Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, Стабилизация решений волнового уравнения в областях с некомпактными границами, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 8, 141–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:50:01

УДК 517.956.3

А. В. Филиновский

Стабилизация решений волнового уравнения в областях с некомпактными границами

В работе изучается поведение при больших значениях времени решений первой смешанной задачи для волнового уравнения в областях с некомпактными не-звездными границами. Установлены оценки по спектральному параметру решений первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Библиография: 23 названия.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Рассмотрим первую смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in Q = (t > 0) \times \Omega, \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad (0.2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0. \quad (0.3)$$

Начальные функции будем предполагать вещественнозначными, гладкими в $\overline{\Omega}$, согласованными с граничным условием (0.3) и обладающими конечным интегралом

$$\int_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2 + g^2) dx < \infty.$$

В работе исследуется скорость убывания решения задачи (0.1)–(0.3) при $t \rightarrow \infty$.

Известно, что для решения задачи (0.1)–(0.3) справедлив закон сохранения энергии

$$E_{\Omega}(t) = \int_{\Omega} |\text{grad } u(t, x)|^2 dx = E_{\Omega}(0), \quad t > 0, \quad (0.4)$$

$$\text{grad } u = (u_t, \nabla_x u) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Рассмотрим локальную энергию решения задачи (0.1)–(0.3)

$$E_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} |\text{grad } u(t, x)|^2 dx$$

в произвольной ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$. Пусть Γ — компактная поверхность. Если $n = 3$, Γ звезда относительно начала координат, т.е.

$$(\nu, x) \leq 0, \quad x \in \Gamma \quad (0.5)$$

(ν — единичный вектор внешней нормали к Γ) и начальные функции финитны, то, как установлено в работе [1], справедлива оценка

$$E_{\Omega'}(t) \leq \frac{C}{t}. \quad (0.6)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-15-96177 и № 97-01-00365).

В [2] оценка (0.6) усилена:

$$E_{\Omega'}(t) \leq \frac{C}{t^2}, \quad (0.7)$$

а в [3] при тех же предположениях доказано, что

$$E_{\Omega'}(t) \leq C e^{-at}, \quad a > 0. \quad (0.8)$$

В [4] было показано, что при звездной Γ и финитных начальных функциях оценка (0.8) имеет место для всех нечетных $n \geq 3$. Величина постоянной a в (0.8) исследовалась в работе [5]. Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, являющейся внешностью шара радиуса R_0 , в [5] получена оценка $E_{\Omega'}(t) \leq C e^{-2t/R_0}$ и доказано, что она является точной.

В работах [6]–[8] при нечетных $n \geq 3$ неравенство (0.8) установлено для областей, границы которых удовлетворяют условиям, обобщающим условие звездности.

В работе [9] при $n = 2$ для связной кривой Γ с положительной кривизной получена точная оценка

$$E_{\Omega'}(t) \leq \frac{C}{t^2 \ln^4 t}.$$

Рассмотрим случай некомпактной поверхности Γ . Для начальных функций из весового пространства Соболева при $n \geq 3$ в работе [10] доказана оценка (0.7), а при $n = 2$ в [11] получено неравенство $E_{\Omega'}(t) \leq C/t$ и установлена сходимость интеграла

$$\int_0^\infty E_{\Omega'}(t)(1+t)^{1-\delta} dt \leq C, \quad \delta > 0.$$

В случае некомпактной звездной поверхности Γ получить оценку (0.8), вообще говоря, нельзя. Как показано в работе [12], для области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, являющейся внутренностью двугранного угла с раствором $2\pi/(2j+1)$, $j = 1, 2, \dots$, найдутся финитные начальные функции f, g и ограниченная область $\Omega_0 \subset \Omega$ такие, что

$$E_{\Omega_0}(t) \geq \frac{C}{t^{2(2j+3)}}, \quad C > 0, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Области с некомпактными незвездными границами рассмотрены в работе [13]. Для областей Ω , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} (\nu, \nabla \varphi(x)) &\leq 0, \quad x \in \Gamma, \\ \varphi(x) &= \alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2, \quad 1 \leq m \leq n-1, \quad 0 < \alpha < 1, \\ \sum_{j=1}^m x_j^2 &\leq C|x|^{2\alpha}, \quad x \in \Omega, \quad C > 0, \end{aligned}$$

при некоторых ограничениях на n, m, α и начальных функциях из весового пространства Соболева в [13] установлена сходимость интеграла $\int_0^\infty E_{\Omega'}(t) dt \leq C$.

Пусть $\varphi(x)$ – положительная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2,$$

где $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m < \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 1$, $1 \leq m \leq n-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Область Ω называется *областью класса* G_φ , если

$$(\nu, \nabla \varphi(x)) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad (0.9)$$

и существует положительная постоянная C_1 такая, что

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 \leq C_1 \left(\sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right)^{\alpha_m}, \quad x \in \Omega. \quad (0.10)$$

Геометрически условие (0.9) характеризует скорость расширения области Ω на бесконечности. При $0 < \alpha_1 < 1$ области $\Omega \in G_\varphi$ содержат некоторый параболоид, скорость расширения которого увеличивается с возрастанием α_1 . Предельному случаю $\alpha_1 = 1$ соответствуют области со звездными границами, содержащие конус. Далее будем предполагать, что $\sum_{j=m+1}^n x_j^2 > 1$ в Ω .

Пусть

$$\Pi_{\varphi, t_0} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t - t_0 = \sqrt{\varphi(x)}\}, \quad -\infty < t_0 < +\infty,$$

— поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \text{grad}_\Pi u(t, x) &= \text{grad } u(t, x) - Nu_N(t, x), \\ N &= \frac{(1, -\nabla \varphi / (2\sqrt{\varphi}))}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2 / (4\varphi)}} \end{aligned}$$

— единичный вектор нормали к Π_{φ, t_0} , $u_N = \partial u / \partial N$. Для $\beta > 0$ положим

$$\mathcal{E}_\beta(h) = \int_\Omega (h^2 + |\nabla h|^2 + |\Delta h|^2) r^\beta dx, \quad r = |x|.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha_1 < 1$ и $2\alpha_m - 1 < \gamma < 1$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_Q \left(|\text{grad}_\Pi u(t, x)|^2 + \frac{u^2(t, x)}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dt dx}{r^\gamma} &\leq C_2 (\mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f) + \mathcal{E}_\beta(g)), \\ \beta &= 2 \max\{\alpha_m + \gamma; 1 - \gamma\}. \end{aligned} \quad (0.11)$$

Постоянные C_0 и C_2 зависят от n , α_1 , α_m и γ .

Условие $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ теоремы 1 означает, что область $\Omega \in G_\varphi$ расширяется быстрее квадратичного параболоида.

Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Справедлива следующая оценка снизу плотности энергии решения задачи (0.1)–(0.3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \gamma \leq 1$ и $E_\Omega(0) > 0$. Тогда

$$\int_Q |\operatorname{grad} u(t, x)|^2 \frac{dt dx}{r^\gamma} = \infty. \quad (0.12)$$

Таким образом, для областей $\Omega \in G_\varphi$ в случае $\frac{1}{2} < \alpha_1 < 1$, $2\alpha_m - 1 < \gamma < 1$ при $C_1 < C_0$ и $0 < \mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f) + \mathcal{E}_\beta(g) < \infty$ выполнено соотношение

$$\int_Q |u_N(t, x)|^2 \frac{dt dx}{r^\gamma} = \infty. \quad (0.13)$$

Установим теперь оценки локальной энергии решения задачи (0.1)–(0.3) при $t \rightarrow \infty$ для областей $\Omega \in G_\varphi$. Из теоремы 1 выводим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha_1 < 1$ и $2\alpha_m - 1 < \gamma < 1$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\int_0^\infty E_{\Omega'}(t) dt \leq C_3 (\mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f) + \mathcal{E}_\beta(g) + \mathcal{E}_\beta(\Delta g)). \quad (0.14)$$

Доказательство теоремы 1 использует оценки решения первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v(x, k) + k^2 v(x, k) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad k = \omega + i\mu, \quad (0.15)$$

$$v|_\Gamma = 0, \quad (0.16)$$

по спектральному параметру k в полуплоскости $\{\operatorname{Im} k \geq 0\}$.

Наиболее полно здесь исследован случай, когда $n = 2$ и Γ компактна. В работах [14], [15] были установлены оценки решения задачи (0.15), (0.16) для связной кривой Γ , имеющей положительную кривизну (в [15] были получены также оценки аналитического продолжения решения в полуплоскость $\{\operatorname{Im} k < 0\}$). Из результатов работ [14], [15] следует неравенство

$$\|v(x, \omega)\|_{L_2(\Omega')} \leq C, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad (0.17)$$

где $\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область (предполагается, что функция $h(x)$ быстро убывает на бесконечности). В [16] оценка (0.17) доказана при $n \geq 2$ для компактной звездной поверхности Γ . Отметим, что в случае компактной Γ оценки решения уравнения Гельмгольца по спектральному параметру устанавливались и при других краевых условиях [17]–[19] (обзор результатов в данном направлении содержится в [20]). Случай некомпактной поверхности Γ рассмотрен в [11]. При $n \geq 2$ для звездной поверхности Γ в [11] установлена следующая оценка решения задачи (0.15), (0.16):

$$\int_{-\infty}^\infty (\|v_r(x, \omega) - i\omega v(x, \omega)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla_\tau v(x, \omega)\|_{L_2(\Omega)}^2) d\omega \leq C,$$

$$\nabla_\tau v = \nabla v - \frac{x}{r} v_r.$$

В настоящей работе получены оценки по спектральному параметру решений задачи (0.15), (0.16) для областей $\Omega \in G_\varphi$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha_1 < 1$ и $2\alpha_m - 1 < \gamma < 1$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \\ & \leq C_4(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\beta} dx, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0, \quad (0.18) \\ & |\nabla_{\tau} v|^2 = |\nabla v|^2 - \frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2}, \quad \beta = 2 \max\{\alpha_m + \gamma; 1 - \gamma\}. \end{aligned}$$

Постоянная C_4 зависит от n , α_1 , α_m и γ .

§1. Оценки снизу плотности энергии решений волнового уравнения

Будем рассматривать обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3) из энергетического класса (см. [21]), т.е. функцию $u(t, x)$ такую, что $u(t, x) \in C([0, +\infty); \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_t(t, x) \in C([0, +\infty); L_2(\Omega))$, удовлетворяющую начальным условиям $u(0, x) = f(x)$, $u_t(0, x) = g(x)$ и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} ((\nabla u, \nabla \chi) - u_t \chi_t) dt dx = \int_{\Omega} g(x) \chi(0, x) dx, \quad Q_T = (0, T) \times \Omega, \quad T > 0, \quad (1.1)$$

при всех $\chi(t, x) \in W_2^1(Q_T)$, $\chi|_{(0, T) \times \Gamma} = 0$, $\chi|_{t=T} = 0$, а также удовлетворяющую энергетическому соотношению (0.4).

Докажем единственность обобщенного решения. Пусть $u(t, x)$ – решение задачи (0.1)–(0.3) при $f = g = 0$. Подставим в интегральное тождество (1.1) функцию

$$\chi(t, x) = \begin{cases} \int_t^{\tau} u(\tau', x) d\tau', & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T, \end{cases}$$

с произвольными $T > 0$, $0 < \tau < T$. Получим равенство

$$\int_{\Omega} \left(\left| \int_0^{\tau} u(\tau', x) d\tau' \right|^2 + u^2(\tau, x) \right) dx = 0,$$

из которого следует, что $u = 0$ в Q , т.е. единственность решения.

Для доказательства существования решения рассмотрим последовательность начальных функций $f_j(x)$, $g_j(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ таких, что $\|f - f_j\|_{W_2^1(\Omega)} \rightarrow 0$, $\|g - g_j\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Так как скорость распространения возмущений для волнового уравнения конечна, существование обобщенного решения $u_j(t, x)$ задачи (0.1)–(0.3) в Q_T для каждой пары начальных функций f_j , g_j , $j = 1, 2, \dots$, следует из его существования в ограниченных областях [21].

Из энергетического соотношения (0.4) следует, что последовательность $u_j(t, x)$ фундаментальна в $C([0, T]; \dot{W}_2^1(\Omega))$, а последовательность производных $\frac{\partial}{\partial t} u_j(t, x)$

фундаментальна в $C([0, T]; L_2(\Omega))$. Поэтому существует функция $u(t, x)$, $(t, x) \in Q_T$, такая, что

$$\begin{aligned} \|u - u_j\|_{C([0, T]; \dot{W}_2^1(\Omega))} &\rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \\ \|u_t - (u_j)_t\|_{C([0, T]; L_2(\Omega))} &\rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет начальным условиям (0.2), интегральному тождеству (1.1) и энергетическому соотношению (0.4). Так как $T > 0$ произвольно, то $u(t, x)$ является обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3) из энергетического класса.

ЛЕММА 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\gamma > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что

$$\int_{\Omega} |\text{grad } u(t, x)|^2 \frac{dx}{r^\gamma} \geq \frac{1 - \varepsilon}{t^\gamma} E_\Omega(0), \quad t \geq t_0. \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (0.1) на $u_t(t, x)$ и проинтегрируем по $Q_T \cap \{r < R + t\}$, $T > 0$, $R > 0$, с учетом граничного условия (0.3). Получим равенство

$$E_{\Omega_{R+T}}(T) = E_{\Omega_R}(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{Q_T \cap \{r=R+t\}} ((u_r + u_t)^2 + |\nabla u|^2 - u_r^2) ds,$$

из которого следует, что

$$E_{\Omega_{R+t}}(t) \geq E_{\Omega_R}(0), \quad t > 0, \quad R > 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\text{grad } u(t, x)|^2 \frac{dx}{r^\gamma} &\geq \int_{\Omega_{R+t}} |\text{grad } u(t, x)|^2 \frac{dx}{r^\gamma} \geq \frac{E_{\Omega_{R+t}}(t)}{(R+t)^\gamma} \geq \frac{E_{\Omega_R}(0)}{(R+t)^\gamma} \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{t^\gamma} E_\Omega(0) + \frac{1}{t^\gamma} \left(\frac{E_{\Omega_R}(0)}{(1 + R/t)^\gamma} - (1 - \varepsilon) E_\Omega(0) \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$ такое, что $E_{\Omega_R}(0) > (1 - \varepsilon/2) E_\Omega(0)$. Тогда при

$$t \geq t_0 = \frac{R}{((2 - \varepsilon)/(2 - 2\varepsilon))^{1/\gamma} - 1}$$

имеем неравенство

$$\frac{E_{\Omega_R}(0)}{(1 + R/t)^\gamma} > (1 - \varepsilon) E_\Omega(0).$$

С учетом этого неравенства оценка (1.2) следует из (1.3). Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из (1.2) с $\varepsilon = \frac{1}{2}$ следует, что

$$\int_{Q_T} |\text{grad } u(t, x)|^2 \frac{dt dx}{r^\gamma} \geq C_5 E_\Omega(0) t^{1-\gamma} \ln^q t, \quad C_5 > 0, \quad t \geq t_0 > 0,$$

где $q = 1$ при $\gamma = 1$ и $q = 0$ при $0 < \gamma < 1$. Таким образом, при $E_\Omega(0) > 0$ получаем соотношение (0.13). Теорема 2 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть область Ω удовлетворяет условию (0.10), функция $y(x)$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega_R)$ при всех $R > 0$ и равна нулю на Γ . Тогда для любого $\delta \in (-\infty, +\infty)$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega} |y(x)|^2 \frac{dx}{\varphi^{\delta+\alpha_m}} \leq C_1(C_1 + 1) \int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 \frac{dx}{\varphi^{\delta}}. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (0.10) и неравенства Фридрихса (см., например, [21]) следует оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_{x'_{m+1}, \dots, x'_n}} |y|^2 dx_1 \dots dx_m \\ & \leq C_1 \left(\sum_{j=m+1}^n (x'_j)^2 \right)^{\alpha_m} \int_{\Pi_{x'_{m+1}, \dots, x'_n}} \sum_{j=1}^m |y_{x_j}|^2 dx_1 \dots dx_m, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\Pi_{x'_{m+1}, \dots, x'_n} = \Omega \cap \{x_{m+1} = x'_{m+1}, \dots, x_n = x'_n\}.$$

Используя (1.5), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(\sum_{j=m+1}^n (x'_j)^2 \right)^{\delta+\alpha_m}} \int_{\Pi_{x'_{m+1}, \dots, x'_n}} |y|^2 dx_1 \dots dx_m \\ & \leq \frac{C_1}{\left(\sum_{j=m+1}^n (x'_j)^2 \right)^{\delta}} \int_{\Pi'_{x_{m+1}, \dots, x'_n}} |\nabla y|^2 dx_1 \dots dx_m. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Интегрируя (1.6) по переменным $x'_{m+1}, \dots, x'_n$, получаем оценку

$$\int_{\Omega} \frac{|y|^2 dx}{\left(\sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right)^{\delta+\alpha_m}} \leq C_1 \int_{\Omega} \frac{|\nabla y|^2 dx}{\left(\sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right)^{\delta}}. \quad (1.7)$$

В силу (0.10) справедливо неравенство

$$\varphi(x) \leq (C_1 + 1) \sum_{j=m+1}^n x_j^2, \quad x \in \Omega.$$

Поэтому из (1.7) следует оценка (1.4). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть область Ω удовлетворяет условию (0.10). Тогда

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \int_{\Omega} (f^2 + C_1(C_1 + 1)g^2\varphi^{\alpha_m}) dx. \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_t(t, x) = u(t, x)$, где функция $z(t, x)$, $t > 0$, $x \in \Omega$, является решением смешанной задачи

$$\begin{aligned} z_{tt} - \Delta z &= 0, & (t, x) \in Q, \\ z_t(0, x) &= f(x), & \Delta z(0, x) = g(x), \\ z|_{\Gamma} &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Обозначим $z(0, x) = y(x)$. Тогда

$$\Delta y = g(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.9)$$

$$y|_{\Gamma} = 0. \quad (1.10)$$

Для решения задачи

$$\begin{aligned} \Delta y_M &= g(x), & x \in \tilde{\Omega}_M, & \tilde{\Omega}_M = \Omega \cap \left\{ \sum_{j=m+1}^n x_j^2 < M^2 \right\}, \\ y_M|_{\partial\tilde{\Omega}_M} &= 0, & M > 0, \end{aligned}$$

с учетом интегрального тождества

$$\int_{\tilde{\Omega}_M} |\nabla y_M|^2 dx = - \int_{\tilde{\Omega}_M} g y_M dx$$

и неравенства (1.4) с $\delta = 0$,

$$y = \begin{cases} y_M, & x \in \tilde{\Omega}_M, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}_M, \end{cases}$$

имеем оценку

$$\int_{\tilde{\Omega}_M} |\nabla y_M|^2 dx \leq C_1(C_1 + 1) \int_{\tilde{\Omega}_M} g^2 \varphi^{\alpha_m} dx. \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует, что в $L_2(\Omega)$ существует слабый предел

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \nabla y_M = \nabla y.$$

Функция $y(x)$ является решением задачи (1.9), (1.10), и для нее справедлива оценка

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx \leq C_1(C_1 + 1) \int_{\Omega} g^2 \varphi^{\alpha_m} dx.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx = \int_{\Omega} z_t^2(t, x) dx \leq \int_{\Omega} (f^2 + C_1(C_1 + 1)g^2 \varphi^{\alpha_m}) dx,$$

и лемма 3 доказана.

Из результатов работы [13] следует, что для всех $k = \omega + i\mu$, $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$ существует функция

$$v(x, k) = \int_0^\infty e^{ikt} u(t, x) dt.$$

Функция $v(x, k)$ принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, аналитична по $k \in \{\operatorname{Im} k > 0\}$ в норме $W_2^1(\Omega')$, где $\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область, и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} ((\nabla v, \nabla \psi) - k^2 v \psi) dx = \int_{\Omega} (g - ikf) \psi dx \quad (1.12)$$

при произвольной $\psi(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, т.е. является обобщенным решением задачи (0.15), (0.16) с $h(x) = ikf(x) - g(x)$. Полагая в (1.12) $\psi = \bar{v}$, получаем равенство

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + (\mu^2 - \omega^2 - 2i\omega\mu)|v|^2) dx = \int_{\Omega} (g - ikf) \bar{v} dx,$$

из которого при $f = g = 0$ следует единственность обобщенного решения. Так как $\Gamma \in C^2$, то $v(x, k) \in W_2^2(\Omega')$, где $\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область (см., например, [21]), и является решением почти всюду задачи (0.15), (0.16). Кроме того, функция $v(x, k)$ аналитична по k в норме $W_2^2(\Omega')$.

ЛЕММА 4. Пусть область Ω удовлетворяет условию (0.10). Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega} |v|^2 dx \leq \frac{1}{\mu^2} \int_{\Omega} (f^2 + C_1(C_1 + 1)g^2 \varphi^{\alpha_m}) dx. \quad (1.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.8) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \mu t} u(t, x) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} e^{-\mu t} |u(t, x)| dt \right)^2 dx \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} u^2(t, x) dx \\ &\leq \frac{1}{\mu^2} \int_{\Omega} (f^2 + C_1(C_1 + 1)g^2 \varphi^{\alpha_m}) dx. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нам потребуется также оценка решения задачи (0.15), (0.16) с комплекснозначной правой частью $h(x) = h_1(x) + ih_2(x)$:

$$\int_{\Omega} |v|^2 dx \leq \frac{C_1(C_1 + 1)}{\mu^2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\alpha_m} dx. \quad (1.14)$$

Оценка (1.14) следует из неравенства (1.13) с $f_j(x) = 0$, $g_j(x) = -h_j(x)$, $j = 1, 2$.

§ 2. Оценки решений уравнения Гельмгольца при больших значениях спектрального параметра

Пусть $w(x, k) = v(x, k)e^{-i\omega\sqrt{\varphi(x)}}$, $k = \omega + i\mu$, $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$, где $v(x, k)$ – решение задачи (0.15), (0.16). Функция $w(x, k)$ является решением краевой задачи

$$\Delta w + \frac{i\omega}{\sqrt{\varphi}} \left((\nabla w, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) w \right) + \left(\omega^2 \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2 \right) w = he^{-i\omega\sqrt{\varphi}}, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$w|_{\Gamma} = 0. \quad (2.2)$$

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha_m - \frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$. Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ функция $w(x, k)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varphi^{-\gamma} (\nu, \nabla \varphi) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds \\ & + \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - (1 - 2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right. \\ & - \gamma \frac{|\nabla w, \nabla \varphi|^2}{\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} |\nabla w|^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right. \\ & + \frac{\gamma}{\varphi} \left(\frac{(\Delta \varphi)^2}{4} + 2(\gamma + 1) \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 - \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right. \\ & - \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \left. \right) + \omega^2 \left((1 - 2\gamma) \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \left. \right) - 2\omega^2 \mu \sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \\ & - \mu^2 (1 - 2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu^3 \sqrt{\varphi} \left. \right) |w|^2 \\ & + (1 - 2\gamma) \frac{\mu}{\sqrt{\varphi}} \operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla \varphi)) \Big) dx = - \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2.3) установлено в [13, лемма 6].

ЛЕММА 6. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha_1 < 1$ и $\alpha_m - \frac{1}{2} < \gamma < 1$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_{\varphi}$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla w|^2 + \frac{|w|^2}{\varphi^{\alpha_m}} \right) \frac{dx}{\varphi^{\gamma}} \leq C_6 (\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\beta} dx, \quad \beta = \max\{\alpha_m + \gamma; 1 - \gamma\}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - (1 - 2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 - \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} \\ & \geq \sum_{j=1}^n (1 - 2\gamma)(2\alpha_j - 1) |w_{x_j}|^2 \geq C_7 |\nabla w|^2, \quad x \in \Omega, \quad C_7 > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) + \frac{\gamma}{\varphi} \left(\frac{(\Delta \varphi)^2}{4} + 2(\gamma + 1) \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) - \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right| \\ & = \frac{1}{\varphi} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 - \frac{1}{\varphi} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2 \right) \right. \\ & \quad + \frac{4}{\varphi^2} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2 \right)^2 + \gamma \left(\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^2 + 2(\gamma + 1) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{\varphi^2} \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j (1 - \alpha_j)^2 x_j^2 \sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j=1}^m \alpha_j (1 - \alpha_j) x_j^2 \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j^2 - \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 (1 - \alpha_j) x_j^2 \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j^2 \right) \right. \\ & \quad \left. - (2\gamma + 3) \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2} \right| \leq \frac{C_8(n)}{\varphi}, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя неравенство (0.10), имеем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 - 2\gamma \right) \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right| \\ & = \frac{1}{\varphi^2} \left| (1 - 2\gamma) \sum_{j=1}^m \alpha_j (1 - \alpha_j) x_j^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2 \right. \\ & \quad \left. - 2 \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j^3 x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2 \right)^2 \right) \right| \\ & = \frac{1}{\varphi^2} \left| (1 - 2\gamma) \sum_{j=1}^m \alpha_j (1 - \alpha_j) x_j^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2 \right. \\ & \quad \left. - 2 \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j^2 \sum_{j=1}^m \alpha_j^3 x_j^2 + \sum_{j=1}^m \alpha_j (1 + \alpha_j^2) x_j^2 \sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 x_j^2 \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 x_j^2 \sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right) \right| \leq \frac{C_1 C_9(n)}{\varphi^{1-\alpha_m}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ЛЕММА 7. Пусть $\delta > 0$. Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ справедлива оценка

$$\omega^2 \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{1/2+\delta}} \leq 2 \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{1/2+\delta}} + \frac{|\omega|}{\delta} \int_{\Omega} \frac{|h| |w| dx}{\varphi^{\delta}} \right). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Так как $w = ve^{-i\omega\sqrt{\varphi}}$, то

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla w|^2}{\varphi^{1/2+\delta}} &= \frac{1}{\varphi^{1/2+\delta}} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) + \frac{i\omega}{2\varphi^{1+\delta}} ((\nabla v, \nabla \varphi) \bar{v} - (\nabla \bar{v}, \nabla \varphi) v) \\ &= \frac{1}{\varphi^{1/2+\delta}} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{i\omega}{2\delta\varphi^\delta} (v \nabla \bar{v} - \bar{v} \nabla v) \right) \\ &\quad + \frac{i\omega}{2\delta\varphi^\delta} (\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из уравнения (0.15) следует, что

$$\bar{v} \Delta v + (\omega^2 - \mu^2 + 2i\omega\mu) |v|^2 = h\bar{v}, \quad (2.10)$$

$$v \Delta \bar{v} + (\omega^2 - \mu^2 - 2i\omega\mu) |v|^2 = \bar{h}v. \quad (2.11)$$

Вычитая равенство (2.11) из (2.10), получаем соотношение

$$\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v} = -4i\omega\mu |v|^2 + 2i \operatorname{Im}(h\bar{v}). \quad (2.12)$$

Из (2.9) и (2.12) вытекает

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla w|^2}{\varphi^{1/2+\delta}} &= \operatorname{div} \left(\frac{i\omega}{2\delta\varphi^\delta} (v \nabla \bar{v} - \bar{v} \nabla v) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varphi^{1/2+\delta}} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + \frac{2\mu\sqrt{\varphi}}{\delta} \right) |v|^2 \right) \\ &\quad - \frac{\omega \operatorname{Im}(h\bar{v})}{\delta\varphi^\delta}, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Проинтегрируем равенство (2.13) по Ω с учетом принадлежности функций $v(x, k)$ и $w(x, k)$ пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ при $\mu > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2}{\varphi^{1/2+\delta}} dx &= \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + \frac{2\mu\sqrt{\varphi}}{\delta} \right) |v|^2 \right) \frac{dx}{\varphi^{1/2+\delta}} \\ &\quad - \frac{\omega}{\delta} \int_{\Omega} \frac{\operatorname{Im}(h\bar{v})}{\varphi^\delta} dx, \end{aligned}$$

откуда с учетом равенства $|w| = |v|$ и положительности δ и μ выводим требуемую оценку (2.8). Лемма 7 доказана.

Из (0.9), (2.3) и (2.5) следует

$$\begin{aligned} C_7 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2}{\varphi^\gamma} dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varphi^{-\gamma} (\nu, \nabla \varphi) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - (1 - 2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right. \\ &\quad \left. - \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} |\nabla w|^2 + 2\mu^3 \sqrt{\varphi} |w|^2 \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \left(\frac{\gamma}{\varphi} \left((\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right)) \right) + \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\Delta\varphi)^2}{4} - 2(\gamma+1) \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2}\Delta \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \\
& + \omega^2 \left(\frac{1}{2} \left(\nabla\varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) - (1-2\gamma) \left(1 - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \\
& + 2\omega^2 \mu \sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) + \mu^2 (1-2\gamma) \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |w|^2 dx \\
& + (2\gamma-1)\mu \int_{\Omega} \varphi^{-1/2-\gamma} \operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla\varphi)) dx \\
& - \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla\overline{w}, \nabla\varphi) + \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) dx.
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенств (2.6), (2.7) имеем оценку

$$\begin{aligned}
C_7 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} & \leq C_8 \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma}} + C_1 C_9 \omega^2 \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma-\alpha_m}} \\
& + 2\omega^2 \mu \int_{\Omega} \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j (1-\alpha_j) x_j^2}{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2 \right)^{\gamma}} |w|^2 dx + \mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 dx \\
& + \mu \int_{\Omega} \varphi^{-1/2-\gamma} |\nabla\varphi| |\nabla w| |w| dx + \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} |\nabla\varphi| |\nabla w| |h| dx \\
& + n \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} |w| |h| dx + 2\mu \int_{\Omega} \varphi^{1/2-\gamma} |w| |h| dx. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Из неравенства (1.4) с $y(x) = w(x, k)$ и $\delta = 1 + \gamma - \alpha_m$ выводим

$$\int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma}} \leq C_1 (C_1 + 1) \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma-\alpha_m}}. \tag{2.15}$$

Используя неравенства (2.8) с $\delta = \frac{1}{2} + \gamma - \alpha_m$ и (1.4) с $\delta = \gamma$, получаем

$$\begin{aligned}
\omega^2 \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma-\alpha_m}} & \leq 2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma-\alpha_m}} + \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{\alpha_m+\gamma}} \\
& + \frac{\omega^2}{(1/2 + \gamma - \alpha_m)^2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{3\alpha_m-\gamma-1} dx \\
& \leq 2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma-\alpha_m}} + C_1 (C_1 + 1) \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \\
& + \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{3\alpha_m-\gamma-1} dx \leq (C_1 (C_1 + 1) + 2) \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \\
& + \frac{\omega^2}{(1/2 + \gamma - \alpha_m)^2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{3\alpha_m-\gamma-1} dx. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Умножим уравнение (0.15) на $\bar{v}$, проинтегрируем полученное выражение по Ω с учетом граничного условия (0.16) и принадлежности функции v пространству $\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(\Omega)$ и возьмем мнимую часть полученного выражения. В результате имеем равенство

$$2\omega\mu \int_{\Omega} |v|^2 dx = \int_{\Omega} h \bar{v} dx, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0. \tag{2.17}$$

Учитывая неравенство (1.4) с $\delta = \gamma$, из (2.17) выводим

$$\begin{aligned}
 2\omega^2 \mu \int_{\Omega} |v|^2 dx &\leq |\omega| \int_{\Omega} |h| |v| dx \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{\gamma+\alpha_m}} + \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\gamma+\alpha_m} dx \\
 &\leq \frac{C_1(C_1+1)}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} + \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\gamma+\alpha_m} dx.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Объединяя неравенства (1.14), (2.14)–(2.18), получаем соотношение

$$\begin{aligned}
 C_7 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} &\leq C_1(C_1+1)C_8 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{1+\gamma-\alpha_m}} \\
 &+ C_1(C_1(C_1+1)+2)C_9 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \\
 &+ \frac{C_1C_9\omega^2}{(1/2+\gamma-\alpha_m)^2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{3\alpha_m-\gamma-1} dx \\
 &+ \frac{C_1(C_1+1)}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} + \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\gamma+\alpha_m} dx \\
 &+ C_1(C_1+1) \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\alpha_m} dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \\
 &+ \frac{\mu^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \\
 &+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{1-\gamma} dx + \frac{C_1(C_1+1)}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \\
 &+ \frac{n^2}{2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\alpha_m-\gamma} dx + \mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{1-2\gamma} dx.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 &(C_7 - C_1((C_1+1)(C_1C_9+C_8+1)+2C_1C_9) - \varepsilon) \\
 &\times \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \leq \mu^2 \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) \int_{\Omega} |w|^2 dx \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\frac{C_1C_9\omega^2}{(1/2+\gamma-\alpha_m)^2} \varphi^{3\alpha_m-\gamma-1} + \frac{\omega^2}{2} \varphi^{\gamma+\alpha_m} \right. \\
 &\left. + C_1(C_1+1)\varphi^{\alpha_m} + \frac{\varphi^{1-\gamma}}{2\varepsilon} + \frac{n^2\varphi^{\alpha_m-\gamma}}{2} + \varphi^{1-2\gamma} \right) |h|^2 dx,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Из неравенств (1.14) и (2.20) при

$$C_1((C_1+1)(C_1C_9+C_8+1)+2C_1C_9) = C_{10} < C_7$$

и $\varepsilon = \frac{1}{2}(C_7 - C_{10})$ следует оценка

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \leq C_{11}(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\beta} dx, \tag{2.21}$$

где $\beta = \max\{\alpha_m + \gamma; 1 - \gamma\}$. Используя неравенства (2.21) и (1.4) с $y(x) = w(x, k)$, $\delta = \gamma$, выводим оценку

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla w|^2 + \frac{|w|^2}{\varphi^{\alpha_m}} \right) \frac{dx}{\varphi^{\gamma}} \leq C_6(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\beta} dx.$$

Лемма 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В силу равенства

$$|\nabla w|^2 = \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2$$

и оценки $\alpha_1 r^2 \leq \varphi(x) \leq r^2$, $x \in \Omega$, из (2.4) следует требуемое неравенство (0.18). Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегральные равенства для $v(x, k)$ с экспоненциальным множителем, характеризующим геометрию поверхности Γ , использовались при получении оценок решения первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости в работах [7], [16], [22], [23].

§ 3. Оценки сверху плотности энергии решений волнового уравнения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $u(t, x)$ – решение задачи (0.1)–(0.3) с $u(0, x) = 0$, $u_t(0, x) = g(x)$. Для произвольных $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{(\nabla u(t, x), \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t(t, x) \right) e^{ikt} dt \\ &= \frac{(\nabla v(x, k), \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v(x, k), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из уравнения (0.15) с правой частью $h(x) = -g(x)$ следует равенство

$$v(x, k) = -\frac{g(x)}{k^2} - \frac{\Delta v(x, k)}{k^2}, \quad x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Учитывая (3.1) и (3.2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v &= \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v + \mu \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \\ &= -\frac{1}{k^2} \left(\frac{(\nabla g, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} g + \frac{(\nabla \Delta v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} \right. \\ &\quad \left. - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} \Delta v + \mu \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} \Delta v \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из соотношений (0.18), (3.3) и (1.13) при $\Delta u(0, x) = 0$, $\Delta u_t(0, x) = -\Delta g(x)$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \\ & \leq \frac{C_{12}}{\omega^4} \int_{\Omega} (\omega^2 g^2 + |\nabla g|^2 + (C_4(\omega^2 + 1)r^{\beta} \\ & \quad + C_1(C_1 + 1)r^{2\alpha_m})(\Delta g)^2) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C_{13}}{\omega^2 + 1} \int_{\Omega} (g^2 + |\nabla g|^2 + (\Delta g)^2) r^{\beta} dx \\
&= \frac{C_{13}}{\omega^2 + 1} \mathcal{E}_{\beta}(g), \quad |\omega| \geq M > 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Аналогично, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{ikt} \nabla_{\tau} u(t, x) dx = \nabla_{\tau} v(x, k) = -\frac{1}{k^2} (\nabla_{\tau} g(x) + \nabla_{\tau} \Delta v(x, k))$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |\nabla_{\tau} u(t, x)|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} &\leq \frac{2}{\omega^4} \left(\int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx + C_4(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} (\Delta g)^2 r^{\beta} dx \right) \\
&\leq \frac{C_{14}}{\omega^2 + 1} \int_{\Omega} (|\nabla g|^2 + (\Delta g)^2) r^{\beta} dx \\
&\leq \frac{C_{14}}{\omega^2 + 1} \mathcal{E}_{\beta}(g), \quad |\omega| \geq M > 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Далее, из (3.2) и (0.18) следует, что

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |v|^2 \frac{dx}{r^{2\alpha_m + \gamma}} &\leq \frac{2}{\omega^4} \left(\int_{\Omega} \frac{|g|^2 dx}{r^{2\alpha_m + \gamma}} + C_4(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} (\Delta g)^2 r^{\beta} dx \right) \\
&\leq \frac{C_{15}}{\omega^2 + 1} \int_{\Omega} (g^2 + (\Delta g)^2) r^{\beta} dx \leq \frac{C_{15}}{\omega^2 + 1} \mathcal{E}_{\beta}(g), \quad |\omega| \geq M > 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Объединяя оценки (3.4)–(3.6), получаем неравенство

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \\
&\leq \frac{C_{16}}{\omega^2 + 1} \mathcal{E}_{\beta}(g), \quad |\omega| \geq M > 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Кроме того, из (0.18) и (1.13) следует

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \\
&= \int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v + \mu \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \\
&\leq 2 \left(\int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} + \mu^2 \int_{\Omega} |v|^2 dx \right) \\
&\leq 2C_4(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} g^2 r^{\beta} dx + C_1(C_1 + 1) \int_{\Omega} g^2 r^{2\alpha_m} dx \\
&\leq C_{17} \int_{\Omega} g^2 r^{\beta} dx \leq C_{17} \mathcal{E}_{\beta}(g), \quad |\omega| \leq M.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Из неравенств (3.7) и (3.8) выводим оценку

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \leq \frac{C_{18}}{\omega^2 + 1} \mathcal{E}_{\beta}(g), \\
&\quad -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Воспользуемся теоремой Планшереля и неравенством (3.9). Имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-\mu t} dt \int_\Omega \left(\left(\frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t \right)^2 + |\nabla_\tau u|^2 + \frac{u^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} \\
&= \int_\Omega \frac{dx}{r^\gamma} \int_0^\infty e^{-2\mu t} \left(\left(\frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t \right)^2 + |\nabla_\tau u|^2 + \frac{u^2}{r^{2\alpha_m}} \right) dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_\Omega \frac{dx}{r^\gamma} \int_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_\tau v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) dk \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} dk \int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_\tau v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} \\
&\leq \frac{C_{18}}{4\pi^2} \mathcal{E}_\beta(g) \int_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} \frac{dk}{\omega^2 + 1} = C_{19} \mathcal{E}_\beta(g). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь решение задачи (0.1)–(0.3) с $u(0, x) = f(x)$, $u_t(0, x) = 0$. Для произвольных $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{ikt} \left(\frac{(\nabla u(t, x), \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t(t, x) \right) dt \\
&= \frac{(\nabla v(x, k), \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v(x, k) - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f(x). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Из уравнения (0.15) с $h(x) = ikf(x)$ следует

$$v(x, k) = \frac{if(x)}{k} - \frac{i\Delta f(x)}{k^3} + \frac{\Delta^2 v(x, k)}{k^4}. \tag{3.12}$$

Используя равенства (3.11) и (3.12), получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f = \frac{1}{k} \left(i \frac{(\nabla f, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - \frac{|\nabla \varphi|}{k2\sqrt{\varphi}} \Delta f - \frac{i(\nabla \Delta f, \nabla \varphi)}{k^2 |\nabla \varphi|} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{k^3} \left(\frac{(\nabla \Delta^2 v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} \Delta^2 v + \mu \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} \Delta^2 v \right) \right). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Из (0.18), (3.13) и (1.13) при $\Delta^2 u(0, x) = \Delta^2 f(x)$, $\Delta^2 u_t(0, x) = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f \right|^2 \frac{dx}{r^\gamma} \\
&\leq \frac{C_{20}}{\omega^2} \int_\Omega \left(|\nabla f|^2 + \frac{(\Delta f)^2}{\omega^2} + \frac{|\nabla \Delta f|^2}{\omega^4} \right. \\
&\quad \left. + \left(C_4 \frac{\omega^2 + 1}{\omega^6} r^\beta + C_1(C_1 + 1)r^{2\alpha_m} \right) (\Delta^2 f)^2 \right) dx \\
&\leq \frac{C_{21}}{\omega^2 + 1} \int_\Omega (|\nabla f|^2 + (\Delta f)^2 + |\nabla \Delta f|^2 + (\Delta f)^2) r^{2\alpha_m} dx \\
&\leq \frac{C_{22}}{\omega^2 + 1} (\mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f)), \quad |\omega| \geq M > 0. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Аналогично, получаем

$$\int_0^\infty e^{ikt} \nabla_\tau u(t, x) dt = \nabla_\tau v(x, k) = \frac{i \nabla_\tau f(x)}{k} - \frac{i \nabla_\tau \Delta f(x)}{k^3} + \frac{\nabla_\tau \Delta^2 v(x, k)}{k^4}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla_\tau v|^2 \frac{dx}{r^\gamma} &\leq \frac{C_{23}}{\omega^2} \int_\Omega \left(|\nabla_\tau f|^2 + \frac{|\nabla_\tau \Delta f|^2}{\omega^4} + C_4 \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4} (\Delta^2 f)^2 r^\beta \right) dx \\ &\leq \frac{C_{24}}{\omega^2 + 1} \int_\Omega (|\nabla f|^2 + |\nabla \Delta f|^2 + (\Delta^2 f)^2) r^\beta dx \\ &\leq \frac{C_{25}}{\omega^2 + 1} (\mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f)), \quad |\omega| \geq M > 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Далее, из (3.12) и (0.18) следует, что

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|v|^2 dx}{r^{2\alpha_m + \gamma}} &\leq \frac{C_{26}}{\omega^2} \int_\Omega \left(f^2 + \frac{(\Delta f)^2}{\omega^4} + C_4 \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4} (\Delta^2 f)^2 r^\beta \right) dx \\ &\leq \frac{C_{27}}{\omega^2 + 1} \int_\Omega (f^2 + (\Delta f)^2 + (\Delta^2 f)^2) r^\beta dx \\ &\leq \frac{C_{27}}{\omega^2 + 1} (\mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f)), \quad |\omega| \geq M > 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Объединяя оценки (3.14)–(3.16), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f \right|^2 + |\nabla_\tau v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} \\ \leq \frac{C_{28}}{\omega^2 + 1} (\mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f)), \quad |\omega| \geq M > 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Кроме того, из (0.18) и (1.13) следует, что

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f \right|^2 + |\nabla_\tau v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} \\ = \int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f + \mu \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 \right. \\ \left. + |\nabla_\tau v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} \\ \leq 3 \left(\int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + |\nabla_\tau v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} + \mu^2 \int_\Omega |v|^2 dx + \int_\Omega f^2 dx \right) \\ \leq 3 \left(C_4 (\omega^2 + 1) |k|^2 \int_\Omega f^2 r^\beta dx + 2 \int_\Omega f^2 dx \right) \\ \leq C_{29} \int_\Omega f^2 r^\beta dx, \quad |\omega| \leq M. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из неравенств (3.17) и (3.18) выводим оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - ik \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \\ & \leq \frac{C_{30}}{\omega^2 + 1} (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f)), \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Воспользуемся теоремой Планшереля и неравенством (3.19). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} \left(\left(\frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t \right)^2 + |\nabla_{\tau} u|^2 + \frac{u^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \\ & = \int_{\Omega} \frac{dx}{r^{\gamma}} \int_0^{\infty} e^{-2\mu t} \left(\left(\frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t \right)^2 + |\nabla_{\tau} u|^2 + \frac{u^2}{r^{2\alpha_m}} \right) dt \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \frac{dx}{r^{\gamma}} \int_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) dk \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} dk \int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} f \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \\ & \leq \frac{C_{30}}{4\pi^2} (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f)) \int_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} \frac{dk}{\omega^2 + 1} \\ & = C_{31} (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из неравенств (3.10) и (3.20) следует оценка (0.11). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из (0.11) следуют неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} |\nabla u(t, x)|^2 dx \leq C_{32} (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g)) \\ & \quad - 2 \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} \frac{(\nabla u(t, x), \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} u_t(t, x) \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} dx \\ & \leq C_{32} (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g)) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} |\nabla u(t, x)|^2 dx + 2 \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} u_t^2(t, x) dx. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} |\nabla u(t, x)|^2 dx \leq 2C_{32} (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g)) \\ & \quad + 4 \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} u_t^2(t, x) dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Так как $u_t(0, x) = g(x)$, $u_{tt}(0, x) = \Delta f(x)$, то из (0.11) следует оценка

$$\int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} u_t^2(t, x) dx \leq C_{32} (\mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta g)). \quad (3.22)$$

Объединяя (3.21) и (3.22), получаем (0.14). Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. *Morawetz C. S.* The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation // *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. V. 14. №3. P. 561–568.
2. *Morawetz C. S.* The limiting amplitude principle // *Comm. Pure Appl. Math.* 1962. V. 15. №3. P. 349–361.
3. *Lax P. D., Morawetz C. S., Phillips R. S.* Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle // *Comm. Pure Appl. Math.* 1963. V. 16. №4. P. 477–486.
4. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
5. *Михайлов В. П.* О корнях функций Макдональда // *Труды МИАН.* 1968. Т. 103. С. 162–171.
6. *Иерий В. Я.* Экспоненциальное убывание решений волнового уравнения во внешности почти звездной области // *Докл. АН СССР.* 1969. Т. 189. №5. С. 938–940.
7. *Morawetz C. S.* Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation // *Comm. Pure Appl. Math.* 1975. V. 28. №2. P. 229–264.
8. *Morawetz C. S., Ralston J. V., Strauss W. A.* Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles // *Comm. Pure Appl. Math.* 1977. V. 30. №4. P. 447–508.
9. *Муравей Л. А.* Об асимптотическом поведении при больших значениях времени решений внешних краевых задач для волнового уравнения с двумя пространственными переменными // *Матем. сб.* 1978. Т. 107 (149). №1 (9). С. 84–133.
10. *Zachmanoglou E. C.* The decay of solutions of the initial boundary-value problem for the wave equation in unbounded regions // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1963. V. 14. №4. P. 312–325.
11. *Муравей Л. А.* Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца в неограниченной области со звездной границей // *Труды МИАН.* 1988. Т. 185. С. 171–180.
12. *Zachmanoglou E. C.* An example of slow decay of the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded regions // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1964. V. 70. №4. P. 633–636.
13. *Филиновский А. В.* Стабилизация решений волнового уравнения в неограниченных областях // *Матем. сб.* 1996. Т. 187. №6. С. 131–160.
14. *Буслаев В. С.* Коротковолновая асимптотика в задаче дифракции на гладких выпуклых контурах // *Труды МИАН.* 1964. Т. 73. С. 14–117.
15. *Муравей Л. А.* Аналитическое продолжение по параметру функций Грина внешних краевых задач для двумерного уравнения Гельмгольца. III // *Матем. сб.* 1978. Т. 105 (147). №1. С. 63–108.
16. *Morawetz C. S., Ludwig D.* An inequality for the reduced wave operator and the justification of geometrical optics // *Comm. Pure Appl. Math.* 1968. V. 21. №2. P. 187–203.
17. *Бабич В. М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // *Матем. сб.* 1964. Т. 65. №4. С. 576–630.
18. *Михайлов В. П.* О принципе предельной амплитуды // *Докл. АН СССР.* 1964. Т. 159. №4. С. 750–752.
19. *Бабич В. М., Григорьева Н. С.* Об аналитическом продолжении резольвенты внешних трехмерных задач для оператора Лапласа на второй лист // *Функц. анализ и его прилож.* 1974. Т. 8. №1. С. 71–72.
20. *Вайнберг Б. Р.* Асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решений внешних смешанных задач для гиперболических уравнений и квазиклассика // *Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления.* Т. 34. М.: ВИНТИ, 1987. С. 57–92.
21. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
22. *Винник А. А.* Об условиях излучения для областей с бесконечными границами // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1977. №7(182). С. 37–45.
23. *Винник А. А., Эйдус Д. М.* Принцип предельной амплитуды для областей типа параболоида // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1979. №3(202). С. 28–37.