mathcal{O}$.

Тогда группа G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что группа H не удовлетворяет условиям 1)–3) предложения 1. Предположим, что $f: H \rightarrow \mathbb{Z}$ — такой эпиморфизм, что $f(z) = 0$ для любого унитарного элемента $z \in H$. Тогда $f(A) = 0$, поскольку $A^{2n} = E$ в силу леммы 1. Далее, $f(u) = lf(B) = 0$, а значит, $f(B) = 0$, поскольку по условию u либо унитарен, либо имеет конечный порядок. Таким образом, $f(H) = \{0\}$ — противоречие. Далее, по условию существует элемент $h \in H$ такой, что $\mathrm{tr} h \notin \mathcal{O}$. Следовательно, H не удовлетворяет условиям 2) и 3) предложения 1. Таким образом, H является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, т.е. $H = H_1 *_F H_2$, где $H_1 \neq F \neq H_2$. Так как $-E \in Z(H)$, то $-E \in F$. Пусть $\overline{A}, \overline{B}, \overline{H}, \overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{F}$ являются образами A, B, H, H_1, H_2, F в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, соответственно. Тогда $\overline{H}_1 \neq \overline{F} \neq \overline{H}_2$ и, следовательно, $\overline{H} = \overline{H}_1 *_F \overline{H}_2$ — нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Условие $Q_R(\alpha, y, z) = c$ означает, что $\mathrm{tr} R(A, B) = c$. Тогда в силу леммы 1 $R^{2m}(A, B) = E$. Таким образом,

$\overline{A}^n = R^m(\overline{A}, \overline{B}) = 1$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Следовательно, $\overline{H}$ является эпиморфным образом G , и мы получаем утверждение леммы 4. (Хорошо известно, что если $\varphi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ — эпиморфизм групп и Γ_2 является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, то и Γ_1 такова.)

Следующая лемма будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 5. 1) Для заданных $s, m, M \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условиям $m \geq 2$, $|M| \geq 3$, существуют $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $r \in \{1, \dots, m-1\}$ такие, что $((-1)^s 2 - c)/M \notin \mathcal{O}$, где $c = 2\varepsilon \cos(r\pi/m)$.

2) Для заданного $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, существует $r \in \{1, \dots, m-1\}$ такое, что $(2 + 2 \cos(r\pi/m))^{-1} \notin \mathcal{O}$.

3) Если $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 3$, то $\cos(\pi/m) \notin \mathcal{O}$.

4) Для любых заданных $m, M \in \mathbb{Z}$, $m \geq 3$ и $|M| \geq 3$, существует такое $r \in \{1, \dots, m-1\}$, что $(4/M) \cos(r\pi/m) \notin \mathcal{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Не теряя общности, мы можем считать, что s четно. Предположим, что для любых $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $r \in \{1, \dots, m-1\}$ число $(2 - c)/M$ является целым алгебраическим. Тогда число $(2 - c)/M + (2 + c)/M = 4/M$ также целое алгебраическое. Так как $|M| \geq 3$, это возможно лишь в случае, когда $|M| = 4$. Пусть, для определенности, $M = 4$. Если m четно, мы положим $r = m/2$. Тогда $c = 0$ и $2/M = \frac{1}{2} \notin \mathcal{O}$ — противоречие. Пусть m нечетно и пусть $F_1 = \{2 \cos(2r\pi/m) \mid r = 1, \dots, m-1\}$. Тогда

$$\sum_{c \in F_1} \frac{2 - c}{4} = \frac{2(m-1) - \sum_{c \in F_1} c}{4} = \frac{2(m-1) + 1}{4},$$

поскольку $1 + \sum_{c \in F_1} c = 0$ как сумма всех корней из 1 степени m . Число $(2(m-1) + 1)/4$, очевидно, не является целым алгебраическим — противоречие, доказывающее 1).

2) Так как

$$\frac{1}{2 + 2 \cos(r\pi/m)} = \frac{1}{4 \cos^2(r\pi/(2m))},$$

то достаточно доказать, что для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$ число $(2 \cos(r\pi/(2m)))^{-1}$ не принадлежит $\mathcal{O}$. Согласно лемме 3 многочлен $P_{2m-1}(\lambda)$ имеет корни $0, \pm 2 \cos(r\pi/(2m))$, $r = 1, \dots, m-1$. Легко проверить индукцией по m , что

$$P_{2m-1}(\lambda) = \lambda(\lambda^{2m-2} + a_1 \lambda^{2m-4} + \dots + (-1)^{m+1} m). \quad (3)$$

Следовательно, числа $(\pm 2 \cos(r\pi/(2m)))^{-1}$ являются корнями многочлена $P_{2m-1}(1/\lambda)$ или, что эквивалентно, корнями многочлена

$$g_1(\lambda) = \lambda^{2m-2} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{1}{m}.$$

Так как $1/m \notin \mathcal{O}$, то по меньшей мере один из корней многочлена $g_1(\lambda)$ не является целым алгебраическим, что и доказывает 2).

3) Достаточно доказать, что существует такое $r \in \{1, \dots, m-1\}$, что $\cos(r\pi/m) \notin \mathcal{O}$, поскольку если $\cos(\pi/m) \in \mathcal{O}$, то и $\cos(r\pi/m) \in \mathcal{O}$ для любого $r \in \mathbb{Z}$. В силу леммы 3 числа $2 \cos(r\pi/m)$, $r = 1, \dots, m-1$, являются корнями многочлена $P_{m-1}(\lambda)$. Если $m = 2k$, то из (3) следует, что числа $\cos(r\pi/(2k))$, $r = 1, \dots, 2k-1$, являются корнями многочлена $g_1(2\lambda)$ или, что эквивалентно, корнями уравнения

$$\lambda^{2k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{k}{2^{2k-2}} \lambda = 0.$$

Так как $k \geq 2$, то $k < 2^{2k-2}$ и, следовательно, число $k/2^{2k-2}$ не является целым алгебраическим. Следовательно, существует r такое, что $\cos(r\pi/(2k)) \notin \mathcal{O}$.

Пусть $m = 2k + 1$. Тогда по индукции легко проверить, что

$$P_{2k}(\lambda) = \lambda^{2k} + \dots + (-1)^k. \quad (4)$$

В силу леммы 3 числа $\cos(r\pi/(2k+1))$, $r = 1, \dots, 2k$, являются корнями многочлена $P_{2k}(2\lambda)$ или, что эквивалентно, корнями уравнения

$$\lambda^{2k} + \dots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}} = 0.$$

Так как $(-1)^k/2^{2k} \notin \mathcal{O}$, то существует r такое, что $\cos(r\pi/(2k+1)) \notin \mathcal{O}$.

4) Из леммы 3 следует, что числа $(4/M) \cos(r\pi/m)$, $r = 1, \dots, m-1$, являются корнями многочлена $P_{m-1}(M\lambda/2)$. Рассмотрим два случая.

Пусть $m = 2k + 1$. Тогда в силу (4) числа $(4/M) \cos(r\pi/(2k+1))$, $r = 1, \dots, 2k$, являются корнями уравнения

$$\lambda^{2k} + \dots + (-1)^k \left(\frac{2}{M}\right)^{2k} = 0.$$

Так как $|M| \geq 3$, то $(-1)^k(2/M)^{2k} \notin \mathcal{O}$, следовательно, последнее уравнение имеет корень, который также не принадлежит $\mathcal{O}$.

Пусть $m = 2k$. Тогда в силу (3) числа $(4/M) \cos(r\pi/m)$, $r = 1, \dots, m-1$, являются корнями уравнения

$$\lambda^{2k-1} + \dots + (-1)^{k+1} k \left(\frac{2}{M}\right)^{2k-2} \lambda = 0.$$

Легко видеть, что $(-1)^{k+1} k (2/M)^{2k-2} \notin \mathcal{O}$. Тем самым 4), а вместе с тем и лемма 5 доказаны.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 1. Если $n > 1$, то мы можем рассмотреть группу $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = R^m(a, b) = 1 \rangle$, которая является эпиморфным образом G . Таким образом, мы можем предположить без потери общности, что $n = 1$. Наша цель состоит в том, чтобы построить представление

$\varphi: G \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ такое, что группа $\varphi(G)$ является нетривиальным амальгамированным свободным произведением. Существуют следующие три случая, каждый из которых мы рассмотрим отдельно:

- 1) $R(a, b) = ab^{n_1} \cdots ab^{n_s}$ является циклически редуцированным словом, лежащим в подгруппе свободной группы с образующими a и b , порожденной a^2 и коммутантом, и при этом существует i такое, что $|n_i| > 1$;
- 2) $R(a, b)$ такое же как в случае 1), при этом $|n_i| = 1$ для всех $i = 1, \dots, s$;
- 3) $R(a, b)$ является циклически редуцированным словом, которое не принадлежит подгруппе свободной группы с образующими a и b , порожденной a^2 и коммутантом.

Случай 1. Пусть $R(a, b) = ab^{n_1} \cdots ab^{n_s}$. Из условий, наложенных на элемент $R(a, b)$, следует, что s четно и $\sum_{i=1}^s n_i = 0$. Чтобы применить лемму 4, покажем, что существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\mathrm{tr} A = 0, \quad \mathrm{tr} B = 2, \quad \mathrm{tr} AB = z,$$

где z — некоторое комплексное число, не принадлежащее $\mathcal{O}$ и удовлетворяющее уравнению

$$Q_R(0, 2, z) = c, \tag{5}$$

$c = \pm 2 \cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$.

Согласно предложению 2 мы можем записать (5) в виде

$$M_s(0, 2)z^s + M_{s-1}(0, 2)z^{s-1} + \cdots + M_0(0, 2) - c = 0, \tag{6}$$

где $M_s(0, 2) = \prod_{i=1}^s P_0(0)P_{n_i-1}(2) = \prod_{i=1}^s n_i$ в силу леммы 3. Так как s четно, $\sum_{i=1}^s n_i = 0$ и существует i такое, что $|n_i| > 1$, то $\prod_{i=1}^s |n_i| \geq 3$. Таким образом, $|M_s(0, 2)| \geq 3$. Далее, справедлива следующая

ЛЕММА 6. Пусть $R = gh^{n_1} \cdots gh^{n_s} \in F_2$, где s четно, и $Q_R(x, y, z) = M_s(x, y)z^s + \cdots + M_0(x, y)$ — многочлен Фрике элемента R , где $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$. Тогда $M_0(0, 2) = (-1)^{s/2} 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, сделаем следующие наблюдения.

1) $Q_{h^i}(0, 2, z) = 2$, поскольку если $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и B — унитарная матрица, то B^i унитарна для любого i . Следовательно, $\tau_{h^i}(A, B) = \mathrm{tr} B^i = 2$.

2) Из леммы 3 следует, что $Q_{gh^i}(0, 2, z) = P_{i-1}(2)z = iz$.

Утверждение леммы докажем индукцией по s . Если $s = 2$, то используя соотношения (1), получаем

$$Q_{gh^{n_1}gh^{n_2}}(0, 2, z) = Q_{gh^{n_1}}(0, 2, z)Q_{gh^{n_2}}(0, 2, z) - Q_{h^{n_2-n_1}}(0, 2, z) = n_1n_2z^2 - 2,$$

т.е. $M_0(0, 2) = -2$. Для произвольного $s > 2$ имеем

$$\begin{aligned} Q_R(0, 2, z) &= Q_{gh^{n_1}}(0, 2, z)Q_{gh^{n_2} \cdots gh^{n_s}}(0, 2, z) \\ &\quad - Q_{gh^{n_3} \cdots gh^{n_s-n_1+n_2}}(0, 2, z) = n_1zf(z) - g(z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(z) &= Q_{gh^{n_2} \dots gh^{n_s}}(0, 2, z), \\ g(z) &= Q_{gh^{n_3} \dots gh^{n_s - n_1 + n_2}}(0, 2, z). \end{aligned}$$

Мы видим, что свободный член многочлена $Q_R(0, 2, z)$ совпадает со свободным членом $g(z)$. По индукции имеем

$$M_0(0, 2) = -(-1)^{(s-2)/2} 2 = (-1)^{s/2} 2.$$

Лемма 6 доказана.

Учитывая лемму 6, мы можем записать (6) в виде

$$z^s + \frac{M_{s-1}(0, 2)}{M_s(0, 2)} z^{s-1} + \dots + \frac{(-1)^{s/2} 2 - c}{M_s(0, 2)} = 0. \quad (7)$$

Из 1) леммы 5 следует, что можно выбрать $c = \pm 2 \cos(r\pi/m)$ в уравнении (7) таким, чтобы свободный коэффициент $((-1)^{s/2} - c)/M_s(0, 2)$ не принадлежал $\mathcal{O}$. Тогда (7) имеет корень z_0 , который не является целым алгебраическим. Согласно лемме 2 существуют матрицы $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\text{tr } A = 0, \quad \text{tr } B = 2, \quad \text{tr } AB = z_0.$$

Применение леммы 4 завершает доказательство теоремы 1 в первом случае.

Случай 2. Пусть $R(a, b) = ab^{\varepsilon_1} ab^{\varepsilon_2} \dots ab^{\varepsilon_s}$. Из наших предположений следует, что s четно, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ для всех $i = 1, \dots, s$ и $\sum_{i=1}^s \varepsilon_i = 0$.

Предположим вначале, что для некоторого $j < s$ мы имеем $\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$. Пусть $c = a$, $d = ab^{\varepsilon_j}$ — новые образующие группы G . Нетрудно проверить, что тогда G имеет копредставление вида

$$G = \langle c, d \mid c^2 = R_1^m(c, d) = 1 \rangle,$$

где $R_1(c, d) = cd^{l_1} \dots cd^{l_t}$ — циклически редуцированное слово, лежащее в подгруппе свободной группы с образующими c и d , порожденной c^2 и коммутантом, и при этом существует l_i такое, что $|l_i| \geq 2$. Этот случай был рассмотрен выше в первом случае.

Таким образом, пусть $R(a, b) = abab^{-1} \dots abab^{-1} = (abab^{-1})^l$ для некоторого $l > 0$. Следовательно, группа G имеет копредставление вида

$$G = \langle a, b \mid a^2 = (abab^{-1})^t = 1 \rangle,$$

где $t \geq 2$. Покажем, что существуют матрицы $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, удовлетворяющие условиям:

$$1) \quad \text{tr } A = 0; \quad 2) \quad \text{tr } AB^{-2}AB^3 = 2; \quad 3) \quad \text{tr } AB \notin \mathcal{O}; \quad 4) \quad \text{tr } ABAB^{-1} = c,$$

где $c = \pm 2 \cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$. Используя характеры Фрике, условия 2) и 4) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \tau_{ghgh^{-1}}(A, B) = c, \\ \tau_{gh^{-2}gh^3}(A, B) = 2. \end{cases} \quad (8)$$

Используя соотношения (1) между характерами Фрике, легко получить, что

$$\tau_{ghgh^{-1}} = -\tau_{gh}^2 + \tau_g \tau_h \tau_{gh} - \tau_h^2 + 2$$

и

$$\tau_{gh^{-2}gh^3} = (\tau_g \tau_h^2 - \tau_h \tau_{gh} - \tau_g)(\tau_h^2 \tau_{gh} - \tau_g \tau_h - \tau_{gh}) - \tau_h^5 + 5\tau_h^3 - 5\tau_h.$$

Положим $y = \tau_h(A, B) = \text{tr } B$, $z = \tau_{gh}(A, B) = \text{tr } AB$. Так как $\tau_g(A, B) = \text{tr } A = 0$, мы получаем

$$\tau_{ghgh^{-1}}(A, B) = -z^2 - y^2 + 2, \quad \tau_{gh^{-2}gh^3}(A, B) = -(y^3 - y)z^2 - (y^5 - 5y^3 + 5y).$$

Таким образом, (8) можно записать в виде:

$$\begin{cases} z^2 + y^2 - 2 + c = 0, \\ (y^3 - y)z^2 + y^5 - 5y^3 + 5y + 2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$y^3 - \left(1 + \frac{1}{c+2}\right)y - \frac{2}{c+2} = 0. \quad (10)$$

Согласно 2) леммы 5 существует такое $r \in \{1, \dots, m-1\}$, что число $1/(c+2)$ не принадлежит $\mathcal{O}$. Тогда уравнение (10) имеет корень $y_0 \notin \mathcal{O}$. Пусть (y_0, z_0) – некоторое решение (9). Согласно лемме 2 существуют матрицы $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\text{tr } A = 0, \quad \text{tr } B = y_0, \quad \text{tr } AB = z_0.$$

Применяя лемму 4, завершаем доказательство теоремы 2 во втором случае.

Случай 3. Пусть $R(a, b) = ab^{n_1} \dots ab^{n_s}$ и $R(a, b)$ не принадлежит подгруппе свободной группы с образующими a и b , порожденной a^2 и коммутантом. Случай $\sum_{i=1}^s n_i \neq 0$ был рассмотрен в [2, теорема 5]. Поэтому мы можем считать, что s нечетно и $\sum_{i=1}^s n_i = 0$.

Вначале рассмотрим случай $m = 2$. Пусть $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = R^2(a, b) = 1 \rangle$. Покажем, что $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$ является свободным произведением двух циклических групп второго порядка. Достаточно доказать, что $R^2(a, b) = 1$ в G . Мы докажем более общий факт: если $w(a, b) = ab^{l_1} \dots ab^{l_s}$, где $s = 2k+1$ и $\sum_{i=1}^s l_i$ – четное число, тогда $w^2(a, b) = 1$ в G_1 . Воспользуемся индукцией по s . Если $s = 1$, то утверждение очевидно. Для произвольного s среди показателей $l_1, \dots, l_s$ существует четный. Пусть, например, l_1 четно. Тогда $b^{l_1} = 1$ в G_1 и

$$w(a, b) = b^{l_2} ab^{l_3} \dots ab^{l_s},$$

т.е. $w(a, b)$ сопряжено с

$$w_1(a, b) = ab^{l_3} \dots ab^{l_2+l_s}.$$

Поскольку сумма $l_3 + \dots + (l_2 + l_s)$ по-прежнему четна, мы можем применить индукцию и получить, что $w_1^2(a, b) = 1$ в G_1 . Следовательно, $w^2(a, b) = 1$ в G_1 . Поскольку группа G_1 является эпиморфным образом G , мы получаем, что G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Рассмотрим теперь случай $m \geq 3$. Покажем, что существуют такие матрицы $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, что

$$\text{tr } A = 0, \quad \text{tr } B = y_0, \quad \text{tr } AB = 2, \quad Q_R(0, y_0, 2) = 2 \cos \frac{\pi}{m},$$

где y_0 – некоторое комплексное число, не являющееся целым алгебраическим и $Q_R(x, y, z)$ – многочлен Фрике слова $R(g, h) \in F_2$. Справедлива

ЛЕММА 7. 1) *Справедливо следующее равенство: $Q_R(0, y, z) = zf(y, z)$, где $f(y, z) \in \mathbb{Z}[y, z]$.*

2) *Многочлен $f_1(y) = f(y, 2)$ не является константой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из леммы 3 следует, что $Q_{gh^n}(0, y, z) = P_{n-1}(y)z$ и при $s = 1$ утверждение доказано. Пусть $s > 1$. Тогда, используя соотношения (1), получаем

$$\tau_{gh^{n_1} \dots gh^{n_s}} = \tau_{gh^{n_1}} \tau_{gh^{n_2} \dots gh^{n_s}} - \tau_{gh^{n_3} \dots gh^{n_s-n_1+n_2}}.$$

По индукции имеем

$$Q_R(0, y, z) = P_{n_1-1}(y)f_1(y, z)z - zf_2(y, z) = zf(y, z)$$

для некоторого многочлена $f(y, z) \in \mathbb{Z}[y, z]$.

2) Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -алгебру T , порожденную всеми характеристиками Фрике τ_w , $w \in F_2$. Любой автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}(F_2)$ индуцирует автоморфизм

$$\sigma': T \rightarrow T, \quad \tau_w \mapsto \tau_{\sigma(w)}.$$

Рассмотрим автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}(F_2)$ такой, что

$$\sigma(g) = g, \quad \sigma(h) = gh.$$

Тогда $\sigma' \in \text{Aut}(T)$ такой автоморфизм, что

$$\sigma'(x) = x_1 = x, \quad \sigma'(y) = y_1 = z, \quad \sigma'(z) = z_1 = xz - y.$$

Далее, имеем

$$\sigma'(\tau_{R(g, h)}) = \tau_{\sigma(R(g, h))} = \tau_{R(\sigma(g), \sigma(h))},$$

следовательно,

$$\sigma'(Q_R(x, y, z)) = Q_R(x_1, y_1, z_1) = Q_R(x, z, xz - y).$$

Таким образом, $\sigma'(Q_R(0, y, 2)) = Q_R(0, 2, -y)$. Из предложения 2 следует, что многочлен $Q_R(0, 2, -y) \in \mathbb{Z}[y]$ имеет степень s , поскольку для его старшего коэффициента M_s выполнено $|M_s| = \prod_{i=1}^s |n_i| \neq 0$. Итак, $Q_R(0, 2, -y)$ — не константа, следовательно, $\sigma'^{-1}(Q_R(0, 2, -y)) = Q_R(0, y, 2) = 2f_1(y)$ — также не константа. Лемма 7 доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 1. Согласно лемме 7 равенство $Q_R(0, y_0, 2) = 2 \cos(\pi/m)$ эквивалентно равенству

$$f_1(y_0) = \cos \frac{\pi}{m}. \quad (11)$$

В силу 3) леммы 5 число $\cos(\pi/m)$ не является целым алгебраическим, следовательно, существует корень y_0 уравнения (11), который также не является целым алгебраическим. В силу леммы 2 существуют матрицы $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\text{tr } A = 0, \quad \text{tr } B = y_0, \quad \text{tr } AB = 2.$$

Применив лемму 4, мы завершаем доказательство теоремы 1.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Учитывая теорему 1, мы можем считать, что $n \geq 3$. Пусть $R(g, h) \in F_2$ и пусть Q_R — многочлен Фрике слова R . Покажем, что существуют матрицы такие $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, что

$$\text{tr } A = \alpha, \quad \text{tr } B = 2, \quad \text{tr } AB = z,$$

где $\alpha = 2 \cos(\pi/n)$, z — некоторое комплексное число, не являющееся целым алгебраическим и удовлетворяющее уравнению

$$Q_R(\alpha, 2, z) = c, \quad (12)$$

где $c = \pm 2 \cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$. Согласно предложению 2 мы можем записать (12) в виде

$$M_s(\alpha, 2)z^s + M_{s-1}(\alpha, 2)z^{s-1} + \dots + M_0(\alpha, 2) - c = 0, \quad (13)$$

где

$$M_s(\alpha, 2) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(\alpha) P_{v_i-1}(2).$$

В силу леммы 3 $P_{u_i-1}(\alpha) \neq 0$, $P_{v_i-1}(2) = v_i$, поэтому $M_s(\alpha, 2) \neq 0$. Запишем (13) в виде

$$z^s + \frac{M_{s-1}(\alpha, 2)}{M_s(\alpha, 2)} + \dots + \frac{M_0(\alpha, 2) - c}{M_s(\alpha, 2)} = 0. \quad (14)$$

Покажем, что мы можем выбрать c так, что $(M_0(\alpha, 2) - c)/M_s(\alpha, 2) \notin \mathcal{O}$. Предположим, что для любого $r \in \{1, \dots, m-1\}$ оба числа

$$\frac{M_0(\alpha, 2) + 2 \cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha, 2)} \quad \text{и} \quad \frac{M_0(\alpha, 2) - 2 \cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha, 2)}$$

принадлежат $\mathcal{O}$. Тогда их разность

$$\frac{4 \cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha, 2)} \in \mathcal{O}.$$

Так как для любого r многочлен $P_r(\lambda)$ имеет целые коэффициенты, то $P_{u_i-1}(\alpha) \in \mathcal{O}$. Следовательно, для любого $r \in \{1, \dots, m-1\}$

$$\frac{4 \cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha, 2)} P_{u_i-1}(\alpha) = \frac{4 \cos(r\pi/m)}{M} \in \mathcal{O},$$

где $M = \prod_{i=1}^s v_i \in \mathbb{Z}$ и $|M| \geq 3$ по условию теоремы. Мы получили противоречие с 4) леммы 5. Это означает, что существует корень z_0 уравнения (14), который не принадлежит $\mathcal{O}$. В силу леммы 2 существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\mathrm{tr} A = \alpha, \quad \mathrm{tr} B = 2, \quad \mathrm{tr} AB = z_0.$$

Применив лемму 4, мы завершаем доказательство теоремы 2.

В заключение сформулируем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. *Группа $G = \langle a, b \mid a^n = R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $m \geq 2$, $n = 0$ или $n \geq 2$ и $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе с образующими a и b , содержащее b , является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Учитывая теоремы 1, 2 и теорему 5 из [2], эта гипотеза не доказана в следующем случае: n – нечетно, $R(a, b) = a^l R_1(a, b)$, где $0 \leq l < n$ и $R_1(a, b) = a^{u_1} b^{v_1} \dots a^{u_s} b^{v_s}$ – циклически редуцированное слово, лежащее в коммутанте свободной группы с образующими a и b , такое, что $\prod_{i=1}^s |v_i| \in \{1, 2\}$.

Эта статья была написана во время посещения автором университета г. Билефельд (ФРГ) в качестве гостя SFB 343 “Diskrete Strukturen in der Mathematik”.

Список литературы

1. *Howie J.* One relator products of groups // Proceedings of groups St. Andrews. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. P. 216–220.
2. *Fine B., Levin F., Rosenberger G.* Free subgroups and decompositions of one-relator products of cyclics; Part 2: Normal torsion free subgroups and FPA decompositionns // J. Indian Math. Soc. 1985. V. 49. P. 237–247.
3. *Zieschang H.* On decompositions of discontinuous groups of the plane // Math. Z. 1976. V. 151. P. 165–188.
4. *Rosenberger G.* Bemerkungen zu einer Arbeit von H. Zieschang // Arch. Math. (Basel). 1977. V. 29. P. 623–627.
5. *Long D. D., MacLachlan C., Reid A. W.* Splitting groups of signature $(1, n)$ // J. Algebra. 1996. V. 185. P. 329–341.
6. *Dunwoody M. J., Sageev M.* Splittings of certain Fuchsian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. № 7. P. 1953–1954.
7. *Магнус Б., Каррас А., Солитер Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
8. *Bass H.* Finitely generated subgroups of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_2(\mathbb{C})$ // The Smith Conjecture. New York: Wiley, 1984. P. 127–136.

9. *Horowitz R.* Characters of free groups represented in the two dimensional linear group // Comm. Pure. Appl. Math. 1972. V. 25. P. 635–649.
10. *Magnus W.* The uses of 2 by 2 matrices in combinatorial group theory // Results Math. 1981. V. 4. №2. P. 171–192.
11. *Culler M., Shalen P.* Varieties of group representations and splittings of 3 manifolds // Ann. of Math. (2). 1983. V. 117. P. 109–147.
12. *Helling H.* Diskrete Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})$ // Invent. Math. 1972. V. 17. P. 217–229.
13. *Traina C.* Trace polynomial for two generated subgroups of $SL_2(\mathbb{C})$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 79. P. 369–372.

Институт математики НАН Беларуси, Минск
E-mail: benyash@im.bas-net.by

Поступила в редакцию
21.10.1997