Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса,
Матем. сб., 1998, том 189, номер 7, 37–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:36:19

УДК 512.6

М. М. Гриненко

Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса

В статье доказана бирациональная жесткость трехмерного двойного конуса, т.е. двойного накрытия квадратичного конуса в $\mathbb{P}^2$ с ветвлением в гладком сечении кватрикой, а также его нерациональность и отсутствие структур расслоения на коники. Вычислена группа бирациональных автоморфизмов этого многообразия.

Библиография: 10 названий.

Предварительные замечания. Одно из наиболее замечательных достижений московской школы алгебраической геометрии – доказательство нерациональности гладкой трехмерной кватрики, полученное в самом начале 70-ых годов В. А. Исковских и Ю. И. Маниным [1]. Прием, благодаря которому это стало возможным (так называемый *метод максимальных особенностей*), основывался на глубоком усовершенствовании и развитии методов классической итальянской школы и в дальнейшем неоднократно успешно применялся к проблемам бирациональной классификации алгебраических многообразий [2], [3]. Совсем недавно ревизия некоторых исходных моментов и серьезная техническая модернизация метода максимальных особенностей в работах А. В. Пухликова [4], [5] позволили приступить к решению наиболее трудных задач в данной области.

Первые успешные попытки в этом направлении – отыскание бирациональных автоморфизмов трехмерных многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо степеней 1, 2 и 3, достаточно сильно “закрученным” по базе ([6]; постановка задачи и обсуждение проблемы содержится в [7]). Необходимые для метода оценки на кратности точек в пересечении общих дивизоров линейных систем удалось получить как раз при помощи новой техники, ограничивая эти дивизоры на *различные* специально подобранные *пробные* поверхности.

Другой класс задач, трудный для “старой” техники, связан с наличием особых точек на многообразии. Так, например, преодоление проблем, вызванных двойной точкой на кватрике [3], оказалось весьма непростым делом. Похожий случай с особой точкой на двойной квадрике [8] удалось разобрать легче и более системно, применяя новый подход.

Задача, рассматриваемая в настоящей работе, является своего рода объединением двух предыдущих. Действительно, трехмерный двойной конус, по определению, есть двойное накрытие квадратичного конуса в $\mathbb{P}^4$ с ветвлением в гладком дивизоре, не проходящем через вершину конуса и высекаемом кватрикой, так что наличие двух особых точек очевидно; специфичным, однако, является то обстоятельство, что это многообразие обладает не одним, а двумя пучками поверхностей

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00820) и гранта поддержки ведущих научных школ № 96-15-96146.

Дель Пеццо (степени 2). В этом смысле интересен и результат, который будет доказан. Для каждой из двух структур слоев над общей точкой – поверхность Дель Пеццо над полем рациональных функций, и в общем случае группа бирациональных автоморфизмов двойного конуса есть свободное произведение с общей подгруппой кремоновых групп этих двух поверхностей, причем общая подгруппа состоит из всех автоморфизмов, послойных относительно каждой из структур.

Автор благодарен В. А. Исковских и А. В. Пухликову за многочисленные обсуждения проблемы и внимание к данной работе.

§1. Описание двойного конуса

Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – квадратичный конус, $O \in Q$ – его вершина, R – кватрика в $\mathbb{P}^4$ такая, что $R_Q = R \cap Q$ – гладкий дивизор на Q , $O \notin R_Q$. Конус содержит два пучка $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ плоскостей; обозначим через P_1 и P_2 общие элементы этих пучков, так что $\mathcal{P}_1 = |P_1|$ и $\mathcal{P}_2 = |P_2|$.

Рассмотрим $\pi: X \xrightarrow{2:1} Q$ – двойное накрытие Q с ветвлением в R_Q ; многообразие X называется *двойным конусом*.

Следующие два факта очевидным образом вытекают из определения. Во-первых, X имеет в точности две особые точки, являющиеся обыкновенными двойными точками и лежащие над вершиной конуса. Во-вторых, прообразы пучков $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ образуют два пучка $\mathcal{F}_1 = |F_1|$ и $\mathcal{F}_2 = |F_2|$ поверхностей Дель Пеццо степени 2 на X . Действительно, для общего элемента $F_1 \in \mathcal{F}_1$ первого пучка ограничение π на F_1 дает двойное накрытие $P_1 \in \mathcal{P}_1$ с ветвлением в гладкой кватрике; аналогично для второго пучка. Таким образом, X имеет (бирационально) две структуры расслоения на поверхности Дель Пеццо степени 2.

Более точно, существуют гладкие модели $\varphi_U: U \rightarrow X$ и $\varphi_V: V \rightarrow X$ двойного конуса, где φ_U и φ_V – бирациональные морфизмы и одновременно изоморфизмы в коразмерности 1 (малые стягивания), а U и V получаются следующим образом. При раздутии вершины $O \in Q$ вклеивается квадрика, и стягивание вдоль каждой из ее образующих дает две гладкие модели конуса, изоморфные ему в коразмерности 1 и связанные друг с другом через флоп; U и V есть соответствующие накрытия этих гладких моделей Q . Собственный прообраз на V одного из двух пучков поверхностей Дель Пеццо на X , например, $\mathcal{F}_1$, определяет расслоение $\pi_V: V \rightarrow \mathbb{P}^1$; пучок $\mathcal{F}_2$ задает структуру $\pi_U: U \rightarrow \mathbb{P}^1$. В дальнейшем $\mathcal{F}_1$, F_1 , $\mathcal{F}_2$ и F_2 будут обозначать объекты как на X , так и на U и V .

Заметим, что V отличается от X , грубо говоря, наличием двух прямых s_1 и s_2 , которые не пересекаются, являются сечениями расслоения π_V и стягиваются в особые точки X морфизмом φ_V . Флоп с центром одновременно в s_1 и s_2 превращает V в U .

Кривые на многообразиях X , U и V . Очевидно, любая прямая на конусе Q лежит в плоскости из семейства $\mathcal{P}_1$ или $\mathcal{P}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямой на X* будем называть кривую $C \subset X$ такую, что $\pi|_C$ – изоморфизм на прямую на конусе. *Прямые на V* – это s_1 , s_2 и собственные прообразы прямых на X ; аналогично для U .

Пусть l – прямая на X . Тогда либо $\pi(l) \subset R_Q$, либо $\pi(l)$ – бикасательная к R_Q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривую $C \subset X$ будем называть *вертикальной* относительно π_V , если $l \subset F_1$ для некоторого $F_1 \in \mathcal{F}_1$; относительно π_U , если $l \subset F_2$ для

некоторого $F_2 \in \mathcal{F}_2$; C — дважды вертикальная, если $C \subset F_1 \cap F_2$.

Очевидно, любая дважды вертикальная кривая является прямой, образ которой на Q — прямая, проходящая через точку O , бикасательная к R_Q и лежащая в пересечении двух плоскостей (разумеется, из разных семейств).

Слой многообразий U и V . Мы будем предполагать выполненным следующее условие:

(А) элементы пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ неособы вдоль любой дважды вертикальной прямой.

Очевидно, это условие выполнено для общего двойного конуса, поскольку $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ содержат лишь конечное множество негладких элементов.

Группа классов дивизоров на X . Пусть S — малое разрешение особой точки конуса, и $\pi: V \rightarrow S$ — соответствующее двойное накрытие. Собственные прообразы на S классов плоскостей P_1 и P_2 обозначим теми же буквами, и пусть s — прямая, которая вклеивается при малом разрешении, так что $P_1 \circ s = 1$, $P_2 \circ s = -1$. Очевидно, $\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}[P_1] \oplus \mathbb{Z}[P_2]$ и $K_S \sim -3H$, где $H = P_1 + P_2$ — класс собственного прообраза гиперплоского сечения конуса.

Предложение. $\text{Pic}(V) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Доказательство. Так как $(-K_S)$ и $(-K_V) \sim \pi^*H - \text{big}$ и nef дивизоры, то по двойственности Серра и теореме обращения в нуль имеем

$$h^{1,0}(S) = h^{2,0}(S) = h^{1,0}(V) = h^{2,0}(V) = 0,$$

откуда $\text{Pic}(S) \simeq H^2(S, \mathbb{Z})$ и $\text{Pic}(V) \simeq H^2(V, \mathbb{Z})$ из когомологий экспоненциальной последовательности. Таким образом, для доказательства предложения достаточно установить, что $h^{1,1}(V) = h^{1,1}(S)$.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(2H)$, $R \in \Gamma(S, \mathcal{L}^2)$ — дивизор ветвления накрытия $\pi: V \rightarrow S$ и

$$L = \text{Spec}(\text{Sym } \mathcal{L}^{-1})$$

тотальное пространство расслоения $\mathcal{L}$ с проекцией $p: L \rightarrow S$. Если $f = 0$ — локальное уравнение для R , то $t^2 = f$ определяет $V \subset L$ и $\pi = p|_V$.

На V мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \pi^* \mathcal{O}_S(-R) \longrightarrow \Omega_L|_V \longrightarrow \Omega_V \longrightarrow 0,$$

откуда, так как пучок $\pi^* \mathcal{O}(R)$ big и nef на V , получаем изоморфизмы

$$H^1(V, \Omega_V) \simeq H^1(V, \Omega_L|_V) \simeq H^1(S, \pi_* \Omega_L|_V)$$

(последний следует из того, что $R^i \pi_* = 0$ при $i > 0$).

Далее, на L есть точная последовательность пучков

$$0 \longrightarrow p^* \Omega_S \longrightarrow \Omega_L \longrightarrow p^* \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow 0.$$

Ограничивая ее на V и опуская на S , имеем

$$0 \longrightarrow \Omega_S \oplus \Omega_S(-2H) \longrightarrow \pi_* \Omega_L|_V \longrightarrow \mathcal{O}_S(-2H) \oplus \mathcal{O}_S(-4H) \longrightarrow 0.$$

Опять, применяя теорему обращения в нуль для big и nef обратимых пучков, получим

$$H^1(S, \pi_* \Omega_L|_V) \simeq H^1(S, \Omega_S) \oplus H^1(S, \Omega_S(-2H)).$$

Нам осталось показать, что $H^1(S, \Omega_S(-2H)) = 0$. Из точной последовательности ограничения для $F \in \mathcal{P}_2$ имеем

$$0 \longrightarrow \Omega_S(-2H) \longrightarrow \Omega_S(-2H + F) \longrightarrow \Omega_S(-2H + F) \otimes \mathcal{O}_F \longrightarrow 0.$$

Заметим, что $H^1(S, \Omega_S(-2H + F)) = 0$, так как дивизор $2H - F \sim P_2 + 2P_1$ обилен на S . Но $H^0(F, \Omega_S(-2H + F) \otimes \mathcal{O}_F)$ также обращается в нуль, что видно из последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{F|S}^{-1} \otimes \mathcal{O}_S(-2H + F) \longrightarrow \Omega_S(-2H + F)|_F \longrightarrow \Omega_F(-2H + F) \longrightarrow 0.$$

Таким образом, $H^1(S, \Omega_S(-2H)) = 0$. Предложение доказано.

Из предложения вытекает, что $\text{Cl}(X) = \mathbb{Z}[F_1] \oplus \mathbb{Z}[F_2]$; то же верно и для $\text{Pic}(U)$.

Как уже отмечалось, при малом разрешении $\varphi_V: V \rightarrow X$ вклеиваются две непересекающиеся прямые s_1 и s_2 , являющиеся сечениями расслоения $\pi_V: V \rightarrow \mathbb{P}^1$. Обозначим через f класс вертикальной прямой. Тогда группа 1-циклов $A_{\mathbb{Q}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} A^2 \otimes \mathbb{Q}$ порождена классами s_1 и f (или, что то же самое, s_2 и f), т.е.

$$A_{\mathbb{Q}}^2 = \mathbb{Q}s_1 \oplus \mathbb{Q}f.$$

§ 2. Описание бирациональных автоморфизмов

Бирациональные автоморфизмы, связанные с кривыми на X . Рассмотрим гладкую модель $\varphi_V: V \rightarrow X$ двойного конуса, и пусть кривая $l \subset V$ есть сечение расслоения $\pi_V: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, отличное от исключительных кривых s_1 и s_2 и не лежащее на дивизоре ветвления. На V существует кривая (тоже сечение) l^* , сопряженная с l относительно автоморфизма двойного накрытия. Пусть $\psi: \tilde{V} \rightarrow V$ — раздутие сначала l , а затем собственного прообраза кривой l^* с исключительными дивизорами соответственно E и E^* .

Опишем бирациональный автоморфизм τ_l , связанный с сечением l . Его ограничение на общий слой $T \in |F_1|$ на V есть инволюция Бертини: раздутие $\tilde{T}$ точек $A = l \cap T$ и $A^* = l^* \cap T$ реализует $\tilde{T}$ как расслоение на эллиптические кривые, причем исключительные дивизоры e и e^* — сечения этого расслоения; послынное отражение $\tilde{\tau}_T$ относительно e^* и стягивание исключительных дивизоров как раз и есть $\tau_T \stackrel{\text{def}}{=} \tau_l|_T$.

Если рассмотреть $\tilde{T}$ как поверхность в $\tilde{V}$, то, очевидно, $e = E|_{\tilde{T}}$, $e^* = E^*|_{\tilde{T}}$. Обозначим $h = -K_{\tilde{V}}|_{\tilde{T}}$. Легко посчитать, что

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_T^*(e) = -e + 2e^* + 2h, \\ \tilde{\tau}_T^*(e^*) = e^*, \\ \tilde{\tau}_T^*(h) = h. \end{cases}$$

Пусть мы имеем линейную систему $|D| \subset |-nK_V + mF_1|$ на V , $n > 0$ и $m \geq 0$, и пусть $\nu = \text{mult}_l |D|$, $\nu^* = \text{mult}_{l^*} |D|$. Тогда

$$\tilde{D} \sim \psi^*(-nK_V + mF_1) - \nu E - \nu^* E^*,$$

где $\tilde{D}$ – собственный прообраз D на $\tilde{V}$.

Пусть $\tilde{\tau}_l^*(\tilde{D}) \sim \psi^*(-aK_V + bF_1) - cE - dE^*$. Чтобы найти неизвестные коэффициенты, ограничим все на $\tilde{T}$. Обозначая $h' = h + e + e^* = \psi^*(-K_V)|_{\tilde{T}}$, имеем

$$\begin{aligned}\tilde{D}|_{\tilde{T}} &= nh' - \nu e - \nu^* e^*, \\ \tilde{\tau}_l^*(\tilde{D})|_{\tilde{T}} &= ah' - ce - de^*.\end{aligned}$$

Но $\tilde{\tau}_l^*(\tilde{D})|_{\tilde{T}} = \tilde{\tau}_{\tilde{T}}^*(\tilde{D}|_{\tilde{T}})$, откуда, используя вычисления для действия $\tilde{\tau}_{\tilde{T}}^*$ на $\text{Pic}(\tilde{T})$, находим

$$\tilde{\tau}_{\tilde{T}}^*(\tilde{D}|_{\tilde{T}}) = (3n - 2\nu)h' - (4n - 3\nu)e^* - \nu^* e^*,$$

так что $a = 3n - 2\nu$, $c = 4n - 3\nu$ и $d = \nu^*$. Коэффициент b нам не понадобится.

Таким образом,

$$\tau_l^*(D) \in |(3n - 2\nu)(-K_V) + \dots + F_1 - (4n - 3\nu)l - \nu^* l^*|. \quad (1)$$

Аналогичным образом определяются бирациональные автоморфизмы, связанные с сечениями расслоения $\pi_U: U \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Бирациональные автоморфизмы, связанные с двойными точками X .

Помимо уже описанных, существуют еще два бирациональных автоморфизма. Пусть $\varphi: \tilde{V} \rightarrow X$ – раздутие особых точек с исключительными дивизорами E_1 и E_2 . Композиция φ , π и проекции $Q \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ из вершины конуса реализует $\tilde{V}$ как расслоение $\tilde{V} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на кривые рода 1, причем E_1 и E_2 будут непересекающимися сечениями этого расслоения. Пусть $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$ – послойные отражения относительно точек пересечения слоев с E_2 и E_1 соответственно. Указанные два бирациональных автоморфизма определяются как

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \varphi \circ \tilde{\tau}_1 \circ \varphi^{-1}, \\ \tau_2 &= \varphi \circ \tilde{\tau}_2 \circ \varphi^{-1}.\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\text{Pic}(\tilde{V}) = \mathbb{Z}[\tilde{F}_1] \oplus \mathbb{Z}[\tilde{F}_2] \oplus \mathbb{Z}[E_1] \oplus \mathbb{Z}[E_2],$$

где $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$ – собственные прообразы F_1 и F_2 . Заметим также, что пучки $|\tilde{F}_1|$ и $|\tilde{F}_2|$ есть прообразы двух семейств прямых расслоения $\tilde{V} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, поэтому элементы этих пучков – поверхности Дель Пеццо степени 2 с двумя раздутыми точками – инвариантны относительно $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$.

Пусть $\tilde{S} \in |\tilde{F}_1|$ – общий элемент. Обозначим через g слой пучка $\tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$, $e_1 = E_1 \cap \tilde{S}$ и $e_2 = E_2 \cap \tilde{S}$ – сечения этого пучка. Очевидно, $e_1^2 = e_2^2 = -1$, $g^2 = 0$, $e_1 \circ e_2 = 0$, $e_1 \circ g = e_2 \circ g = 1$. Нетрудно убедиться, что для $\tau_{1\tilde{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\tau}_1|_{\tilde{S}}$

$$\begin{cases} \tau_{1\tilde{S}}^*(e_1) = -e_1 + 2e_2 + 2g, \\ \tau_{1\tilde{S}}^*(e_2) = e_2, \\ \tau_{1\tilde{S}}^*(g) = g. \end{cases}$$

Действие $\tilde{\tau}_1|_{\tilde{S}}^*$ на классы дивизоров на $\tilde{S}$, когда $\tilde{S} \in |\tilde{F}_2|$, описывается теми же формулами.

Рассмотрим теперь многообразие V ; ясно, $\tilde{V}$ есть раздутие $\psi: \tilde{V} \rightarrow V$ прямых s_1 и s_2 на V . Пусть дана линейная система

$$|D| \subset |-nK_V + mF_1 - \nu_1 s_1 - \nu_2 s_2|$$

на V , где $n > 0$, $m \geq 0$, $\nu_1 = \text{mult}_{s_1} |D|$ и $\nu_2 = \text{mult}_{s_2} |D|$. Обозначим подъем τ_1 на V той же буквой; как вычислить $\tau_1^*(D)$? Очевидно, собственный прообраз линейной системы $|D|$ на $\tilde{V}$ есть

$$|\tilde{D}| \subset |\psi^*(-nK_V + mF_1) - \nu_1 E_1 - \nu_2 E_2|.$$

Пусть

$$\tau_1^*(\tilde{D}) = |\psi^*(-aK_V + bF_1) - cE_1 - dE_2|.$$

Ограничивая $\tilde{D}$ сначала на $\tilde{S} \in |\tilde{F}_1|$, а затем на $\tilde{S} \in |\tilde{F}_2|$, находим, что $a = 3n - 2\nu_1$, $b = m$, $c = 4n - 3\nu_1$, $d = \nu_2$. Спускаясь на V , получаем

$$\tau_1^*(D) \in |(3n - 2\nu)(-K_V) + mF_1 - (4n - 3\nu)s_1 - \nu_2 s_2|. \quad (2)$$

Действие τ_2 описывается аналогично; вообще, можно заметить, что τ_1 и τ_2 сопряжены в группе бирациональных автоморфизмов через автоморфизм двойного накрытия.

§3. Формулировка основного результата

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара $(W, \mathcal{Y})$, где W — проективное многообразие, неособое в коразмерности 1, а $\mathcal{Y}$ — линейная система на W , называется *пробной*, если выполняются следующие условия:

- а) $\mathcal{Y} = |Y|$ без неподвижных компонент;
- б) существует число $\alpha = \alpha(W, \mathcal{Y}) \in \mathbb{R}_+$ такое, что для всякого рационального числа $\beta > \alpha$ линейная система

$$|m(Y + \beta K_W)|$$

пуста при любом $m \in \mathbb{Z}_+$, $m\beta \in \mathbb{Z}$.

Указанное число $\alpha(W, \mathcal{Y})$ называется *порогом (канонического) присоединения* линейной системы $\mathcal{Y}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие S называется *бirationально жестким*, если для любой пробной пары $(W, \mathcal{Y})$ и бирационального отображения $\chi: S \dashrightarrow W$ существует бирациональный автоморфизм χ' многообразия S такой, что

$$\alpha(S, \mathcal{T}) \leq \alpha(W, \mathcal{Y}),$$

где $\mathcal{T} = (\chi \circ \chi')^{-1} \mathcal{Y}$.

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Двойной конус (при условиях, описанных в § 1) является бирационально жестким многообразием.*

Обозначим через $B(X)$ группу, свободно порожденную всеми бирациональными автоморфизмами вида τ_l , τ_1 и τ_2 двойного конуса X . Кроме того, пусть $I_X \subset \text{Bir}(X)$ – подгруппа, порожденная бирегулярной инволюцией двойного накрытия и бирациональной инволюцией τ_1 . Через V_η обозначим слой над общей (в схемном смысле) точкой прямой расслоения $\pi_V: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, а через U_η – то же для $\pi_U: U \rightarrow \mathbb{P}^1$. Очевидно, существует естественное вложение I_X в группы бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(V_\eta)$ и $\text{Bir}(U_\eta)$.

СЛЕДСТВИЯ. (1) *Двойной конус не рационален и не изоморфен бирационально никакому расслоению на коники.*

(2) *Группа $\text{Bir}(X)$ бирациональных автоморфизмов двойного конуса X есть полупрямое произведение группы $B(X)$ и группы бирегулярных автоморфизмов $\text{Aut}(X)$, т.е. $\text{Bir}(X)$ включается в точную тройку*

$$0 \longrightarrow B(X) \longrightarrow \text{Bir}(X) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow 0. \quad (3)$$

Более того, в общем случае $\text{Bir}(X)$ есть свободное произведение групп $\text{Bir}(V_\eta)$ и $\text{Bir}(U_\eta)$ с общей подгруппой I_X , т.е.

$$\text{Bir}(X) \simeq \text{Bir}(V_\eta) *_{I_X} \text{Bir}(U_\eta). \quad (4)$$

§ 4. Максимальные особенности

Пусть заданы пробная пара $(W, \mathcal{Y})$ и бирациональное отображение

$$\chi: X \dashrightarrow W.$$

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Предположим, что $\alpha(X, |D|) > \alpha(W, \mathcal{Y})$, где $|D| = \chi^{-1}\mathcal{Y}$. Из двух гладких моделей U и V многообразия X выберем ту, для которой собственный прообраз линейной системы $|D|$ (обозначим его той же буквой) можно записать в виде

$$|D| \subset |-\alpha(X, |D|)K + \{\text{неотрицательное число слоев}\}|.$$

Пусть, например, это будет V , тогда

$$|D| \subset |-nK_V + mF_1|, \quad (5)$$

где $n = \alpha(X, |D|) > 0$, $m \geq 0$.

После этого мы показываем, что с помощью одного из автоморфизмов вида τ_l , τ_1 или τ_2 линейную систему $|D|$ можно привести к виду

$$|D'| \subset |-n'K_V + m'F_1|,$$

где $n' < n$, так что $\alpha(X, |D'|) < \alpha(X, |D|)$. Затем возвращаемся на X , снова выбираем гладкую модель, но уже относительно системы $|D'|$, и так далее, пока не получим утверждение теоремы.

Первый шаг в реализации этой схемы – стандартное утверждение о существовании максимальных особенностей линейных систем. Подробное изложение можно найти (в современном виде) в работах [4], [5]; сам результат состоит в следующем.

Обозначим через χ_1 подъем χ на V , и пусть $|D| = \chi_1^{-1}\mathcal{Y}$ имеет вид (5), $n = \alpha(V, |D|) = \alpha(X, |D|) > \alpha(W, \mathcal{Y}) \geq 0$. Существует гладкое квазипроективное многообразие $\tilde{V}$, бирациональный морфизм $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ и множество $\mathcal{L}$ дивизоров Вейля на $\tilde{V}$, теряющих размерность на V , такие, что

$$\emptyset = |\varphi^{-1}(D) + nK_{\tilde{V}}| = \left| m\varphi^*(F_1) + \sum_{T \in \mathcal{L}} (n\delta(T) - \nu_T(|D|)T) \right|, \quad (6)$$

где

$$K_W = \varphi^*(K_V) + \sum_{T \in \mathcal{L}} \delta(T)T$$

(т.е. $\delta(T)$ – дискрепантности) и $\nu_T(|D|) = \text{ord}_T(\varphi^*(|D|))$.

Положим $e_T = \nu_T(|D|) - \delta(T)$. В случае, когда $e_T > 0$, говорят, что линейная система $|D|$ имеет максимальную особенность с центром $B_T = \varphi(T)$, реализуемую нормированием ν_T . Из (6) следует, что множество максимальных особенностей

$$\mathcal{M} = \{T \in \mathcal{L} : e_T > 0\}$$

непусто.

Наиболее трудная часть работы состоит в доказательстве следующего факта.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Ситуация, когда центры всех максимальных особенностей – точки, невозможна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать будем от противного. Предварительно введем несколько полезных определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть W – гладкое проективное многообразие, C и G – соответственно кривая и дивизор на W , $\text{supp } C \not\subset \text{supp } G$. *Степенью C относительно W называется число $\deg_G C = G \circ C$.*

ЛЕММА. *Пусть точка $x \in C \cap G$, тогда $\text{mult}_x G \cdot \text{mult}_x C \leq \deg_G C$.*

Напомним, что V имеет структуру расслоения $\pi_V: V \rightarrow \mathbb{P}^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Неприводимая кривая C называется *горизонтальной* (относительно π_V), если C накрывает базу.

Пусть теперь D_1 и D_2 – общие элементы из $|D|$; положим

$$D_1 \circ D_2 = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + Z^h + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v,$$

где Z^h – горизонтальный цикл, $s_1, s_2 \not\subset \text{supp } Z^h$, а Z_t^v – вертикальный цикл в слое над точкой $t \in \mathbb{P}^1$. Заметим, что все циклы в этом разложении – эффективные, так как $|D|$ не имеет неподвижных компонент.

Выберем элемент $G \in |F_2|$ так, чтобы никакие компоненты Z^h или Z_t^v не лежали в нем. Тогда

$$D_1 \circ D_2 \circ G = 2n^2 + 4mn \geq -\alpha_1 - \alpha_2 + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg_G Z_t^v.$$

Обозначим через S_t слой над точкой $t \in \mathbb{P}^1$. Из условия (6) следует неравенство (см. [6, предложение 3.1])

$$m < \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \max_{\{T: \varphi(T) \in S_t\}} \frac{e_T}{\nu_T(S_t)}.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg_G Z_t^v < 2n^2 + \alpha_1 + \alpha_2 + 4n \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \max_{\{T: \varphi(T) \in S_t\}} \frac{e_T}{\nu_T(S_t)}.$$

Наконец, обозначив через p количество слоев π_V , содержащих максимальные особенности, мы приходим к существованию максимальной особенности T , $\varphi(T) = t$, такой, что выполняется неравенство

$$\nu_T(S_t) \deg_G Z_t^v < \frac{2n^2 + \alpha_1 + \alpha_2}{p} \nu_T(S_t) + 4ne_T.$$

Это сверхмаксимальная особенность в терминологии работы [6]. Положим $B_0 = \varphi(T)$, $S = S_t$, $e = e_T$, $\nu = \nu_T$ и $\delta = \delta_T$.

Далее применим стандартную схему разрешения максимальной особенности (подробности – в [5]). Пусть

$$V_N \xrightarrow{\varphi_{N,N-1}} V_{N-1} \xrightarrow{\varphi_{N-1,N-2}} \dots \xrightarrow{\varphi_{i+1,i}} V_i \xrightarrow{\varphi_{i,i-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_{2,1}} V_1 \xrightarrow{\varphi_{1,0}} V$$

– композиция раздутий с центрами B_i , $\varphi_{i,i-1}(B_i) = B_{i-1}$, и исключительными дивизорами $E_i \subset V_i$ такая, что тройка $(V_N, E_N, \varphi_{N,0})$ реализует нормирование ν . Мы считаем, что $B_0, \dots, B_{L-1}$ – точки, $B_L, \dots, B_{N-1}$ – кривые, $1 \leq L < N$.

На множестве индексов $\{1, \dots, N\}$ можно ввести структуру ориентированного графа: вершины j и i соединены стрелкой (от j к i), если $j > i$ и B_{j-1} содержится в E_i^{j-1} (верхние индексы обозначают собственный прообраз на соответствующем этаже). Пусть r_i – количество путей из вершины N в вершину i . Эти числа связаны соотношением

$$r_i = \sum_{j \rightarrow i} r_j. \quad (7)$$

Положим также

$$\begin{aligned} \nu_i &= \text{mult}_{B_{i-1}} |D|^{i-1}, \\ \delta_i &= \text{codim } B_{i-1} - 1. \end{aligned}$$

Наконец, пусть $\Sigma_0 = \sum_{i=1}^L r_i$, $\Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^N r_i$. Тогда $\nu = \sum_{i=1}^N r_i \nu_i$ и $\delta = 2\Sigma_0 + \Sigma_1$.

Условие на максимальную особенность записывается в виде неравенства Нёте-ра–Фано–Исковских:

$$e = \nu - n\delta = \sum_{i=1}^N r_i \nu_i - 2n\Sigma_0 - n\Sigma_1 > 0,$$

а так как $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_N$, то $\nu_1 > n$.

Отсюда, кстати, следует, что S гладкая в точке B_0 . Действительно, иначе $\text{mult}_{B_0} S = 2$, и S получается как двойное накрытие плоскости с ветвлением в квартике, имеющей двойную точку над точкой B_0 . Пусть l – общая прямая на плоскости, проходящая через эту особую точку квартики, и C – ее прообраз на S . Тогда приходим к противоречию:

$$2n = D \circ C \geq \text{mult}_{B_0} C \cdot \text{mult}_{B_0} |D| = 2\nu_1 > 2n.$$

Положим теперь $L' = \max\{i \leq L : B_{i-1} \in S^{i-1}\}$, тогда

$$\Sigma'_0 \stackrel{\text{def}}{=} r_1 + \dots + r_{L'} \leq \nu(S).$$

Положим $m_{0,i}^v = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^v)^i$, $m_{0,i}^h = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^h)^i$. Очевидно, $m_{0,i}^h$ и $m_{0,i}^v$ не возрастают с увеличением i . Кроме того, $m_{0,1}^h \leq 2n^2 - \alpha_1 - \alpha_2$.

Условие на сверхмаксимальную особенность переписывается в виде

$$\Sigma'_0 m_{0,1}^v < \Sigma'_0 \left(\frac{2n^2 + \alpha_1 + \alpha_2}{p} \right) + 4ne.$$

Пусть точка B_0 не лежит на s_1 или s_2 . Тогда в следующем неравенстве, обычным образом выводимом из неравенства Нётера–Фано–Исковских, можно не учитывать вклад этих кривых:

$$\Sigma_0 m_{0,1}^h + \Sigma'_0 m_{0,1}^v \geq \sum_{i=1}^N r_i \nu_i^2 \geq \frac{(2n\Sigma_0 + \Sigma_1 + e)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}. \quad (8)$$

Подставляя сюда полученные оценки на $m_{0,1}^h$ и $m_{0,1}^v$ и учитывая, что $p \geq 1$ и $\Sigma_0 \geq \Sigma'_0$, получаем

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1)(4n^2\Sigma_0 + 4ne) > 4n^2(\Sigma_0 + \Sigma_1)\Sigma_0 + n^2\Sigma_1^2 + 2ne(2\Sigma_0 + \Sigma_1) + e^2$$

и приходим к противоречию:

$$(n\Sigma_1 - e)^2 < 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Только что проведенная часть доказательства почти не отличается от рассуждений работы [6]. Как и следовало ожидать, трудности будут связаны с особыми точками двойного конуса.

Пусть теперь $B_0 \in s_1$ (случай $B_0 \in s_2$ разбирается аналогично). Тогда в левой части неравенства (8) надо учесть вклад прямой s_1 (т.е. прибавить $\alpha_1\Sigma_0$). После элементарных преобразований получим

$$(\Sigma_1 n - e)^2 + \Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1) \left[2n^2 - \left(\frac{2n^2 + \alpha_1}{p} \right) \cdot \frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} \right] < 0,$$

откуда

$$\frac{2n^2 + \alpha_1}{p} > \frac{2n^2\Sigma_0}{\Sigma'_0}.$$

Так как $\Sigma'_0 \leq \Sigma_0$ и $\alpha_1 \leq 2n^2$, то $p = 1$ и

$$\Sigma'_0 > \frac{1}{2}\Sigma_0. \quad (9)$$

Таким образом, только один слой $\pi\nu$ может содержать максимальные особенности линейной системы D .

Оставшиеся случаи заведомо относятся к случаям бесконечно близких максимальных особенностей, так как точка B_0 уже сидит *над* одной из особых точек двойного конуса.

Так как максимальные особенности лежат только в одном слое S , из (6) следует *усиленное* неравенство Нётера–Фано–Исковских для максимальной особенности над точкой $B_0 \in s_1$:

$$\nu(|D|) > n\delta + m\nu(S),$$

t.e.

$$\sum_{i=1}^N r_i \nu_i > 2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + m\Sigma'_0. \quad (10)$$

Введем число

$$q = \max\{i = 1, \dots, L : B_{i-1} \in s_1^{i-1}\}.$$

Пусть $q > 1$ (а значит, и $L > 1$). Тогда, поскольку $s_1^1 \cap S^1 = \emptyset$, имеем $\nu(S) = \Sigma'_0 = r_1$.

Предположим, что $q \geq 3$. Тогда $B_1 \in s_1^1$, $B_2 \in s_1^2$, поэтому $B_2 \notin E_1^2$, откуда $r_2 = r_1$ по формуле (7). Но тогда

$$\frac{\Sigma'_0}{\Sigma_0} = \frac{r_1}{r_1 + r_2 + \cdots} \leq \frac{1}{2},$$

что противоречит неравенству (9).

Прежде чем двигаться дальше, напомним некоторые обозначения метода максимальных особенностей [5]. Пусть D_1, D_2 – общие элементы линейной системы $|D|$, и

$$D_1 \circ D_2 = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + Z_0^h + Z_0^v.$$

где Z_0^h и Z_0^v – горизонтальный и вертикальный циклы, $s_1, s_2 \notin \text{supp } Z_0^h$. Для их собственных прообразов на i -ом этаже положим

$$D_1^i \circ D_2^i = \alpha_1 s_1^i + \alpha_2 s_2^i + (Z_0^h)^i + (Z_0^v)^i + Z_1^i + \cdots + Z_{i-1}^i + Z_i,$$

где $Z_k \subset E_k$ – кривая; степень этой кривой, т.е. индекс пересечения с прямой, если $E_k \simeq \mathbb{P}^2$, или с общим слоем, если E_k – линейчатая поверхность, обозначим d_k .

Положим $m_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \text{mult}_{B_{i-1}} Z_i^{j-1}$.

Сделаем также одно очень полезное замечание технического характера: коэффициенты $r_1, \dots, r_L$ можно уменьшить. С этого момента мы будем считать, что они определены следующим образом:

$$r_i = \sum_{\substack{j \rightarrow i \\ i \leq L}} r_j. \quad (11)$$

Итак, положим $q = 2$. В соответствии с [5, § 7], можно записать

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + m_{0,1}^h + m_{0,1}^v = \nu_1^2 + d_1, \\ \alpha_1 + m_{0,2}^h + m_{1,2} = \nu_2^2 + d_2, \\ \dots\dots\dots \\ m_{0,L}^h + m_{1,L} + \dots + m_{L-1,L} = \nu_L^2 + d_L. \end{array} \right.$$

После обычных преобразований с применением квадратичного неравенства получим

$$(r_1 + r_2)\alpha_1 + \sum_{i=1}^L m_{0,i}r_i + r_1 m_{0,1}^v > \frac{(2n\Sigma_0 + n\Sigma_1 + mr_1)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}.$$

Правая часть неравенства больше, чем $4n^2\Sigma_0 + 4mnr_1$. Подставляя в левую часть оценки

$$\begin{aligned} m_{0,1}^h + m_{0,1}^v &\leq \deg_{(-K_V)}(D_1 \circ D_2) = 4n^2 + 4mn, \\ m_{0,1}^h &\leq 2n^2 - \alpha_1, \end{aligned} \quad (12)$$

мы приходим к противоречию:

$$(r_1 + r_2)\alpha_1 > 2n^2r_1 + \alpha_1r_1,$$

т.е. $\alpha_1 > 2n^2$.

Предположим теперь, что $q = 1$ и B_1 — точка (т.е. $L > 1$), не лежащая на S^1 . Аналогично предыдущему случаю получаем неравенство

$$r_1\alpha_1 + \sum_{i=1}^L m_{0,i}^h r_i + r_1 m_{0,1}^v > 4n^2\Sigma_0 + 4mnr_1,$$

откуда, используя оценки (12), снова приходим к противоречию:

$$r_1\alpha_1 + 2n^2 \sum_{i=2}^L r_i \geq r_1\alpha_1 + \sum_{i=2}^L r_i m_{0,i}^h > 4n^2 \sum_{i=2}^L r_i,$$

т.е. $r_1\alpha_1 > 2n^2 \sum_{i=2}^L r_i \geq 2n^2r_1$.

Остались две возможности: либо $B_1 \in S^1$, либо $B_1 \subset E_1$ — прямая, причем в последнем случае $B_1 \not\subset S^1$: неравенства (10) дают $\nu_1 + \nu_2 > 2n$, но, если $B_1 \subset S^1$, для собственного прообраза кривой $C \in |-K_S - B_0|$ получаем противоречие:

$$C^1 \circ D^1 = 2n - \nu_1 \geq \nu_2.$$

Итак, в точке B_0 мы имеем неравенство для кратностей циклов из $D_1 \circ D_2$:

$$\alpha_1 + m_{0,1}^h + m_{0,1}^v > \frac{(2nr_1 + n\Sigma_1 + mr_1)^2}{(r_1 + \Sigma_1)r_1} = 4n^2 + 4mn + \varphi(\Sigma_1),$$

где

$$\varphi(\Sigma_1) = \frac{(n\Sigma_1 - mr_1)^2}{(r_1 + \Sigma_1)r_1}.$$

Пусть $2\theta = \nu_1 + \nu_2$. Из неравенства (10) следует

$$\Sigma_1 > \frac{2n - \theta}{\theta - n}r_1 + \frac{m}{\theta - n}r_1.$$

Отсюда, так как производная $\varphi'(\Sigma_1) > 0$, получаем

$$\varphi(\Sigma_1) > \varphi\left(\frac{2n - \theta}{\theta - n}r_1 + \frac{m}{\theta - n}r_1\right) = \frac{(2n - \theta)^2}{\theta - n}(n + m).$$

ЛЕММА. *Имеет место неравенство:*

$$\nu_1 + \nu_2 \leq \frac{5}{2}n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tilde{B}_1 = B_1$, если B_1 — точка, и $\tilde{B}_1 = B_1 \cap S^1$, если прямая.

Пусть $L \in |-K_S|$ — элемент, проходящий через точки $B_0, \tilde{B}_1$ (вторая бесконечно близка первой). Пусть M приводима, тогда

$$L = L_1 + L_2,$$

где L_1, L_2 — пара сопряженных (-1) -прямых, из которых только одна, например, L_1 , проходит через точки $B_0, \tilde{B}_1$ (напомним, что по условию (A) S^1 неособа вдоль этих прямых). Имеем (см. [5, лемма 6.1])

$$D^1 \circ S^1 = (D \circ S)^1 + mE_{S^1}, \quad (13)$$

где $E_{S^1} = E_1 \cap S^1, m \geq 0$. Положим

$$D|_S = C + k_1 L_1 + k_2 L_2,$$

где C — некоторый (эффетивный) дивизор на S , $L_1, L_2 \not\subset \text{supp } C$, и пусть также $\nu = \text{mult}_{B_0}(D|_S), \tilde{\nu} = \text{mult}_{\tilde{B}_1}(D^1|_{S^1})$. Тогда

$$\begin{aligned} \nu &= \text{mult}_{B_0} C + k_1, \\ \tilde{\nu} &= \text{mult}_{\tilde{B}_1} C^1 + k_1 + m. \end{aligned}$$

Тогда

$$\nu + \tilde{\nu} = \text{mult}_{B_0} C + \text{mult}_{\tilde{B}_1} C^1 + 2k_1 + m \leq C \circ L_1 + 2k_1 + m.$$

Так как $C \sim n(-K_S) - k_1 L_1 - k_2 L_2$, то $C \circ L_1 = n + k_1 - 2k_2$, так что

$$\nu + \tilde{\nu} \leq n + 3k_1 - 2k_2 + m.$$

Кроме того, $C \circ L_2 = n - 2k_1 + k_2 \geq 0$, и тогда

$$\nu + \tilde{\nu} \leq \frac{5}{2}n + m.$$

Остается учесть, что $\nu = \nu_1 + m$ из разложения (13) и $\tilde{\nu} \geq \nu_2$.

Случай, когда L неприводима, еще проще. Пусть $D|_S = C + kL$. Как и выше, мы имеем

$$\nu + \tilde{\nu} \leq C \circ L + 2k + m,$$

но $C \circ L = 2n - 2k$. Лемма доказана.

Согласно лемме, $\varphi(\Sigma_1) > 2n^2$, так что

$$\alpha_1 + m_{0,1}^h + m_{0,1}^v > 6n^2 + 4mn.$$

Но $m_{0,1}^h + m_{0,1}^v \leq 4n^2 + 4mn$, и мы приходим к противоречию: $\alpha_1 > 2n^2$.

Утверждение, сформулированное в § 4, доказано.

§ 6. Максимальные кривые

Итак, мы доказали, что линейная система $|D| \subset |-nK_V + mF_1|$ на V не может иметь максимальных особенностей над точками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) $|D|$ может иметь максимальные особенности только в сечениях морфизма $\pi_V: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, не содержащихся в дивизоре ветвления.
(ii) Если $|D| \subset |-nK_V|$, то максимальная кривая обязана быть прямой.
(iii) $|D|$ не может иметь максимальные особенности одновременно в двух кривых (включая бесконечно близкий случай).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Можно воспользоваться доказательством леммы 4.1 в работе [6]; случай вертикальных кривых разобран там же.

(ii) Пусть $|D| \subset |-nK_V|$, B – максимальная кривая. Согласно (i), класс B в $A_{\mathbb{Q}}^2$ есть $s + \alpha f$, $\alpha \geq 0$. Пусть $\nu = \text{mult}_B |D|$. Положим

$$D_1 \circ D_2 = \varepsilon B + C,$$

где C – эффективный 1-цикл, $B \not\subset \text{supp } C$ и $\varepsilon \geq \nu^2$. Тогда для общего элемента $H \in |-K_V|$ имеем

$$4n^2 = D_1 \circ D_2 \circ H \geq B \circ H = \alpha \varepsilon,$$

откуда $\alpha < 4$. Нам требуется доказать, что α равно 0 или 1.

Пусть не так. Так как B – сечение, не содержащееся в дивизоре ветвления, то существует сопряженная ему относительно автоморфизма двойного накрытия кривая B^* . Кроме того, образ B на конусе Q есть либо коника (при $\alpha = 2$), либо пространственная кубическая кривая (при $\alpha = 3$).

Покажем, что линейная система $|-2K_V - B|$ после раздутия B не имеет базисных кривых. Для этого достаточно убедиться, что существует элемент $G \in |-2K_V|$, разделяющий слои двойного накрытия. Но это следует из теоремы Римана–Роха для $(-2K_V)$. Действительно, так как антиканонический дивизор big и nef , то $\chi(V, \mathcal{O}(-2K_V)) = H^0(V, \mathcal{O}(-2K_V))$. Далее, $c_2(V) = 10s + 24f$, и прямой подсчет дает

$$H^0(V, \mathcal{O}(-2K_V)) = 15,$$

в то время как на конусе $H^0(Q, \mathcal{O}(2L)) = 14$, где L – класс гиперплоского сечения (напомним, что $K_V = (\pi \circ \varphi_V)^*(-L)$).

Пусть теперь G – общий элемент из $|-2K_V - B|$, $\psi: V' \rightarrow V$ – раздутие кривой B , E – исключительный дивизор. Тогда, если $\alpha = 2$,

$$\psi^{-1}D_1 \circ \psi^{-1}D_2 \circ \psi^{-1}G = 8n^2 - 4n\nu - 4\nu^2 < 0$$

и при $\alpha = 3$

$$\psi^{-1}D_1 \circ \psi^{-1}D_2 \circ \psi^{-1}G = 8n^2 - 6n\nu - 5\nu^2 < 0.$$

Но это противоречит условию $\psi^{-1}D_1 \circ \psi^{-1}D_2 \circ \psi^{-1}G \geq 0$.

Таким образом, B должна быть горизонтальной прямой.

(iii) Пусть l_1 и l_2 – две максимальные кривые, ν_1 и ν_2 – соответствующие кратности $|D|$ в них. Почти в каждом слое $S \in |F_1|$ можно найти кривую $C_S \in |-K_S|$, проходящую через точки пересечения S и этих прямых и не лежащую в базисном множестве системы $|D|$. Но тогда получаем противоречие:

$$2n = C_S \circ D \geq \nu_1 + \nu_2 > 2n.$$

Совершенно аналогичное этому рассуждение проходит и в бесконечно близком случае, т.е. когда l_2 лежит над l_1 . Предложение доказано.

Заметим, что тем самым доказана и основная теорема: если l – максимальная кривая, то, применяя к V (а значит, и к X) бирациональный автоморфизм τ_l , τ_1 или τ_2 (если l совпадает с s_1 или s_2) и опуская линейную систему $|D'| = \tau_l^*|D|$ на X , мы получим $\alpha(X, |D'|) < \alpha(X, |D|)$. Возможная неоднозначность выбора гладкой модели в случае $|D| \subset |-nK_X|$ устраняется пунктом (ii) доказанного только что утверждения: если максимальная особенность на X сконцентрирована в прямой, то надо выбрать ту гладкую модель, относительно которой эта прямая горизонтальна, если же максимальная особенность – над особой точкой, то безразлично, какую модель – U или V – выбрать, поскольку откручивающие автоморфизмы τ_1 и τ_2 одинаково действуют на обе структуры расслоения.

§ 7. Доказательство следствий

(1) Предположим, что X рационально, т.е. существует бирациональное отображение

$$\chi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

По доказанной теореме, существует такое бирациональное отображение χ' между X и $\mathbb{P}^3$, что

$$\alpha(X, (\chi')^{-1}\mathcal{H}) \leq \alpha(\mathbb{P}^3, \mathcal{H}) = \frac{1}{4},$$

где $\mathcal{H}$ – полная линейная система гиперплоскостей в $\mathbb{P}^3$. Тогда порог присоединения $\alpha(X, (\chi')^{-1}\mathcal{H}) = 0$, т.е. линейная система $(\chi')^{-1}\mathcal{H}$ есть либо $|F_1|$, либо $|F_2|$, что невозможно по соображениям размерности.

Точно такие же соображения показывают, что X не может быть бирационально изоморфно расслоению на коники: в качестве линейной системы достаточно взять полную линейную систему поднятого с базы очень обильного дивизора.

(2) Пусть дан бирациональный автоморфизм

$$\chi: X \dashrightarrow X.$$

Поднимем его на V :

$$\chi_V: V \dashrightarrow V.$$

Пусть $\mathcal{H} = |-nK_V + mF_1|$, $n, m > 0$, – очень обильная линейная система (например, $|n(-K_V + F_1)|$ при достаточно больших n).

Согласно теореме, существует бирациональный автоморфизм $\tilde{\chi}_V$ такой, что линейная система $|D| = \mu^{-1}\mathcal{H}$, где $\mu = \chi_V \circ \tilde{\chi}_V$, имеет порог присоединения $n_1 = \alpha(X, |D|)$ не больший, чем $n = \alpha(X, \mathcal{H})$.

Пусть $|D| = |-n_1K_V + aF_1|$. Воспользуемся теоремой 4.2 работы [9].

ТЕОРЕМА (Corti). (i) $n_1 \geq n$;

(ii) если $K_V + \frac{1}{n_1}|D|$ канонична и численно эффективна, то μ – изоморфизм.

Итак, $n = n_1$ в нашем случае. Покажем, что $a \geq 0$. Но легко видеть, что если $a < 0$, то $\dim |D| < \dim \mathcal{H}$, чего быть не может.

Таким образом, $|D|$ удовлетворяет условию (ii) этой теоремы, т.е. μ – изоморфизм. Опуская все на X , мы видим, что $\chi \circ \tilde{\chi}$ – изоморфизм.

Однозначность процесса открутки, доказанная в предложении в § 6, указывает на отсутствие соотношений в группе $B(X)$, что влечет (3).

Наконец, для доказательства формулы (4) надо заметить, что любой регулярный автоморфизм двойного конуса индуцирован регулярным автоморфизмом конуса Q , сохраняющим дивизор ветвления R_Q . При общем выборе кватрики R таких автоморфизмов конус не имеет. Что касается групп $\text{Bir}(V_\eta)$ и $\text{Bir}(U_\eta)$, то они полностью описаны в работе [10, теорема 2.6].

Доказательство закончено.

Список литературы

1. *Исковских В. А., Манин Ю. А.* Трехмерные кватрики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
2. *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–236.
3. *Пузлик А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной кватрики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). № 4. С. 472–496.
4. *Пузлик А. В.* Замечание к теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной кватрике // Труды МИРАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
5. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities // Warwick Preprints: 31/1996.
6. *Пузлик А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
7. *Исковских В. А.* О проблеме рациональности для трехмерных многообразий, расслоенных на поверхности Дель Пеццо // Труды МИРАН. 1995. Т. 208. С. 128–138.
8. *Гриненко М. М.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной двойной квадратики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 1. С. 101–118.
9. *Corti A.* Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
10. *Исковских В. А.* Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 3–72.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
05.01.1998