Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Головчанский, Асимптотика спектральной функции оператора Лапласа–Бельтрами для кокомпактных дискретных подгрупп $SL_2(\mathbb{R})$, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 7, 23–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:35:58

УДК 517

В. В. Головчанский

**Асимптотика спектральной функции
оператора Лапласа–Бельтрами
для кокомпактных дискретных подгрупп $SL_2(\mathbb{R})$**

Получена равномерная по z и z' асимптотика спектральной функции $\theta(z, z', \lambda)$ оператора Лапласа–Бельтрами для кокомпактных дискретных подгрупп $SL_2(\mathbb{R})$ с корневым понижением в остаточном члене.

Библиография: 9 названий.

Введение и формулировка основных результатов

Введем требуемые обозначения и для удобства читателей напомним необходимые в дальнейшем факты теории. Пусть $H = \{z = x + iy, y > 0\}$ – верхняя полуплоскость с заданной на ней дифференциальной формой $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Полуплоскость H с индуцированной на ней метрикой $\rho(z, z') = \operatorname{arcsch}(|z - z'|^2/(2yy')) + 1$ называется моделью Пуанкаре гиперболического пространства H^2 . В этом пространстве группой всех движений, сохраняющих ориентацию, являются дробно-линейные преобразования $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$, где $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$. Хорошо известно, что для всякой дискретной подгруппы $SL_2(\mathbb{R})$ (дискретность в смысле топологии $\mathbb{R}^4$) существует фундаментальная область: связное множество, граница которого имеет нулевую площадь и образы которого под действием элементов этой дискретной подгруппы замаскируют всю полуплоскость H без наложений. Более того, теорема Зигеля утверждает, что если объем фундаментальной области конечен, то в качестве фундаментальной области можно взять выпуклый многоугольник с конечным четным числом сторон, половина которых принадлежит области, а другая половина не принадлежит. Далее, группа называется кокомпактной, если замыкание ее фундаментальной области компактно. Пусть Γ – кокомпактная дискретная подгруппа $SL_2(\mathbb{R})$, а $\mathcal{F}$ – ее фундаментальная область в виде выпуклого многоугольника с конечным числом сторон и χ – одномерное представление подгруппы Γ . Рассмотрим $L_2(\mathcal{F}, \chi, dxdy/y^2)$ – гильбертово пространство Γ -автоморфных форм с представлением χ , которые квадратично интегрируемы на фундаментальной области по инвариантной мере $dxdy/y^2$, т. е.

$$f(\gamma z) = \chi(\gamma)f(z) \quad \text{и} \quad \int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2} < \infty.$$

И, наконец, пусть

$$L = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

— оператор Лапласа–Бельтрами в метрике Пуанкаре, заданный на множестве квадратично интегрируемых бесконечно гладких Γ -автоморфных форм с представлением χ . Это множество плотно в $L_2(\mathcal{F}, \chi, dxdy/y^2)$ и замыкание оператора L определяет неотрицательный самосопряженный в $L_2(\mathcal{F}, \chi, dxdy/y^2)$ оператор. Дискретный спектр этого оператора $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ конечной кратности и не имеет точек сгущения кроме бесконечности, а система ортонормированных собственных функций $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^\infty$ образует базис пространства $L_2(\mathcal{F}, \chi, dxdy/y^2)$. Более подробно о спектре оператора Лапласа и геометрии дискретных групп смотрите в [1] и [2] соответственно.

Для кокомпактных дискретных подгрупп $SL_2(\mathbb{R})$ асимптотика функции распределения $N_\Gamma(\lambda, \chi) = \#\{\lambda_j \mid \lambda_j \leq \lambda\}$ с тривиальным представлением $\chi = 1$ получена в [3]. Это асимптотика вейлевского типа, а именно, $N_\Gamma(\lambda, 1) = (\text{Vol}(\mathcal{F})/4\pi)\lambda + O_\Gamma(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$. Для произвольного представления χ асимптотика $N_\Gamma(\lambda, \chi)$ получена в работе [1] и отличается от приведенной выше отсутствием логарифмического понижения в остаточном члене. Асимптотика спектральной функции

$$\theta(z, z', \lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')}$$

задачи Дирихле для оператора Лапласа–Бельтрами на компактной римановой поверхности с бесконечно гладкой границей, на которой выполняется условие положительности геодезической кривизны, получена в работе [4]. Однако, насколько нам известно, не выписана до настоящего времени асимптотика функции $\theta(z, z', \lambda)$ оператора Лапласа–Бельтрами для замкнутых компактных римановых поверхностей. Данная работа восполняет этот пробел. Кроме того, в последнее время проявляется большой интерес к автоморфному лапласиану в квантовой механике. Дело в том, что автоморфный лапласиан можно интерпретировать как стационарный оператор Шрёдингера на замкнутой римановой поверхности (если группа Γ кокомпактна, то эта поверхность компактна). Теоретические исследования и вычисления на компьютере подтверждают гипотезу, что автоморфный лапласиан является моделью квантового хаоса в физике. Основная проблема в этой области состоит в изучении собственных функций дискретного спектра при $\lambda_j \rightarrow \infty$. Хорошим введением в эту область служит работа [5].

Сформулируем полученные результаты. Будем считать, что точки z и z' принадлежат фундаментальной области, что не умаляет общности. Определим элемент $\gamma^* \in \Gamma$ следующим образом:

$$\gamma^* - \text{это элемент, на котором достигается } \min_{\gamma \in \Gamma} \rho(z, \gamma z'). \quad (0.1)$$

Через $J_1(z)$ обозначим функцию Бесселя 1-го рода. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ — чисто гиперболическая подгруппа. Тогда

1) если $\rho(z, \gamma^* z') < \lambda^{-1/6}$, то

$$\theta(z, z', \lambda) = \chi(\gamma^*) \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \frac{J_1(\lambda^{1/2} \rho(z, \gamma^* z'))}{\rho(z, \gamma^* z')} + O(\lambda^{1/2}),$$

2) если $\rho(z, \gamma^* z') \geq \lambda^{-1/6}$, то

$$\theta(z, z', \lambda) = O(\lambda^{1/2}).$$

Главный член, когда $z = z'$, понимается как предел и равен $\lambda/4\pi$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – чисто гиперболическая подгруппа. Тогда

$$\theta(z, z, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + O(\lambda^{1/2}).$$

Пусть подгруппа Γ содержит эллиптические элементы и $z_1, \dots, z_l$ обозначают вершины многоугольника $\mathcal{F}$, которые являются неподвижными точками эллиптических элементов подгруппы Γ , а $\Gamma_{z_1}, \dots, \Gamma_{z_l}$ – соответствующие им стационарные подгруппы. Вырежем в фундаментальной области связанные подмножества вида

$$V(z_i, r) = \{z : \rho(z_i, z) < r\} \cap \mathcal{F}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (0.2)$$

Тогда в этих обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть подгруппа Γ содержит эллиптические элементы. Тогда

- 1) если $z \in V(z_i, \lambda^{-1/6})$, $z' \in V(z_j, \lambda^{-1/6})$ и $z_i = \gamma_0 z_j$, $\gamma_0 \in \Gamma$, то

$$\theta(z, z', \lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma_{z_i}} \chi(\gamma \gamma_0) \frac{J_1(\lambda^{1/2} \rho(z, \gamma \gamma_0 z'))}{\rho(z, \gamma \gamma_0 z')} + O(\lambda^{1/2}),$$

- 2) в противном случае:

- а) если $\rho(z, \gamma^* z') < \lambda^{-1/6}$, то

$$\theta(z, z', \lambda) = \chi(\gamma^*) \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \frac{J_1(\lambda^{1/2} \rho(z, \gamma^* z'))}{\rho(z, \gamma^* z')} + O(\lambda^{1/2}),$$

- б) если $\rho(z, \gamma^* z') \geq \lambda^{-1/6}$, то

$$\theta(z, z', \lambda) = O(\lambda^{1/2}).$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть подгруппа Γ содержит эллиптические элементы. Тогда

- 1) если $z \in V(z_i, \lambda^{-1/6})$, то

$$\theta(z, z, \lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma_{z_i}} \chi(\gamma) \frac{J_1(\lambda^{1/2} \rho(z, \gamma z))}{\rho(z, \gamma z)} + O(\lambda^{1/2}),$$

- 2) в противном случае:

$$\theta(z, z, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + O(\lambda^{1/2}).$$

В вышеприведенных оценках и асимптотиках константа в остаточном члене не зависит от точек z и z' , а зависит только от подгруппы Γ .

В заключение следует заметить, что несколько неожиданным является тот факт, что главный член в асимптотике оказывается знакопеременным. Это становится вполне понятным, если области знакопостоянства собственной функции φ_j имеют размер порядка $\lambda_j^{-1/2}$ (функции φ_j можно выбрать вещественными).

§ 1. Основное тождество

Отправной точкой для получения асимптотики спектральной функции нам будет служить спектральное разложение автоморфного ядра, впервые полученное еще А. Сельбергом в [6].

Пусть Γ — кокомпактная дискретная подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Тогда справедливо спектральное разложение

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h(\varkappa_j) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(u(z, \gamma z')) \chi(\gamma). \quad (1.1)$$

Здесь h четная, регулярная в полосе $|\mathrm{Im} r| < 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, с убыванием на бесконечности порядка $|r|^{-2-\delta}$ с $\delta > 0$, $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$ — спектральный параметр, $u(z, z') = |z - z'|^2 / (yy')$ — инвариант пары точек, а ядро $k(u)$ есть преобразование Хариш-Чандры функции $h(r)$, определяемое следующим образом:

$$\begin{aligned} k(u) &= -\frac{1}{\pi} \int_u^{\infty} \frac{dQ(\omega)}{\sqrt{\omega - u}}, \\ Q(e^t + e^{-t} - 2) &= g(t), \\ g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-irt} h(r) dr. \end{aligned}$$

Если выбрать $h(r)$ близкой к 1 на интервале $[-T, T]$ и близкой к 0 вне этого интервала, то левая часть (1.1) будет близка к спектральной функции. Мы возьмем однопараметрическое семейство функций следующего вида

$$h_T(r, \alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-T}^T e^{-\alpha(r-\rho)^2} d\rho. \quad (1.2)$$

Ясно, что при $\alpha \rightarrow \infty$ функция $h_T(r, \alpha)$ сходится к ступенчатой функции, равной 1 на интервале $[-T, T]$ и 0 вне его. При таком выборе функции ядро $k(u, h)$, которое далее будем обозначать как $k_T(u, \alpha)$, имеет весьма простое аналитическое представление.

Имеем

$$\begin{aligned} g_T(t, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-irt} h_T(r, \alpha) dr = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-irt} e^{-\alpha(r-\rho)^2} dr d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-t^2/4\alpha - i\rho t} d\rho = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Tt}{t} e^{-t^2/4\alpha}. \end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание, что $Q(\omega) = g(\mathrm{arcsch}(\omega/2 + 1))$, получаем

$$\begin{aligned} k_T(u, \alpha) &= -\frac{1}{\pi} \int_u^{\infty} \frac{dQ(\omega)}{\sqrt{\omega - u}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\rho(u)}^{\infty} \frac{dg(t)}{\sqrt{2(\mathrm{ch} t - 1) - u}} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{\rho(u)}^{\infty} \frac{d\left(\frac{\sin Tt}{t} e^{-t^2/4\alpha}\right)}{\sqrt{2(\mathrm{ch} t - \mathrm{ch} \rho(u))}}, \end{aligned}$$

где $\rho(u) = \operatorname{arcsch}(u/2 + 1)$. Отметим, что $\rho(u(z, z'))$ есть гиперболическое расстояние между точками z и z' . В дальнейшем нам будет удобнее иметь дело с функцией $k_T(u(\rho), \alpha)$, которую мы по прежнему будем обозначать $k_T(\rho, \alpha)$. В следующем параграфе мы исследуем поведение $k_T(\rho, \alpha)$ при $T \rightarrow \infty$, $0 \leq \rho < \infty$ и $\alpha > 1$.

§ 2. Оценка ядра $k_T(\rho, \alpha)$

При проведении оценок, чтобы избежать излишней громоздкости, наряду с общепринятым обозначением $O(\cdot)$ будем использовать эквивалентное ему обозначение $\ll$. Все нижеследующие оценки равномерны по неотмеченным параметрам и это не будет каждый раз указываться особо.

Раскрывая дифференциал и переходя к пределам интегрирования от 0 до ∞ , получаем

$$k_T(\rho, \alpha) = -\frac{1}{\pi^2} \tilde{k}_T(\rho, \alpha) + \frac{1}{2\pi^2 \alpha} \tilde{\tilde{k}}_T(\rho, \alpha), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{k}_T(\rho, \alpha) &= \int_0^\infty \frac{\exp(-(t+\rho)^2/4\alpha)(T(t+\rho) \cos T(t+\rho) - \sin T(t+\rho))}{(t+\rho)^2 \sqrt{2(\operatorname{ch}(t+\rho) - \operatorname{ch} \rho)}} dt, \\ \tilde{\tilde{k}}_T(\rho, \alpha) &= \int_0^\infty \frac{\exp(-(t+\rho)^2/4\alpha) \sin T(t+\rho)}{\sqrt{2(\operatorname{ch}(t+\rho) - \operatorname{ch} \rho)}} dt. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.1. *Справедливо следующее:*

$$\tilde{\tilde{k}}_T(\rho, \alpha) \ll \frac{e^{-\rho^2/4\alpha}}{(\operatorname{ch} \rho)^{1/2}}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости подынтегральное выражение через $f_T(t, \rho, \alpha)$ и рассмотрим отдельно два случая.

1. Случай $\rho \geq 1$. Поскольку $\sqrt{2(\operatorname{ch}(t+\rho) - \operatorname{ch} \rho)} > (\operatorname{sh} t \operatorname{sh} \rho)^{1/2}$, то

$$\int_0^\infty f_T(t, \rho, \alpha) dt \ll \frac{e^{-\rho^2/4\alpha}}{(\operatorname{sh} \rho)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \ll \frac{e^{-\rho^2/4\alpha}}{(\operatorname{ch} \rho)^{1/2}}.$$

2. Случай $\rho < 1$. Разобьем интервал интегрирования на две части: $[0, \rho]$ и $[\rho, \infty)$.

$$\int_0^\rho f_T(t, \rho, \alpha) dt \ll \frac{1}{(\operatorname{sh} \rho)^{1/2}} \int_0^\rho \frac{dt}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \ll 1.$$

Оценка по модулю интеграла на $[\rho, \infty)$ дает нам величину порядка $\rho^{-1/2}$. Поэтому проведем одно интегрирование по частям, выделяя в $f_T(t, \rho, \alpha)$ ядро $\sin T(t+\rho)/t$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_\rho^\infty f_T(t, \rho, \alpha) dt &= f(\rho, \rho, \alpha) \int_{T\rho}^\infty \frac{\sin(x + T\rho)}{x} dx \\ &\quad + \int_\rho^\infty f'(t, \rho, \alpha) \int_{Tt}^\infty \frac{\sin(x + T\rho)}{x} dx dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку $0 < f(\rho, \rho, \alpha) < \operatorname{ch} \rho$, то первое слагаемое в правой части (2.3) есть величина порядка 1,

$$f'(t, \rho, \alpha) = \frac{1}{2} f(t, \rho, \alpha) \left(-\frac{t + \rho}{\alpha} - \frac{\operatorname{sh}(t + \rho)}{\operatorname{ch}(t + \rho) - \operatorname{ch} \rho} + \frac{2}{t} \right),$$

$f(t, \rho, \alpha)$ при $t < 1$ ограничена, а при $t \geq 1$ оценивается как $t/(\operatorname{ch} t)^{1/2}$. Вторым сомножителем ведет себя как t при $t \geq \rho^{1/3}$ и как $\operatorname{sh} \rho/t^2$ при $\rho \leq t \leq \rho^{1/3}$. Поэтому

$$f'(t, \rho, \alpha) \ll \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \rho}{t^2}, & \text{если } \rho \leq t \leq \rho^{1/3}, \\ \frac{t^2}{(\operatorname{ch} t)^{1/2}}, & \text{если } t \geq \rho^{1/3}, \end{cases}$$

откуда следует ограниченность и 2-го слагаемого в правой части (2.3). Теперь из полученных оценок следует утверждение леммы.

Функция $\tilde{k}_T(\rho, \alpha)$ уже не является, как легко видеть, ограниченной по параметру T . В случае $\rho \geq 1$ ее поведение аналогично поведению функции $\tilde{\tilde{k}}_T(\rho, \alpha)$, что дает нам оценку $T \exp(-\rho^2/4\alpha)/(\operatorname{ch} \rho)^{1/2}$. Однако, поскольку подынтегральная функция осциллирует и имеет особенность вида $t^{-1/2}$ в окрестности нуля, то, интегрируя по частям, получим оценку $C(\rho, \alpha)T^{1/2}$ с некоторой константой $C(\rho, \alpha)$.

ЛЕММА 2.2. *При $\rho \geq 1$ справедлива оценка*

$$\tilde{k}_T(\rho, \alpha) \ll T^{1/2} \frac{e^{-\rho^2/4\alpha}}{(\operatorname{ch} \rho)^{1/2}}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно

$$\tilde{k}_T(\rho, \alpha) = T \int_0^\infty \frac{\exp(-(t + \rho)^2/4\alpha) \cos T(t + \rho)}{(t + \rho) \sqrt{2(\operatorname{ch}(t + \rho) - \operatorname{ch} \rho)}} dt + O\left(\frac{\exp(-\rho^2/4\alpha)}{(\operatorname{ch} \rho)^{1/2}}\right).$$

Запишем подынтегральное выражение $f_T(t, \rho, \alpha)$ в виде произведения

$$f(t, \rho, \alpha) \cdot \cos T(t + \rho)/t^{1/2}.$$

Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, \rho, \alpha) = \frac{\exp(-\rho^2/4\alpha)}{\rho(2 \operatorname{sh} \rho)^{1/2}} < \infty,$$

то, интегрируя один раз по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_T(t, \rho, \alpha) dt &= \frac{f(0, \rho, \alpha)}{T^{1/2}} \int_0^\infty \frac{\cos(x + T\rho)}{x^{1/2}} dx \\ &\quad + \frac{1}{T^{1/2}} \int_0^\infty f'(t, \rho, \alpha) \int_{Tt}^\infty \frac{\cos(x + T\rho)}{x^{1/2}} dx dt. \end{aligned}$$

Остается оценить $f'(t, \rho, \alpha)$. Имеем

$$f'(t, \rho, \alpha) = f(t, \rho, \alpha) \left(-\frac{t+\rho}{2\alpha} - \frac{1}{t+\rho} + \frac{t \operatorname{sh}(t+\rho) - \operatorname{ch}(t+\rho) + \operatorname{ch} \rho}{2t(\operatorname{ch}(t+\rho) - \operatorname{ch} \rho)} \right).$$

Покажем, что третье слагаемое в круглых скобках ограничено. Действительно, простые вычисления показывают, что

$$0 < \frac{t \operatorname{sh}(t+\rho) - \operatorname{ch}(t+\rho) + \operatorname{ch} \rho}{t(\operatorname{ch}(t+\rho) - \operatorname{ch} \rho)} \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{cth} \rho & \text{при } t \rightarrow 0, \\ 1 & \text{при } t \rightarrow \infty, \end{cases}$$

а

$$\frac{d}{d\rho} \frac{t \operatorname{sh}(t+\rho) - \operatorname{ch}(t+\rho) + \operatorname{ch} \rho}{t(\operatorname{ch}(t+\rho) - \operatorname{ch} \rho)} = \frac{1 - \operatorname{ch} t}{(\operatorname{ch}(t+\rho) - \operatorname{ch} \rho)^2} < 0.$$

Таким образом, для $f'(t, \rho, \alpha)$ верна оценка $\exp(-\rho^2/4\alpha)/(\operatorname{ch} \rho \cdot \operatorname{ch} t)^{-1/2}$, что и завершает доказательство.

Существенно иначе ведет себя $\tilde{k}_T(\rho, \alpha)$ когда ρ не отделено от нуля.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\rho < 1$. Тогда

$$\tilde{k}_T(\rho, \alpha) = -\frac{\pi T}{2} \frac{J_1(T\rho)}{\rho} e^{-\rho^2/4\alpha} \left(\frac{\rho}{\operatorname{sh} \rho} \right)^{1/2} + O(1), \quad (2.5)$$

где $J_1(z)$ — функция Бесселя 1-го рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем подынтегральное выражение для $\tilde{k}_T(\rho, \alpha)$ в виде произведения

$$f(t, \rho, \alpha) \cdot \frac{T(t+\rho) \cos T(t+\rho) - \sin T(t+\rho)}{(t+\rho)^2 \sqrt{t^2 + 2\rho t}}.$$

Функция $f(t, \rho, \alpha)$ при $t = 0$ не определена, однако

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, \rho, \alpha) = e^{-\rho^2/4\alpha} (\rho / \operatorname{sh} \rho)^{1/2}.$$

Ниже мы покажем, что $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t, \rho, \alpha)$ и $\lim_{t \rightarrow 0} f''(t, \rho, \alpha)$ существуют и конечны. Поэтому, интегрируя три раза по частям, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{k}_T(\rho, \alpha) &= T^2 e^{-\rho^2/4\alpha} \left(\frac{\rho}{\operatorname{sh} \rho} \right)^{1/2} \int_{T\rho}^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2(x^2 - (T\rho)^2)^{1/2}} dx \\ &\quad + \int_0^{\infty} f'''(t, \rho, \alpha) \int_0^{Tt} \int_0^{\tau'} \int_{\tau+T\rho}^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2(x^2 - (T\rho)^2)^{1/2}} dx d\tau d\tau' dt. \end{aligned}$$

В [7, с. 393] находим, что

$$\int_A^{\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2(x^2 - A^2)^{1/2}} dx = \frac{\pi}{4} (2 \cdot {}_1F_2(1/2; 3/2, 1; -A^2/4) - {}_1F_2(1/2; 3/2, 2; -A^2/4)),$$

где ${}_1F_2(a; b, c; z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция. Непосредственно проверяется, что $2 \cdot {}_1F_2(1/2; 3/2, 1; -A^2/4) - {}_1F_2(1/2; 3/2, 2; -A^2/4) = 2J_1(A)/A$. Отсюда при $A = T\rho$ получаем главный член в (2.5). Тройной интеграл очевидным образом ограничен, а $f'''(t, \rho, \alpha)$ при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально убывает. Поэтому остается показать, что $f'''(t, \rho, \alpha)$ ограничена в окрестности $t = 0$ равномерно по $0 \leq \rho < 1$. Непосредственно дифференцируя, получаем

$$f'(t, \rho, \alpha) = -\frac{1}{2}f(t, \rho, \alpha) \left(\frac{t + \rho}{\alpha} + \frac{f'_1(t, \rho)}{f_1(t, \rho)} \right),$$

где $f_1(t, \rho) = (\operatorname{ch}(t + \rho) - \operatorname{ch} \rho) / (t^2 + 2\rho t)$. Учитывая, что $f(t, \rho, \alpha) \ll 1$ и $f_1(t, \rho) \geq 1$, отсюда заключаем, что оценка k -ой производной $f(t, \rho)$ сводится к оценке производных $f_1(t, \rho)$ до k -ой включительно.

Разлагая $\operatorname{ch}(t + \rho)$ в степенной ряд по t , получаем

$$f_1(t, \rho) = \frac{1}{t + 2\rho} \left(\operatorname{ch} \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k-1}}{(2k)!} + \operatorname{sh} \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k-2}}{(2k-1)!} \right) = \frac{1}{t + 2\rho} f_2(t, \rho).$$

Тогда

$$f'_1(t, \rho) = \frac{1}{t + 2\rho} f'_2(t, \rho) - \frac{1}{(t + 2\rho)^2} f_2(t, \rho).$$

Теперь, сохраняя в $f'_2(t, \rho)$ два первых члена ряда, а в $f_2(t, \rho)$ три первых члена ряда (остальные дают величину порядка $O(t)$), получаем

$$f'_1(t, \rho) = \frac{\rho \operatorname{ch} \rho - \operatorname{sh} \rho}{(t + 2\rho)^2} + \frac{(t + 4\rho) \operatorname{sh} \rho}{6(t + 2\rho)^2} t + O(t) \ll 1.$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} f''_1(t, \rho) &= \frac{(4\rho^2 + 6) \operatorname{sh} \rho - 6\rho \operatorname{ch} \rho}{3(t + 2\rho)^3} + \frac{(12\rho^2 + 6\rho t + t^2) \operatorname{ch} \rho}{12(t + 2\rho)^3} t + O(t) \ll 1, \\ f'''_1(t, \rho) &= \frac{(2\rho^3 + 6\rho) \operatorname{ch} \rho - (4\rho^2 + 6) \operatorname{sh} \rho}{(t + 2\rho)^4} \\ &\quad + \frac{(32\rho^3 + 24\rho^2 t + 8\rho t^2 + t^3) \operatorname{sh} \rho}{20(t + 2\rho)^4} t + O(t) \ll 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $f'''(t, \rho)$ в окрестности $t = 0$ равномерно по ρ ограничена, что и требовалось показать.

Теперь из полученных выше оценок легко следует оценка ядра $k_T(\rho, \alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедливо следующее:*

$$k_T(\rho, \alpha) = \begin{cases} O\left(T^{1/2} \frac{e^{-\rho^2/4\alpha}}{(\operatorname{ch} \rho)^{1/2}}\right), & \text{если } \rho \geq 1, \\ \frac{T}{2\pi} \frac{J_1(T\rho)}{\rho} + O(T^{1/2}), & \text{если } \rho < 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка при $\rho \geq 1$ следует из (2.1), (2.2) и (2.4). Хорошо известно, что $J_1(z) = O(z^{-1/2})$ при $z \rightarrow \infty$. Отсюда, принимая во внимание (2.1), (2.2), (2.5) и очевидное равенство $\exp(-\rho^2/4\alpha)(\rho/\operatorname{sh} \rho)^{-1/2} = 1 + O(\rho^2)$, получаем оценку при $\rho < 1$.

В дальнейшем нам понадобится простое следствие из предложения 2.1, а именно

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо следующее:*

$$k_T(\rho, \alpha) = \begin{cases} O\left(T^{1/2} \frac{e^{-\rho^2/4\alpha}}{(\operatorname{ch} \rho)^{1/2}}\right) & \text{при } \rho \geq 1, \\ O(T^{(1+3\beta)/2}) & \text{при } \rho = T^{-\beta}, 0 \leq \beta \leq 1/3, \\ \frac{T}{2\pi} \frac{J_1(T\rho)}{\rho} + O(T^{1/3}) & \text{при } \rho < T^{-1/3}. \end{cases} \quad (2.6)$$

§ 3. Асимптотика спектральной функции

Вначале займемся вычислением правой части (1.1). Для этого используем полученную в предыдущем параграфе оценку $k_T(\rho, \alpha)$ и теорему о числе точек решетки в гиперболическом пространстве. Эта теорема устанавливает асимптотику величины $N_\Gamma(z, z', T) = \#\{\sigma \in \Gamma : \rho(z, \sigma z') \leq T\}$. Она получена П. Лаксом и Р. Филиппсом в работе [8] для общего случая кофинитной дискретной подгруппы Γ группы $\operatorname{Iso}^+(H^{k+1})$ сохраняющих ориентацию изометрий $k+1$ -мерного гиперболического пространства H^{k+1} . Нам достаточна только оценка сверху для $N_\Gamma(z, z', T)$. Из теоремы следует, что

$$N_\Gamma(z, z', T)/e^{kT} \rightarrow \varepsilon \frac{\pi^{k/2} \Gamma(k/2)}{k! \operatorname{Vol}(\mathcal{F})} \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon = \#\{\Gamma \cap \pm I\}$ и $\operatorname{Vol}(\mathcal{F})$ – объем фундаментальной области $\mathcal{F}$. В нашем случае $k = 1$, поэтому из (3.1) получаем

$$N_\Gamma(z, z', T)/e^T \rightarrow \varepsilon \frac{\pi}{\operatorname{Vol}(\mathcal{F})} \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

причем, поскольку мы рассматриваем кокомпактный случай, стремление к пределу равномерно по z и z' . Теперь все готово, чтобы доказать следующее важное утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Пусть Γ – кокомпактная дискретная подгруппа $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \rho(z, \gamma z') \geq 1}} k_T(\rho(z, \gamma z'), \alpha) \chi(\gamma) \ll T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S_n = \{\gamma \in \Gamma : n < \rho(z, \gamma z') \leq n+1\}$. Из (3.2) следует $\#S_n \ll e^n$, причем оценка равномерна по z и z' . Тогда из этой оценки, а также из (2.6) следует

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \rho(z, \gamma z') \geq 1}} |k_T(\rho(z, \gamma z'), \alpha)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{S_n} |k_T(\rho(z, \gamma z'), \alpha)| \\ &\ll T^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2/4\alpha + n/2} \ll T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Рассмотрим отдельно случаи чисто гиперболической подгруппы и подгруппы, содержащей эллиптические элементы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть Γ — чисто гиперболическая подгруппа. Тогда

1) если $\rho(z, \gamma^* z') < T^{-1/3}$, то

$$\sum_{\kappa_j} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\kappa_j, \alpha) = \frac{T}{2\pi} \chi(\gamma^*) \frac{J_1(T\rho(z, \gamma^* z'))}{\rho(z, \gamma^* z')} + O(T + T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}),$$

2) если $\rho(z, \gamma^* z') \geq T^{-1/3}$, то

$$\sum_{\kappa_j} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\kappa_j, \alpha) = O(T + T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}),$$

где элемент γ^* определен в (0.2), а главный член, когда $z = z'$, понимается как предел и равен $T^2/4\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу тождества (1.1) и леммы 3.1 задача сводится к оценке суммы

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \rho(z, \gamma z') < 1}} k_T(\rho(z, \gamma z'), \alpha) \chi(\gamma).$$

Поскольку группа Γ действует разрывно, а $\overline{\mathcal{F}}$ компактно, то существует наименьшее конечное множество $M \subset \Gamma$, не зависящее от $z, z' \in \mathcal{F}$ и такое, что для любого $\gamma \in \Gamma - M$ справедливо $\rho(z, \gamma z') \geq 1$. Покажем, что $\rho(z, \gamma z')$ при любых $z, z' \in \mathcal{F}$ и $\gamma \neq \gamma^*$ отделена от нуля константой, зависящей лишь от Γ . Рассмотрим гиперболический треугольник с вершинами $z, \gamma^* z', \gamma z'$. Из теоремы косинусов для гиперболических треугольников следует, что

$$\rho(z, \gamma z') > |\rho(\gamma^* z', \gamma z') - \rho(z, \gamma^* z')| = |\rho(z', \gamma^{*-1} \gamma z') - \rho(z, \gamma^* z')|.$$

Оценим функцию смещения $\rho(z, \gamma z)$ для $\gamma \in \Gamma$ и $\gamma \neq I$. Так как функция ρ инвариантна относительно действия элементов из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, а γ гиперболическое, то $\rho(z, \gamma z) = \rho(\tilde{z}, \lambda \tilde{z})$, где $\mathrm{tr}^2(\gamma) = \lambda + \lambda^{-1} + 2 > 4$. Используя известную формулу $\mathrm{ch}^2(\rho(z, z')/2) = |z - \bar{z}'|^2/(4yy')$, получаем $\rho(\tilde{z}, \lambda \tilde{z}) \geq 2 \operatorname{arccch}(|\operatorname{tr}(\gamma)|/2) > 0$, при

этом неравенство достигается при $\tilde{x} = 0$. Отсюда и в силу разрывности группы Γ следует, что $\rho(z, \gamma z) \geq 2C_1(\Gamma) > 0$ для любого z и $\gamma \neq I$. Таким образом, имеем оценку $\rho(z, \gamma z') \geq C_1(\Gamma) > 0$ для $\gamma \neq \gamma^*$. Тогда в силу следствия предложения 2.1 при $T > 1/C_1^3(\Gamma)$ слагаемое с $\gamma \in M$, $\gamma \neq \gamma^*$, дает вклад $O(T)$, а поскольку их конечное число и это число зависит только от группы Γ , то их общий вклад оценивается как $O(T)$. И наконец, если $\rho(z, \gamma^* z') < T^{-1/3}$, то появляется главный член. Теперь, используя оценку (3.3), получаем требуемый результат.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ чисто гиперболическая подгруппа. Тогда

$$\sum_{\varkappa_j} |\varphi_j(z)|^2 h_T(\varkappa_j, \alpha) = \frac{T^2}{4\pi} + O(T + T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}).$$

Пусть подгруппа Γ содержит эллиптические элементы и пусть $z_1, \dots, z_l$ обозначают вершины многоугольника $\mathcal{F}$, которые являются неподвижными точками эллиптических элементов подгруппы Γ , а $\Gamma_{z_1}, \dots, \Gamma_{z_l}$ — соответствующие им стационарные подгруппы. Элемент γ^* и множества $V(z, r)$ определены в (0.1) и (0.2) соответственно. При этих обозначениях справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть подгруппа Γ содержит эллиптические элементы. Тогда

1) если $z \in V(z_i, T^{-1/3})$, $z' \in V(z_j, T^{-1/3})$ и $z_i = \gamma_0 z_j$, $\gamma_0 \in \Gamma$, то

$$\sum_{\varkappa_j} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, \alpha) = \frac{T}{2\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma_{z_i}} \chi(\gamma \gamma_0) \frac{J_1(T\rho(z, \gamma \gamma_0 z'))}{\rho(z, \gamma \gamma_0 z')} + O(T + T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}),$$

2) в противном случае:

а) если $\rho(z, \gamma^* z') < T^{-1/3}$, то

$$\sum_{\varkappa_j} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, \alpha) = \frac{T}{2\pi} \chi(\gamma^*) \frac{J_1(T\rho(z, \gamma^* z'))}{\rho(z, \gamma^* z')} + O(T + T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}),$$

б) если $\rho(z, \gamma^* z') \geq T^{-1/3}$, то

$$\sum_{\varkappa_j} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, \alpha) = O(T + T^{1/2} e^{\alpha/4} \sqrt{\alpha}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае чисто гиперболической подгруппы, требуется просуммировать ядро $k_T(\rho(z, \gamma z'), \alpha)$ лишь по конечному множеству элементов $M \subset \Gamma$, $z, z' \in \mathcal{F}$, такому, что для любого $\gamma \in \Gamma - M$ справедливо $\rho(z, \gamma z') \geq 1$. Как было показано в предыдущем доказательстве, $\rho(z, \gamma z') \geq C_1(\Gamma) > 0$ для всякого гиперболического $\gamma \in M$, $\gamma \neq \gamma^*$ и $z, z' \in \mathcal{F}$. Для эллиптических элементов это не так. Эллиптический элемент осуществляет поворот на угол $\theta \neq 0$ вокруг неподвижной точки z_0 и однозначно определяется этими параметрами. Для функции смещения эллиптического элемента γ справедлива формула

$\operatorname{sh}(\frac{1}{2}\rho(z, \gamma z)) = \operatorname{sh} \rho(z, z_0) |\sin(\theta/2)|$, см. [4, с. 158]. Отсюда следует неравенство $\rho(z, \gamma z) \geq 2|\sin(\theta/2)|\rho(z, z_0)$. Тогда для эллиптических $\gamma \in M$ имеет место оценка $\rho(z, \gamma z) \geq C_2(\Gamma)\rho(z, z_0) + C_2(\Gamma) > 0$.

Теперь, используя эти оценки, покажем, что начиная с некоторого T_0 при $T \geq T_0$ для $z \in V(z_i, T^{-1/3})$, $z' \in V(z_j, T^{-1/3})$, где $z_i = \gamma_0 z_j$, справедливо $\rho(z, \gamma z) \geq T^{-1/3}$ для всех $\gamma \in M$, кроме $\gamma = \tilde{\gamma}\gamma_0$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{z_i}$. Обозначим через $z_1, \dots, z_l, \dots, z_k$ все неподвижные точки эллиптических элементов конечного множества M (здесь первые l элементов – это вершины области $\mathcal{F}$) и через $\Delta(z, r)$ – круг радиуса r с центром в точке z в гиперболической метрике. Возьмем T_0 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $\rho(\Delta(z_i, T_0^{-1/3}), \Delta(z_j, T_0^{-1/3})) \geq 3T_0^{-1/3}/C_2(\Gamma)$ для всех пар (z_i, z_j) , $i \neq j$, $i, j \leq k$, неподвижных точек и одновременно выполнялось неравенство $T_0 \geq (C_1(\Gamma)/3)^{-3}$. Теперь пусть $\gamma \in M$ и $\gamma \neq \tilde{\gamma}\gamma_0$. Рассмотрим треугольник с вершинами $z, \gamma_0 z', \gamma z'$. Тогда $\rho(z, \gamma z') \geq |\rho(\gamma_0 z', \gamma z') - \rho(\gamma_0 z', z)|$. Поскольку $z_i = \gamma_0 z_j$, то $\rho(\gamma_0 z', z) < 2T^{-1/2}$. Покажем, что $\rho(\gamma_0 z', \gamma z') = \rho(z', \gamma_0^{-1} \gamma z') \geq 3T^{-1/3}$. Если это расстояние больше либо равно 1, то доказывать нечего, а иначе $\gamma_0^{-1} \gamma \in M$. Если этот элемент гиперболический, то из оценки функции смещения для гиперболических элементов множества M и выбора T_0 следует $\rho(z', \gamma_0^{-1} \gamma z') \geq 3T^{-1/3}$. Пусть $\gamma_0^{-1} \gamma$ является эллиптическим. Так как по условию $\gamma \neq \tilde{\gamma}\gamma_0$, то неподвижная точка элемента $\gamma_0^{-1} \gamma$ отлична от z_j . Тогда из оценки функции смещения для эллиптических элементов и выбора T_0 следует требуемое неравенство.

Теперь утверждение пункта 1) немедленно следует из только что доказанного свойства, следствия предложения 2.1 и леммы 3.1. Если z и z' не лежат одновременно в окрестностях конгруэнтных эллиптических вершин фундаментальной области $\mathcal{F}$, то легко видеть, что из оценок функции смещения следует, что $\rho(z, \gamma z') \geq C_2(\Gamma)T^{-1/3}$ для всех γ кроме, быть может, одного. Отсюда следует справедливость пункта 2), что и завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть подгруппа Γ содержит эллиптические элементы. Тогда

1) если $z \in V(z_i, T^{-1/3})$, то

$$\sum_{\varkappa_j} |\varphi_j(z)|^2 h_T(\varkappa_j, \alpha) = \frac{T}{2\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma_{z_i}} \chi(\gamma) \frac{J_1(T\rho(z, \gamma z))}{\rho(z, \gamma z)} + O(T + T^{1/2}e^{\alpha/4}\sqrt{\alpha}),$$

2) в противном случае:

$$\sum_{\varkappa_j} |\varphi_j(z)|^2 h_T(\varkappa_j, \alpha) = \frac{T^2}{4\pi} + O(T + T^{1/2}e^{\alpha/4}\sqrt{\alpha}).$$

Теперь, чтобы получить асимптотику спектральной функции, нам осталось оценить погрешность, которую вносит весовая функция $h_T(\varkappa_j, \alpha)$. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Справедливо следующее:

$$\sum_{|\varkappa_j| \leq T-1} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} = \sum_{\varkappa_j} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, \ln T) + O(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.2) следуют оценки

- a) $h_T(r, \alpha) \ll \exp(\alpha|r|^2)$, если r чисто мнимое,
- b) $h_T(r, \alpha) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}(T-r)) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}(T+r))$, если $r \leq T$,
- c) $h_T(r, \alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}(r-T)) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}(r+T))$, если $r \geq T$,

где $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ — дополнительный интеграл вероятности. Поскольку $\operatorname{erfc}(x) \approx e^{-x^2}/(\sqrt{\pi}x)$ при $x \rightarrow \infty$, то, полагая $\alpha = \ln T$, получаем

$$h_T(r, \ln T) = \begin{cases} O(T^{|r|^2}), & \text{если } r \text{ чисто мнимое,} \\ 1 + O(T^{-(T-r)^2}) & , \text{если } 0 \leq r \leq T-1, \\ O(1), & \text{если } T-1 \leq r \leq T+1, \\ O(T^{-(T-r)^2}), & \text{если } r \geq T+1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Поэтому представим погрешность в следующем виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\varkappa_j} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, \ln T) - \sum_{|\varkappa_j| \leq T-1} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} \\ &= \sum_{\lambda_j < 1/4} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\sqrt{\lambda_j - 1/4}, \ln T) - \sum_{\lambda_j < 1/4} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} \\ &+ \sum_{0 \leq \varkappa_j \leq T-1} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} (h_T(\varkappa_j, \ln T) - 1) + \sum_{\varkappa_j > T+1} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, \ln T) \\ &+ \sum_{T-1 \leq \varkappa_j \leq T+1} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, \ln T). \end{aligned}$$

Теперь оценим слагаемые в правой части. Очевидно, из (3.4) следует

$$\sum_{\lambda_j < 1/4} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\sqrt{\lambda_j - 1/4}, \ln T) \ll T^{1/4}$$

и, кроме того,

$$\sum_{\lambda_j < 1/4} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} \ll 1.$$

Для оценки следующих двух слагаемых нам понадобятся оценки

$$|\varphi_j(z)| \ll \varkappa_j^{1/2} \quad \text{и} \quad \#\{\varkappa_j : T \leq \varkappa_j \leq T+1\} \ll T.$$

Первая оценка получена в работе [9], а вторая следует из асимптотики

$$\#\{\varkappa_j : |\varkappa_j| \leq T\} = \frac{\operatorname{Vol}(\mathcal{F})}{4\pi} T^2 + O_\Gamma(T),$$

см. [1]. Используя эти оценки, а также (3.4), получаем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\varkappa_j > T+1} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z')} h_T(\varkappa_j, h_T(\varkappa_j, \ln T)) \right| \\
 & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{T+k \leq \varkappa_j \leq T+k+1} |\varphi_j(z)| |\varphi_j(z')| h_T(\varkappa_j, \ln T) \\
 & \ll \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{T+k \leq \varkappa_j \leq T+k+1} (T+k+1) h_T(\varkappa_j, \ln T) \\
 & \ll \sum_{k=1}^{\infty} (T+k+1)^2 T^{-k^2} \ll T.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Очевидно, такая же оценка верна и для второй суммы. Для оценки последнего слагаемого воспользуемся асимптотиками предложений 3.1 и 3.2. При $\alpha = \ln T$ остаточный член у этих асимптотик, как легко видеть, есть величина порядка $O(T)$. Из (3.5) следует, что те же асимптотики верны и для конечных сумм, где суммирование ведется по $\varkappa_j$, по модулю не превосходящей $T+1$. Оцениваемая нами величина есть разность между суммой до $T+1$ и суммой до $T-1$, которая в силу вышесказанного есть величина порядка $O(T)$.

Из предложений 3.1, 3.2 и 3.3 теперь немедленно следует асимптотика спектральной функции по спектральному параметру $\varkappa_j$, связанному с собственными значениями λ_j оператора Лапласа–Бельтрами соотношением $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$. Переходя в асимптотике от параметра $\varkappa_j$ к собственному значению λ_j , получаем теоремы 1 и 2.

В заключение я хочу выразить искреннюю благодарность Н. В. Кузнецову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Венков А. Б. Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики // УМН. 1979. Т. 34. №3. С. 69–135.
2. Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
3. Hejhal D. A. The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, R)$. V. 1 // Lect. Notes in Math. 1976. V. 548.
4. Бабич В. М., Левитан Б. М. Задача о фокусировке и асимптотика спектральной функции оператора Лапласа–Бельтрами // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. №5. С. 1017–1020.
5. Sarnak P. Arithmetic quantum chaos // Preprint. Princeton: Princeton Univ., 1994.
6. Selberg A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc. 1956. V. 20. P. 47–87.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
8. Lax P. D., Phillips R. S. The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces // J. Funct. Anal. 1982. V. 46. P. 280–350.
9. Seger A., Sogge C. Bounds for eigenfunctions of differential operators // Indian J. Math. 1989. V. 38. P. 669–682.

Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения РАН, Хабаровск

Поступила в редакцию
05.10.1995 и 19.02.1998