Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, Тауберова теорема типа Винера для обобщенных функций медленного роста, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 7, 91–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:31:46

УДК 517.53

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Тауберова теорема типа Винера для обобщенных функций медленного роста

Статья посвящена распространению тауберовых теорем типа Винера на случай обобщенных функций медленного роста. Показано, что для существования асимптотики (в слабом смысле) функционала необходимо и достаточно существование асимптотики на одной “пробной” функции такой, что ее преобразование Меллина полиномиально отделено от нуля в некоторой полосе комплексной плоскости, связанной с порядком рассматриваемого функционала. Рассмотрены также некоторые применения доказанной теоремы, в частности, доказаны некоторые теоремы о некомпенсации особенностей голоморфных функций.

Библиография: 15 названий.

В тридцатых годах Н. Винер [1], [2] доказал следующую тауберову теорему:

Пусть $f(\xi) \in L_\infty(-\infty, +\infty)$ и функция $\varphi_0(\xi) \in L_1(-\infty, +\infty)$ такова, что ее преобразование Фурье

$$\tilde{\varphi}_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \varphi_0(\xi) d\xi \neq 0 \quad \text{для всех } x \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда из существования

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a + \xi) \varphi_0(\xi) d\xi = A \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi) d\xi$$

следует существование

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a + \xi) \varphi(\xi) d\xi = A \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \quad \text{для любой } \varphi \in L_1(-\infty, +\infty).$$

Простой заменой переменных $\xi = \ln t$, $\ln a = k$ эту теорему можно переформулировать и в мультипликативном виде:

Пусть $f(t) \in L_\infty(0, +\infty)$, а функция $\varphi_0(t) \in L_1(0, +\infty)$ имеет преобразование Меллина

$$\hat{\varphi}_0(x) \equiv \int_0^\infty t^{-ix} \varphi_0(t) dt \neq 0 \quad \text{для всех } x \in (-\infty, +\infty). \quad (0.1)$$

Тогда из существования

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f(kt) \varphi_0(t) dt = c \quad (0.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-00240 и 96-15-96131).

следует существование

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f(kt)\varphi(t) dt = c_\varphi \quad \text{для любой } \varphi(t) \in L_1(0, \infty). \quad (0.3)$$

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству того факта, что линейная оболочка множества мультипликативных сдвигов $\{\varphi_0(kt), 0 < k < \infty\}$ является плотным в пространстве (основных) функций $L_1(0, +\infty)$. А так как множество функций (функционалов над L_1) $\{f(kt), 0 < k < \infty\}$ ограничено, то по теореме Банаха–Штейнхауза из (0.2) вытекает (0.3).

Теорема Винера занимает одно из центральных мест в гармоническом анализе и нашла многочисленные применения в различных областях математики. Поэтому весьма важно распространить эту теорему на другие классы функций. Из многочисленных обобщений теоремы Винера отметим работы [3]–[6], [12]–[14]. Во всех этих работах теорема Винера обобщалась в следующем направлении: в классе основных функций L_1 выделялся подкласс либо с помощью весовых функций, либо требованием аналитической продолжаемости преобразования Фурье в полосу (или даже в полуплоскость) с некоторыми оценками. При этом соответствующим образом расширялся класс функционалов, для которых существует свертка с таким подклассом основных функций. Далее, на основную функцию $\varphi_0(t)$ из этого подкласса накладывались условия, которые позволяли доказать плотность сдвигов $\{\varphi_0(kt), k > 0\}$ (в аддитивном случае $\{\varphi_0(a + \xi)\}$) в этом новом пространстве основных функций. Кроме того, налагалось дополнительное, как правило, трудно проверяемое на практике условие, обеспечивающее ограниченность множества сдвигов этих функционалов. Представляется интересным и важным освободиться от такого рода условия, быть может, налагая некоторые дополнительные требования на основную “пробную” функцию.

Желательно также распространить теорему Винера на классы обобщенных функций, например, на пространство $\mathcal{S}'_+$ медленно растущих обобщенных функций с носителями на положительной полуоси. Другими словами, найти подкласс основных функций $\varphi_0(t) \in \mathcal{S}_+$ таких, что из сходимости последовательности функционалов $\{f(kt), k \rightarrow \infty\}$ на функциях из этого подкласса вытекает ее сходимость на всех основных функциях из $\mathcal{S}_+$. Однако, как мы увидим в дальнейшем, такой подкласс пуст. Тем не менее, любая медленно растущая обобщенная функция согласно теореме Шварца имеет конечный порядок, т. е. является функционалом над некоторым банаховым пространством, что наводит на мысль поискать такие подклассы функций именно в этом банаховом пространстве.

Отметим, что понятие порядка функционала определяется неоднозначно и зависит от того, каким образом представляется основное пространство $\mathcal{S}_+$ в виде проективного предела (пересечения) банаховых пространств. Для того чтобы определить порядок функционала наиболее подходящим, адекватным для данной задачи способом, мы в § 2 вводим специальные банаховы пространства $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, где a, M характеризуют поведение и гладкость основных функций на бесконечности, а b, N – в окрестности нуля. Здесь же мы приводим некоторые факты, касающиеся свойств этих пространств, в частности, преобразований Меллина функций из этих пространств. Эти свойства достаточно традиционны и в схожих ситуациях изучались, например, в работах [7], [8], [15].

В § 3 дается описание обобщенных функции из $(\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M})'$ и доказывается ряд двуположительных утверждений.

В § 4 доказывается основная теорема, состоящая в том, что если для $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ и $\varphi_0(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$, преобразование Меллина которой полиномиально отделено от нуля в некоторой полосе комплексной плоскости, связанной с порядком f , существует предел типа (0.2), то такой же предел существует для всех основных функций из $\mathcal{S}_+$.

В § 5 доказывается обратная теорема, показывающая что условия, накладываемые на “пробную” функцию φ_0 , являются не только достаточными, но, в некотором смысле, и необходимыми.

В § 6 рассмотрены некоторые применения полученных результатов. В частности, исследуются следующие вопросы.

Пусть $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости и имеет полиномиальный рост, причем для некоторых постоянных c_j и k_j линейная комбинация $\sum c_j \tilde{f}(k_j z)$ обладает заданной асимптотикой при $z \rightarrow 0$. Когда сама $\tilde{f}$ имеет ту же самую асимптотику?

Другой вопрос, на который мы даем ответ, состоит в следующем. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ и для некоторого полинома $P(\xi)$ функция $P\left(t \frac{d}{dt}\right)f(t)$ обладает квазиасимптотикой. В каком случае сама $f(t)$ обладает той же квазиасимптотикой?

Наконец, в приложении доказываются вспомогательные результаты, которые применялись в основном тексте. Кроме нескольких лемм типа Фрагмена–Линделефа, здесь приводится конструкция, позволяющая строить голоморфную функцию, являющуюся преобразованием Меллина некоторой основной функции из $\mathcal{S}_+$, по заданным ее значениям на последовательности точек в комплексной плоскости.

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть a, b — нецелые вещественные числа, $a > b$. Определим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ горизонтальную полосу

$$\Pi_b^a = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : b < y < a, x \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

Замыкание Π_b^a обозначаем $\bar{\Pi}_b^a$. Через r_b^a обозначим множество целых неотрицательных чисел, лежащих между $-a - 1$ и $-b - 1$, так что

$$r_b^a = \{k \in \mathbb{Z}_+ : -a - 1 < k < -b - 1\}, \text{ аналогично, } r_b = \{k \in \mathbb{Z}_+ : k < -b - 1\}. \quad (1.2)$$

Отметим, что при $b > -1$ множества r_b^a и r_b пусты.

Через $\langle x \rangle$ обозначим функцию, определенную при нецелых $x < -1$ формулой

$$\langle x \rangle = \max_{k \in r_x} k = [-x - 1], \quad (1.3)$$

где $[x]$ — целая часть x . Если $\varphi(t)$ имеет в нуле m производных, то ее многочлен Тейлора в нуле порядка m обозначается

$$T_{\varphi(t)}^m \equiv T_{\varphi}^m = \sum_{j=0}^m \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j, \quad \text{где } \varphi^{(j)}(0) = \left. \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right|_{t=0}. \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положительная и непрерывная при достаточно больших k функция $\rho(k)$ называется *автомоделльной (правильно меняющейся)*, если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} = \psi(t),$$

причем сходимость равномерная по t на каждом компакте полуоси $(0, \infty)$.

Легко видеть, что $\psi(t) = t^\alpha$ при некотором α . В этом случае функцию $\rho(k)$ называем *автомодельной порядка α* .

В дальнейшем автомодельные функции играют роль асимптотической шкалы, и нам понадобятся некоторые их свойства, которые мы сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 0. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует k_0 такое, что

$$\begin{cases} t^{\alpha-\varepsilon} \leq \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq t^{\alpha+\varepsilon} & \text{при } k > k_0, t > 1 + \varepsilon, \\ t^{\alpha+\varepsilon} \leq \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq t^{\alpha-\varepsilon} & \text{при } \frac{k_0}{k} < t < 1 - \varepsilon. \end{cases} \quad (1.5)$$

Подробнее см. [9], [10].

Стандартное пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций обозначаем, как обычно, через $\mathcal{S}$, так что $\mathcal{S}'$ – стандартное пространство обобщенных функций медленного роста. Пространство обобщенных функций медленного роста с носителями на $[0, +\infty)$ обозначается через $\mathcal{S}'_+$, оно является сопряженным к пространству $\mathcal{S}_+$ – бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ функций таких, что

$$\max_{|j| \leq m} \sup_{0 \leq t < +\infty} (1 + t^m) |\varphi^{(j)}(t)| < \infty, \quad m = 0, 1, \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ обладает квазиасимптотикой относительно функции $\rho(k)$ на функции $\varphi(t)$, если существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = \text{const}.$$

Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi \quad \text{для любой } \varphi(t) \in \mathcal{S}_+, \quad (1.6)$$

то мы говорим, что $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Если

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = O(1) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty \quad \text{для любой } \varphi(t) \in \mathcal{S}_+, \quad (1.7)$$

то говорят, что $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\rho(k)$.

Отметим, что если $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно некоторой $\rho(k)$, то $\rho(k)$ обязательно автомодельная функция какого-то порядка α , а в (1.6) число $c_\varphi = \text{const}(f_{\alpha+1}(t), \varphi(t))$, где $f_\beta(t)$ – лиувиллевское ядро дробного интегрирования и дифференцирования:

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \frac{\Theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dt^N} f_{\beta+N}(t) & \text{при } \beta \leq 0, \beta + N > 0, \text{ рекуррентно по } N. \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь $\Theta(t)$ – функция Хевисайда: $\Theta(t) = 0$ при $t < 0$ и 1 при $t > 0$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'_+$. Обобщенная функция $f^{(-\beta)}(t) = f * f_\beta$ называется *первообразной* (при $\beta < 0$ – *производной*) *порядка* β .

Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ тогда и только тогда обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, если существует N такое, что (N -ая первообразная $f(t)$) функция $f^{(-N)}(t)$ непрерывна и $f^{(-N)}(t) \sim t^N \rho(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Аналогично определяется квазиасимптотика $f(t)$ в начале координат. Подробнее см. [10].

Преобразование Лапласа

$$L[f] \equiv \tilde{f}(z) = (f(t), e^{izt}), \quad f \in \mathcal{S}'_+, \quad (1.9)$$

осуществляет изоморфизм пространства $\mathcal{S}'_+$ на пространство $H(\mathbb{R}_+)$ – голоморфных в верхней полуплоскости функций, удовлетворяющих оценке полиномиального роста:

$$|\tilde{f}(x + iy)| \leq M \frac{(1 + |z|)^c}{y^d}, \quad y > 0, \quad (1.10)$$

при некоторых M, c, d , см. [10].

§ 2. Пространства $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ и преобразование Меллина

Пусть M и N – целые неотрицательные числа, a, b ($a > b$) – вещественные нецелые числа и $\delta > 0$. Пусть, далее, $\varphi(t)$ – гладкая функция, определенная на замкнутой полуоси $[0, +\infty)$. Положим

$$Q_{b,N,\delta}[\varphi] = \max_{j \leq N} \int_0^\delta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_\varphi^{(b)}(t) \} \right| dt, \quad (2.1)$$

здесь согласно (1.3) $\langle b \rangle = [-b - 1]$ при $b < -1$. Если $b > -1$, то тейлоровский многочлен $T_\varphi^{(b)}(t)$ отсутствует. Положим также

$$V^{a,M,\delta}[\varphi] = \max_{j \leq M} \int_\delta^{+\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right| dt. \quad (2.2)$$

Введем норму

$$\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi] = Q_{b,N,\delta}[\varphi] + V^{a,M,\delta}[\varphi] + \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} |\varphi^{(j)}(0)| \quad (2.3)$$

(если $b > -1$, то последняя сумма в (2.3) отсутствует).

Пополнение пространства бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ и быстро убывающих вместе со всеми производными функций по этой норме обозначаем как $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$.

Всюду далее, мы будем считать $M \leq N$. Функции $\varphi \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ можно описать следующим образом:

$$\text{при } t \in (0, \delta) \quad \varphi(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!}t + \dots + \frac{c_{\langle b \rangle}}{\langle b \rangle!}t^{\langle b \rangle} + \psi(t), \quad (2.4)$$

где $t^b |t^j \psi^{(j)}(t)| \in L_1(0, \delta)$ для $0 \leq j \leq N$;

$$\text{при } t \in (\delta - \varepsilon, +\infty) \quad t^a |t^j \varphi^{(j)}(t)| \in L_1(\delta - \varepsilon, +\infty) \quad (2.5)$$

для $0 \leq j \leq M$. Здесь ε любое, $0 < \varepsilon < \delta$. Отметим, что в случае $b > -1$ полином в (2.4) отсутствует.

Числа c_j , $j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$, определяются однозначно и являются естественным расширением понятия производных в нуле для функций из $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$. Всюду далее мы их обозначаем как $\varphi^{(j)}(0)$, так что $c_j = \varphi^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$. Соответственно

$$T_{\varphi}^{\langle b \rangle}(t) = \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} \frac{c_j}{j!} t^j.$$

Нетрудно проверяется, что при $k > 1$

$$\varphi(t) \mapsto \varphi(kt) \text{ — непрерывное отображение } \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} \mapsto \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}. \quad (2.6)$$

Пространство $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ можно описать следующей эквивалентной нормой:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{b,N,\delta}^{*,a,M}[\varphi] = & \max_{j \leq N} \int_0^{\delta} t^b \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{\langle b \rangle}(t) \} \right| dt \\ & + \max_{j \leq M} \int_{\delta}^{\infty} t^a \left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \varphi(t) \right| dt + \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} |\varphi^{(j)}(0)|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Проективный предел по M и N пространств $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ будем обозначать как $\mathcal{S}_b^a$. Проективный предел по a и b этих пространств образует пространство $\mathcal{S}_+$, так что

$$\mathcal{S}_b^a = \bigcap_{M,N \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \quad \mathcal{S}_+ = \bigcap_{a,b \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_b^a. \quad (2.8)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие подпространства пространства $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$:

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{S}}_{b,N,\delta}^{a,M} &= \{ \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} : \varphi^{(j)}(0) = 0, j = 0, \dots, \langle a \rangle \}, \\ \mathcal{S}_{\circ b,N,\delta}^{a,M} &= \{ \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} : \varphi^{(j)}(0) = 0, j = 0, \dots, \langle b \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

см. (1.2). Если $b > -1$, то $\mathcal{S}_{\circ b,N,\delta}^{a,M}$ совпадает с $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, если $a > -1$, то $\mathring{\mathcal{S}}_{b,N,\delta}^{a,M}$ совпадает с $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$.

Всюду далее будем полагать, что $a > b$, и так как в этом случае $r_a \subset r_b$, то

$$\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} \subset \mathring{\mathcal{S}}_{b,N,\delta}^{a,M} \subset \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}.$$

Аналогично определяются пространства $\mathring{\mathcal{S}}_b^a$ и $\mathcal{S}_b^a$.

Положим еще

$$\mathcal{S}_{+p} = \{\varphi(t) \in \mathcal{S}_+ : \varphi^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, \dots, p\},$$

где p — целое неотрицательное число. Отметим, что $\mathcal{S}_{+\langle a \rangle}$ плотно в $\mathring{\mathcal{S}}_{b,N,\delta}^{a,M}$, а $\mathcal{S}_{+\langle b \rangle}$ плотно в $\mathring{\mathcal{S}}_{b,N,\delta}^{a,M}$ при любых M, N и δ .

Сопряженные пространства (пространства линейных непрерывных функционалов) называются пространствами обобщенных функций и обозначаются, как обычно, штрихом сверху, так, например, $f \in (\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M})'$ означает, что f — линейный непрерывный функционал над пространством основных функций $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$.

Заметим, что если $f(t) \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(0, +\infty)$ и выполнена оценка:

$$|f(t)| < ct^a \text{ при } t > t_0, \quad |f(t)| < ct^b \text{ при } 0 < t < t_0, \quad (2.10)$$

с некоторыми c, a, b и $t_0 > 0$, то обобщенная функция $f(t)$, определяемая формулой

$$(f(t), \varphi(t)) = \int_0^\infty f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,0,\delta}^{a,0},$$

принадлежит пространству $(\mathcal{S}_{b,0,\delta}^{a,0})'$ с любым $\delta > 0$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ является регулярной обобщенной функцией, определяемой локально интегрируемой на $(0, +\infty)$ функцией $f(t)$, удовлетворяющей оценкам (2.10). Тогда $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,0,\eta}^{a,0})'$ с любым $\eta > 0$.

Преобразование Меллина основных функций $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ определяется формулой

$$M[\varphi] \equiv \widehat{\varphi}(z) = \int_0^{+\infty} t^{-iz} [\varphi(t) - T_\varphi^{(y)}(t)] dt, \quad z = x + iy \in \overline{\Pi}_b^a. \quad (2.11)$$

(Для функций из $\mathcal{S}_+$ оно совпадает с преобразованием Меллина, определенном в [15].) Интеграл в (2.11) корректно определен для $b \leq y \leq a$, кроме, возможно, целых отрицательных значений, находящихся между a и b , и определяет в полосе $\overline{\Pi}_b^a$ аналитическую функцию, имеющую, быть может, простые полюсы в целочисленных отрицательных чисто мнимых точках $\{-i(k+1) : k \in r_b^a\}$. Вне полюсов, скажем в $\overline{\Pi}_b^a \cap \{|x| > 1\}$, функция $|\widehat{\varphi}(z)|$ ограничена. Легко проверяется, что если $\min\{N, M\} \geq p$, (где p — целое), то $\left(t \frac{d}{dt}\right)^p \varphi \in \mathcal{S}_{b,N-p,\delta}^{a,M-p}$ и

$$M\left[\left(t \frac{d}{dt}\right)^p \varphi(t)\right] = (iz - 1)^p \widehat{\varphi}(z).$$

Отсюда вытекает, что $|\widehat{\varphi}(z)|$ убывает в полосе $\overline{\Pi}_b^a$ при $|z| \rightarrow \infty$ по крайней мере как $|z|^{-p}$.

Для $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$ преобразование Меллина $\widehat{\varphi}(z)$ есть аналитическая функция в комплексной плоскости, кроме, может быть, точек $-ik$, $k = 1, 2, \dots$, в которых

у нее простые полюсы с вычетами $\frac{1}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(0)$ и в любой полосе $\bar{\Pi}_b^a$ функция $|\widehat{\varphi}(z)|$ при $|z| \rightarrow \infty$ убывает быстрее любой степени $|z|^{-1}$.

Если $\varphi(t) \in \mathcal{S}_b^a$, то $\widehat{\varphi}(z)$ есть аналитическая функция в Π_b^a , убывающая быстрее любой степени $|z|^{-1}$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Если $a < -1$, то преобразование Меллина имеет нетривиальное ядро. Это ядро состоит из всех многочленов степени $\langle a \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $\widehat{\varphi}(z)$ аналитична в Π_b^a , кроме, может быть, простых полюсов в точках $-i(k+1)$, $k \in r_b^a$, и убывает при $|x| \rightarrow +\infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$, то формула

$$\varphi(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_0} t^{iz-1} \widehat{\varphi}(z) dz, \quad (2.12)$$

где $L_0 = \{z = x + iy_0 : |x| < \infty, [a] < y_0 < a, b < y_0\}$, определяет функцию из $\mathring{\mathcal{S}}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$ (для любого сколь угодно малого ε), преобразование Меллина которой совпадает с $\widehat{\varphi}(z)$.

Действительно, из (2.12) непосредственно следует оценка

$$\left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \varphi(t) \right| \leq \text{const } t^{-y_0-1}, \quad [a] < y_0 < a, \quad b < y_0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

Сдвигая контур интегрирования L_0 вниз к

$$L_1 = \{z = x + iy_1 : |x| < \infty, b < y_1 < [b] + 1, y_1 < a\},$$

получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_1} t^{iz-1} \widehat{\varphi}(z) dz + \sum_{k \in r_b^a} \text{Res}_{z=-i(k+1)} \widehat{\varphi}(z) t^k.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \{\varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t)\} \right| \leq \text{const } t^{-y_1-1}, \quad b < y_1 < [b] + 1, \quad y_1 < a, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

Из оценок (2.13) и (2.14) легко следует, что $\varphi(t) \in \mathring{\mathcal{S}}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если полюсов у $\widehat{\varphi}(z)$ в полосе Π_b^a нет, то $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$.

Мультипликативная свертка основных функций φ_1 и φ_2 из $\mathcal{S}_+$ определяется формулой

$$\psi(t) = \int_0^\infty \varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \varphi_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^\infty \varphi_1(\tau) \varphi_2\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.15)$$

Функция $\psi(t)$ определена и бесконечно дифференцируема при $t \in (0, +\infty)$. Если $\varphi_1(t) \in \mathcal{S}_{+q}$, а $\varphi_2 \in \mathcal{S}_{+p}$, $p > q$, см. (2.10), то $\psi^{(j)}(t)$ непрерывны на $[0, +\infty)$ для $j = 0, 1, \dots, p$, причем $\psi^{(j)}(0) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, q$.

В дальнейшем мультипликативную свертку будем обозначать стандартным образом: $\psi = \varphi_1 * \varphi_2$. Справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Операция свертки (2.15) определяет непрерывное отображение*

$$\mathring{\mathcal{S}}_{b, M_1, \delta}^{a, M_1} \times \mathcal{S}_{b, M_2, \delta_0}^{a, M_2} \rightarrow \mathring{\mathcal{S}}_{b, M, \delta}^{a, M}, \quad (2.16)$$

где $M = \max\{M_1, M_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим наиболее сложный случай $a < -1$. Пусть $\varphi_1(t) \in \mathcal{S}_{+\langle a \rangle}$, а $\varphi_2(t) \in \mathcal{S}_{+\langle b \rangle}$ (напомним, что $\mathcal{S}_{+\langle a \rangle} \times \mathcal{S}_{+\langle b \rangle}$ плотно в $\mathring{\mathcal{S}}_{b, M_1, \delta}^{a, M_1} \times \mathcal{S}_{b, M_2, \delta_0}^{a, M_2}$). Оценим норму оператора свертки в пространстве $\mathring{\mathcal{S}}_{b, M, \delta}^{a, M}$. Не нарушая общности, можно считать $M_1 \geq M_2$, так что $M = M_1$. Имеем

$$\begin{aligned} V^{a, M, \delta}[\psi] &= \max_{j \leq M} \int_{\delta}^{\infty} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \psi(t) \right| \\ &\leq \max_{j \leq M} \int_0^{\infty} \left| \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau} \right| \int_{\delta}^{\infty} t^a \left| \frac{t^j}{\tau^j} \varphi_1^{(j)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right| dt d\tau \\ &= \max_{j \leq M} \int_0^{\infty} \frac{|\varphi_2(\tau)|}{\tau} \int_{\delta/\tau}^{\infty} \tau^{a+1} t^a |t^j \varphi_1^{(j)}(t)| dt d\tau \\ &\leq \max_{j \leq M} \int_0^{\infty} \tau^a |\varphi_2(\tau)| d\tau \int_0^{\infty} t^a |t^j \varphi_1^{(j)}(t)| dt. \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену переменных $\frac{t}{\tau} = t'$ (штрихи всюду опустили). Так как $\varphi_2 \in \mathcal{S}_{b, M_2, \delta_0}^{a, M_2}$, то $T_{\varphi_2}^{(b)}(t) \equiv 0$, а потому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \tau^a |\varphi_2(\tau)| d\tau &\leq \int_0^{\delta_0} \tau^a |\varphi_2(\tau)| d\tau + \int_{\delta_0}^{\infty} \tau^a |\varphi_2(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^{\delta_0} \tau^b |\varphi_2(\tau) - T_{\varphi_2}^{(b)}(\tau)| d\tau + \int_{\delta_0}^{\infty} \tau^a |\varphi_2(\tau)| d\tau \\ &= \mathcal{P}_{b, 0, \delta_0}^{a, 0}[\varphi_2]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь мы заменили τ^a на τ^b , ибо $b < a$, и учли, что $\sum_{j=0}^{\langle b \rangle} |\varphi_2^{(j)}(0)| = 0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \max_{j \leq M} \int_0^{\infty} t^a |t^j \varphi_1^{(j)}(t)| dt &\leq \max_{j \leq M_1} \int_0^{\delta} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{\varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t)\} \right| dt \\ &\quad + \max_{j \leq M_1} \int_{\delta}^{\infty} t^a |t^j \varphi_1^{(j)}(t)| dt + \max_{j \leq M_1} \int_0^{\delta} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} T_{\varphi_1}^{(b)}(t) \right| dt. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Младший член в многочлене $T_{\varphi_1}^{(b)}(t)$ имеет степень $\langle a \rangle + 1$, ибо $\varphi_1 \in \mathring{\mathcal{S}}_{b, M_1, \delta}^{a, M_1}$, так что $a + \langle a \rangle + 1 > -1$, а потому последний интеграл в (2.18) сходится, а так как

$$\int_0^{\delta} t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{\varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t)\} \right| dt \leq \int_0^{\delta} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{\varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t)\} \right| dt,$$

то

$$\max_{j \leq M} \int_0^\infty t^a |t^j \varphi_1^{(j)}(t)| dt \leq \text{const } \mathcal{P}_{b,M,\delta}^{a,M}[\varphi_1].$$

Отсюда с учетом (2.17) вытекает оценка

$$V^{a,M,\delta}[\psi] \leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,M_2,\delta_0}^{a,M_2}[\varphi_2] \cdot \mathcal{P}_{b,M_1,\delta}^{a,M_1}[\varphi_1]. \quad (2.19)$$

Оценивая оставшуюся часть нормы, имеем

$$\begin{aligned} Q_{b,M,\delta}[\psi] &\leq \max_{j \leq M_1} \int_0^\delta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \psi(t) - T_\psi^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\leq \max_{j \leq M_1} \int_0^\infty \frac{|\varphi_2(\tau)|}{\tau} d\tau \int_0^\delta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) - T_{\varphi_1(\frac{t}{\tau})}^{(b)}(t) \right\} \right| dt \\ &\leq \max_{j \leq M_1} \int_0^\infty \frac{|\varphi_2(\tau)|}{\tau} d\tau \int_0^\delta t^b \left| t^j \left\{ \frac{1}{\tau^j} \varphi_1^{(j)}\left(\frac{t}{\tau}\right) - \left(T_{\varphi_1(t)}^{(b)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right)^{(j)} \right\} \right| dt \\ &= \max_{j \leq M_1} \int_0^\infty |\varphi_2(\tau)| \tau^b d\tau \int_0^{\delta/\tau} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\leq \int_0^\infty |\varphi_2(\tau)| \tau^b d\tau \cdot \max_{j \leq M_1} \int_0^\infty t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t) \} \right| dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Мы сделали замену переменных $\frac{t}{\tau} = t'$ (штрихи всюду опустили). Учитывая, что $\varphi_2(\tau)$ имеет в нуле нуль порядка выше $\langle b \rangle$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tau^b |\varphi_2(\tau)| d\tau &\leq \int_0^{\delta_0} \tau^b |\varphi_2(\tau) - T_{\varphi_2}^{(b)}(\tau)| d\tau + \int_{\delta_0}^\infty \tau^b |\varphi_2(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^{\delta_0} \tau^b |\varphi_2(\tau) - T_{\varphi_2}^{(b)}(\tau)| d\tau + \int_{\delta_0}^\infty \tau^a |\varphi_2(\tau)| d\tau \\ &\leq \mathcal{P}_{b,0,\delta_0}^{a,0}[\varphi_2]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для второго сомножителя в (2.20) имеем

$$\begin{aligned} &\max_{j \leq M_1} \int_0^\infty t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\leq \max_{j \leq M_1} \int_0^\delta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\quad + \max_{j \leq M_1} \int_\delta^\infty t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi_1(t) \right| dt + \max_{j \leq M_1} \int_\delta^\infty t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} T_{\varphi_1}^{(b)}(t) \right| dt \\ &\leq \max_{j \leq M_1} \int_0^\delta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi_1(t) - T_{\varphi_1}^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\quad + \max_{j \leq M_1} \int_\delta^\infty t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi_1(t) \right| dt + \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} c_j |\varphi_1^{(j)}(0)| \\ &\leq \mathcal{P}_{b,M_1,\delta}^{a,M_1}[\varphi_1]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.20) и (2.21) имеем

$$Q_{b,M,\delta}[\psi] \leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,M_2,\delta_0}^{a,M_2}[\varphi_2] \cdot \mathcal{P}_{b,M_1,\delta}^{a,M_1}[\varphi_1]. \quad (2.22)$$

Учитывая, что $\varphi_1^{(j)}(0) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$, а интеграл

$$\int_0^\infty \tau^b |\varphi_2(\tau)| d\tau < \infty,$$

при $j \in r_a$ получаем

$$\psi^{(j)}(0) = \int_0^\infty \frac{d^j}{dt^j} \varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \Big|_{t=0} \cdot \varphi_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \varphi_1^{(j)}(0) \int_0^\infty \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau^{j+1}} d\tau = 0.$$

При $j \in r_b^a$ с учетом (2.21) имеем

$$|\psi^{(j)}(0)| \leq |\varphi_1^{(j)}(0)| \int_0^\infty \tau^b |\varphi_2(\tau)| d\tau \leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,M_1,\delta}^{a,M_1}[\varphi_1] \cdot \mathcal{P}_{b,0,\delta_0}^{a,0}[\varphi_1].$$

Отсюда и из (2.19), (2.22) вытекает оценка

$$\mathcal{P}_{b,M,\delta}^{a,M}[\psi] \leq \text{const} \cdot \mathcal{P}_{b,M_2,\delta_0}^{a,M_2}[\varphi_2] \cdot \mathcal{P}_{b,M_1,\delta}^{a,M_1}[\varphi_1], \quad (2.23)$$

что и доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пользуясь нормой (2.7) и распределяя соответствующим образом операторы $\left(t \frac{d}{dt}\right)$ между φ_1 и φ_2 в формуле для свертки, нетрудно увидеть, что лемма останется справедливой и для $M = M_1 + M_2$, причем будет иметь место и оценка (2.23).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\chi_{[1/R,R]}(\varkappa)$ — характеристическая функция отрезка $[1/R, R]$. Так как

$$\varphi_2(\varkappa) \chi_{[1/R,R]}(\varkappa) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \varphi_2(\varkappa) \quad \text{в } \mathring{\mathcal{S}}_{b,0,\delta}^{a,0},$$

то (в условиях леммы) из непрерывности свертки вытекает, что

$$\int_{1/R}^R \varphi_2(\varkappa) \varphi_1\left(\frac{\varkappa}{t}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \rightarrow \varphi_1 * \varphi_2, \quad R \rightarrow +\infty \quad \text{в } \mathring{\mathcal{S}}_{b,M_1,\delta}^{a,M_1}. \quad (2.24)$$

Для преобразования Меллина свертки имеет место следующая

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi_1(t) \in \mathring{\mathcal{S}}_{b,M_1,\delta}^{a,M_1}$ и $\varphi_2(t) \in \mathring{\mathcal{S}}_{b,M_2,\delta_0}^{a,M_2}$, а $\psi(t) = \varphi_1(t) * \varphi_2(t)$. Тогда для преобразований Меллина этих функций справедлива формула

$$\widehat{\psi}(z) = \widehat{\varphi}_1(z) \cdot \widehat{\varphi}_2(z) \quad \text{при} \quad b \leq \text{Im } z \leq a. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 $\psi \in \mathring{\mathcal{S}}_{b,M,\delta}^{a,M}$, а потому $T_\psi^{\langle a \rangle}(t) \equiv 0$. Считая ε достаточно малым и $a - \varepsilon < y < a$, так что $T_\psi^{\langle a \rangle}(t) = T_\psi^{\langle y \rangle}(t)$, преобразование Меллина можно записать в виде

$$M[\psi(t)](z) = \int_0^\infty t^{-iz} [\psi(t) - T_\psi^{\langle a-\varepsilon \rangle}(t)] dt = \int_0^\infty t^{-iz} \psi(t) dt.$$

При $z = iy$, $a - \varepsilon < y < a$, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(iy) &= \int_0^\infty t^y \int_0^\infty \varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \varphi_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau} dt \\ &= \int_0^\infty \varphi_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \int_0^\infty t^y \varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) dt \\ &= \int_0^\infty \varphi_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \tau^{y+1} \int_0^\infty (t')^y \varphi_1(t') dt' \\ &= \int_0^\infty \tau^y \varphi_2(\tau) d\tau \int_0^\infty (t')^y \varphi_1(t') dt' = \widehat{\varphi}_1(iy) \widehat{\varphi}_2(iy). \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену $t' = \frac{t}{\tau}$ и учли тот факт, что преобразование Меллина

$$\widehat{\varphi}_j(iy) = \int_0^\infty t^y [\varphi_j(t) - T_{\varphi_j}^{\langle a \rangle}(t)] dt = \int_0^\infty t^y \varphi_j(t) dt, \quad j = 1, 2.$$

Так как $\widehat{\varphi}_j(z)$, $j = 1, 2$, аналитичны в Π_b^a , может быть, кроме простых полюсов, а на отрезке $a - \varepsilon < y < a$ справедлива формула (2.25), то она справедлива и всюду в $\overline{\Pi}_b^a$. Лемма доказана.

§ 3. Квазиасимптотическое поведение обобщенных функций из пространства $(\mathcal{S}_b^a)'$

В этом параграфе мы рассмотрим квазиасимптотику обобщенных функций $f \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ на основных функциях $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, т.е. поведение при $k \rightarrow +\infty$ средних $(f(kt), \varphi(t))$. Нетрудно видеть, что если $M \leq N$, то при достаточно больших k выражение

$$(f(kt), \varphi(t)) = \frac{1}{k} \left(f(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right)$$

имеет смысл, ибо при $\delta_1 < \delta_2$ пространство $\mathcal{S}_{b,N,\delta_1}^{a,M} \supset \mathcal{S}_{b,N,\delta_2}^{a,M}$, а так как $\varphi\left(\frac{t}{k}\right) \in \mathcal{S}_{b,N,k\delta}^{a,M}$, то при $k\delta > \eta$ функция $\varphi\left(\frac{t}{k}\right) \in \mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M}$.

В этом параграфе и всюду далее мы полагаем $M \leq N$, $b < a$ (напомним, что a и b не целые).

ЛЕММА 3. Пусть $f \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ и $\varphi \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, где $M \leq N$, $b < a$. Тогда

$$(f(kt), \varphi(t)) = \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} \frac{1}{k^{j+1}} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (f(t), t^j) + k^a O(1), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (3.1)$$

Если $a > -1$, то сумма в (3.1) отсутствует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle a \rangle}(t) = T_{\varphi(t)}^{\langle a \rangle}\left(\frac{t}{k}\right)$, и обозначая $\psi(t) = \varphi(t) - T_{\varphi(t)}^{\langle a \rangle}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} (f(kt), \varphi(t)) &= \frac{1}{k} \left(f(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right) = \frac{1}{k} \left(f(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle a \rangle}(t) \right) + \frac{1}{k} (f(t), T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle a \rangle}(t)) \\ &= \frac{1}{k} \left(f(t), \psi\left(\frac{t}{k}\right) \right) + \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} \frac{1}{k^{j+1}} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (f(t), t^j). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оценим первый член этой суммы, учитывая, что

$$T_{T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle a \rangle}(t)}^{\langle b \rangle}(t) = T_{T_{\varphi(t)}^{\langle a \rangle}(\frac{t}{k})}^{\langle b \rangle}(t) = T_{T_{\varphi}^{\langle a \rangle}}^{\langle b \rangle}\left(\frac{t}{k}\right) = T_{\varphi}^{\langle a \rangle}\left(\frac{t}{k}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \left(f(t), \psi\left(\frac{t}{k}\right) \right) \right| &\leq \text{const } \mathcal{P}_{b,N,\eta}^{a,M} \left[\psi\left(\frac{t}{k}\right) \right] \\ &= \text{const} \left[\max_{j \leq N} \int_0^\eta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle a \rangle}(t) - (T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle b \rangle}(t) - T_{T_{\varphi(t/k)}^{\langle a \rangle}(t)}^{\langle b \rangle}(t)) \right\} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \max_{j \leq M} \int_\eta^\infty t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle a \rangle}(t) \right\} \right| dt + \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} \left| \left(\varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi(\frac{t}{k})}^{\langle a \rangle}(t) \right)^{(j)} \right|_{t=0} \right] \\ &= \text{const} \left[\max_{j \leq N} \int_0^\eta t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi}^{\langle b \rangle}\left(\frac{t}{k}\right) \right\} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \max_{j \leq M} \int_\eta^\infty t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi}^{\langle a \rangle}\left(\frac{t}{k}\right) \right\} \right| dt + \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} \left| \left(\varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right)^{(j)} \right|_{t=0} \right]. \end{aligned}$$

Делая замену переменных $\frac{t}{k} = t'$ (как обычно, опуская штрихи), имеем

$$\begin{aligned} \left| \left(f(t), \psi\left(\frac{t}{k}\right) \right) \right| &\leq \text{const} \left[\max_{j \leq N} k^{b+1} \int_0^{\frac{\eta}{k}} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{\langle b \rangle}(t) \} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \max_{j \leq M} k^{a+1} \int_{\frac{\eta}{k}}^\infty t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{\langle a \rangle}(t) \} \right| dt + \sum_{j=\langle a \rangle+1}^{\langle b \rangle} \frac{1}{k^j} |\varphi^{(j)}(0)| \right] \\ &\leq \text{const} \left[k^{b+1} o(1) + k^{a+1} O(1) + \frac{1}{k^{\langle a \rangle+1}} O(1) \right], \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда и из (3.2) с учетом того, что $\langle a \rangle < -a$, получаем (3.1).

Из (3.1) тривиально вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка $\alpha > a$ и выполнены условия леммы 3. Тогда

- 1) если $a > -1$, то $f(t)$ обладает тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = 0 \quad \text{для любой } \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}; \quad (3.4)$$

- 2) если $a < -1$, то либо $f(t)$ обладает тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, либо α равно одному из целых чисел $-1, -2, \dots, -\langle a \rangle - 1$, причем $\rho(k) = k^\alpha$, $\varphi^{(j)}(0)(f(t), t^j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, -\alpha - 1$, а

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = \frac{\varphi^{(-\alpha-1)}(0)}{(-\alpha-1)!} (f(t), t^{(-\alpha-1)}). \quad (3.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в условиях леммы 3 $\rho(k)$ автомодельна порядка $\alpha \leq a < -1$ и пусть $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на функции $\varphi(t)$, причем $\varphi^{(j)}(0) \neq 0$ при $j \leq \langle a \rangle$. Тогда

$$(f(t), t^j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle. \quad (3.6)$$

Эти следствия показывают, что наибольший интерес при изучении квазиасимптотики представляет случай $\alpha \leq a$.

Каждая обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'_+$ принадлежит пространству $(\mathcal{S}_b^a)'$ при некоторых a и b . Оказывается, что пространства $(\mathcal{S}_b^a)'$ можно описать в терминах квазиасимптотического поведения обобщенных функций в нуле и на бесконечности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для того чтобы $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$ ($b < a$) необходимо и достаточно, чтобы:

- (1) $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно k^b при $k \rightarrow +0$,
(2) существуют постоянные c_j , $j = 0, 1, \dots, \langle a \rangle$, такие, что

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} c_j \delta^{(j)}(t) + g(t), \quad (3.7)$$

где $g(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно k^a при $k \rightarrow +\infty$ (если $a > -1$, то сумма δ -функций в (3.7) отсутствует).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим наиболее сложный случай $a < -1$. Если $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, то (3.7) непосредственно следует из леммы 3. Пусть теперь выполнено равенство (3.7). Так как $g(t)$ квазиасимптотически ограничена, то найдется достаточно большое N такое, что $g^{(-N)}(t)$ (N -ая первообразная от g) будет непрерывной функцией, причем $g^{(-N)}(t) = O(t^{a+N})$ при $t \rightarrow +\infty$. Легко проверяется, что если непрерывная функция $h(t) = O(t^{a+N})$ при $t \rightarrow +\infty$, то обобщенная функция $f_1(t) = \frac{d^N}{dt^N} h(t)$ принадлежит пространству $(\mathcal{S}_b^a)'$ с некоторым b . Потому f принадлежит тому же пространству.

Пусть выполнено (1), тогда при достаточно большом N первообразная порядка N функционала f будет непрерывной функцией и $f^{(-N)}(t) = O(t^{b+N})$ при $t \rightarrow +0$.

Легко проверяется, что сама $f(t) = \frac{d^N}{dt^N} f^{(-N)}$ будет ограничена по норме $\mathcal{P}_{b,N,1}^{a,M}$ с некоторыми a, M . Обратно, пусть $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, тогда для любой $\varphi(t)$ из $\mathcal{S}_b^a$ имеем

$$\begin{aligned} |(f(kt), \varphi(t))| &= \left| \frac{1}{k} \left(f(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right) \right| \\ &\leq \frac{\text{const}}{k} \left\{ \max_{j \leq N} \int_0^1 t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \varphi\left(\frac{t}{k}\right) - T_{\varphi}^{(b)}\left(\frac{t}{k}\right) \right\} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{(b)} \frac{1}{k^j} |\varphi^{(j)}(0)| + \max_{j \leq M} \int_1^\infty t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right| dt \right\} \\ &\leq \frac{\text{const}}{k} \left\{ k^{b+1} \max_{j \leq N} \int_0^{1/k} t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t) \} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{(b)} \frac{1}{k^j} |\varphi^{(j)}(0)| + k^{a+1} \max_{j \leq M} \int_{1/k}^\infty t^a \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right| dt \right\} \leq \text{const } k^b. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \{ \varphi(t) - T_{\varphi}^{(b)}(t) \} \right| dt \\ &\quad + \int_1^\infty t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) \right| dt + \int_1^\infty t^b \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} T_{\varphi}^{(b)}(t) \right| dt < \infty \end{aligned}$$

и, кроме того, что

$$\int_1^\infty t^b |t^j \varphi^{(j)}(t)| dt \leq \int_1^\infty t^a |t^j \varphi^{(j)}(t)| dt < \infty.$$

Мы пользовались также и тем, что

$$\int_1^\infty t^b t^{(b)} dt < \infty.$$

В заключение параграфа мы рассмотрим следующий вопрос. Дело в том, что, как уже отмечалось, любая обобщенная функция медленного роста является на самом деле функционалом над пространством $\mathcal{S}_b^a$ с некоторыми a и b . Если $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$, т.е. существует предел (1.6) на любой $\varphi \in \mathcal{S}_+$, то естественно спросить будет ли существовать этот предел на более широком классе основных функций $\mathcal{S}_b^a$? Частичный ответ на этот вопрос дает следующая

ЛЕММА 4. Пусть $f \in (\mathcal{S}_b^a)'$ и обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , где $b < \alpha < a$. Тогда существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi \quad \text{для любой } \varphi(t) \in \mathcal{S}_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon}, \quad (3.8)$$

где $\varepsilon > 0$ любое сколь угодно малое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если $\varphi \in \mathcal{S}_b^a$, то p -ая производная $\varphi^{(p)} \in \mathcal{S}_{b+p}^{a+p}$. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Существует N такое, что $f^{(-N)}(t)$ есть непрерывная функция такая, что

$$F(t) \equiv f^{(-N)}(t) \sim \rho(t)t^N \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ и } F(t) = O(t^{N+b}) \text{ при } t \rightarrow +0. \quad (3.9)$$

Мы считаем N настолько большим, что $N + b > 0$. Пусть теперь $\varphi(t)$ любая функция из $\mathcal{S}_{b-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$, тогда $g(t) \equiv \varphi^{(N)}(t) \in \mathcal{S}_{b+N-\varepsilon}^{a+N+\varepsilon}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi(t)) &= \frac{1}{k\rho(k)}\left(f(t), \varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \frac{(-1)^N}{k\rho(k)}\left(f^{(-N)}(t), \frac{1}{k^N}\varphi^{(N)}\left(\frac{t}{k}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^N}{k^{N+1}\rho(k)} \int_0^\infty F(t)g\left(\frac{t}{k}\right) dt = \frac{1}{k^N\rho(k)} \int_0^\infty F(kt)g(t) dt \\ &= \frac{F(k)}{k^N\rho(k)} \int_0^\infty \frac{F(kt)}{F(k)}g(t) dt. \end{aligned}$$

Так как $\frac{F(k)}{k^N\rho(k)} \rightarrow \text{const}$ при $k \rightarrow +\infty$, и подынтегральное выражение стремится к $t^{\alpha+N}g(t)$, то лемма будет доказана, если мы покажем, что в последнем интеграле можно перейти к пределу при $k \rightarrow +\infty$ под знаком интеграла. Учитывая, что $|F(k)|$ автомодельна порядка $\alpha + N$, согласно лемме 0 для любого ε_1 , в частности $\varepsilon_1 < \varepsilon$, существует k_0 такое, что

$$\left| \frac{F(kt)}{F(k)} \right| \leq \begin{cases} t^{\alpha+N+\varepsilon_1} & \text{при } k > k_0, t > 1 + \varepsilon_1, \\ t^{\alpha+N-\varepsilon_1} & \text{при } k_0/k < t < 1 - \varepsilon_1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Далее, имеем

$$\int_0^\infty \frac{F(kt)}{F(k)}g(t) dt = \int_0^{k_0/k} + \int_{k_0/k}^{1-\varepsilon_1} + \int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_1} + \int_{1+\varepsilon_1}^\infty \frac{F(kt)}{F(k)}g(t) dt. \quad (3.11)$$

Рассмотрим первый интеграл суммы в (3.11). Учитывая (3.9) и автомодельность $F(k)$, из которой следует, что $|F(k)| > \text{const } k^{N+\alpha-\varepsilon_1}$ при больших k , имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{k_0/k} \frac{F(kt)}{F(k)}g(t) dt \right| &\leq \text{const} \int_0^{k_0/k} \frac{(kt)^{N+b}}{k^{N+\alpha-\varepsilon_1}} |g(t)| dt \\ &= \text{const } k^{b-\alpha+\varepsilon_1} \int_0^{k_0/k} t^{N+b} |g(t)| dt \\ &= \text{const } k^{b-\alpha+\varepsilon_1} \int_0^{k_0/k} t^\varepsilon t^{N+b-\varepsilon} |g(t)| dt \\ &\leq \text{const } k^{b-\alpha+\varepsilon_1-\varepsilon} \int_0^{k_0/k} t^{N+b-\varepsilon} |g(t)| dt \\ &\leq \text{const } k^{b-\alpha+\varepsilon_1-\varepsilon} \mathcal{P}_{b+N-\varepsilon,0,1}^{a+N+\varepsilon,0}[g] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

При $k_0/k < t < 1 - \varepsilon_1$ для подынтегральной функции в силу (3.10) имеем

$$\left| \frac{F(kt)}{F(k)}g(t) \right| \leq t^{N+\alpha-\varepsilon_1} |g(t)|, \text{ причем}$$

$$\int_{k_0/k}^{1-\varepsilon_1} t^{N+\alpha-\varepsilon_1} |g(t)| dt \leq \int_0^1 t^{N+\alpha-\varepsilon_1} |g(t)| dt \leq \int_0^1 t^{N+\alpha-\varepsilon} |g(t)| dt < \infty.$$

Таким образом, по теореме Лебега

$$\int_{k_0/k}^{1-\varepsilon_1} \frac{F(kt)}{F(k)} g(t) dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\varepsilon_1} t^{N+\alpha} g(t) dt.$$

Оценим подынтегральную функцию в третьем интеграле в (3.11), т.е. при $1 - \varepsilon_1 < t < 1 + \varepsilon_1$. Имеем

$$\left| \frac{F(kt)}{F(k)} g(t) \right| \leq \text{const } |g(t)|,$$

следовательно,

$$\int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_1} \frac{F(kt)}{F(k)} g(t) dt \rightarrow \int_{1-\varepsilon_1}^{1+\varepsilon_1} t^{N+\alpha} g(t) dt < \infty, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Для последнего интеграла в (3.11) при $1 + \varepsilon_1 < t$ имеем

$$\left| \frac{F(kt)}{F(k)} g(t) \right| \leq t^{N+\alpha+\varepsilon_1} |g(t)|,$$

а так как

$$\int_{1+\varepsilon_1}^{\infty} t^{N+\alpha+\varepsilon_1} |g(t)| dt \leq \int_1^{\infty} t^{N+a+\varepsilon} |g(t)| dt \leq \mathcal{P}_{N+b-\varepsilon,0,1}^{N+a+\varepsilon,0}[g] < \infty,$$

то

$$\int_{1+\varepsilon_1}^{\infty} \frac{F(kt)}{F(k)} g(t) dt \rightarrow \int_{1+\varepsilon_1}^{\infty} t^{N+\alpha} g(t) dt, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Тем самым, лемма доказана.

§4. Основная тауберова теорема

В этом параграфе мы докажем следующую теорему типа Винера:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi_0(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, $a > b$, $N \geq M$, $\delta > 0$, и существует нецелое α_0 , $b \leq \alpha_0 < a$, такое, что

$$|\widehat{\varphi}_0(z)| \geq \frac{A}{1+|z|^B} \quad \text{при } \alpha_0 \leq \text{Im } z \leq a \text{ и некоторых } A \text{ и } B, \quad (4.1)$$

а также

$$\varphi_0^{(j)}(0) \neq 0 \quad \text{для } j = 0, 1, \dots, \langle \alpha_0 \rangle. \quad (4.2)$$

Тогда для любой $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a_1,M})'$, где $a > a_1 > \alpha_0$, $\eta > 0$, и автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha > \alpha_0$ из существования предела

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_0(t)) = \text{const} \quad (4.3)$$

следует, что $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, т.е. существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим наиболее сложный случай $a_1 < -1$. Выберем число $\varkappa_0 > 0$ настолько малым, чтобы $a_1 + \varkappa_0 < [a_1] + 1 = -\langle a_1 \rangle - 1$ и $a_1 + \varkappa_0 < a$. Так как $\varphi_0 \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M} \subset \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a_1+\varkappa_0,M}$, то функция $\varphi_1 \equiv \varphi_0 - T_{\varphi_0}^{\langle a_1 \rangle}(t) \in \mathring{\mathcal{S}}_{b,N,\delta}^{a_1+\varkappa_0,M}$. Так как выполнено соотношение (4.3), то согласно следствию 2 леммы 3 все моменты обобщенной функции f до порядка $\langle a_1 + \varkappa_0 \rangle = \langle a_1 \rangle$ обращаются в нуль, а потому $(f(t), T_{\varphi_0}^{\langle a_1 \rangle}(t)) = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_1(t)) = \frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_0(t)) \rightarrow \text{const}, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (4.5)$$

Отметим, что

$$\widehat{\varphi}_1(z) = \widehat{\varphi}_0(z) \quad \text{при} \quad z \in \Pi_b^{a_1+\varkappa_0}, \quad (4.6)$$

ибо преобразование Меллина функций из $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a_1+\varkappa_0,M}$ обладает ядром, состоящим из многочленов степени $\langle a_1 + \varkappa_0 \rangle = \langle a_1 \rangle$.

Покажем сначала, что без ограничения общности, можно считать, что $f(t)$ обращается в нуль в окрестности начала координат, все ее моменты до порядка $\langle a_1 \rangle$ обращаются в нуль, а вместо φ_0 можно рассматривать функцию φ_1 , обращающуюся в нуль в начале координат вместе со всеми производными до порядка $\langle a_1 \rangle$. Действительно, если это не так, то представим обобщенную функцию $f(t)$ в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1(t)$ имеет компактный носитель и совпадает с $f(t)$ в некоторой окрестности нуля, причем ее моменты до порядка $\langle b \rangle$ обращаются в нуль. Очевидно тогда, что f_2 обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат. Это разбиение можно сделать так: пусть $\chi(t)$ бесконечно дифференцируемая функция, $\chi(t) \equiv 1$ при $0 \leq t \leq \eta$ и $\chi(t) \equiv 0$ при $t \geq \eta_1 > \eta$. Положим $f_1(t) = \chi(t)f(t) + \lambda(t)$, где бесконечно дифференцируемая функция $\lambda(t)$ подбирается так, что $\text{supp } \lambda(t) \in (\eta, \eta_1)$, и все моменты $f_1(t)$ до порядка $\langle b \rangle$ обращаются в нуль. Полагаем $f_2 = f - f_1$.

Отметим, что $f_2(t) \in (\mathcal{S}_{c,M,\eta}^{a,M})'$ с любым $c \leq b$. Так как f_1 имеет компактный носитель, то $f_1(t) \in (\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{b+\varepsilon,M})'$. А так как $\varphi_1(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a_1,M} \subset \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{b+\varepsilon,M}$ и все моменты f_1 до порядка $\langle b \rangle$ обращаются в нуль, то по лемме 3 имеем

$$(f_1(kt), \varphi_1(t)) = k^{b+\varepsilon} O(1), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ таково, что $b + \varepsilon < \alpha$. Из (4.7) следует, что

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_1(kt), \varphi_1(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad \frac{1}{\rho(k)}(f_1(kt), \varphi_0(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad (4.8)$$

ровно как и

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_1(kt), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (4.9)$$

В силу (4.5) и (4.8) имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_2(kt), \varphi_1(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const} \quad (4.10)$$

и все моменты $f_2(t)$ до порядка $\langle a_1 \rangle$ равны нулю. Это вытекает из того, что все моменты f до порядка $\langle a_1 \rangle$ равны нулю и все моменты f_1 до порядка $\langle b \rangle \geq \langle a \rangle$ равны нулю.

Если мы докажем, что из (4.10) следует сходимость

$$\frac{1}{\rho(k)}(f_2(kt), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\varphi \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{S}_+,$$

то в силу (4.9) получим (4.4). Поэтому далее мы будем доказывать теорему для обобщенной функции f_2 , которая обращается в нуль в некоторой окрестности начала координат и все моменты которой до порядка $\langle a_1 \rangle$ равны нулю.

Обозначая теперь

$$\Phi(k) = (f_2(kt), \varphi_1(t)) = \frac{1}{k} \left(f_2(t), \varphi_1\left(\frac{t}{k}\right) \right),$$

в силу (4.10) имеем

$$\Phi(k) = O(\rho(k)), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (4.11)$$

Так как $\text{supp } f_2 \subset [\eta, +\infty)$, имеем

$$\begin{aligned} |(f_2(kt), \varphi_1(t))| &= \frac{1}{k} \left| \left(f_2(t), \varphi_1\left(\frac{t}{k}\right) \right) \right| \leq \text{const} \max_{j \leq M} \frac{1}{k} \int_{\eta}^{\infty} t^{a_1} \left| t^j \frac{d^j}{dt^j} \varphi_1\left(\frac{t}{k}\right) \right| dt \\ &= \text{const } k^{a_1} \max_{j \leq M} \int_{\eta/k}^{\infty} t^{a_1} |t^j \varphi_1^{(j)}(t)| dt. \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену переменных $\frac{t}{k} = t'$ (опуская, как обычно, штрихи). Получаем, что

$$\Phi(k) = k^{a_1} o(1) \text{ при } k \rightarrow +0. \quad (4.12)$$

Пусть теперь $\varphi(t)$ произвольная функция из $\mathcal{S}_+$ и $\widehat{\varphi}(z)$ ее преобразование Меллина. Функция $\widehat{\omega}(z) = \frac{\widehat{\varphi}(z)}{\widehat{\varphi}_1(z)}$ аналитична в полосе $\Pi_{\alpha-\kappa_0}^{a_1+\kappa_0}$ и убывает там быстрее любой степени $|x|^{-1}$ (см. (4.6), (4.7)). Обратное преобразование Меллина по формуле (2.12) определяет функцию $\omega(t) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon_0}^{a_1+\varepsilon_0}$, где $0 < \varepsilon_0 < \kappa_0$. Причем

$$\omega(t) = o(t^{-a_1-1-\varepsilon_1}) \text{ при } t \rightarrow +\infty; \quad \omega(t) = o(t^{-\alpha-1+\varepsilon_1}) \text{ при } t \rightarrow +0, \quad (4.13)$$

если ε_1 любое такое, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \kappa_0$. (См. доказательство утверждения 1, формулы (2.13), (2.14).)

Следующим шагом будет доказательство того факта, что существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \int_0^{\infty} \omega(\kappa) \Phi(k\kappa) d\kappa. \quad (4.14)$$

В силу (4.10) функция $|\Phi(k)|$ автомодельна порядка α , а потому (см. лемму 0) для любого $\varepsilon < \varepsilon_1$ существует k_0 такое, что

$$\left| \frac{\Phi(k\kappa)}{\Phi(k)} \right| \leq \begin{cases} \kappa^{\alpha+\varepsilon} & \text{для } \kappa > 1+\varepsilon, \\ \kappa^{\alpha-\varepsilon} & \text{для } k_0/k < \kappa < 1-\varepsilon. \end{cases} \quad (4.15)$$

В частности, увеличивая, если нужно k_0 , имеем оценку

$$k^{\alpha-\varepsilon} \leq |\Phi(k)| \leq k^{\alpha+\varepsilon} \text{ при } k > k_0. \quad (4.16)$$

Так как

$$\frac{1}{\rho(k)} \int_0^\infty \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa = \frac{\Phi(k)}{\rho(k)} \int_0^\infty \omega(\varkappa) \frac{\Phi(k\varkappa)}{\Phi(k)} d\varkappa,$$

то с учетом (4.10) нам достаточно доказать существование предела при $k \rightarrow +\infty$ у интеграла справа. Имеем

$$\int_0^\infty \omega(\varkappa) \frac{\Phi(k\varkappa)}{\Phi(k)} d\varkappa = \left\{ \int_0^{k_0/k} + \int_{k_0/k}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \right\} \omega(\varkappa) \frac{\Phi(k\varkappa)}{\Phi(k)} d\varkappa. \quad (4.17)$$

Рассмотрим первый из интегралов справа. Из (4.12) и (4.13), при $k\varkappa < k_0$ имеем оценку

$$|\omega(\varkappa)| \leq \text{const } \varkappa^{-\alpha-1+\varepsilon_1}; \quad |\Phi(k\varkappa)| \leq \text{const } (k\varkappa)^{a_1}.$$

Из (4.16) вытекает, что $|\Phi(k)|^{-1} \leq k^{-\alpha+\varepsilon}$. Учитывая все это, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{k_0/k} |\omega(\varkappa)| \left| \frac{\Phi(k\varkappa)}{\Phi(k)} \right| d\varkappa &\leq \text{const} \int_0^{k_0/k} \varkappa^{-\alpha-1+\varepsilon_1} (k\varkappa)^{a_1} k^{-\alpha+\varepsilon} d\varkappa \\ &\leq \text{const} \left(\frac{k_0}{k} \right)^{-\alpha+a_1+\varepsilon_1} k^{a_1-\alpha+\varepsilon} \\ &= \text{const } k^{\varepsilon-\varepsilon_1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

ибо $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Рассмотрим второй из интегралов справа в (4.17). При $k_0/k < \varkappa < 1-\varepsilon$, пользуясь (4.15), (4.13) и тем, что $\varepsilon < \varepsilon_1$, имеем

$$\left| \omega(\varkappa) \frac{\Phi(k\varkappa)}{\Phi(k)} \right| \leq \varkappa^{-\alpha-1+\varepsilon_1} \varkappa^{\alpha-\varepsilon} \leq \varkappa^{-1+\varepsilon_1-\varepsilon}. \quad (4.19)$$

Так как подынтегральная функция в (4.17) имеет поточечный предел при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\int_0^{1-\varepsilon} \varkappa^{-1+\varepsilon_1-\varepsilon} d\varkappa < \infty,$$

то по теореме Лебега второй интеграл в (4.17) справа имеет предел при $k \rightarrow +\infty$.

Рассматривая третий интеграл в (4.17) справа, заметим, что при $1-\varepsilon < \varkappa < 1+\varepsilon$, функция $\left| \omega(\varkappa) \frac{\Phi(k\varkappa)}{\Phi(k)} \right| < \text{const}$, $k > k_0$. Отсюда следует, что здесь также можно перейти к пределу под знаком интеграла при $k \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим, наконец, последний интеграл в (4.17) справа. Оценим подынтегральную функцию при $1+\varepsilon < \varkappa < \infty$. Пользуясь (4.13) и (4.15), имеем

$$\left| \omega(\varkappa) \frac{\Phi(k\varkappa)}{\Phi(k)} \right| \leq \text{const } \varkappa^{-a_1-1-\varepsilon_1} \varkappa^{\alpha+\varepsilon}. \quad (4.20)$$

Так как $\alpha < a_1, \varepsilon - \varepsilon_1 < 0$, то

$$\int_{1+\varepsilon}^\infty \varkappa^{\alpha-a_1-1-\varepsilon_1+\varepsilon} d\varkappa < \infty.$$

А потому здесь также применима теорема Лебега. Итак, существование предела (4.14) доказано.

Второй шаг состоит в доказательстве того, что при каждом фиксированном k интеграл по $\varkappa$ можно пронести за знак функционала, т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa &= \int_0^\infty \omega(\varkappa) (f_2(k\varkappa t), \varphi_1(t)) d\varkappa \\ &= \int_0^\infty \omega(\varkappa) \left(f_2(kt), \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \\ &= \left(f_2(kt), \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Покажем это. Для любого R имеем

$$\int_0^\infty \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa = \left\{ \int_0^{1/R} + \int_{1/R}^R + \int_R^\infty \right\} \omega(\varkappa) \left(f_2(kt), \frac{1}{\varkappa} \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \right) d\varkappa. \quad (4.22)$$

Пользуясь (4.13), (4.12) и тем, что $a_1 > \alpha$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1/R} \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa \right| &\leq \int_0^{1/R} \text{const } \varkappa^{-\alpha-1+\varepsilon_1} \varkappa^{a_1} d\varkappa \\ &\leq \text{const} \int_0^{1/R} \varkappa^{a_1-\alpha-1+\varepsilon_1} d\varkappa \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь const зависит от фиксированного k . Далее, пользуясь (4.13) и (4.16), при фиксированном k имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_R^\infty \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa \right| &\leq \int_R^\infty \text{const } \varkappa^{-a_1-1-\varepsilon_1} \varkappa^{\alpha+\varepsilon} d\varkappa \\ &\leq \text{const} \int_R^\infty \varkappa^{-a_1+\alpha-1-\varepsilon_1+\varepsilon} d\varkappa \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

так как $a_1 > \alpha$ и $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Из (4.22) согласно (4.23) и (4.24) вытекает, что

$$\int_0^\infty \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{1/R}^R \frac{\omega(\varkappa)}{\varkappa} \left(f_2(kt), \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \right) d\varkappa. \quad (4.25)$$

Поскольку отображение $\varkappa \mapsto \frac{\omega(\varkappa)}{\varkappa} \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right)$ есть непрерывное отображение отрезка $[1/R, R]$ в $\overset{\circ}{S}_{\alpha, M, \eta}^{a_1, M}$, а $f_2 \in (\mathcal{S}_{\alpha, M, \eta}^{a_1, M})'$, то интегрирование в (4.25) можно пронести за знак функционала, а так как

$$\int_{1/R}^R \omega(\varkappa) \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \text{ в } \overset{\circ}{S}_{\alpha, M, \eta}^{a_1, M},$$

см. (2.6) и замечание 2 к лемме 1, то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa &= \left(f_2(kt), \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{1/R}^R \frac{\omega(\varkappa)}{\varkappa} \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) d\varkappa \right) \\ &= \left(f_2(kt), \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

что и требовалось показать. Закончим теперь доказательство теоремы.

Вспоминая, что $\omega(\varkappa) \in \mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon_0}^{a_1+\varepsilon_0}$ и $\varphi_1(t) \in \mathring{\mathcal{S}}_{b,N,\delta}^{a_1+\varkappa_0,M}$, согласно лемме 2 $\widehat{\varphi}(z) = \widehat{\varphi}_1(z)\widehat{\omega}(z)$. В силу утверждения 1 $\omega(t) * \varphi_1(t)$ может отличаться от $\varphi(t)$ только на многочлен степени $\langle a_1 \rangle$. Но согласно (4.10) все моменты f_2 до порядка $\langle a_1 \rangle$ равны нулю и, следовательно,

$$\int_0^\infty \omega(\varkappa) \Phi(k\varkappa) d\varkappa = \left(f_2(kt), \int_0^\infty \omega(\varkappa) \varphi_1\left(\frac{t}{\varkappa}\right) \frac{d\varkappa}{\varkappa} \right) = (f_2(kt), \varphi(t)). \quad (4.27)$$

Деля обе части этого равенства на $\rho(k)$ и переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$, видим, что левая часть имеет предел, следовательно, существует предел и у правой части. Теорема доказана.

§ 5. Обратная теорема

Цель этого параграфа — показать, что условие полиномиальной отделенности от нуля преобразования Меллина функции $\varphi_0(t)$ в основной тауберовой теореме (условие (4.1)) является не только достаточным, но в некотором смысле и необходимым. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi_0(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, $a > b$, $N \geq M$ и фиксировано нецелое α_0 , $b \leq \alpha_0 < a$. Если для любой обобщенной функции $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ и любой автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha > \alpha_0$ из существования

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi_0(t)),$$

следует, что $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные A и B такие, что

$$|\widehat{\varphi}_0(z)| \geq \frac{A}{1 + |z|^B} \quad \text{при} \quad \alpha_0 + \varepsilon < \operatorname{Im} z < a - \varepsilon. \quad (5.1)$$

Кроме того,

$$\varphi_0^{(j)}(0) \neq 0 \quad \text{для} \quad j = 0, 1, \dots, \langle \alpha_0 \rangle. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сперва, что справедливы неравенства (5.2). Если это не так, скажем, $\varphi_0^{(j_0)}(0) = 0$ для некоторого $0 \leq j_0 \leq \alpha_0$, то для $f(t)$, определяемого формулой

$$(f(t), \varphi(t)) = \varphi^{(j_0)}(0) \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}_+$$

и $\rho(k) = k^{-j_0-1-\varepsilon}$, где $\alpha_0 < -j_0 - 1 - \varepsilon$, имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_0(t)) = \frac{1}{k\rho(k)}\left(f(t), \varphi_0\left(\frac{t}{k}\right)\right) = k^\varepsilon \varphi_0^{(j_0)}(0) = 0,$$

в то время как

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi(t)) = k^\varepsilon \varphi^{(j_0)}(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

для любой $\varphi \in \mathcal{S}_+$, у которой $\varphi^{(j_0)}(0) \neq 0$, что противоречит условию существования квазиасимптотики у $f(t)$.

Осталось проверить оценку (5.1). Прежде всего заметим, что $\widehat{\varphi}_0(z)$ не обращается в нуль при $z \in \Pi_{\alpha_0}^a$. Если это не так, скажем, $\widehat{\varphi}_0(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Pi_{\alpha_0}^a$, то для $f(t)$, определяемого формулой $(f(t), \varphi(t)) = \widehat{\varphi}(z_0)$, и $\rho(k) = k^{y_0-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, чтобы $y_0 - \varepsilon > \alpha_0$, имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_0(t)) = \frac{1}{k\rho(k)}\left(f(t), \varphi_0\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \frac{k^{-iz_0}}{\rho(k)}\widehat{\varphi}_0(z_0) = 0,$$

в то время как

$$\left| \frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi(t)) \right| = \frac{k^{y_0}}{\rho(k)}|\widehat{\varphi}(z_0)| = k^\varepsilon |\widehat{\varphi}(z_0)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

для тех $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$, у которых $\widehat{\varphi}(z_0) \neq 0$, что противоречит условию существования квазиасимптотики у $f(t)$ относительно $\rho(k)$.

Если оценка (5.1) не выполнена в какой-то подполосе $\Pi_{\alpha_0+\varepsilon}^{a-\varepsilon}$ полосы $\Pi_{\alpha_0}^a$, то ее нет и на некоторой прямой $\gamma = \{z = x + iy_0 : |x| < \infty, y_0 \in (\alpha_0, a)\}$ (см. следствие к лемме ПЗ § 7), т.е. для любого n

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \gamma}} (1 + |z|^n) |\widehat{\varphi}_0(z)| = 0.$$

Другими словами, для любого n существует z_n такое, что $|(1 + |z_n|^n) \widehat{\varphi}_0(z_n)| < 1/n$. Следовательно, на последовательности $\{z_n\} \in \gamma$ функция $\widehat{\varphi}_0(z)$ убывает быстрее любой степени $|z|^{-1}$. Без ограничения общности можно считать, что $z_n = x_n + iy_0$, $x_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Теперь очевидно, что доказательство теоремы 2 сводится к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $\varphi_0(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$, $a > b$, $N \geq M > 0$, и существует последовательность $z_n = x_n + iy_0$, $b < y_0 < a$, по которой преобразование Меллина $\widehat{\varphi}_0(z)$ убывает быстрее любой степени z_n^{-1} , т.е. для любого t выполнено условие $(1 + |z_n|^m)|\widehat{\varphi}_0(z_n)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Тогда существуют функционал $f(t) \in (\mathcal{S}_{b_1,0,\eta}^{a_1,0})'$, основная функция $\psi(t) \in \mathcal{S}_+$, автомодельная функция $\rho(k)$ порядка y_0 ($a > a_1 > y_0 > b_1 > b$) такие, что

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(kt), \varphi_0(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad (5.3)$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} |(f(kt), \psi(t))| = +\infty. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, без ограничения общности можно считать, что $x_n > \exp\{e^{n^s}\}$ с некоторым $s > 1$.

Сначала определим функционал $f(t)$ формулой

$$(f(t), \varphi(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(x) \widehat{\varphi}(x + iy_0) dx \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \quad (5.5)$$

где $\widehat{\varphi}(z)$ – преобразование Меллина функции φ , а $\kappa(x)$ задается формулой

$$\kappa(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{x_n^\omega} \widetilde{\gamma}(h_n(x - x_n)). \quad (5.6)$$

Здесь $\omega \geq 1$, $\gamma(t) \in \mathcal{S}$, $\gamma(1) = 1$, а ее преобразование Фурье $\widetilde{\gamma}(x)$ имеет компактный носитель, так что $\text{supp } \widetilde{\gamma}(x) \subset (-1, +1)$, а быстро возрастающая последовательность $\{h_n\}$, $n \rightarrow +\infty$, будет выбрана позднее. На самом деле формула (5.5) корректно определяет функционал из $(\mathcal{S}_{b_1,0,\eta}^{a_1,0})'$ для любых $a_1 > y_0 > b_1$, ибо

$$\begin{aligned} |(f(t), \varphi(t))| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^\omega} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(x + iy_0)| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^\omega} \right) \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^\infty t^{y_0 - ix} (\varphi(t) - T_\varphi^{(y_0)}(t)) dt \right| \\ &\leq \text{const} \int_0^\infty t^{y_0} |\varphi(t) - T_\varphi^{(y_0)}(t)| dt \leq \text{const } \mathcal{P}_{b_1,0,\eta}^{a_1,0}[\varphi], \end{aligned}$$

так как

$$\sum_n \frac{1}{x_n^\omega} < \infty.$$

Выясним сначала каково асимптотическое поведение выражения $\frac{1}{k^{y_0}}(f(kt), \varphi(t))$

при $k \rightarrow +\infty$. Пользуясь тем, что $M\left[\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\right] = e^{-iz \ln k} M[\varphi]$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^{y_0}}(f(kt), \varphi(t)) &= \frac{1}{k^{y_0}} \left(f(t), \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right) = \int \kappa(x) e^{-ix \ln k} \widehat{\varphi}(x + iy_0) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{x_n^\omega} \int \widetilde{\gamma}(h_n(x - x_n)) e^{-ix \ln k} \widehat{\varphi}(x + iy_0) dx. \end{aligned}$$

Для упрощения записи положим $\ln k = g$ и $\widehat{\varphi}(x + iy_0) = \check{\varphi}(x)$. После замены переменных $h_n(x - x_n) = \xi$ получаем

$$\frac{1}{k^{y_0}}(f(kt), \varphi(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\omega}} e^{-igx_n} \int e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} \tilde{\gamma}(\xi) \check{\varphi}\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) d\xi. \quad (5.7)$$

Пользуясь разложением

$$\check{\varphi}\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) = \check{\varphi}(x_n) + \frac{\xi}{h_n} \check{\varphi}'(\xi_n^*), \quad \text{где } x_n - \frac{1}{h_n} < \xi_n^* < x_n + \frac{1}{h_n},$$

учитывая, что

$$\int e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} \check{\varphi}(x_n) \tilde{\gamma}'(\xi) d\xi = i \frac{g}{h_n} \check{\varphi}(x_n) \int \tilde{\gamma}(\xi) e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} d\xi = i \frac{g}{h_n} \check{\varphi}(x_n) \gamma\left(\frac{g}{h_n}\right),$$

интегрируя правую часть равенства (5.7) по частям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^{y_0}}(f(kt), \varphi(t)) &= -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\omega}} e^{-igx_n} \frac{h_n}{g} \\ &\quad \times \int e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} \left[\tilde{\gamma}'(\xi) \check{\varphi}\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) + \frac{1}{h_n} \tilde{\gamma}(\xi) \check{\varphi}'\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) \right] d\xi \\ &= -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\omega}} e^{-igx_n} \frac{h_n}{g} \left\{ \int e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} \check{\varphi}(x_n) \tilde{\gamma}'(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} \left[\frac{\xi}{h_n} \check{\varphi}'(\xi_n^*) \tilde{\gamma}'(\xi) + \frac{1}{h_n} \tilde{\gamma}(\xi) \check{\varphi}'\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) \right] d\xi \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\check{\varphi}(x_n)}{x_n^{\omega}} e^{-igx_n} \gamma\left(\frac{g}{h_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{gx_n^{\omega}} e^{-igx_n} \\ &\quad \times \int \left[\xi \tilde{\gamma}'(\xi) \check{\varphi}'(\xi_n^*) + \tilde{\gamma}(\xi) \check{\varphi}'\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) \right] e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} d\xi. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Учитывая, что аналитическая функция $\widehat{\varphi}(z)$ ограничена в Π_b^a (следовательно, и в полосе около прямой $y = y_0$), а потому ограничена и ее производная, а также, что $\text{supp } \tilde{\gamma}(x) \subset (-1, +1)$, получим следующую оценку для последнего слагаемого в (5.8):

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{gx_n^{\omega}} e^{-igx_n} \int \left[\xi \tilde{\gamma}'(\xi) \check{\varphi}'(\xi_n^*) + \tilde{\gamma}(\xi) \check{\varphi}'\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) \right] e^{-i\frac{g}{h_n}\xi} d\xi \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{gx_n^{\omega}} \int \left[|\xi \tilde{\gamma}'(\xi) \check{\varphi}'(\xi_n^*)| + \left| \tilde{\gamma}(\xi) \check{\varphi}'\left(x_n + \frac{1}{h_n}\xi\right) \right| \right] d\xi \leq \frac{\text{const}}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\omega}}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Таким образом, из (5.7), (5.8) и (5.9) получаем искомую асимптотическую формулу:

$$\frac{1}{k^{y_0}}(f(kt), \varphi(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\check{\varphi}(x_n)}{x_n^{\omega}} e^{-igx_n} \gamma\left(\frac{g}{h_n}\right) + O\left(\frac{1}{g}\right), \quad g \rightarrow +\infty. \quad (5.10)$$

Пусть теперь $0 < p < 1$. Обозначим $C_n = \check{\varphi}_0(x_n)$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $|C_n|$ монотонно убывает при $n \rightarrow +\infty$ (по условию быстрее любой степени x_n^{-1}). Выберем последовательность $\{h_n\}$, положив $h_n = |C_n|^{-\frac{1}{p}}$. Тогда, в силу (5.10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^{y_0}} |(f(kt), \varphi_0(t))| &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\check{\varphi}(x_n)}{x_n^{\omega}} e^{-igx_n} \gamma\left(\frac{g}{h_n}\right) \right| + O\left(\frac{1}{g}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|C_n|}{x_n^{\omega}} h_n^p \frac{1}{g^p} \left(\frac{g}{h_n}\right)^p \left| \gamma\left(\frac{g}{h_n}\right) \right| + O\left(\frac{1}{g}\right) \\ &\leq \frac{\text{const}}{g^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{\omega}} + O\left(\frac{1}{g}\right) \leq \frac{\text{const}}{g^p}, \quad g \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $\gamma(t) \in \mathcal{S}$, а потому $|t^p \gamma(t)| \leq \text{const}$. Таким образом,

$$\left| \frac{1}{k^{y_0}} (f(kt), \varphi_0(t)) \right| = O\left(\frac{1}{g^p}\right), \quad g \rightarrow +\infty. \quad (5.11)$$

Фиксируем далее любое $0 < q < p$. Если теперь положить

$$\rho(k) = k^{y_0} \frac{1}{(\ln k)^q} \quad (5.12)$$

и вспомнить, что $g = \ln k$, то легко видеть, что соотношение (5.3) будет выполнено.

Осталось подобрать функцию $\psi(t) \in \mathcal{S}_+$ такую, чтобы выполнялось соотношение (5.4). Заметим, что все предыдущие построения и выводы, в частности (5.11) (а следовательно и (5.3)), останутся справедливыми, если вместо последовательности x_n в (5.6) перейти к любой ее подпоследовательности. Прежде чем предъявить требуемую функцию $\psi(t)$, подправим наш построенный функционал f , проредив эту последовательность. Положим

$$\hat{C}_n = x_n^{2\omega} |C_n|^{q/p}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

Ясно, что $\hat{C}_n$ при $n \rightarrow +\infty$ убывает быстрее любой степени x_n^{-1} . Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_n}{x_n^{\omega}} h_n^q &= x_n^{\omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \\ \hat{C}_n &= x_n^{2\omega} |C_n|^{\frac{q}{p}} = x_n^{2\omega} \left| \frac{1}{h_n} \right|^q = \frac{1}{h_n} x_n^{2\omega} h_n^{1-q} > \frac{1}{h_n}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из последовательности $\{x_n, h_n, \hat{C}_n\}$ выделяем теперь подпоследовательность следующим образом: в качестве $\{x_{n_1}, h_{n_1}, \hat{C}_{n_1}\}$ берем $\{x_1, h_1, \hat{C}_1\}$, далее находим номер $\hat{n}_2$ такой, чтобы

$$\sum_{n=\hat{n}_2}^{\infty} \frac{\hat{C}_n}{x_n^{\omega}} \left| \gamma\left(\frac{h_{n_1}}{h_n}\right) \right| < \frac{\hat{C}_{n_1}}{4x_{n_1}^{\omega}} = \frac{\hat{C}_1}{4x_1^{\omega}}.$$

Это возможно, ибо ряд, стоящий слева, сходится. Теперь выбираем $n_2 > \hat{n}_2$ таким, чтобы

$$\frac{1}{x_{n_1}^\omega} \hat{C}_{n_1} \left| \gamma \left(\frac{h_{n_2}}{h_{n_1}} \right) \right| < \frac{1}{4h_{n_2} x_{n_2}^\omega} < \frac{\hat{C}_{n_2}}{4x_{n_2}^\omega}.$$

Это возможно, ибо $\gamma(t)$ убывает быстрее любой степени t^{-1} при $t \rightarrow +\infty$, а h_n растет быстрее любой степени x_n . Кроме того, в последнем неравенстве мы учли (5.14). После выбора $\{x_{n_2}, h_{n_2}, \hat{C}_{n_2}\}$ далее находим $\hat{n}_3$ так, чтобы

$$\sum_{n=\hat{n}_3}^{\infty} \frac{\hat{C}_n}{x_n^\omega} \left| \gamma \left(\frac{h_{n_2}}{h_n} \right) \right| < \frac{\hat{C}_{n_2}}{4x_{n_2}^\omega}.$$

Затем выбираем $n_3 > \hat{n}_3$ таким, чтобы

$$\frac{\hat{C}_{n_1}}{x_{n_1}^\omega} \left| \gamma \left(\frac{h_{n_3}}{h_{n_1}} \right) \right| + \frac{\hat{C}_{n_2}}{x_{n_2}^\omega} \left| \gamma \left(\frac{h_{n_3}}{h_{n_2}} \right) \right| < \frac{1}{4h_{n_3} x_{n_3}^\omega} < \frac{\hat{C}_{n_3}}{4x_{n_3}^\omega},$$

и так далее, после выбора $j-1$ членов последовательности выбираем $\hat{n}_j$ таким, чтобы

$$\sum_{n=\hat{n}_j}^{\infty} \frac{\hat{C}_n}{x_n^\omega} \left| \gamma \left(\frac{h_{n_{j-1}}}{h_n} \right) \right| < \frac{\hat{C}_{n_{j-1}}}{4x_{n_{j-1}}^\omega},$$

и находим $n_j > \hat{n}_j$ таким, чтобы

$$\sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{\hat{C}_{n_\ell}}{x_{n_\ell}^\omega} \left| \gamma \left(\frac{h_{n_j}}{h_{n_\ell}} \right) \right| < \frac{1}{4h_{n_j} x_{n_j}^\omega} < \frac{\hat{C}_{n_j}}{4x_{n_j}^\omega}.$$

Переходя к выбранной подпоследовательности (вводя естественную нумерацию), имеем для $j = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{j-1} \frac{\hat{C}_n}{x_n^\omega} \left| \gamma \left(\frac{h_j}{h_n} \right) \right| &\leq \frac{\hat{C}_j}{4x_j^\omega}, \\ \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{\hat{C}_n}{x_n^\omega} \left| \gamma \left(\frac{h_j}{h_n} \right) \right| &\leq \frac{\hat{C}_j}{4x_j^\omega}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

На этом построение искомого функционала завершается.

Пусть теперь $\psi(t) \in \mathcal{S}_+$ такая, что $\hat{\psi}(x_j + iy_0) = \hat{C}_j$ (см. лемму П5 в приложении § 7). Для доказательства (5.4) достаточно найти последовательность $k_j \rightarrow +\infty$ такую, что

$$\frac{1}{\rho(k_j)} |(f(k_j t), \psi(t))| \rightarrow +\infty.$$

Положим $k_j = \exp\{h_j\}$, т.е. $g_j = h_j$. Согласно (5.10) имеем при $g \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{k^{y_0}} (f(kt), \psi(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{C}_n}{x_n^\omega} e^{-ix_n g} \gamma \left(\frac{g}{h_n} \right) + O \left(\frac{1}{g} \right).$$

По выбранной подпоследовательности, учитывая (5.15), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{C}_n}{x_n^{\omega}} e^{-ix_n g_j} \gamma\left(\frac{g_j}{h_n}\right) \right| \\ &= \left| \sum_{n < j} \frac{\widehat{C}_n}{x_n^{\omega}} e^{-ix_n h_j} \gamma\left(\frac{h_j}{h_n}\right) + e^{-ix_j} \frac{\widehat{C}_j}{x_j^{\omega}} \gamma(1) + \sum_{n > j} \frac{\widehat{C}_n}{x_n^{\omega}} e^{-ix_n h_j} \gamma\left(\frac{h_j}{h_n}\right) \right| \\ &\geq \frac{\widehat{C}_j}{x_j^{\omega}} - \sum_{n < j} \frac{\widehat{C}_n}{x_n^{\omega}} \left| \gamma\left(\frac{h_j}{h_n}\right) \right| - \sum_{n > j} \frac{\widehat{C}_n}{x_n^{\omega}} \left| \gamma\left(\frac{h_j}{h_n}\right) \right| \geq \frac{\widehat{C}_j}{2x_j^{\omega}}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (5.12) и (5.14), имеем

$$\frac{1}{\rho(k_j)} |(f(k_j t), \psi(t))| = \left| g_j^q \frac{1}{k_j^{y_0}} (f(k_j t), \psi(t)) \right| \geq \frac{1}{2} \frac{\widehat{C}_j}{x_j^{\omega}} h_j^q = \frac{1}{2} x_j^{\omega} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty,$$

что и доказывает лемму.

Тем самым теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенный по формулам (5.5) и (5.6) функционал $f(t)$ принадлежит пространству $(\mathcal{S}_{b_1, 0, \eta}^{a_1, 0})'$. При этом мы никак не использовали произвол в выборе параметра $\omega \geq 1$ в формуле (5.6). На самом деле, если ω считать достаточно большим, то можно доказать, что $f(t)$ является регулярной сколь угодно гладкой обобщенной функцией.

§ 6. Некоторые применения

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые применения доказанных выше теорем. Эти применения в основном посвящены следующей задаче.

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – обобщенные функции из $\mathcal{S}'_+$ и

$$Af(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6.1)$$

где A – некоторый линейный оператор. Если $g(t)$ обладает (квази) асимптотикой при $t \rightarrow +\infty$ относительно некоторой автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , то что можно сказать о (квази) асимптотике $f(t)$?

Рассмотрим простейший случай $A = f_{\beta}(t) *$, где $f_{\beta}(t)$ – лиувиллевское ядро дробного интегрирования и дифференцирования, задаваемое формулой (1.8), β не целое, а $*$ означает обычную аддитивную свертку. При достаточно больших β обобщенная функция Af является непрерывной функцией, так что

$$\begin{aligned} [Af](k) &\equiv f^{(-\beta)}(k) = (f(t), f_{\beta}(k-t)) \\ &= k^{\beta-1} \left(f(t), f_{\beta} \left(1 - \frac{t}{k} \right) \right) = k^{\beta} (f(kt), f_{\beta}(1-t)). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Если существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^{\beta} \rho(k)} f^{(-\beta)}(k) = \text{const}, \quad (6.3)$$

т.е. $g(t)$ в (6.1) обладает асимптотикой относительно $k^{\beta} \rho(k)$, где $k^{\beta} \rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha + \beta > -1$, то, как известно, см. [10], $f(t)$ обладает

квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Если $\alpha + \beta < -1$, то, вообще говоря, это не так.

Действительно, из (6.2) и (6.3) следует, что последовательность функционалов $\frac{1}{\rho(k)}f(kt)$ сходится на функции $f_\beta(1-t)$, а нам нужно сделать вывод о ее сходимости на всех основных функциях из $\mathcal{S}_+$. Но преобразование Меллина

$$\begin{aligned} M[f_\beta(1-t)](z) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{-iz} (1-t)^{\beta-1} dt \\ &= \frac{B(1-iz, \beta)}{\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(1-iz)}{\Gamma(1+\beta-iz)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

имеет нули в точках $-(\beta + \ell)i$, $\ell = 1, 2, \dots$ (напомним, что β не целое), а потому если $\alpha + \beta < -1$, то $M[f_\beta(1-t)](z)$ имеет нули при $\text{Im } z > \alpha$. Таким образом, условия теоремы 1 не выполняются, если на обобщенную функцию $f(t)$ не наложить добавочных условий. Обобщенная функция $f(t)$ в силу конечности порядка принадлежит $(\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ с некоторым a . Если на a наложить подходящие ограничения, то условия теоремы 1 будут выполнены. Точнее, имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $f \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$, где $a < -\beta + [\alpha + \beta + 1]$, β и $\alpha + \beta$ не целые, $\alpha + \beta + 1 < 0$, $\beta - 1 > M \geq 0$ и $\eta > 0$. Если выполнено условие (6.3), то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из теоремы 1, ибо

$$M[f_\beta(1-t)] = \frac{\Gamma(1-iz)}{\Gamma(1+\beta-iz)} = z^{-\beta}(1+o(1)), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \in \Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f(t)$ — непрерывная функция, для которой существуют c и t_0 такие, что

$$|f(t)| < ct^a \quad \text{при } t > t_0,$$

где $a < -\beta + [\alpha + \beta + 1]$, то $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,0,\eta}^{a,0})'$ при некоторых b и $\eta > 0$.

Отметим следующее интересное следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $F(t)$ гладкая $[N] + 1$ -дифференцируемая функция, где $N > 1$ не целое и для некоторого не целого $\alpha < -1$

$$\frac{1}{t^\alpha} |F(t)| < \text{const}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6.5)$$

Если существуют c и t_0 такие, что

$$|F^{(N)}(t)| \leq ct^{-N+[\alpha+1]-\varepsilon}, \quad t > t_0, \quad (6.6)$$

с некоторым $\varepsilon > 0$, тогда

$$\int_0^\infty F(t)t^k dt = 0 \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, [-\alpha] - 1. \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $F^{(N)}(t) = f(t)$. В силу (6.5) функция $f^{(-N)}(t)$ имеет тривиальную асимптотику относительно $t^{\delta+\alpha}$ для любого $\delta > 0$, а в силу оценки (6.6) функция $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,0,\eta}^{a,0})'$ с $a = -N + [\alpha + 1] - \varepsilon$ (см. (2.10)). По утверждению $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^{-N+\delta+\alpha}$, а потому $F(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^{\delta+\alpha}$. Согласно следствию 2 к лемме 3 выполнены соотношения (6.7).

В качестве другого примера рассмотрим оператор

$$A = \sum_{j=0}^n c_j \left(t \frac{d}{dt} \right)^j,$$

где $c_j, j = 0, 1, \dots, n$, — некоторые комплексные постоянные.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ и обобщенная функция

$$g(t) = \sum_{j=0}^n c_j \left(t \frac{d}{dt} \right)^j f(t) \quad (6.8)$$

обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α . Пусть $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$, — корни многочлена

$$P(z) = \sum_{j=0}^n c_j (-iz)^j. \quad (6.9)$$

Если $\alpha > \max_k \operatorname{Im} \lambda_k$, то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Пусть $f(t) \in (\mathcal{S}_{b,N,\eta}^{a,M})'$ и полоса $\overline{\Pi}_\alpha^a$ не содержит нулей полинома $P(z)$, тогда $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $g(t) \in \mathcal{S}'_+$ и обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, то она обладает ей в конечном порядке, т.е. на основных функциях $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ при некоторых a и b и достаточно больших M и N , например, на $f_N(1-t)$ при достаточно больших N . Так как

$$\frac{1}{\rho(k)}(g(kt), f_N(1-t)) = \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j \left(\frac{d}{dt} t \right)^j f_N(1-t) \right),$$

то сама $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на функции

$$\chi(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j \left(\frac{d}{dt} t \right)^j f_N(1-t),$$

преобразование Меллина которой

$$\widehat{\chi}(z) = M[f_N(1-t)](z) \sum_{j=0}^n c_j (-iz)^j = M[f_N(1-t)](z) P(z).$$

Так как преобразование Меллина $M[f_N(1-t)](z)$ не обращается в нуль при $\operatorname{Im} z > -N - 1$ и в каждой полосе этого полупространства выполнена оценка (4.1), то в силу условий такая же оценка выполнена и для $\widehat{\chi}$. Пользуясь теперь теоремой 1, завершаем доказательство теоремы.

Предыдущий результат может быть сформулирован в виде утверждения о некомпенсации особенностей голоморфных функций.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\tilde{f}(z)$ – голоморфная в верхней полуплоскости функция из $H(\mathbb{R}_+)$, см. (1.10), а функция $\tilde{g}(z)$ определяется формулой

$$\tilde{g}(z) = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j \left(\frac{d}{dz} z \right)^j \tilde{f}(z), \quad z = x + iy, \quad y > 0,$$

где c_j , $j = 0, 1, \dots, n$, – некоторые комплексные числа. Пусть существуют M_1, m_1 и α так, что

$$|\tilde{g}(z)| \leq \frac{M_1}{\varphi^{m_1}} \frac{1}{|z|^{\alpha+1}}, \quad \text{при } |z| < 1. \quad (6.10)$$

Здесь φ – угол между вектором z и вещественной осью (можно считать, что $\varphi = y/|z|$). Обозначим корни полинома $P(z)$, определяемого формулой (6.9), как λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Если $\alpha > \max_k \operatorname{Im} \lambda_k$, то существуют M и m такие, что

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{M}{\varphi^m} \frac{1}{|z|^{\alpha+1}} \quad \text{при } |z| < 1. \quad (6.11)$$

Если существует замкнутая полоса $\overline{\Pi}_\alpha^a$ ($a > \alpha$), не содержащая корней полинома $P(z)$, найдутся постоянные M_2 и m_2 так, что

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{M_2}{\varphi^{m_2}} \frac{1}{|z|^{a+1}} \quad \text{при } |z| < 1 \quad (6.12)$$

и выполнена оценка (6.10), то для $\tilde{f}(z)$ справедлива оценка (6.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Делая обратное преобразование Меллина, пользуясь общей тауберовой теоремой, см. [10], предыдущей теоремой и возвращаясь снова преобразованием Лапласа, получаем первое утверждение.

Второе утверждение получается аналогично, надо только заметить, что обратное преобразование Лапласа функции $\tilde{f}(z)$ согласно общей тауберовой теореме квазиасимптотически ограничено относительно k^a , а потому согласно утверждению 2 принадлежит $(\mathcal{S}_b^a)'$.

В качестве другого применения тауберовой теоремы докажем еще одну теорему о некомпенсации особенностей аналитических функций в окрестности граничной точки, если все эти функции получены различными дилатациями аргумента одной и той же функции из $H(\mathbb{R}_+)$, см. (1.10).

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны $\tilde{f}(z) \in H(\mathbb{R}_+)$, набор отличных от нуля комплексных чисел $c_1, c_1, \dots, c_n$ и положительных чисел $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$ и автомодельная функция $\rho(k)$ порядка α . Рассмотрим функции

$$\tilde{\Phi}(z) = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{f}(k_j z), \quad z = x + iy. \quad (6.13)$$

Пусть существуют постоянные A_0, B_0 и r_0 такие, что

$$|\tilde{\Phi}(z)| \leq A_0 \frac{\rho(1/|z|)}{\varphi^{B_0}} \quad \text{при } |z| < r_0, \quad (6.14)$$

где φ – угол между вектором z и вещественной осью (можно считать $\varphi = y/|z|$).

Пусть, кроме того, найдется полоса Π_b^a , $a > \alpha > b$, такая, что функция $\psi(z) = \sum_{j=1}^n c_j k_j^{iz-1}$ удовлетворяет оценке

$$|\psi(z)| > \frac{A_2}{1 + |z|^m}, \quad a > \operatorname{Im} z > b \quad \text{при некоторых } A_2, m, \quad (6.15)$$

и существуют постоянные $A_3, B_3, \varepsilon > 0$ и r_3 такие, что выполнена априорная оценка

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{A_3}{|z|^{a-\varepsilon} \varphi^{B_3}}, \quad |z| < r_3. \quad (6.16)$$

Тогда для $\tilde{f}(z)$ выполнена оценка типа (6.14), т.е. для некоторых A_1, B_1 и r_1

$$|\tilde{f}(z)| \leq A_1 \frac{\rho(1/|z|)}{\varphi^{B_1}} \quad \text{при } |z| < r_1, \quad y > 0. \quad (6.17)$$

В частности, оценка (6.17) заведомо справедлива, если

$$\alpha > -1 + \frac{\ln((n-1)C)}{\ln(1/q)}, \quad \text{где } C = \max_{j \geq 2} \left| \frac{c_j}{c_1} \right|, \quad q = \frac{k_1}{k_n}. \quad (6.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условиях теоремы потребовать еще существование предела

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{\rho(1/y)} |\tilde{\Phi}(iy)| = \text{const}, \quad (6.19)$$

то наряду с оценкой (6.17) для $\tilde{f}(z)$ будет существовать предел

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{\rho(1/y)} |\tilde{f}(iy)| = \text{const}. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную функцию

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} c_j f\left(\frac{t}{k_j}\right) \quad (L[\Phi(t)] = \tilde{\Phi}(z)).$$

По общей тауберовой теореме, см. [10, гл. 2 и 3], $\Phi(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно $k^{-1}\rho(k)$. А тогда существует N такое, что функция $\frac{k}{\rho(k)}(\Phi(kt), f_N(1-t))$ ограничена. Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{k}{\rho(k)}(\Phi(kt), f_N(1-t)) &= \frac{k}{\rho(k)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} c_j \left(f\left(\frac{k}{k_j}t\right), f_N(1-t) \right) \\ &= \frac{k}{\rho(k)} \sum_{j=1}^n c_j (f(kt), f_N(1-k_j t)) \\ &= \frac{k}{\rho(k)} \left(f(kt), \sum_{j=1}^n c_j f_N(1-k_j t) \right). \end{aligned}$$

Преобразование Меллина

$$M \left[\sum_{j=1}^n c_j f_N(1 - k_j t) \right] (z) = \sum_{j=1}^n c_j k_j^{iz-1} M[f_N(1 - t)](z).$$

При выполнении условий (6.15) и (6.16) либо (6.18), учитывая свойства функции $M[f_N(1 - t)](z)$, легко усмотреть, что для функции $\sum_{j=1}^n c_j f_N(1 - k_j t)$ будут выполнены условия теоремы 1 (условия (4.1)), и, следовательно, из квазиасимптотической ограниченности (существования квазиасимптотики) на этой функции будет следовать квазиасимптотическая ограниченность (существование квазиасимптотики) функционала $f(t)$, а потому по общей тауберовой теореме, см. [10], будет выполнена и оценка (6.17) ((6.20)) для $\tilde{f}(z)$. Теорема доказана.

§ 7. Приложение

В этом приложении мы докажем ряд вспомогательных утверждений, которые были использованы в основном тексте.

ЛЕММА П1. Пусть $f(z)$ голоморфна в полосе Π_0^a , причем

$$|f(z)| > 1 \quad \text{при} \quad z \in \Pi_0^a, \quad (7.1)$$

тогда существует постоянная c такая, что

$$|f(z)| \leq \exp \left[\frac{c}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|} \right], \quad z \in \Pi_0^a. \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена переменных $\zeta = \xi + i\eta = e^{\frac{\pi}{a} z}$ переведет полосу Π_0^a в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}_\zeta$. Рассмотрим функцию $\Phi(\zeta) = f(\frac{a}{\pi} \ln \zeta)$. Зафиксируем ветвь логарифма, полагая $\Phi(i) = f(\frac{a}{2}i)$. Ясно, что в верхней полуплоскости $|\Phi(\zeta)| > 1$. Функция $\ln \Phi(\zeta)$ имеет там неотрицательную вещественную часть, ибо $\ln \Phi(\zeta) = \ln |\Phi(\zeta)| + i \arg \Phi(\zeta)$ и $\ln |\Phi(\zeta)| > 0$. (Мы снова фиксируем ветвь логарифма, скажем, $\ln \Phi(i) = \ln |f(\frac{a}{2}i)| + i \arg f(\frac{a}{2}i)$.) Пользуясь известной оценкой для голоморфных функций с неотрицательной вещественной частью (см., например, [11]), получим

$$|\ln \Phi(\zeta)| \leq \sqrt{2} |\ln \Phi(i)| \frac{1 + |\zeta|^2}{\eta}. \quad (7.3)$$

Так как $\zeta = e^{\frac{\pi}{a} x} (\cos \frac{\pi}{a} y + i \sin \frac{\pi}{a} y)$, из (7.3) вытекает

$$\ln |f(z)| \leq |\ln f(z)| \leq \sqrt{2} \left| \ln f\left(\frac{a}{2}i\right) \right| \frac{1 + e^{\frac{2\pi}{a} x}}{\sin \frac{\pi}{a} y e^{\frac{\pi}{a} x}} \leq \frac{\sqrt{2} |\ln f(\frac{a}{2}i)|}{\sin \frac{\pi}{a} y} [e^{\frac{\pi}{a} x} + e^{-\frac{\pi}{a} x}].$$

Откуда и следует оценка (7.2).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(z)$ голоморфна в Π_0^a , не имеет там нулей и ограничена сверху,

$$|f(z)| < 1 \quad \text{при} \quad z \in \Pi_0^a. \quad (7.4)$$

Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|f(z)| > \exp \left[-\frac{c}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|} \right], \quad z \in \Pi_0^a. \quad (7.5)$$

Действительно, достаточно применить лемму к функции $\frac{1}{f(z)}$.

Справедливо ли обратное утверждение? Частичный ответ на этот вопрос дает следующая

ЛЕММА П2. Пусть $f(z)$ голоморфна в Π_0^a и имеет оценку

$$|f(z)| > \exp[-ce^{\alpha|x|}], \quad z \in \Pi_0^a, \quad (7.6)$$

с некоторыми $c > 0$ и $\alpha < \frac{\pi}{a}$. Тогда существует постоянная c_0 такая, что

$$|f(z)| \leq \exp \left[\frac{c_0}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|} \right], \quad z \in \Pi_0^a. \quad (7.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\psi_{q,a}(z) = \exp \left[2q \sinh \frac{\pi}{a} z \right] = \exp \left[-iq(e^{\frac{\pi}{a} z} - e^{-\frac{\pi}{a} z}) \right]. \quad (7.8)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \exp \left[q \sin \frac{\pi}{a} y e^{\frac{\pi}{a} |x|} \right] &\leq |\psi_{q,a}(z)| = \exp \left[q \sin \frac{\pi}{a} y (e^{\frac{\pi}{a} x} + e^{-\frac{\pi}{a} x}) \right] \\ &\leq \exp \left[2q \sin \frac{\pi}{a} y e^{\frac{\pi}{a} |x|} \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Фиксируем любые δ и c_1 такие, что

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} - a \right) \quad \text{и} \quad c_1 \sin \frac{\pi \delta}{a + 2\delta} > c. \quad (7.10)$$

Имеем

$$\left| \frac{f(z)}{\psi_{c_1, a+2\delta}(z + i\delta)} \right| > \exp \left[c_1 \sin \frac{\pi(y+\delta)}{a+2\delta} e^{\frac{\pi}{a+2\delta} |x|} - ce^{\alpha|x|} \right] > 1, \quad z \in \Pi_0^a.$$

По лемме П1 существует постоянная c_2 такая, что

$$\left| \frac{f(z)}{\psi_{c_1, a+2\delta}(z + i\delta)} \right| \leq \exp \left[\frac{c_2}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|} \right], \quad z \in \Pi_0^a.$$

Отсюда, учитывая (7.10) и неравенство (7.9), в котором $q = c_1$ и вместо a подставлено $a + 2\delta$, имеем

$$|f(z)| \leq \exp \left[\frac{c_2}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|} + 2c_1 \sin \frac{\pi(y+\delta)}{a+2\delta} e^{\frac{\pi}{a+2\delta} |x|} \right] \leq \exp \left[\frac{c_0}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|} \right]$$

с любым $c_0 > c_2 + 2c_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА ПЗ. Пусть $f(z)$ голоморфна в Π_0^a и имеет оценку снизу

$$|f(z)| > \exp[-ce^{q|x|}] \quad \text{с некоторыми } c > 0 \text{ и } 0 < q < \frac{\pi}{a}. \quad (7.11)$$

Пусть также на двух прямых $\gamma_1 = \{z = x + iy_1, |x| < \infty\}$ и $\gamma_2 = \{z = x + iy_2, |x| < \infty\}$, где $0 < y_1 < y_2 < a$, функция $f(z)$ ограничена:

$$\sup_{z \in \gamma_1} |f(z)| \leq M, \quad \sup_{z \in \gamma_2} |f(z)| \leq M \quad (7.12)$$

с некоторым $M > 0$. Тогда $f(z)$ ограничена во всей замкнутой полосе $\overline{\Pi}_{y_1}^{y_2}$ той же постоянной:

$$\sup_{z \in \overline{\Pi}_{y_1}^{y_2}} |f(z)| \leq M. \quad (7.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\delta = \min\{\frac{a-y_2}{2}, \frac{y_1}{2}\}$, тогда $0 < y_1 - \delta < y_2 + \delta < a$. Обозначим $a_1 = y_2 - y_1 + 2\delta$. Тогда $a_1 < a$. Так как выполнена оценка (7.11), то по лемме П2 имеем

$$|f(z)| \leq \exp\left[\frac{c_0}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|}\right], \quad 0 < y < a.$$

Вводя, как в лемме П2 (см. (7.8)), функцию $\psi_{c_1, a_1}(z) = \exp[2c_1 \sinh \frac{\pi}{a_1} z]$, при $y_1 \leq y \leq y_2$ получим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z)}{\psi_{c_1, a_1}(z - i(y_1 - \delta))} \right| \\ & \leq \exp\left\{-c_1 \sin\left[\frac{\pi}{a_1}(y - y_1 + \delta)\right] e^{\frac{\pi}{a_1} |x|} + \frac{c_0}{\sin \frac{\pi}{a} y} e^{\frac{\pi}{a} |x|}\right\} \\ & \leq \exp\left\{-c_1 e^{\frac{\pi}{a_1} |x|} \left[\sin \frac{\pi \delta}{a_1} - \frac{c_0}{\sin \frac{2\pi \delta}{a}} e^{(\frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a_1})|x|}\right]\right\} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

при любом $c_1 > 0$. Здесь учтено, что $\frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a_1} < 0$. Замечая, что

$$\max_{z \in \overline{\Pi}_{y_1}^{y_2}} \left| \frac{1}{\psi_{c_1, a_1}(z - i(y_1 - \delta))} \right| = e^{-2c_1 \sin \frac{\pi \delta}{a_1}} \xrightarrow{c_1 \rightarrow +0} 1, \quad (7.15)$$

по принципу максимума модуля имеем

$$\max_{z \in \overline{\Pi}_{y_1}^{y_2}} \left| \frac{f(z)}{\psi_{c_1, a_1}(z - i(y_1 - \delta))} \right| \leq M \max_{\substack{z \in \gamma_1 \\ z \in \gamma_2}} \left| \frac{1}{\psi_{c_1, a_1}(z - i(y_1 - \delta))} \right|$$

при любом $c_1 > 0$. Переходя здесь к пределу при $c_1 \rightarrow +0$ и учитывая (7.15), получаем (7.13). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(z)$ голоморфна в Π_0^a , отлична от нуля и полиномиально ограничена там. Пусть в подполосе $\overline{\Pi}_\varepsilon^{a-\varepsilon}$ (для некоторого $\varepsilon > 0$) нет полиномиальной оценки снизу, т.е. для любого N существует последовательность точек $z_k \in \overline{\Pi}_\varepsilon^{a-\varepsilon}$ такая, что $|f(z_k)|(1 + |z_k|^N) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Тогда полиномиальной оценки снизу нет хотя бы на одной из прямых $\gamma_1 = \{z = x + i(a - \varepsilon), |x| < \infty\}$ или $\gamma_2 = \{z = x + i\varepsilon, |x| < \infty\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть на границе $\overline{\Pi}_\varepsilon^{a-\varepsilon}$ есть полиномиальная оценка снизу, т.е. существует полином $\mathcal{P}(z)$ такой, что

$$|f(z)| > \frac{\text{const}}{|\mathcal{P}(z)|} \quad \text{при } z \in \gamma_1 \cup \gamma_2.$$

(Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{P}(z) \neq 0$ при $z \in \overline{\Pi}_\varepsilon^{a-\varepsilon}$.) Теперь, чтобы завершить доказательство, достаточно применить лемму ПЗ к функции $\frac{1}{f(z)\mathcal{P}(z)}$.

Далее займемся построением функции $\widehat{\varphi}(z)$, являющейся преобразованием Меллина некоторой основной функции $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$ и принимающей заданные значения c_k в точках заданной последовательности комплексных чисел z_k , т.е. $\widehat{\varphi}(z_k) = c_k$, $k = 1, 2, \dots$. Мы будем предполагать, что последовательность z_k обладает следующими свойствами:

$$\{z_k = x_k + iy_0, k = 1, 2, \dots, x_k \rightarrow +\infty\}; \quad \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| \geq q > 1, \quad x_k \geq \exp(e^{k^s}), \quad (7.16)$$

с некоторыми $q > 1$ и $s \geq 1$, а последовательность комплексных чисел $\{c_k; k = 1, 2, \dots\}$, убывает при $k \rightarrow +\infty$ быстрее любой степени $|z_k|^{-1}$, т.е. для любого N существуют M_N такие, что

$$|c_k| \leq \frac{M_N}{|z_k|^N} \quad \text{для } k = 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

Последовательность $\{z_k^*\}$ определяется формулой

$$\{z_k^* = -i[x_k], k = 1, 2, \dots\}, \quad (7.18)$$

где $[x_k]$ — целая часть x_k . Ясно, что существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, не зависящие от k , такие что

$$c_1 \leq \frac{|z_k|}{|z_k^*|} \leq c_2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.19)$$

ЛЕММА П4. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{z_k}}{1 - \frac{z}{z_k^*}}, \quad (7.20)$$

где последовательность z_k удовлетворяет условиям (7.16), а $\{z_k^*\}$ определяется формулой (7.18). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 такие, что

$$\begin{cases} |\Phi(z)| \leq A_1(1 + |z|)^{B_1} & \text{при } |z - z_k^*| > \varepsilon|z_k^*|, \\ |\Phi(z)| \geq \frac{A_2}{(1 + |z|)^{B_2}} & \text{при } |z - z_k| > \varepsilon|z_k|. \end{cases} \quad (7.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\ln |\Phi(z)|$ при $|z - z_k^*| > \varepsilon |z_k^*|$. Имеем

$$\begin{aligned} \ln |\Phi(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{1 - \frac{z}{z_k}}{1 - \frac{z}{z_k^*}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{1 - \frac{z_k^*}{z_k} \frac{z}{z_k^*}}{1 - \frac{z}{z_k^*}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{1 - \frac{z}{z_k^*} + (1 - \frac{z_k^*}{z_k}) \frac{z}{z_k^*}}{1 - \frac{z}{z_k^*}} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| 1 + \left(1 - \frac{z_k^*}{z_k}\right) \frac{\frac{z}{z_k^*}}{1 - \frac{z}{z_k^*}} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \left| 1 - \frac{z_k^*}{z_k} \right| \frac{\left| \frac{z}{z_k^*} \right|}{\left| 1 - \frac{z}{z_k^*} \right|} \right) \\ &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \frac{z}{z_k^*} \right|}{\left| 1 - \frac{z}{z_k^*} \right|}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы учли (7.19) и тот факт, что $\ln(1+t) < t$ при $t > 0$. Обозначая $z/z_k^* = \zeta$ и учитывая, что $|\zeta - 1| > \varepsilon$, продолжим предыдущую оценку. Имеем

$$\begin{aligned} \ln |\Phi(z)| &\leq \text{const} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\zeta|}{|1 - \zeta|} \\ &\leq \begin{cases} \frac{\text{const}}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta| \leq \text{const} \frac{(2+\varepsilon)}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta|}{1+|\zeta|} \text{ при } |\zeta| < 1+\varepsilon, |1-\zeta| > \varepsilon; \\ \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta|}{|\zeta|-1} \leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta|}{1+|\zeta|} \frac{|\zeta|+1}{|\zeta|-1} \leq \text{const} \frac{(2+\varepsilon)}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta|}{1+|\zeta|} \\ \text{при } |\zeta| \geq 1+\varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы учли, что

$$\frac{|\zeta|+1}{|\zeta|-1} = 1 + \frac{2}{|\zeta|-1} \leq 1 + \frac{2}{\varepsilon} \text{ при } |\zeta| \geq 1+\varepsilon.$$

Таким образом, существует C_ε такое, что

$$\ln |\Phi(z)| \leq C_\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta|}{1+|\zeta|} = C_\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|}{|z_k^*| + |z|}. \quad (7.22)$$

Покажем, что существует постоянная C , не зависящая от k , такая, что

$$\frac{|z|}{|z_k^*| + |z|} \leq C \frac{\ln(2+|z|)}{\ln |z_k^*|} \text{ при } |z_k| > e^e. \quad (7.23)$$

Действительно, рассмотрим два случая.

Первый случай: $|z| < \frac{|z_k^*|}{\ln |z_k^*|}$. Имеем

$$\frac{|z|}{\ln(2+|z|)(|z_k^*| + |z|)} \leq \frac{|z_k^*|}{\ln 2 \ln |z_k^*| (|z_k^*| + |z|)} \leq \frac{\text{const}}{\ln |z_k^*|}.$$

Второй случай: $|z| \geq \frac{|z_k^*|}{\ln |z_k^*|}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{|z|}{\ln(2 + |z|)(|z_k^*| + |z|)} &\leq \frac{1}{\ln(2 + |z|)} \leq \frac{1}{\ln(2 + \frac{|z_k^*|}{\ln |z_k^*|})} \\ &\leq \frac{1}{\ln |z_k^*| \left[\frac{\ln(2 \ln |z_k^*| + |z_k^*|) - \ln \ln |z_k^*|}{\ln |z_k^*|} \right]} \leq \frac{\text{const}}{\ln |z_k^*|}. \end{aligned}$$

Продолжая оценку (7.22), учитывая (7.23), получаем

$$\ln |\Phi(z)| \leq C_\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{const} \ln(2 + |z|)}{\ln |z_k^*|} \leq C_\varepsilon \ln(2 + |z|) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln |z_k^*|} \leq \text{const} \ln(2 + |z|).$$

Мы воспользовались тем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln |z_k^*|} < \infty$$

в силу соотношений (7.19) и (7.16). Отсюда и следует первая из оценок (7.20).

Доказательство второй из оценок (7.20) проводится аналогичным образом, нужно только вместо $\Phi(z)$ рассмотреть функцию $\frac{1}{\Phi(z)}$, поменять местами последовательности z_k и z_k^* и учесть (7.19).

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из доказательства леммы, справедливо следующее утверждение. Пусть задана последовательность (7.16). Рассмотрим любую ее подпоследовательность и по ней согласно формуле (7.20) строим функцию $\Phi(z)$. Тогда справедливы оценки (7.21), где постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 не зависят от выбора указанной подпоследовательности.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы существуют постоянные A и B такие, что для любого $n = 1, 2, \dots$ функции

$$\Phi_n(z) = \prod_{k \neq n} \frac{1 - \frac{z}{z_k}}{1 - \frac{z}{z_k^*}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.24)$$

удовлетворяют оценкам:

$$\begin{aligned} |\Phi_n(z_n)| &\geq \frac{A}{(1 + |z_n|)^B}, \quad n = 1, 2, \dots; \\ |\Phi_n(z)| &\leq A(1 + |z|)^B \quad \text{при} \quad |\operatorname{Re} z| > 1 + |\operatorname{Im} z|. \end{aligned} \quad (7.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\varepsilon < \frac{q-1}{q+1}$ и таким, чтобы все круги $|z - z_n^*| < \varepsilon |z_n^*|$ лежали вне области $|\operatorname{Re} z| > 1 + |\operatorname{Im} z|$. Теперь согласно предыдущему замечанию достаточно проверить, что z_n не принадлежит кругам $|z - z_{n-1}| < \varepsilon |z_{n-1}|$ и $|z - z_{n+1}| < \varepsilon |z_{n+1}|$. Действительно,

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - z_n| &\geq |z_{n+1}| - |z_n| \geq \varepsilon |z_{n+1}| + [(1 - \varepsilon)|z_{n+1}| - |z_n|] \\ &\geq \varepsilon |z_{n+1}| + [(1 - \varepsilon)q - 1]|z_n| \\ &\geq \varepsilon |z_{n+1}| + \left[(1 - \varepsilon) \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - 1 \right] |z_n| \geq \varepsilon |z_{n+1}| \end{aligned}$$

и, аналогично, $|z_n - z_{n-1}| \geq \varepsilon |z_{n-1}|$. Следствие доказано.

ЛЕММА П5. Пусть $\{z_k = x_k + iy_0, k = 1, 2, \dots\}$ – последовательность комплексных чисел со свойствами (7.16) и $\{c_k\}$ последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условиям (7.17). Тогда найдется функция $\varphi(t) \in S_+$, преобразование Меллина которой

$$\widehat{\varphi}(z_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что преобразование Меллина искомой функции можно задать в виде

$$\widehat{\varphi}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\Phi_k(z)}{\Phi_k(z_k)} e^{-(z-z_k)^2}. \quad (7.27)$$

Действительно, этот ряд сходится всюду, кроме, может быть, целочисленных отрицательных чисто мнимых точек. Ибо по лемме П4 и следствию для любых $a > 0$, $\varepsilon > 0$ и любого $N > 0$

$$\begin{aligned} \left| c_k \frac{\Phi_k(z)}{\Phi_k(z_k)} e^{-(z-z_k)^2} \right| &\leq \text{const } |c_k| (1 + |z|)^{A_1} (1 + |z_k|)^{B_2} \\ &\leq \text{const } \frac{(1 + |z_k|)^{B_2}}{|z_k|^N} M_N (1 + |z|)^{A_1} \end{aligned}$$

при $|z - z_j^*| > \varepsilon |z_j^*|$, $j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots$, и $z \in \Pi_{-a}^a$. Мы использовали (7.17), где N любое сколь угодно большое.

Зафиксируем теперь любую полосу Π_b^a и покажем, что сумма ряда (7.27) убывает при $|x| \rightarrow +\infty$ быстрее любой степени $|z|^{-1}$. Действительно, фиксируя произвольное $m > 0$, имеем

$$\begin{aligned} |z^m \widehat{\varphi}(z)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^m \frac{\Phi_k(z)}{\Phi_k(z_k)} e^{-(z-z_k)^2} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \text{const } (1 + |z_k|)^{B_2} (1 + |z|)^{m+A_1} |e^{-(z-z_k)^2}| \\ &\leq \text{const } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_N}{|z_k|^N} (1 + |z_k|)^{B_2} |\mathcal{P}_Q(|z_k|)| < \infty. \end{aligned}$$

Здесь использованы оценки (7.17), (7.16) и тот факт, что

$$\sup_{z \in \Pi_b^a} |(1 + |z|)^{m+A_1} e^{-(z-z_k)^2}| \leq \mathcal{P}_Q(|z_k|),$$

где $\mathcal{P}_Q(|z_k|)$ – некоторый полином степени Q , а $N > B_2 + Q + 2$.

Замечая, что $\Phi_n(z)$ обращается в нуль в точках $z_k = z_1, \dots, z_{n-1}, z_{n+1}, \dots$, нетрудно увидеть, что условие (7.26) выполняется. Лемма доказана.

Список литературы

1. *Wiener N.* Tauberian theorems // Ann. of Math. 1932. V. 33. № 1. P. 1–100.
2. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его применения. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Karamata J.* Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjesche Transformation betreffen // J. Reine Angew. Math. 1931. V. 164. № 1. P. 27–29.
4. *Beurling A.* Sur les integrales de Tourier absolument convergentes. Comp. rend. gie'me Congr. math. scand.: Helsinki, 1938.
5. *Ganelius T.* Tauberian remainder theorems. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
6. *Коренблюм Б. И.* Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций // Труды ММО. 1958. Т. 7. С. 121–148.
7. *Комеч А. И.* Уравнения с однородными ядрами и преобразование Меллина обобщённых функций // ТМФ. 1976. Т. 27. № 2. С. 149–162.
8. *Земляни А. Г.* Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1974.
9. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
10. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций. М.: Наука, 1986.
11. *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
12. *Peetre J.* On the value of a distribution at a point // Portugal. Math. 1968. V. 27. P. 243–259.
13. *Korevaar J.* Distribution proof of Wiener's Tauberian theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 164. P. 333–355.
14. *Pilipović S., Stanković B.* Wiener Tauberian Theorems for Distribution // J. London Math. Soc. 1993. V. 47. № 2. P. 507–515.
15. *Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматгиз, 1959.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: drozzin@genesis.mi.ras.ru

Поступила в редакцию
18.09.1997