Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Гуцин, Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 7, 53–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 10:48:10

УДК 517.9

А. К. Гушин

Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

Работа посвящена выделению свойств решения задачи Дирихле с граничной функцией из L_2 для эллиптического уравнения второго порядка, характеризующих его поведение вблизи границы рассматриваемой области. В частности, исследуется поведение интегралов от его производных по мерам, существенная часть которых сосредоточена на приближающихся к границе множествах различной размерности. Описание дается в терминах принадлежности специальным функциональным пространствам, отражающих внутреннюю гладкость решения и некоторые его интегральные свойства. Полученные результаты применяются к изучению фредгольмовости широкого класса нелокальных задач, в которых значения решения на границе связаны со значениями во внутренних точках самого решения и его производных.

Библиография: 29 названий.

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \quad (2)$$

с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$; Q — ограниченная область $\mathbb{R}_n$ с гладкой (класса C^1) границей; симметрическая матрица $(a_{i,j})$, элементы которой являются измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$0 < \gamma = \text{const} \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \quad (3)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n$, $|\xi| = 1$ и п.в. $x \in Q$.

Хорошо известно, см. [1]–[3], что решение уравнения (1) непрерывно по Гёльдеру с некоторым показателем $\alpha_0 = \alpha_0(n, \gamma) > 0$ внутри рассматриваемой области Q ; при дополнительных условиях внутренней гладкости коэффициентов уравнения решение будет гладким внутри Q . Для негладких граничных функций свойства

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00185а).

гладкости, конечно, разрушаются при приближении к границе. Исследованию поведения вблизи границы решения и его дифференциальных характеристик, в частности, интегралов от производных (или от их разностных отношений) по мерам, существенная часть которых сосредоточена на приближающихся к границе множествах различной размерности, посвящена настоящая работа. Основная трудность заключается в отыскании терминов, допускающих адекватное описание изучаемых свойств решений, в том числе, позволяющих придать точный (и соответствующий рассматриваемой задаче) смысл понятию “близости” мер, по которым берутся интегралы от производных, и их “приближению” к границе. В некоторой степени эта задача была решена в работах [4]–[6]. В них были установлены свойства решения, характеризующие принятие им граничного значения u_0 и включающие, см. [6], его внутреннюю непрерывность; истоки использовавшихся при этом понятий лежат в известных работах Л. Карлесона [7] и Л. Хермандера [8].

В настоящей работе описание интересующих нас свойств решений дается в терминах принадлежности специальным функциональным пространствам, которые объединяют в себе как внутреннюю гладкость решений, так и его интегральные характеристики. Построению и изучению этих пространств посвящена существенная часть статьи; большое внимание уделяется обсуждению естественности предлагаемых понятий. Включение в описание дифференциальных характеристик решения потребовало изменения точки зрения на изучаемые объекты. Элементы введенных пространств интерпретируются как функции, определенные на некоторых классах обобщенных функций; все функции из данного пространства имеют общую область определения, наделенную структурой банахова пространства. Такое искусственное расширение (внутренним точкам Q соответствуют δ -функции с источниками в этих точках) области определения, конечно, усложняет объект исследования. Но при этом многие, в том числе, и интересующие нас свойства становятся более прозрачными. Так гладкость функции характеризуется ее областью определения: чем шире область определения функции, тем более гладкой эта функция является. Исследуемые интегралы – это значения функции при соответствующих значениях аргумента, что существенно упрощает получение их оценок.

На области определения вводится новая, более слабая, чем норма разности, метрика, учитывающая близость носителей сравниваемых обобщенных функций. Доказанная в §1 непрерывность рассматриваемых функций на введенном метрическом пространстве (теорема 1) дает описание близости значений функции при близких значениях аргумента, в том числе, и интегралов от самого решения и от его производных. Отметим, что сужение этого утверждения на множество значений аргумента, имеющих точечный носитель (и единичную норму), совпадает со свойством внутренней гладкости. Близость аргумента к границе характеризуется расстоянием до подпространства тех обобщенных функций, носители которых сосредоточены на границе, и его нормой.

Предлагаемая интерпретация функции (как линейный функционал на некотором пространстве обобщенных функций), по существу, не является новой. Такого типа расширение традиционного в теории обобщенных функций подхода имеется, например, в работах [9], [10]. Существенным здесь является выбор области определения, делающий эти пространства достаточно хорошо приспособленными к описанию изучаемых свойств решения, и введение на ней метрики, соответствующей

классическим свойствам гладкости.

Под решением задачи Дирихле (1), (2) мы будем понимать $(n - 1)$ -мерно непрерывное решение, т.е. удовлетворяющую в Q уравнению (1) (понимаемому как равенство обобщенных функций) функцию из $W_{2,\text{loc}}^1 \cap C_{n-1}(\overline{Q})$, след на ∂Q которой совпадает с заданной функцией $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Такое понятие решения было введено в работе автора [4]; там же была введена шкала функциональных пространств $C_s(\overline{Q})$, $0 \leq s \leq n$, соединяющая пространства $C(\overline{Q}) = C_0(\overline{Q})$ и $L_2(Q) = C_n(\overline{Q})$.

Пространство $C_s(\overline{Q})$ определяется как пополнение непрерывных в $\overline{Q}$ функций по норме, квадрат которой оценивается снизу и сверху функционалом

$$f(v) = \int_0^\infty \mathcal{M}_s(\{x \in \overline{Q} : |v(x)|^2 > \lambda\}) d\lambda, \quad \mathcal{M}_s(\mathcal{E}) = \inf \left\{ \sum_i r_i^s, \mathcal{E} \subset \bigcup_i S_{x_i}(r_i) \right\};$$

здесь точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества $\mathcal{E}$ шарами $S_{x_i}(r_i) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x - x^i| \leq r_i\}$. Функции из $C_s(\overline{Q})$ имеют следы на множествах положительной s -мерной меры Хаусдорфа, и эти следы обладают свойством, аналогичным непрерывности по совокупности переменных; подробнее см. [4]. В той же работе в предположении непрерывности по Дини единичной (внешней) нормали ν к границе и коэффициентов уравнения (1) на ∂Q :

$$\begin{aligned} |\nu(x) - \nu(y)| &\leq \omega(|x - y|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in \partial Q, \\ |a_{i,j}(x) - a_{i,j}(y)| &\leq \omega(|x - y|), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q, \end{aligned} \quad (4)$$

с такой монотонной функцией ω , что

$$\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

доказана однозначная разрешимость задачи (1), (2) с произвольной $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и справедливость следующей оценки, характеризующей непрерывную зависимость решения от граничной функции,

$$\|u\|_{C_{n-1}(\overline{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq C \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2. \quad (5)$$

Здесь и далее под $r(x)$ понимается расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q ; через C мы будем обозначать постоянные (вообще говоря, разные), зависящие только от области и коэффициентов уравнения.

Далее в работе мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого особо, условия (4) выполненными. Более того, если рассматриваемый показатель гладкости $\alpha \geq \alpha_0$, то мы будем требовать достаточную внутреннюю гладкость коэффициентов уравнения; подробнее см. § 2, где устанавливается принадлежность решения задачи (1), (2) введенным в § 1 пространствам. Отметим, что для малых значений показателя гладкости α (для $\alpha < \alpha_0$) основные результаты § 1 и § 2 анонсированы в заметке автора [11].

Интерес к задаче Дирихле с квадратично суммируемой граничной функцией определяется, прежде всего, тем хорошо известным обстоятельством, см.,

например, [12], что важное и удобное в применении понятие обобщенного решения (из $W_2^1(Q)$) не является в полном смысле обобщением понятия классического решения: $C(\partial Q)$ не принадлежит $W_2^{1/2}(\partial Q)$. Естественное обобщение этих постановок приводит к задаче с u_0 из $L_2(\partial Q)$. При этом принятие граничного значения (выполнение (2)) можно понимать как предел значений решения на семействе “параллельных границе” поверхностей – решение из $W_{2,\text{loc}}^1$, см. [13], а также [12], [14]. Такая трактовка граничного условия непосредственно связана с классическими теоремами о граничных значениях аналитических, см. [15], [16], и гармонических, см. [17], [18], функций. Более подробное обсуждение этого вопроса и соответствующую библиографию можно найти в работах [4], [19], [20], [13]. В [4] показано, что выбор “параллельных границе” поверхностей не является существенным: решение из $W_{2,\text{loc}}^1$ принадлежит $C_{n-1}(\overline{Q})$ и, тем самым, принимает граничные значения в более жестком, не связанном с выделенным направлением смысле.

Отметим, что пространства $W_2^1(Q)$ и, конечно, $C(\overline{Q})$ вложены в $C_{n-1}(\overline{Q})$; следовательно, обобщенные и классические решения являются $(n-1)$ -мерно непрерывными решениями. Дальнейшее уточнение свойств решения задачи (1), (2) было получено в работе [6]. В ней показано, что решение принадлежит более узкому пространству $C_{n-1}^0(\overline{Q})$, элементы которого одновременно со свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности обладают и классической непрерывностью внутри области. В настоящей работе делается следующий шаг в этом направлении.

Расширение на все $L_2(\partial Q)$ оператора, ставящего в соответствие граничной функции u_0 решение $u = \mathcal{G}u_0 \in C_{n-1}(\overline{Q})$ задачи Дирихле (1), (2) (отметим, что возможность расширения на все $L_2(\partial Q)$ оператора $\mathcal{G}$, действующего из $L_2(\partial Q)$ в $L_2(Q)$, была установлена в работе [21]), и установленные свойства такого решения оказались удобным аппаратом исследования разрешимости широкого класса нелокальных задач, см. [6], [22]. С его помощью нелокальная задача сводится к операторному уравнению в “простом” гильбертовом пространстве $L_2(\partial Q)$ (а не в $C(\partial Q)$ или $W_2^{1/2}(\partial Q)$, как это имеет место в классической и, соответственно, обобщенной постановках). Основное преимущество такого сведения заключается в том, что оператор умножения на характеристическую функцию подмножества (конечно, измеримого) не выводит из этого пространства; более того, он является ортогональным проектором. Заметим, что основанный на таком расширении понятия граничного значения метод позволяет установить фредгольмовость ряда задач, которые в классической постановке не являются не только фредгольмовыми, но даже и нётеровыми, подробнее см. [6].

Доказанные в настоящей работе свойства решения задачи Дирихле позволяют существенно расширить класс поддающихся исследованию нелокальных задач, включить в него задачи, в которых граничные значения искомого решения связаны со значениями во внутренних точках не только самого решения, но и его производных. Этому вопросу посвящен последний параграф работы.

§ 1. Основные функциональные пространства

В этом параграфе мы введем шкалу вложенных друг в друга функциональных пространств $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, характеризующихся показателем гладкости α . Функции из

$\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ являются гладкими до порядка α внутри области Q (принадлежат пространству Гёльдера C^α на любом лежащем в Q компакте), имеют следы на ∂Q из $L_1(\partial Q)$ и принимают свои граничные значения в смысле $(n-1)$ -мерной непрерывности.

1. Приведем сначала ряд соображений, объясняющих основные моменты предлагаемой конструкции. Для этого обратимся к построению пространства $C_{n-1}^0(\overline{Q})$, подробнее см. [6], и покажем, что пространства $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, которые будут введены в этом параграфе, являются его естественными обобщениями.

Пусть μ — мера (борелевская) в $\mathbb{R}_n$ с носителем в $\overline{Q}$. Нам будет удобно рассматривать ее как неотрицательный линейный непрерывный функционал на $C(\overline{Q})$ и как допускающую соответствующую оценку неотрицательную обобщенную функцию с носителем в $\overline{Q}$; эту обобщенную функцию будем также обозначать через μ :

$$\langle \mu, v \rangle = \int_{\mathbb{R}_n} v(x) d\mu(x), \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n).$$

Мера μ называется, см., например, [23], *мерой Карлесона*, если с некоторой постоянной $C = C(\mu)$ выполняется неравенство

$$\mu(S_{x^0}(r)) \leq Cr^{n-1} \quad \text{для всех } r > 0 \text{ и } x^0 \in \partial Q; \quad (1.1)$$

здесь и всюду далее $S_{x^0}(r)$ — замкнутый шар с центром в точке x^0 радиуса r . Точную нижнюю грань множества всех постоянных C , с которыми справедлива оценка (1.1), будем называть *нормой меры Карлесона* μ :

$$\|\mu\| = \sup_{x^0 \in \partial Q, r > 0} \left[\frac{1}{r^{n-1}} \mu(S_{x^0}(r)) \right]; \quad (1.2)$$

отметим, что $\mu(\mathbb{R}_n) = \mu(\overline{Q}) \leq \|\mu\| R_0^{n-1}$ с таким R_0 , что для некоторой $x^0 \in \partial Q$ $Q \subset S_{x^0}(R_0)$. Рассматриваемые меры удобно нормировать условием $\mu(\mathbb{R}_n) = 1$. Далее класс мер Карлесона будем обозначать через $\mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})$. Пространство $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ является пополнением $C(\overline{Q})$ или, что то же самое, пополнением множества сужений на $\overline{Q}$ бесконечно дифференцируемых и финитных в $\mathbb{R}_n$ функций — это множество также будем обозначать через $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ — по норме

$$\|v\|_{C_{n-1}^0(\overline{Q})} = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})} \left\{ \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} |v(x)|^2 d\mu(x) \right\}^{1/2}; \quad (1.3)$$

под $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$, $p \geq 1$, будем понимать пополнение $C(\overline{Q})$ (или $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$) по норме

$$\|v\|_{C_{n-1,p}^0(\overline{Q})} = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})} \left\{ \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} |v(x)|^p d\mu(x) \right\}^{1/p}; \quad (1.3')$$

$$C_{n-1,2}^0(\overline{Q}) = C_{n-1}^0(\overline{Q}).$$

Свойства функций из $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ изучены в работе [6]. Они легко переносятся на случай $p \neq 2, p \geq 1$. Для близких пространств $C_{h,p}(\overline{Q})$, где $h = h(r)$ – произвольная измеряющая функция (здесь $h(r) = r^{n-1}$), аналогичные свойства были установлены в более ранней работе [4]; предложенный там метод доказательства применим и в обсуждаемой ситуации. Здесь мы отметим только одно из этих свойств, дающее описание функций из $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$ в терминах, аналогичных классическому определению непрерывности по совокупности переменных.

Из определения пространства $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$ немедленно следует, что каждая функция u из этого пространства имеет след на носителе произвольной меры Карлесона μ – предел в $L_p(\overline{Q}; \mu)$ приближающей u в $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$ последовательности функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$; будем обозначать этот след через $u|_\mu$. Следы функции из $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$ на близких мерах, как и значения непрерывной функции в близких точках, оказываются близкими. Близость мер и следов на них следует понимать следующим образом.

Меры Карлесона μ и ν (напомним, что мы договорились рассматривать единичные меры) “соединим” мерой ϕ в $\mathbb{R}_{2n}$, проекции которой на n -мерные пространства первых и последних n переменных совпадают, соответственно, с μ и ν , т.е. потребуем, чтобы для всех (борелевских) множеств $G \subset \mathbb{R}_n$ выполнялись равенства

$$\mu(G) = \phi'(G) = \phi(G \times \mathbb{R}_n), \quad \nu(G) = \phi''(G) = \phi(\mathbb{R}_n \times G); \quad (1.4)$$

существование хотя бы одной такой меры ϕ очевидно. Следы $u|_\mu$ и $u|_\nu$ (элементы различных пространств) погружаются в общее пространство $L_p(\overline{Q} \times \overline{Q}; \phi)$.

ЛЕММА 1. Пусть $v \in C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех μ и ν из $\mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})$ и любой меры ϕ , удовлетворяющей условиям (1.4) (ϕ соединяет меры μ и ν) и

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta \quad (1.5)$$

(расстояние между μ и ν вдоль ϕ меньше δ), справедлива оценка

$$\frac{1}{\|\phi'\| + \|\phi''\|} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v|_\mu(x) - v|_\nu(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon \quad (1.6)$$

(расстояние между значениями функции v на этих мерах вдоль ϕ меньше ε).

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет соответствующие рассуждения работы [4], см. также [6].

Отметим, что если взять меру μ , сосредоточенную в точке $x^0 \in Q$, а ν – в точке $y^0 \in Q$ (т.е. $\langle \mu, v \rangle = v(x^0)$, а $\langle \nu, v \rangle = v(y^0)$ для всех $v \in C(\overline{Q})$), то соединяющая их мера (в этом случае она единственна) будет сосредоточена в точке (x^0, y^0) :

$$\iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} w(x, y) d\phi(x, y) = w(x^0, y^0), \quad w \in C(\overline{Q} \times \overline{Q}).$$

При этом расстояние между мерами – левая часть (1.5) – равно расстоянию между точками x^0 и y^0 , а оценка (1.6) принимает вид

$$|v(x^0) - v(y^0)| < [\varepsilon(r^{1-n}(x^0) + r^{1-n}(y^0))]^{1/p}, \quad (1.6')$$

что не только влечет непрерывность каждой функции v из $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$ внутри области Q , но и дает оценку разности ее значений при приближении точек к границе.

Конечно, такое свойство (справедливость оценки (1.6') при $|x^0 - y^0| < \delta$) присуще не только функциям из рассматриваемого пространства. Определенная в $\overline{Q}$ и удовлетворяющая этому свойству (а, следовательно, непрерывная в Q) функция, сужение которой на границу ∂Q принадлежит $L_p(\partial Q)$, не обязана принадлежать $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$. Для $p = 2$ в работе [6] показано, что и добавление требования $v \in C_{n-1}(\overline{Q})$ не обеспечивает принадлежности ее $C_{n-1}^0(\overline{Q})$. Если же потребовать выполнение содержащегося в лемме 1 свойства “непрерывности” на всех мерах Карлесона, то такая функция будет элементом $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$. То есть это свойство “непрерывности” можно принять за другое (эквивалентное) определение принадлежности $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$. Последнее утверждение, как и лемма 1, доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение работы [4], для случая $p = 2$ оно обсуждается в [6].

Остановимся теперь на другой точке зрения на обсуждаемые пространства, которая приведет нас и к пространствам с положительным показателем гладкости.

Пусть ξ – произвольный линейный функционал на пространстве непрерывных в $\overline{Q}$ функций; через φ обозначим задающий его заряд:

$$\langle \xi, v \rangle = \int_{\overline{Q}} v(x) d\varphi(x), \quad v \in C(\overline{Q}).$$

Для произвольного компакта $K \subset \mathbb{R}_n$ обозначим через $\|\xi\|_{[C(\overline{Q};K)]^*}$ норму сужения функционала ξ на подпространство $C(\overline{Q}; K) = \{v \in C(\overline{Q}) : \text{supp } v \subset K \cap \overline{Q}\}$. Будем говорить, что функционал ξ принадлежит пространству $C_{n-1}^0(\overline{Q})$, если с некоторой постоянной $C = C(\xi)$ справедлива оценка

$$\|\xi\|_{[C(\overline{Q}; S_{x^0}(r))]^*} \leq Cr^{n-1} \quad \text{для всех } r > 0 \text{ и } x^0 \in \partial Q; \quad (1.1')$$

точную нижнюю грань таких постоянных будем обозначать через $\|\xi\|_{-0}$.

Заметим, что в определении пространства $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ (в левой части (1.1')) и в определении его нормы норму в $[C(\overline{Q}; S_{x^0}(r))]^*$ можно заменить нормой в $[C(\overline{Q} \cap S_{x^0}(r))]^*$; под действием ξ на непрерывную в $\overline{Q} \cap S_{x^0}(r)$ функцию v мы, естественно, понимаем интеграл по $\overline{Q} \cap S_{x^0}(r)$:

$$\langle \xi, v \rangle = \int_{\overline{Q} \cap S_{x^0}(r)} v(x) d\varphi(x); \quad \|\xi\|_{[C(\overline{Q} \cap S_{x^0}(r))]^*} = \overline{\text{Var}}_{\overline{Q} \cap S_{x^0}(r)} \varphi.$$

Это утверждение вытекает из очевидной оценки

$$\|\xi\|_{[C(\overline{Q}; S_{x^0}(r))]^*} \leq \|\xi\|_{[C(\overline{Q} \cap S_{x^0}(r))]^*}$$

и справедливого для любого $\lambda > 1$ “обратного” неравенства

$$\|\xi\|_{[C(\overline{Q} \cap S_{x_0}(r))]^*} \leq \|\xi\|_{[C(\overline{Q}; S_{x_0}(\lambda r))]^*}.$$

Таким образом, для неотрицательного функционала ξ его принадлежность $C_{n-1}^{-0}(\overline{Q})$ эквивалентна тому, что задающая его мера μ ($\varphi = \mu$) является мерой Карлесона, при этом $\|\xi\|_{-0} = \|\mu\|$.

Покажем, что из сделанного замечания следует равенство

$$\|v\|_{C_{n-1,p}^0(\overline{Q})}^p = \sup_{\xi \in C_{n-1}^{-0}(\overline{Q})} \frac{|\langle \xi, |v|^p \rangle|}{\|\xi\|_{-0}}, \quad v \in C(\overline{Q}); \quad (1.3'')$$

конечно, здесь берутся $\xi \neq 0$; далее нам будет удобно нормировать функционалы условием $\|\xi\|_{[C(\overline{Q})]^*} = 1$, которое для неотрицательных функционалов совпадает с принятой выше нормировкой $\mu(\overline{Q}) = 1$.

Действительно, для неотрицательных функционалов ξ ($\xi = \mu \in \mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})$) имеем

$$\|v\|_{C_{n-1,p}^0(\overline{Q})}^p = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})} \frac{\langle \mu, |v|^p \rangle}{\|\mu\|_{-0}}, \quad v \in C(\overline{Q}).$$

Равенство (1.3'') будет доказано, если показать, что точная верхняя грань в последнем равенстве не увеличивается при замене неотрицательных функционалов $\mu \in \mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})$ произвольными функционалами $\xi \in C_{n-1}^{-0}(\overline{Q})$. А последнее легко получается с помощью разложения Жордана $\varphi = \mu^+ - \mu^-$, соответствующего функционалу ξ заряда φ .

Установим еще один критерий принадлежности функции пространству $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$, который нам понадобится далее.

ЛЕММА 2.

$$v \in C_{n-1,p}^0(\overline{Q}) \iff v \in C_{n-1,1}^0(\overline{Q}) \text{ и } |v|^p \in C_{n-1,1}^0(\overline{Q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО *необходимости* тривиально; оно немедленно следует из очевидных оценок

$$\left[\frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} |v(x)| d\mu(x) \right]^p \leq \frac{(\mu(\overline{Q}))^{p-1}}{\|\mu\|^p} \int_{\overline{Q}} |v(x)|^p d\mu(x) \leq C \|v\|_{C_{n-1,p}^0(\overline{Q})}^p$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} ||v(x)|^p - |u(x)|^p| d\mu(x) \\ & \leq \frac{p}{\|\mu\|} \left[\int_{\overline{Q}} (|v(x)| + |u(x)|)^p d\mu(x) \right]^{1-1/p} \left[\int_{\overline{Q}} |v(x) - u(x)|^p d\mu(x) \right]^{1/p} \\ & \leq p [\|u\| + \|v\|]_{C_{n-1,p}^0(\overline{Q})}^{p-1} \|v - u\|_{C_{n-1,p}^0(\overline{Q})}; \end{aligned}$$

в них $\mu \in \mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})$, $v \in C(\overline{Q})$, $u \in C(\overline{Q})$; $C = R_0^{np-n-p+1}$.

Стандартным приемом доказывается и утверждение о достаточности. Пусть функции v и $|v|^p$ принадлежат $C_{n-1,1}^0(\overline{Q})$. Тогда, как отмечалось выше, они непрерывны внутри Q и их следы на произвольной мере Карлесона μ , в частности, на $(n-1)$ -мерной мере Лебега на ∂Q , принадлежат $L_1(\overline{Q}; \mu)$. Следовательно, $v \in L_p(\overline{Q}; \mu)$; очевидна и конечность нормы (1.3'). Нужно доказать, что функция v приближается в норме (1.3') непрерывными в $\overline{Q}$ функциями.

Для произвольного числа $a > 0$ обозначим через $v^{(a)}$ “срезку” функции v :

$$v^{(a)}(x) = \begin{cases} a & \text{при } v(x) > a, \\ v(x) & \text{при } |v(x)| \leq a, \\ -a & \text{при } v(x) < -a. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция v^a принадлежит пространству $C_{n-1,1}^0(\overline{Q})$, а следовательно, в силу ее ограниченности, и пространству $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$. Покажем, что норма в $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$ от разности $v - v^{(a)}$ стремится к нулю при $a \rightarrow +\infty$. В силу очевидного неравенства

$$|v(x) - v^{(a)}(x)|^p \leq |v(x)|^p - |v^{(a)}(x)|^p, \quad x \in \overline{Q},$$

для этого достаточно доказать стремление к нулю при $a \rightarrow +\infty$ функции

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_{n-1}(\overline{Q})} \left\{ \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} [|v(x)|^p - |v^{(a)}(x)|^p] d\mu(x) \right\}.$$

Пусть $\{w_k\}$ — последовательность непрерывных в $\overline{Q}$ функций, сходящаяся в $C_{n-1,1}^0(\overline{Q})$ к $|v|^p$ (по условию $|v|^p \in C_{n-1,1}^0(\overline{Q})$). Так как для любого $a > 0$, очевидно,

$$\| [|v^{(a)}|^p - w_k^{(a^p)}] \|_{C_{n-1,1}^0(\overline{Q})} \leq \| |v|^p - w_k \|_{C_{n-1,1}^0(\overline{Q})},$$

то для произвольной меры Карлесона μ имеем оценку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} [|v(x)|^p - |v^{(a)}(x)|^p] d\mu(x) \\ & \leq \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} | |v(x)|^p - w_k(x) | d\mu(x) \\ & \quad + \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} |w_k(x) - w_k^{(a^p)}(x)| d\mu(x) + \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} |w_k^{(a^p)}(x) - |v^{(a)}(x)|^p| d\mu(x) \\ & \leq 2 \| |v|^p - w_k \|_{C_{n-1,1}^0(\overline{Q})} + \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\overline{Q}} |w_k(x) - w_k^{(a^p)}(x)| d\mu(x). \end{aligned}$$

Выбирая сначала достаточно большой номер k , а затем по нему значение $a > \max_{x \in \overline{Q}} |w_k(x)|^{1/p}$ (при этом $w_k(x) \equiv w_k^{(a^p)}(x)$), получаем доказываемое утверждение.

2. Перейдем теперь к построению пространств с положительным показателем гладкости. В основе предлагаемой конструкции лежат весовые пространства Гёльдера, по существу совпадающие с используемыми в оценках “внутренних” норм классического решения; эти пространства играют такую же роль, что и пространство $C(\overline{Q})$ в построении пространств $C_{n-1,p}^0(\overline{Q})$.

Возьмем некоторое $\alpha > 0$ и определим на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ (напомним, что так мы договорились обозначать множество сужений на $\overline{Q}$ бесконечно дифференцируемых финитных в $\mathbb{R}_n$ функций) норму

$$\begin{aligned} \|v\|_{C^\alpha(Q)} = & \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \sup_{x \in Q} r^{|l|}(x) |D^l v(x)| \\ & + \sum_{|l| = [\alpha]} \sup_{\substack{(x,y) \in Q \times Q \\ x \neq y}} r^\alpha(x,y) \frac{|D^l v(x) - D^l v(y)|}{|x - y|^{\{\alpha\}}}; \end{aligned} \quad (1.7)$$

здесь, как обычно, $[\alpha]$ — целая часть α , $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть α , $l = (l_1, \dots, l_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами, $|l| = l_1 + \dots + l_n$; $r(x, y) = \min\{r(x), r(y)\}$ (напомним, что $r(x)$ — расстояние от точки $x \in Q$ до границы области Q); при целых α последнее слагаемое опускается. Через $C^\alpha(Q)$ будем обозначать замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ по этой норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При целых значениях показателя гладкости α норма (1.7) отличается от обычно используемых во внутренних нормах. Поэтому мы будем далее, при рассмотрении решений задачи (1), (2), предполагать (при $\alpha \geq \alpha_0$) выполнение условий на коэффициенты уравнения, гарантирующих справедливость для решений $u = \mathcal{G}u_0$ с непрерывными граничными функциями u_0 оценки внутренней нормы с некоторым показателем $\beta > \alpha$; такие условия можно найти, например, в [24]. Это предположение позволяет не только использовать (при $u_0 \in C(\partial Q)$) нужную нам оценку

$$\|u\|_{C^\alpha(Q)} \leq C \|u\|_{C(\overline{Q})} \quad (1.8)$$

и для натуральных α (впрочем, мы можем тогда вообще не рассматривать этот случай), но и иметь дело с пространствами, в которых $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ образует всюду плотное множество.

В силу интерполяционных неравенств (см., например, [24]) в норме (1.7) можно убрать промежуточные члены, оставив только норму в $C(\overline{Q})$ и последнюю сумму. Более того, если $\alpha \in (0, 1)$, то можно убрать и первое слагаемое, несколько изменив вид последнего. А именно, для $v \in C^\alpha(Q)$, $0 < \alpha < 1$, справедливы оценки

$$\frac{1}{3} \|v\|_{C^\alpha(Q)} \leq \|v\|'_{C^\alpha(Q)} = \sup_{(x,y) \in Q \times Q, x \neq y} \frac{|r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \|v\|_{C^\alpha(Q)}. \quad (1.9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \|v\|'_{C^\alpha(Q)} &= \sup_{r(x) \leq r(y)} \frac{|r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &\leq \sup_{r(x) \leq r(y)} \left[r^\alpha(x) \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} \right] + \sup_{r(x) \leq r(y)} \left[v(y) \frac{|r^\alpha(x) - r^\alpha(y)|}{|x - y|^\alpha} \right] \\
 &\leq \sup_{\substack{(x,y) \in Q \times Q \\ x \neq y}} \left[r^\alpha(x,y) \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} \right] + \|v\|_{C(\overline{Q})} = \|v\|_{C^\alpha(Q)};
 \end{aligned}$$

а так как

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{C(\overline{Q})} &= \sup_{x \in Q} \left[|v(x)| r^\alpha(x) \sup_{y \in \partial Q} \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right] \\
 &= \sup_{x \in Q, y \in \partial Q} \frac{|r^\alpha(x)v(x)|}{|x - y|^\alpha} = \sup_{x \in Q, y \in \partial Q} \frac{|r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &\leq \sup_{\substack{x \in Q, y \in \overline{Q} \\ x \neq y}} \frac{|r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)|}{|x - y|^\alpha} = \|v\|'_{C^\alpha(Q)},
 \end{aligned}$$

то справедлива и оценка $\|v\|'_{C^\alpha(Q)}$ снизу:

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{C^\alpha(Q)} &= \|v\|_{C(\overline{Q})} + \sup_{r(x) \leq r(y)} \left[r^\alpha(x) \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} \right] \\
 &\leq \|v\|_{C(\overline{Q})} + \sup_{r(x) \leq r(y)} \frac{|r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &\quad + \sup_{r(x) \leq r(y)} \left[v(y) \frac{|r^\alpha(x) - r^\alpha(y)|}{|x - y|^\alpha} \right] \\
 &\leq 2\|v\|_{C(\overline{Q})} + \|v\|'_{C^\alpha(Q)} \leq 3\|v\|'_{C^\alpha(Q)}.
 \end{aligned}$$

Отметим простое, но важное для дальнейшего свойство нормы в $C^\alpha(Q)$:

$$u \in C^\alpha(Q), \quad v \in C^\alpha(Q) \implies uv \in C^\alpha(Q); \quad (1.10)$$

при этом

$$\|uv\|_{C^\alpha(Q)} \leq C\|u\|_{C^\alpha(Q)}\|v\|_{C^\alpha(Q)}. \quad (1.11)$$

Оценка (1.11) нормы произведения функций хорошо известна, см. [24], а возможность приближения произведения гладкими функциями вытекает из очевидного неравенства

$$\|uv - u_k v_k\|_{C^\alpha(Q)} \leq C\|u\|_{C^\alpha(Q)}\|v - v_k\|_{C^\alpha(Q)} + C\|v_k\|_{C^\alpha(Q)}\|u - u_k\|_{C^\alpha(Q)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Далее мы будем пользоваться “срезающей” функцией специального вида и вытекающей из (1.11) оценкой ее произведения на произвольную функцию из $C^\alpha(Q)$.

Пусть δ — произвольное положительное число, а $Q_\delta = \{x \in Q : r(x) > \delta\}$. Через ω_δ будем обозначать бесконечно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega_\delta(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}_n; \quad \text{supp } \omega_\delta \subset \overline{Q_{5\delta/8}}; \quad \omega_\delta(x) = 1 \text{ при } x \in Q_{7\delta/8}; \\ \sup_{x \in Q} |D^l \omega_\delta(x)| \leq C_{|l|} \delta^{-|l|} \quad \text{для всех } l = (l_1, \dots, l_n); \end{aligned}$$

в качестве такой функции можно взять усреднение (см., например, [12]) характеристической функции множества $Q_{3\delta/4}$ с ядром радиуса $\delta/8$. Тогда для всех $v \in C^\alpha(Q)$ справедлива оценка

$$\|\omega_\delta v\|_{C^\alpha(Q)} \leq C \|v\|_{C^\alpha(Q)}, \quad (1.12)$$

в которой постоянная зависит от $\alpha, C_1, \dots, C_{[\alpha]+1}$; далее эти величины будем считать фиксированными и зависимость от них отмечать не будем.

Пусть K — некоторый компакт в $\mathbb{R}_n$, $K \cap Q$ имеет внутренние точки. Обозначим через $C^\alpha(Q; K)$ подпространство $\{v \in C^\alpha(Q) : \text{supp } v \subset K \cap \overline{Q}\}$ пространства $C^\alpha(Q)$. Сужение функционала $\xi \in [C^\alpha(Q)]^*$, $\alpha > 0$, на $C^\alpha(Q; K)$ будем обозначать через $\xi|_K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что функционал $\xi \in [C^\alpha(Q)]^*$ принадлежит пространству $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$, если с некоторой постоянной $C = C(\xi)$ для всех $r > 0$ и $x^0 \in \partial Q$ справедлива оценка

$$\|\xi|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} \leq C r^{n-1};$$

точную нижнюю грань таких постоянных C будем называть *нормой* ξ в $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ и обозначать через $\|\xi\|_{-\alpha}$.

Отметим, что

$$\|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \leq \|\xi\|_{-\alpha} R_0^{n-1}, \quad (1.13)$$

где R_0 — радиус содержащего Q шара с центром в некоторой точке $x^0 \in \partial Q$; будем считать $R_0 \geq 1$.

Кроме того, в силу определения пространства $C^\alpha(Q)$ (как замыкания $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$) функционалы из $[C^\alpha(Q)]^*$, а следовательно, и функционалы из $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ можно рассматривать как обобщенные функции с носителями в $\overline{Q}$; такая точка зрения удобна и далее будет часто использоваться.

3. Остановимся подробнее на случае $\alpha \in (0, 1)$, в котором несложно дать независимое описание всех линейных ограниченных функционалов на $C^\alpha(Q)$ и привести достаточное условие их принадлежности $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$. По-видимому, утверждение об общем виде функционала на $C^\alpha(Q)$ не является новым.

Обозначим через Γ множество таких точек $z = (x, y, t) \in \mathbb{R}_{2n+1}$, что $(x, y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$, $t = t(x, y) = \frac{r^\alpha(x) - r^\alpha(y)}{|x - y|^\alpha}$ при $x \neq y$, $t = 0$ при $x = y \in Q$, а если $x = y \in \partial Q$, то t — произвольное число из отрезка $[-1, 1]$. Очевидно, что Γ — компакт в $\mathbb{R}_{2n+1}$. Для каждой $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ определим функцию $\mathcal{A}v(z)$, $z \in \Gamma$, следующим равенством

$$\mathcal{A}v(z) = \begin{cases} \frac{r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)}{|x - y|^\alpha} & \text{при } x \neq y, \\ 0 & \text{при } x = y \in Q, \\ tv(x) & \text{при } x = y \in \partial Q. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для любой $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ функция $\mathcal{A}v$ непрерывна на Γ : если $z^0 = (x^0, x^0, 0)$ и $x^0 \in Q$, то для $x \neq y$

$$\mathcal{A}v(z) = \frac{r^\alpha(x)[v(x) - v(y)] + v(y)[r^\alpha(x) - r^\alpha(y)]}{|x - y|^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при } z = (x, y, t) \rightarrow z^0,$$

а если $z^0 = (x^0, x^0, t^0)$ и $x^0 \in \partial Q$, то для $x \neq y$

$$\mathcal{A}v(z) = r^\alpha(x) \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|^\alpha} + v(y) \frac{r^\alpha(x) - r^\alpha(y)}{|x - y|^\alpha} \rightarrow v(x^0)t^0 \quad \text{при } z = (x, y, t) \rightarrow z^0;$$

в остальных случаях стремление $\mathcal{A}v(z)$ к $\mathcal{A}v(z^0)$ при $z \rightarrow z^0$ очевидно.

Далее,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v\|_{C(\Gamma)} &= \max_{(x, y, t) \in \Gamma} |\mathcal{A}v(x, y, t)| \\ &= \max \left[\sup_{x \neq y} \frac{r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)}{|x - y|^\alpha}, \sup_{x^0 \in \partial Q} |v(x^0)| \right] \\ &= \max [\|v\|'_\alpha, \|v\|_{C(\partial Q)}]. \end{aligned}$$

В силу замечания 1 $\|\mathcal{A}v\|_{C(\Gamma)}$ задает эквивалентную норму на $C^\alpha(Q)$. Следовательно, замыкание оператора $\mathcal{A}$ (сохраним за ним то же обозначение) осуществляет гомеоморфизм $C^\alpha(Q)$ на подпространство $\mathcal{A}C^\alpha(Q)$ пространства $C(\Gamma)$. Распространяя функционал $\varsigma = (\mathcal{A}^{-1})^* \xi$, $\langle \varsigma, w \rangle = \langle \xi, (\mathcal{A})^{-1}w \rangle$, $w \in \mathcal{A}C^\alpha(Q) \subset C(\Gamma)$, на все $C(\Gamma)$, получаем следующее представление произвольного функционала $\xi \in [C^\alpha(Q)]^*$

$$\begin{aligned} \langle \xi, v \rangle &= \iiint_{\Gamma} \mathcal{A}v(z) d\Phi(z) \\ &= \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}, x \neq y} \frac{r^\alpha(x)v(x) - r^\alpha(y)v(y)}{|x - y|^\alpha} \chi(x, y) d\phi(x, y) \\ &\quad + \int_{\partial Q} v(x)\theta(x) dm(x), \quad v \in C^\alpha(Q), \end{aligned} \tag{1.14}$$

в котором $\Phi(z)$ – соответствующий этому расширению заряд (с носителем на Γ), а меры ϕ и m (в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителем на $\overline{Q} \times \overline{Q}$ и в $\mathbb{R}_n$ с носителем на ∂Q , соответственно) и измеримые относительно соответствующих мер функции χ и θ определены равенствами

$$\begin{aligned} |\chi| &\equiv 1, \quad |\theta| \equiv 1, \\ \iint_{\mathcal{D}} \chi(x, y) d\phi(x, y) &= \Phi(\{(x, y, t) \in \Gamma : (x, y) \in \mathcal{D}, x \neq y\}), \quad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}_{2n}, \\ \int_{\Omega} \theta(x) dm(x) &= \Phi(\{(x, y, t) \in \Gamma : x \in \Omega \cap \partial Q, y = x\}), \quad \Omega \subset \mathbb{R}_n. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что (1.14) задает представление $\xi \in [C^\alpha(Q)]^*$ в виде суммы двух принадлежащих $[C^\alpha(Q)]^*$ функционалов ξ_0 и ξ_b , первый из которых, как легко видеть, является сильным пределом последовательности функционалов (из $[C^\alpha(Q)]^*$) с лежащими внутри Q носителями, а носитель второго лежит на ∂Q .

Выбор меры ϕ и функции χ в представлении (1.14), конечно, неоднозначен. В частности, симметрические заряды задают нулевой функционал. Поэтому естественно, рассматривать только кососимметрические заряды: $\chi(x, y) = \chi(y, x)$, $\phi(\mathcal{D}) = \phi(\{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{D}\})$.

Так как для любых $x^0 \in \partial Q$ и $r > 0$

$$\|\xi_b|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} = m(S_{x^0}(r)),$$

то условие $\xi_b \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ означает наличие оценки $m(S_{x^0}(r)) \leq Cr^{n-1}$. Поэтому мера m абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на ∂Q – будем обозначать последнюю через $\text{mes}_{\partial Q}$ – и представляется в виде

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} g(x) d\text{mes}_{\partial Q}(x)$$

с некоторой функцией $g = g_\xi$ из $L_\infty(\partial Q)$.

Также очевидно, что

$$\|\xi_0|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} \leq \phi'(S_{x^0}(r)) + \phi''(S_{x^0}(r));$$

напомним, что через ϕ' и ϕ'' обозначены проекции меры ϕ :

$$\phi'(G) = \phi(G \times \mathbb{R}_n), \quad \phi''(G) = \phi(\mathbb{R}_n \times G), \quad G \subset \mathbb{R}_n. \quad (1.4')$$

Поэтому условие

$$\phi' \in \mathcal{M}_{n-1}, \quad \phi'' \in \mathcal{M}_{n-1} \quad (1.16)$$

гарантирует принадлежность функционала ξ_0 пространству $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$; при этом справедлива оценка

$$\|\xi_0\| \leq \|\phi'\| + \|\phi''\|. \quad (1.17)$$

4. Вернемся к общему случаю $\alpha > 0$ и установим свойства функционалов из $[C^\alpha(Q)]^*$ и из $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$, аналогичные полученным в п. 3 для $\alpha \in (0, 1)$.

ЛЕММА 3. Каждый элемент ξ пространства $[C^\alpha(Q)]^*$ однозначно представляется в виде суммы двух элементов этого пространства:

$$\xi = \xi_0 + \xi_b, \quad (1.14')$$

первый из которых является сильным пределом (в $[C^\alpha(Q)]^*$) последовательности функционалов с лежащими внутри области Q носителями, а второй имеет носитель на ∂Q . При этом справедлива оценка

$$\|\xi_0\|_{[C^\alpha(Q)]^*} + \|\xi_b\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \leq C \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*}. \quad (1.18)$$

Кроме того, если $\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$, то оба функционала ξ_0 и ξ_b в представлении (1.14') принадлежат $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$, имеет место оценка

$$\|\xi_0\|_{\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})} + \|\xi_b\|_{\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})} \leq C \|\xi\|_{\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})} \quad (1.18')$$

и для второго функционала справедливо представление

$$\langle \xi_b, v \rangle = \int_{\partial Q} v(x) g(x) d \operatorname{mes}_{\partial Q}(x), \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n), \quad (1.14'')$$

с $g \in L_\infty(\partial Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала простое утверждение о единственности разложения (1.14'). Из равенства $\xi_0 = \xi_b$ имеем: $\langle \xi_0, v \rangle = 0$ для всех финитных в Q функций v . Покажем, что тогда $\langle \xi_0, v \rangle = 0$ для всех $v \in C^\alpha(Q)$.

Действительно, возьмем произвольную функцию v из $C^\alpha(Q)$. Пусть $\{\xi_m\}$ — сходящаяся к ξ_0 последовательность функционалов с лежащими в Q носителями: $\|\xi_0 - \xi_m\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Для каждого номера m возьмем такое $\delta_m > 0$, что $\operatorname{supp} \xi_m \subset Q_{\delta_m}$. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle \xi_0, v \rangle| &\leq |\langle \xi_0 - \xi_m, v \rangle| + |\langle \xi_0 - \xi_m, \omega_{\delta_m} v \rangle| + |\langle \xi_0, \omega_{\delta_m} v \rangle| \\ &\leq \|\xi_0 - \xi_m\|_{[C^\alpha(Q)]^*} [\|v\|_{C^\alpha(Q)} + \|\omega_{\delta_m} v\|_{C^\alpha(Q)}] + |\langle \xi_0, \omega_{\delta_m} v \rangle|, \end{aligned}$$

здесь ω_{δ_m} — срезающая функция из замечания 2. Так как последнее слагаемое в правой части этого неравенства равно нулю, то в силу оценки (1.12) имеем

$$|\langle \xi_0, v \rangle| \leq C \|\xi_0 - \xi_m\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \|v\|_{C^\alpha(Q)} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

т.е. $|\langle \xi_0, v \rangle| = 0$ для всех $v \in C^\alpha(Q)$. Тем самым единственность разложения (1.14') доказана.

Заметим (это нам понадобится далее), что такое же рассуждение устанавливает единственность разложения

$$\xi|_K = (\xi|_K)_0 + (\xi|_K)_b,$$

где функционал $(\xi|_K)_b$ принимает равные нулю значения на любой функции v (из $C^\alpha(Q; K)$) с носителем в Q , а $(\xi|_K)_0$ является сильным пределом (в $[C^\alpha(Q; K)]^*$) некоторой последовательности функционалов, каждый из которых принимает нулевые значения на функциях с носителями в окрестности (своей для каждого элемента последовательности) границы.

Докажем существование представления (1.14'). Возьмем некоторое $\delta_0 > 0$ (здесь можно считать $\delta_0 = 1$; однако далее, в доказательстве леммы 5, где будет использовано аналогичное построение, величину δ_0 мы будем выбирать достаточно малой). Положим $\delta_m = \delta_0/2^m$, $m = 0, 1, \dots$, и $\varsigma_0(x) = \omega_{\delta_0}(x)$, $\varsigma_m(x) = \omega_{\delta_m}(x) - \omega_{\delta_{m-1}}(x)$, $m = 1, 2, \dots$.

Отметим, что для любой $x \in Q$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varsigma_j(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{\delta_m}(x) = 1,$$

$$\text{supp } \varsigma_0 \subset \overline{Q_{5\delta_0/8}}, \quad \text{supp } \varsigma_m \subset \overline{Q_{5\delta_m/8}} - Q_{7\delta_{m-1}/8}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Содержащее носитель ς_m множество $Q_{9\delta_m/16} - \overline{Q_{15\delta_{m-1}/16}}$ обозначим через Ω_m ; $\Omega_0 = Q_{9\delta_0/16}$. Подчеркнем (это и будет далее использоваться), что покрытие $\{\Omega_m\}$ области Q имеет конечную (равную 2) кратность; более того, для всех m расстояние между Ω_m и Ω_{m+2} пропорционально δ_m : $\text{dist}(\Omega_m, \Omega_{m+2}) \geq 3\delta_m/8$.

Ближайшей нашей целью является доказательство сходимости последовательности функционалов $\omega_{\delta_m}\xi = \sum_{j=0}^m \varsigma_j\xi$; ее предел мы и возьмем в качестве первого слагаемого в разложении (1.14'): $\xi_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \varsigma_m\xi$. Для этого мы установим сходимость для любого $\xi \in [C^\alpha(Q)]^*$ ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|\varsigma_m\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \tag{1.19}$$

и оценим его сумму.

Поскольку $\text{supp } \varsigma_m$ принадлежит Ω_m и “регулярно” (на пропорциональное δ_m расстояние) отделен от $\partial\Omega$, то справедлива оценка

$$\|\varsigma_m\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \leq C \|\varsigma_m\xi|_{\overline{\Omega_m}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega_m})]^*}, \quad m = 0, 1, \dots, \tag{1.20}$$

т.е. в $(m+1)$ -ом слагаемом ряда (1.19) можно заменить норму в $[C^\alpha(Q)]^*$ на норму в $[C^\alpha(Q; \overline{\Omega_m})]^*$.

Действительно, для каждого m возьмем функцию $\tilde{\varsigma}_m(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, удовлетворяющую условиям: $0 \leq \tilde{\varsigma}_m(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}_n$, $\text{supp } \tilde{\varsigma}_m \subset \overline{\Omega_m}$, $\tilde{\varsigma}_m(x) = 1$ для точек x , лежащих в некотором, содержащем $\text{supp } \varsigma_m$, открытом множестве, и $\max_{x \in \mathbb{R}_n} |D^l \tilde{\varsigma}_m(x)| \leq C_{|l|} 2^m$. Поскольку последовательность норм в $C^\alpha(Q)$ таких функций ограничена, то в силу (1.11) имеем оценку

$$|\langle \varsigma_m\xi, v \rangle| = |\langle \varsigma_m\xi, \tilde{\varsigma}_m v \rangle| \leq C \|\varsigma_m\xi\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega_m})]^*} \|v\|_{C^\alpha(Q)}, \quad v \in C^\alpha(Q),$$

которая и доказывает (1.20).

Обозначим через $v_m(x)$, $m = 0, 1, \dots$, такие функции из $C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_m)$, что $\|v_m\|_{C^\alpha(Q)} = 1$ и $\langle \varsigma_m \xi, v_m \rangle > \frac{1}{2} \|\varsigma_m \xi\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_m)]^*}$. Составим из v_m функции

$$w_m(x) = \sum_{j=0}^m \varsigma_{2j}(x) v_{2j}(x) = \begin{cases} \varsigma_{2j}(x) v_{2j}(x) & \text{при } x \in \Omega_{2j}, j = 0, 1, \dots, m, \\ 0 & \text{в остальных точках } \overline{Q}. \end{cases}$$

Так как содержащие носители слагаемых области Ω_{2j} “регулярно” отделены друг от друга, то последовательность норм функций w_m ограничена:

$$\|w_m\|_{C^\alpha(Q)} \leq C \max_{1 \leq j \leq m} \|\varsigma_{2j} v_{2j}\|_{C^\alpha(Q)} \leq \text{const}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \|\varsigma_{2j} \xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} &\leq C \sum_{j=0}^m \|\varsigma_{2j} \xi\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega})]^*} \leq 2C \sum_{j=0}^m \langle \varsigma_{2j} \xi, v_{2j} \rangle = 2C \sum_{j=0}^m \langle \xi, \varsigma_{2j} v_{2j} \rangle \\ &= 2C \langle \xi, w_m \rangle \leq 2C \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \|w_m\|_{C^\alpha(Q)} \leq \text{const} \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*}. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается сумма по нечетным индексам. Таким образом, доказана сходимость ряда (1.19), а тем самым и существование ξ_0 . Кроме того, мы получили оценку

$$\|\xi_0\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\varsigma_j \xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \leq C \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*},$$

из которой немедленно следует (1.18).

То, что носитель $\xi_b = \xi - \xi_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \omega_{\delta_m}) \xi$ лежит на ∂Q , очевидно: для любой $v \in C_0^\infty(Q)$ начиная с некоторого номера $\langle (1 - \omega_{\delta_m}) \xi, v \rangle = 0$.

Пусть теперь $\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$. Возьмем произвольные $x^0 \in \partial Q$ и $r > 0$ и рассмотрим $\xi|_{S_{x^0}(r)}$. Продолжая этот функционал на все $C^\alpha(Q)$ без увеличения нормы и применяя к этому продолжению — обозначим его через $\tilde{\xi}$ — доказанные утверждения леммы 3, получим $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_b$. Откуда

$$\xi_0|_{S_{x^0}(r)} + \xi_b|_{S_{x^0}(r)} = \xi|_{S_{x^0}(r)} = \tilde{\xi}|_{S_{x^0}(r)} = \tilde{\xi}_0|_{S_{x^0}(r)} + \tilde{\xi}_b|_{S_{x^0}(r)}.$$

В силу отмечавшейся выше единственности разложения функционала $\xi|_{S_{x^0}(r)}$ имеем: $\tilde{\xi}_0|_{S_{x^0}(r)} = \xi_0|_{S_{x^0}(r)}$ и $\tilde{\xi}_b|_{S_{x^0}(r)} = \xi_b|_{S_{x^0}(r)}$. Поэтому из доказанного неравенства (1.18) (примененного к функционалу $\tilde{\xi}$) имеем оценку

$$\begin{aligned} &\|\xi_0|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} + \|\xi_b|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} \\ &\leq C \|\tilde{\xi}\|_{[C^\alpha(Q)]^*} = C \|\xi|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} \leq C r^{n-1} \|\xi\|_{-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.18'')$$

Следовательно, функционалы ξ_0 и ξ_b принадлежат $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ и для них справедлива оценка (1.18').

Несложно устанавливается и представление (1.14''). Так как для любой $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$

$$\begin{aligned} |\langle (1 - \omega_{\delta_m})\xi, v \rangle| &\leq \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \|(1 - \omega_{\delta_m})v\|_{C^\alpha(Q)} \\ &\leq C \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \left\{ \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \sup_{x \in Q - Q_{\delta_m}} r^{|l|}(x) |D^l v(x)| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|l|=[\alpha]} \sup_{(x,y) \in (Q - Q_{\delta_m}) \times (Q - Q_{\delta_m}), x \neq y} r^\alpha(x,y) \frac{|D^l v(x) - D^l v(y)|}{|x - y|^{\{\alpha\}}} \right\}, \\ m &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} |\langle \xi_b, v \rangle| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |\langle (1 - \omega_{\delta_m})\xi, v \rangle| \\ &\leq C \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \left[\|v\|_{C(\overline{Q})} + \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m^{\min\{1, \alpha\}} \|v\|_{C^\alpha(\overline{Q})} \right] \\ &= C \|\xi\|_{[C^\alpha(Q)]^*} \|v\|_{C(\overline{Q})}, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n). \end{aligned}$$

Поэтому функционал ξ_b является непрерывным функционалом на $C(\overline{Q})$. А поскольку $\text{supp } \xi_b \subset \partial Q$, то $\xi_b \in [C(\partial Q)]^*$. Отсюда, используя оценку (1.18''), немедленно получаем (1.14') с $g \in L_\infty(\partial Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма 3 дает представление пространства $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ в виде прямой суммы двух подпространств; обозначим их через $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; Q)$ и $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; \partial Q)$. Элементы первого из них (функционалы ξ_0) являются сильными пределами (в $[C^\alpha(Q)]^*$) последовательностей функционалов с лежащими внутри области Q носителями; будем говорить, что *функционалы ξ_0 лежат внутри области Q* . Носители элементов из $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; \partial Q)$ лежат на ∂Q ; поэтому будем говорить, что *функционалы ξ_b лежат на ∂Q* .

Описание пространства $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; \partial Q)$ дает представление (1.14'). Приведем типичный (см. п. 3) пример функционала из $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; Q)$.

Пусть μ_l , $|l| = l_1 + \dots + l_n \leq \alpha$, — набор мер в $\mathbb{R}_n$ с носителями в $\overline{Q}$, ϕ_l , $|l| = [\alpha]$, — меры в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителями в $\overline{Q} \times \overline{Q}$, а $\theta_l(x)$, $x \in Q$, $|l| \leq \alpha$, и $\chi_l(x, y)$, $(x, y) \in Q \times Q$, $|l| = [\alpha]$, — измеримые относительно мер μ_l и, соответственно, χ_l функции, принимающие значения ± 1 . Рассмотрим функционал ξ_0 , определенный следующим тождеством

$$\begin{aligned} \langle \xi_0, v \rangle &= \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \int_Q r^{|l|}(x) D^l v(x) \theta_l(x) d\mu_l(x) \\ &+ \sum_{|l|=[\alpha]} \int_Q \int_Q r^\alpha(x, y) \frac{D^l v(x) - D^l v(y)}{|x - y|^{\{\alpha\}}} \chi_l(x, y) d\phi_l(x, y), \quad v \in C^\alpha(Q); \quad (1.21) \end{aligned}$$

при целых α последнее слагаемое в (1.21) опускается. Нетрудно видеть, что заданный (1.21) функционал действительно является пределом в $[C^\alpha(Q)]^*$ последовательности функционалов с компактными носителями, т.е. принадлежит пространству $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; Q)$.

Возьмем теперь произвольные $x^0 \in \partial Q$ и $r > 0$ и оценим норму в $[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*$ функционала $\xi_0|_{S_{x^0}(r)}$

$$\begin{aligned} & \|\xi_0|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} \\ & \leq C \left[\sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \mu_l(S_{x^0}(r)) + \sum_{|l|=[\alpha]} (\phi_l(\overline{Q} \times S_{x^0}(r)) + \phi_l(S_{x^0}(r) \times \overline{Q})) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, если потребовать, чтобы меры μ_l и проекции ϕ'_l и ϕ''_l мер ϕ_l были мерами Карлесона, то получим оценку

$$\|\xi_0|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} \leq C \left[\sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \|\mu_l\| + \sum_{|l|=[\alpha]} (\|\phi'_l\| + \|\phi''_l\|) \right] r^{n-1}.$$

Таким образом, *при выполнении условий*

$$\mu_l \in \mathcal{M}_{n-1}, \quad |l| \leq \alpha; \quad \phi'_l \in \mathcal{M}_{n-1}, \quad \phi''_l \in \mathcal{M}_{n-1}, \quad |l| = [\alpha],$$

определенный тождеством (1.21) функционал ξ_0 принадлежит пространству $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ и его норма удовлетворяет оценке

$$\|\xi_0\|_{-\alpha} \leq C \left[\sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \|\mu_l\| + \sum_{|l|=[\alpha]} (\|\phi'_l\| + \|\phi''_l\|) \right]. \quad (1.22)$$

5. Введем теперь на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ норму

$$\|v\|_\alpha = \|v\|_{\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})} = \sup_{\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})} \frac{|\langle \xi, v \rangle|}{\|\xi\|_{-\alpha}}. \quad (1.23)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространством $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ будем называть пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ по норме (1.23).

Для $u \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ число $\langle \xi, u \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \xi, v_m \rangle$, где $v_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $v_m \rightarrow u$ при $m \rightarrow \infty$ в $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, будем называть *значением функции u в точке ξ* и обозначать $\langle u, \xi \rangle$;

$$|\langle u, \xi \rangle| \leq \|u\|_\alpha \|\xi\|_{-\alpha}. \quad (1.24)$$

Прежде всего отметим ряд простейших свойств функций из введенного пространства, немедленно вытекающих из определения.

Пространства $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ сужаются с увеличением индекса α :

$$C_{n-1}^{\alpha_1}(\overline{Q}) \supset C_{n-1}^{\alpha_2}(\overline{Q}) \quad \text{при} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2$$

и все они вложены в пространство $C_{n-1,1}^0(\overline{Q})$, см. п. 1. Поэтому функции из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ имеют следы на ∂Q , принадлежащие пространству $L_1(\partial Q)$. Из основного результата работы (теорема 2, § 2) немедленно следует, что любая функция из $L_1(\partial Q)$ может быть продолжена функцией из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в $\overline{Q}$. Таким образом,

при любом $\alpha > 0$ множество следов на ∂Q функций из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ совпадает с $L_1(\partial Q)$.

Возьмем ξ_0 вида (1.21), где все меры, кроме одной, нулевые. Тогда из (1.24) и (1.22) имеем

$$\begin{aligned} \int_Q r^{|l|}(x) |D^l v(x)| d\mu(x) &= \max_{\|\theta\|_{L_\infty(Q)}=1} \left| \int_Q r^{|l|}(x) D^l v(x) \theta(x) d\mu(x) \right| \\ &\leq C \|\mu\| \|v\|_\alpha, \quad |l| \leq \alpha, \end{aligned} \quad (1.25)$$

и

$$\begin{aligned} &\iint_{Q \times Q} r^\alpha(x, y) \frac{|D^l v(x) - D^l v(y)|}{|x - y|^{\{\alpha\}}} d\phi(x, y) \\ &= \max_{\|\chi\|_{L_\infty(Q \times Q)}=1} \left| \iint_{Q \times Q} r^\alpha(x, y) \frac{D^l v(x) - D^l v(y)}{|x - y|^{\{\alpha\}}} \chi(x, y) d\phi(x, y) \right| \\ &\leq C(\|\phi'\| + \|\phi''\|) \|v\|_\alpha, \quad |l| = [\alpha]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

В частности, если взять в качестве μ единичную меру, сосредоточенную во внутренней точке Q , а $\text{supp } \phi = \{(x, y)\}$, где $(x, y) \in Q \times Q$, $\phi(\mathbb{R}_n) = 1$, то получим свойство внутренней гладкости функций из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$: функции из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ принадлежат $C^\alpha(\overline{Q}')$ для любой области $Q' \Subset Q$ и оценки

$$|D^l v(x)| \leq C[r(x)]^{1-n-|l|} \|v\|_\alpha, \quad x \in Q, \quad |l| \leq [\alpha], \quad (1.27)$$

$$\frac{|D^l v(x) - D^l v(y)|}{|x - y|^{\{\alpha\}}} \leq C[r(x, y)]^{1-n-\alpha} \|v\|_\alpha, \quad x \in Q, \quad y \in Q, \quad |l| = [\alpha]. \quad (1.28)$$

6. Итак, функции из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ являются гладкими продолжениями в область Q функций из $L_1(\partial Q)$. Мы рассматриваем их как функции аргумента $\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$. Такое расширение области определения (каждой точке $x \in Q$ соответствует δ -функция с источником в этой точке), конечно, усложняет объект исследования. В качестве компенсации мы получаем описание свойств гладкости функции непосредственно ее областью определения. Другим, не менее важным для наших целей, преимуществом такой точки зрения является то, что интегралы от самой функции, от ее производных и от других ее дифференциальных характеристик по мерам (из некоторого класса; см. примеры из п. 5), в частности, по множествам различной размерности являются значениями этой функции на определенных этими функционалами значениях аргумента. Это обстоятельство позволяет свести трудно формулируемую в традиционных терминах задачу о близости такого сорта интегралов к привычному свойству непрерывности функции. Поскольку непрерывность относительно метрики пространства $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$, как легко видеть, дает весьма грубые результаты, то мы введем на области определения изучаемых функций другую, более слабую метрику, учитывающую, грубо говоря, близость носителей. При

этом нам будет удобнее ограничиться рассмотрением значений аргумента из единичного шара (конечно, можно рассматривать шар любого радиуса) пространства $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$, обозначим его через $\mathcal{B}_1$,

$$\mathcal{B}_1 = \{\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}) : \|\xi\|_{-\alpha} \leq 1\}.$$

В силу линейности функции (аргумента $\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$) такое ограничение области определения не влияет на общность; кроме того, вводимое расстояние однородно и поэтому немедленно распространяется на все пространство $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$.

Зафиксируем некоторое натуральное число $k \leq \alpha$. Это число можно выбирать произвольно, и чем оно больше, тем слабее будет вводимое расстояние. Однако для наших целей нет смысла выбирать его большим; можно считать его ближайшим к α . Под пространством $C^k(\overline{Q})$ будем понимать замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ по обычной норме

$$\|v\|_{C^k(\overline{Q})} = \sum_{0 \leq |l| \leq k} \|D^l v\|_{C(\overline{Q})}.$$

Наряду с координатами $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ в $\mathbb{R}_{2n} = \mathbb{R}_{n,x} \times \mathbb{R}_{n,y}$ нам понадобятся новые координаты

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + y_i), \quad \tilde{y}_i = \frac{1}{2}(y_i - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим через $C^{k,0}$ замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}_{2n})$ по норме

$$\|w\|_{k,0} = \sum_{0 \leq |l| \leq k} \|D_{\tilde{x}}^l w\|_{C(\mathbb{R}_{2n})}, \quad (1.29)$$

где $D_{\tilde{x}}^l = \frac{\partial^{|l|} w}{\partial \tilde{x}_1^{l_1} \dots \partial \tilde{x}_n^{l_n}}$ — производная порядка l по новым “диагональным” переменным $\tilde{x}_i$;

$$C^{-k,0} = \{\zeta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{2n}) : \text{supp } \zeta \subset \overline{Q} \times \overline{Q}, \\ |\langle \zeta, w \rangle| \leq C(\zeta) \|w\|_{k,0} \text{ для всех } w \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{2n})\}. \quad (1.30)$$

Иногда, не отмечая этого особо, мы будем рассматривать $\zeta \in C^{-k,0}$ как функционал, доопределенный по непрерывности на все $C^{k,0}$, $\|\zeta\|_{-k,0}$ — норма этого функционала.

В соответствии с ранее принятыми обозначениями (см. (1.4')) определим по $\zeta \in C^{-k,0}$ обобщенные функции ζ' и ζ'' тождествами

$$\langle \zeta', v \rangle = \langle \zeta, v \otimes 1 \rangle, \quad \langle \zeta'', v \rangle = \langle \zeta, 1 \otimes v \rangle, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n); \quad (1.4'')$$

напомним, что ζ имеет компактный носитель и поэтому допускает единственное линейное непрерывное продолжение на $C^\infty(\mathbb{R}_{2n})$, см., например, [25]; это продолжение мы отождествляем с ζ . Положим еще

$$\sigma_\zeta = \min\{\sigma : \text{supp } \zeta \subset \{|x - y| \leq \sigma\}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число

$$\begin{aligned} \rho(\xi, \eta) = \inf \left[\|\xi - \zeta'_1\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^{p-1} \|\zeta''_i - \zeta'_{i+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \right. \\ \left. + \|\zeta''_p - \eta\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^p \|\zeta_i\|_{-k, 0\sigma_{\zeta_i}} \right], \quad (1.31) \end{aligned}$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным наборам $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ обобщенных функций из $C^{-k, 0}$, будем называть *расстоянием между точками ξ и η* , а наборы $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ — *цепочками, соединяющими точки ξ и η* .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При получении оценок расстояния мы будем, как и в [11], пользоваться цепочками, состоящими из одного элемента, т.е. оценивающим $\rho(\xi, \eta)$ выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\xi, \eta) = \inf_{\zeta \in C^{-k, 0}} [\|\xi - \zeta'\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \|\zeta'' - \eta\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \|\zeta\|_{-k, 0\sigma_{\zeta}}]; \quad (1.31') \\ \rho(\xi, \eta) \leq \tilde{\rho}(\xi, \eta) \quad \text{для всех } \xi \in \mathcal{B}_1 \text{ и } \eta \in \mathcal{B}_1. \end{aligned}$$

Более громоздкое выражение (1.31) возникло из-за того, что только для него удастся проверить выполнение неравенства треугольника.

Прежде всего, убедимся, что определенная равенством (1.31) функция ρ действительно задает метрику на $\mathcal{B}_1$ и что она является более слабой, чем метрика, порожденная нормой в $\mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$.

Возьмем $\zeta = \check{\xi}$, где

$$\langle \check{\xi}, w \rangle = \langle \xi, \hat{w} \rangle, \quad \hat{w}(x) = w(x, x), \quad w \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{2n}). \quad (1.32)$$

Для нее $\zeta' = \zeta'' = \xi$ и $\sigma_{\zeta} = 0$. Поэтому

$$\rho(\xi, \eta) \leq \|\xi - \eta\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \leq C_0 \|\xi - \eta\|_{-\alpha}, \quad (1.33)$$

$$C_0 = 2R_0^{\alpha+n-1}.$$

Из (1.33), конечно, следует выполнение свойства

$$\rho(\xi, \xi) = 0 \quad \text{для всех } \xi \in \mathcal{B}_1. \quad (1.34)$$

Выполнение обратного:

$$\rho(\xi, \eta) = 0 \implies \xi = \eta \quad (1.34')$$

нам удобнее получить позже, как следствие свойства непрерывности функций из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в этом расстоянии.

Симметрия введенного расстояния очевидна: достаточно у всех функций ζ_i поменять местами аргументы x и y . Покажем справедливость неравенства треугольника. Для каждой пары цепочек $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ (соединяющей точки ξ и θ) и $\{\zeta_{p+1}, \dots, \zeta_{p+q}\}$ (соединяющей точки θ и η) построим цепочку

$\{\zeta_1, \dots, \zeta_p, \check{\theta}, \zeta_{p+1}, \dots, \zeta_{p+q}\}$ (соединяющую ξ и η); $\check{\theta}$ определена по θ равенством (1.32). Так как $\check{\theta}' = \check{\theta}'' = \theta$, то

$$\begin{aligned}
 & \|\xi - \zeta'_1\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^{p-1} \|\zeta''_i - \zeta'_{i+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \|\zeta''_p - \check{\theta}'\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \\
 & + \|\check{\theta}'' - \zeta'_{p+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=p+1}^{p+q-1} \|\zeta''_i - \zeta'_{i+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \\
 & + \|\zeta''_{p+q} - \eta\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^{p+q} \|\zeta_i\|_{-k,0\sigma\zeta_i} + \|\check{\theta}\|_{-k,0\sigma\check{\theta}} \\
 & = \left[\|\xi - \zeta'_1\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^{p-1} \|\zeta''_i - \zeta'_{i+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \right. \\
 & \quad \left. + \|\zeta''_p - \theta\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^p \|\zeta_i\|_{-k,0\sigma\zeta_i} \right] \\
 & + \left[\|\theta - \zeta'_{p+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^{q-1} \|\zeta''_{p+i} - \zeta'_{p+i+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \right. \\
 & \quad \left. + \|\zeta''_{p+q} - \eta\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \sum_{i=1}^q \|\zeta_{q+i}\|_{-k,0\sigma\zeta_{p+i}} \right].
 \end{aligned}$$

Откуда

$$\rho(\xi, \eta) \leq \rho(\xi, \theta) + \rho(\theta, \eta).$$

ТЕОРЕМА 1. *Каждая функция из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ равномерно непрерывна на метрическом пространстве $\mathcal{B}_1$.*

Из теоремы 1 немедленно вытекает свойство (1.34'):

$$\rho(\xi, \eta) = 0 \implies \langle \xi, v \rangle = \langle \eta, v \rangle \text{ для всех } v \text{ из } \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q}) \text{ и тем более из } C_0^\infty(\mathbb{R}_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для $\alpha < \alpha_0$ теорема 1 была анонсирована в заметке автора [11]; при этом близость значений аргумента определялась заданной формулой (1.31') функцией $\check{\rho}(\xi, \eta)$. Отметим, что фигурирующую в приведенном сразу за этой теоремой описании функцию γ_ε можно всегда считать тождественно равной нулю.

В силу оценки (1.33) введенная на $\mathcal{B}_1$ расстоянием (1.31) топология слабее топологии сильной сходимости. Теорема 1 утверждает, что она сильнее топологии поточечной (*-слабой) сходимости (элементы из $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ являются линейными непрерывными функционалами на $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$). Так как ограниченность этих функционалов предполагается, то доказательство по существу сводится к проверке сходимости на плотном множестве. Это и делается в приведенном ниже доказательстве, но в соответствующих принятой точке зрения терминах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть u – произвольная функция из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, а $\{v_m\}$ – приближающая ее последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$: $\|u - v_m\|_\alpha \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Для произвольных точек ξ и η из $\mathcal{B}_1$ и произвольной соединяющей их цепочки $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} |\langle u, \xi \rangle - \langle u, \eta \rangle| &\leq |\langle u - v_m, \xi \rangle| + |\langle v_m, \xi - \zeta'_1 \rangle| + \sum_{i=1}^{p-1} |\langle v_m, \zeta''_i - \zeta'_{i+1} \rangle| \\ &\quad + |\langle v_m, \zeta''_1 - \eta \rangle| + |\langle u - v_m, \eta \rangle| + \sum_{i=1}^p |\langle \zeta_i, v_m \otimes 1 \rangle - \langle \zeta_i, 1 \otimes v_m \rangle| \\ &\leq \|u - v_m\|_\alpha (\|\xi\|_{-\alpha} + \|\eta\|_{-\alpha}) \\ &\quad + \|v_m\|_{C^k(\overline{Q})} \left[\|\xi - \zeta'_1\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{i=1}^{p-1} \|\zeta''_i - \zeta'_{i+1}\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} + \|\zeta''_p - \eta\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^p |\langle \zeta_i, \omega[v_m \otimes 1 - 1 \otimes v_m] \rangle|, \end{aligned}$$

где $\omega = \omega(\tilde{y})$ – бесконечно дифференцируемая “срезающая” функция n переменных $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ с носителем в $\{\tilde{y} : |\tilde{y}| \leq 2\sigma_\zeta\}$, принимающая равные единице значения при $|\tilde{y}| \leq \sigma_\zeta$; $0 \leq \omega(\tilde{y}) \leq 1$ для всех $\tilde{y}$. Поскольку в норму пространства $C^{k,0}$ входят производные только по ортогональным $\tilde{y}$ переменным $\tilde{x}$, то, продолжая последние неравенства, получаем

$$\begin{aligned} |\langle u, \xi \rangle - \langle u, \eta \rangle| &\leq 2\|u - v_m\|_\alpha + \|v_m\|_{C^k(\overline{Q})} \rho(\xi, \eta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \|\zeta_i\|_{-k,0} \left[\sum_{0 \leq |l| \leq k} \max_{|x-y| \leq 4\sigma_{\zeta_i}} |D^l v_m(x) - D^l v_m(y)| \right] \\ &\leq 2\|u - v_m\|_\alpha + \|v_m\|_{C^k(\overline{Q})} \rho(\xi, \eta) \\ &\quad + \text{const} \|v_m\|_{C^{k+1}(\overline{Q})} \sum_{i=1}^p \|\zeta_i\|_{-k,0} \sigma_{\zeta_i} \\ &\leq 2\|u - v_m\|_\alpha + \text{const} \|v_m\|_{C^{k+1}(\overline{Q})} \rho(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{1.35}$$

с зависящей только от области Q постоянной. Выбирая и фиксируя достаточно близкую к u (в норме $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$) функцию v_m , а по ней – достаточно малое $\rho(\xi, \eta)$, получаем равномерную по ξ и η из $\mathcal{B}_1$ малость правой части (1.35).

В заключение этого параграфа отметим некоторые следствия, получающиеся применением теоремы 1 к значениям аргумента вида (1.21).

Прежде всего заметим, что сужение этого утверждения на множество функций с точечными носителями дает внутреннюю непрерывность самой функции из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ и ее производных до порядка α включительно. Расстояние между лежащими в $\mathcal{B}$ значениями аргумента вида

$$\langle \xi, v \rangle = r^{|l|+n-1}(x) D^l v(x), \quad \langle \eta, v \rangle = r^{|l|+n-1}(y) D^l v(y), \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n),$$

где x и y — фиксированные точки области Q , удовлетворяет оценке

$$\rho(\xi, \eta) \leq \text{const } |x - y|.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно взять

$$\langle \zeta, w \rangle = [r(x, y)]^{|l|+n-1} D_x^l w(x, y), \quad w \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{2n}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \zeta', v \rangle &= [r(x, y)]^{|l|+n-1} D^l v(x), & \langle \zeta'', v \rangle &= [r(x, y)]^{|l|+n-1} D^l v(y), \\ \sigma_\zeta &= |x - y|, & \text{а } \|\zeta\|_{-k, 0} &\leq \text{const}. \end{aligned}$$

А так как $\|\xi - \zeta'\|_{[C^k(\overline{Q})]^*}$ и $\|\eta - \zeta''\|_{[C^k(\overline{Q})]^*}$ оцениваются величиной $\text{const } |x - y|$, то и $\rho(\xi, \eta) \leq \text{const } |x - y|$.

Применение к таким значениям аргумента теоремы 1 дает равномерную непрерывность в Q функции $[r(x)]^{|l|+n-1} D^l u(x)$ с $|l| \leq \alpha$. Естественным обобщением этого свойства является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой функции u из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ и всех l , $1 \leq |l| \leq \alpha$,

$$\frac{1}{\|\phi\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} |r^{|l|}(x) D^l u(x) - r^{|l|}(y) D^l u(y)| d\phi(x, y) \rightarrow 0$$

при

$$\delta_\phi = \frac{1}{\|\phi\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} [r(x) + r(y)] |x - y| d\phi(x, y) \rightarrow 0. \quad (1.36)$$

Здесь $\|\phi\| = \|\phi'\| + \|\phi''\|$; под ϕ мы, как и раньше, понимаем меру в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителем в $\overline{Q} \times \overline{Q}$, проекции которой ϕ' и ϕ'' являются мерами Карлесона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную (ϕ -измеримую) функцию $\chi(x, y)$, $(x, y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$, принимающую значения ± 1 , и рассмотрим ξ и η из $\mathcal{B}_1$, определенные тождествами

$$\begin{aligned} \langle \xi, v \rangle &= \frac{1}{\|\phi\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} r^{|l|}(x) D^l v(x) \chi(x, y) d\phi(x, y), \\ \langle \eta, v \rangle &= \frac{1}{\|\phi\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} r^{|l|}(y) D^l v(y) \chi(x, y) d\phi(x, y), \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n). \end{aligned}$$

Положим

$$\langle \zeta, w \rangle = \frac{1}{\|\phi\|} \iint_{\{|x-y| \leq \gamma\}} r^{|l|}(x, y) D_x^l w(x, y) \chi(x, y) d\phi(x, y), \quad w \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{2n}),$$

где γ — достаточно малое положительное число. Так как для любой $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$

$$\begin{aligned} |\langle \xi - \zeta', v \rangle| &\leq \frac{\|v\|_{C^k(\overline{Q})}}{\|\phi\|} \left[\iint_{\{|x-y| \leq \gamma\}} |r^{|\iota|}(x) - r^{|\iota|}(x, y)| d\phi(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\{|x-y| > \gamma\}} r^{|\iota|}(x) d\phi(x, y) \right] \\ &\leq C(R_0, \alpha) \|v\|_{C^k(\overline{Q})} \left[\gamma + \frac{\delta_\phi}{\gamma} \right], \end{aligned}$$

то $\|\xi - \zeta'\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \leq C[\gamma + \delta_\phi/\gamma]$. Аналогично, $\|\eta - \zeta''\|_{[C^k(\overline{Q})]^*} \leq C[\gamma + \delta_\phi/\gamma]$. Откуда, поскольку $\|\zeta\|_{-k, 0} \leq C(R_0)$, а $\sigma_\zeta \leq \gamma$, получаем

$$\rho(\xi, \eta) \rightarrow 0 \text{ равномерно по } \chi \text{ при } \delta_\phi \rightarrow 0.$$

Поэтому теорема 1 дает доказываемое свойство: для любой $u \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$

$$\begin{aligned} \sup_\chi |\langle \xi - \eta, u \rangle| &= \sup_\chi \frac{1}{\|\phi\|} \left| \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} [r^{|\iota|}(x) D^\iota v(x) - r^{|\iota|}(y) D^\iota v(y)] \chi(x, y) d\phi(x, y) \right| \\ &= \frac{1}{\|\phi\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} |r^{|\iota|}(x) D^\iota v(x) - r^{|\iota|}(y) D^\iota v(y)| d\phi(x, y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\delta_\phi \rightarrow 0$.

§ 2. Доказательство основной теоремы

Этот параграф содержит основные результаты настоящей работы, дающие описание изучаемых свойств решений задачи Дирихле с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$. При этом мы всегда, не оговаривая этого особо, предполагаем выполненными условия (3) и (4). Кроме того, если показатель гладкости $\alpha \geq \alpha_0$, то, как отмечалось выше, мы требуем выполнение условий, гарантирующих справедливость следующей оценки внутренней нормы непрерывного в $C(\overline{Q})$ решения уравнения (1)

$$\|u\|_{C^{\alpha'}(Q)} \leq C \|u\|_{C(\overline{Q})} \quad (2.1)$$

с некоторым показателем $\alpha' > \alpha$. Например, достаточно потребовать, см. [24], чтобы коэффициенты $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, принадлежали пространству $C^\beta(Q)$ с $\beta > \max\{0, \alpha - 1\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть u и v — решения задачи Дирихле (1), (2) с граничными функциями u_0 и v_0 из $L_2(\partial Q)$. Тогда $uv \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ и справедлива оценка

$$\|uv\|_\alpha \leq C \|u_0\|_{L_2(\partial Q)} \|v_0\|_{L_2(\partial Q)}. \quad (2.2)$$

В частности (при $v \equiv 1$), $u \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ и

$$\|u\|_\alpha \leq C \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}. \quad (2.2')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что *достаточно доказать справедливость оценки (2.2) для решений с гладкими граничными функциями.*

Действительно, решения с гладкими граничными функциями принадлежат $C^\alpha(Q)$: возможность их приближения функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ следует из их непрерывности по Гёльдеру с некоторым положительным показателем в $\overline{Q}$ (см., например, [26]) и оценки (2.1) (с $\alpha' > \alpha$); тем более они принадлежат $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$. Приближая в $L_2(\partial Q)$ произвольную граничную функцию u_0 из $L_2(\partial Q)$ гладкими функциями $u_0^{(m)}$, в силу оценки (2.2') с граничной функцией $u_0^{(m)} - u_0^{(k)}$, $m, k = 1, 2, \dots$, имеем сходящуюся в $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ последовательность решений u_m . Ее предел $u \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, очевидно, является решением уравнения (1) в Q (последовательность $\{u_m\}$ сходится в W_2^1 на любом компакте в Q , см. (5)). Кроме того, в силу (2.2) (с граничными значениям $u_0 = v_0 = u_0^{(m)} - u_0^{(k)}$) и функция u^2 принадлежит $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$. А тогда по лемме 2 $u \in C_{n-1,2}^0 = C_{n-1}^0(\overline{Q})$ и является решением задач Дирихле (1), (2) с граничной функцией u_0 (след u на ∂Q равен u_0 , так как $u_0^m \rightarrow u_0$ в $L_2(\partial Q)$ при $m \rightarrow \infty$).

Сходимость последовательности произведений $u_m v_m$ решений задачи Дирихле с приближающими $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и $v_0 \in L_2(\partial Q)$ граничными значениями $u_0^{(m)}$ и $v_0^{(m)}$ следует из (2.2):

$$\begin{aligned} \|u_m v_m - u_k v_k\|_\alpha &\leq \|u_m(v_m - v_k)\|_\alpha + \|v_k(u_m - u_k)\|_\alpha \\ &\leq C[\|u_0^{(m)}\|_{L_2(\partial Q)}\|v_0^{(m)} - v_0^{(k)}\|_{L_2(\partial Q)} \\ &\quad + \|v_0^{(k)}\|_{L_2(\partial Q)}\|u_0^{(m)} - u_0^{(k)}\|_{L_2(\partial Q)}] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $m, k \rightarrow \infty$.

Далее, в силу леммы 3 (см. также замечание 3) *достаточно доказать оценку*

$$|\langle uv, \xi \rangle| \leq C\|\xi\|_{-\alpha}\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}\|v_0\|_{L_2(\partial Q)} \quad (2.3)$$

для значений аргумента $\xi = \xi_0$ из $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; Q)$; для $\xi = \xi_b \in C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; \partial Q)$ она немедленно следует из (1.14'').

Кроме того, доказываемое утверждение имеет локальный характер. А именно, предположим, что установлено следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Для каждой точки $x' \in \partial Q$ существует такое число $r > 0$, что для любой $\xi \in C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; Q)$ с носителем в шаре $\{x \in \mathbb{R}_n : |x - x'| < r\}$ справедлива оценка (2.3).*

Покажем, что тогда *эта оценка справедлива и для всех $\xi \in C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; Q)$.*

Пусть ξ – произвольный элемент пространства $C_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q}; Q)$. Из покрытия ∂Q шарами $\mathcal{U}_{x'}(r) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x - x'| < r(x')\}$, существование которых утверждает лемма 4, выберем конечное подпокрытие $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p\}$ и дополним его множеством $\mathcal{U}_{p+1} = Q_{\delta_0}$, $\delta_0 > 0$, до покрытия $\overline{Q}$. Пусть $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{p+1}\}$ – соответствующее этому покрытию разбиение единицы:

$$\begin{aligned} \zeta_i &\in C_0^\infty(\mathbb{R}_n), \quad \text{supp } \zeta_i \subset \mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p+1, \\ \sum_{i=1}^{p+1} \zeta_i(x) &= 1 \quad \text{для всех } x \in \overline{Q}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\xi = \sum_{i=1}^{p+1} \xi_i, \quad \text{где } \xi_i = \zeta_i \xi, \quad \text{supp } \xi_i \subset \mathcal{U}_i.$$

Выполнение (2.3) для $\xi = \xi_{p+1}$ (с носителем внутри Q) очевидно. Поэтому

$$|\langle uv, \xi \rangle| \leq \sum_{i=1}^{p+1} |\langle uv, \xi_i \rangle| \leq C \|u_0\|_{L_2(\partial Q)} \|v_0\|_{L_2(\partial Q)} \sum_{i=1}^{p+1} \|\xi_i\|_{-\alpha}. \quad (2.4)$$

А так как для любых $x^0 \in \partial Q$ и $r > 0$

$$\begin{aligned} |\langle \xi_i, v \rangle| &= |\langle \xi, \zeta_i v \rangle| \leq \|\xi|_{S_{x^0}(r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}(r))]^*} \|\zeta_i v\|_{C^\alpha(Q)} \\ &\leq C \|\xi\|_{-\alpha} r^{n-1} \|\zeta_i\|_{C^\alpha(Q)} \|v\|_{C^\alpha(Q)}, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n), \quad \text{supp } v \subset S_{x^0}(r), \end{aligned}$$

то

$$\|\xi_i\|_{-\alpha} \leq C \|\xi\|_{-\alpha}.$$

Подставляя последнюю оценку в (2.4), получаем (2.3), а вместе с ней и справедливость доказываемой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4 основано на построении специального разбиения единицы, близкого к использованному в доказательстве леммы 3, но соответствующего более мелкому покрытию области Q . Мы будем использовать введенные при доказательстве леммы 3 обозначения; при этом положим $\delta_0 = 2r$, где $r > 0$ — достаточно малое (зависящее от точки x') число, которое будет выбрано позже.

Возьмем местную систему координат с центром в рассматриваемой точке $x' \in \partial Q$ (ось x_n направлена по внутренней нормали $-\nu(x')$ к ∂Q в точке x'); для новых координат будем использовать те же обозначения. Поместим шар $\{x : |x| < r\}$ в куб $\{x : |x_i| < 4r, i = 1, \dots, n\}$ и будем считать число r столь малым, что пересечение области Q с этим кубом имеет вид

$$\{x : |x_i| < 4r, i = 1, \dots, n-1, \psi(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n < 4r\};$$

непрерывно дифференцируемую функцию ψ считаем определенной на всем $\mathbb{R}_{n-1}$, а ее градиент — малым (достаточно, чтобы $|\nabla \psi| < 1/2$). Тогда для точек x из $Q \cap \{x : |x_i| < \delta_0, i = 1, \dots, n\}$ расстояние до границы $r(x)$ оценивается снизу величиной, пропорциональной координате x_n :

$$c_0 x_n \leq r(x) \leq x_n, \quad c_0 > 0.$$

Разобьем куб $\{x' \in \mathbb{R}_{n-1} : |x_i| < \delta_0, i = 1, \dots, n\}$ на 2^{n-1} равных кубов $\mathcal{K}_{1,p}$, $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$, $p_i = 1, 2$, деля пополам каждое его ребро; $x^{1,p}$ — центры кубов $\mathcal{K}_{1,p}$. Возьмем срезающую функцию θ одного переменного, равную усреднению характеристической функции отрезка $[-\delta_1, \delta_1]$ с ядром радиуса $\delta_1/3$;

$\theta \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, $\text{supp } \theta \subset [-4\delta_1/3, 4\delta_1/3]$, $\theta(t) = 1$ при $-2\delta_1/3 \leq t \leq 2\delta_1/3$; напомним, что $\delta_k = \delta_0 2^{-k} = r 2^{1-k}$. Положим

$$\eta_{1,p}(x) = \varsigma_1(x) \prod_{i=1}^{n-1} \theta(x_i - x_i^{1,p}).$$

Тогда

$$\text{supp } \eta_{1,p} \subset \{x \in \overline{Q_{5\delta_1/8}} - Q_{7\delta_0/8} : |x_i - x_i^{1,p}| \leq 4\delta_1/3, i = 1, \dots, n\} = Q_{1,p},$$

$\sum_p \eta_{1,p}(x) = \varsigma_1(x)$ для всех x из содержащего носитель ξ шара $\{x : |x| < r\}$.

Делим еще пополам каждое ребро куба и строим аналогичное разложение функции ς_2 . На m -ом шаге имеем $2^{m(n-1)}$ равных кубов $\mathcal{K}_{m,p}$, $x^{m,p}$ — их центры,

$$\begin{aligned} \eta_{m,p}(x) &= \varsigma_m(x) \prod_{i=1}^{n-1} \theta(2^m(x_i - x_i^{m,p})); \quad p = (p_1, \dots, p_{n-1}), \quad p_i = 1, \dots, 2^m; \\ \text{supp } \eta_{m,p} &\subset \{x \in \overline{Q_{5\delta_m/8}} - Q_{7\delta_{m-1}/8} : |x_i - x_i^{m,p}| \leq 4\delta_m/3, i = 1, \dots, n-1\} \\ &= Q_{m,p}, \end{aligned}$$

$$|D^l \eta_{m,p}(x)| \leq \frac{\text{const}}{r^{|l|}(x)}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} \eta_{m,p}(x) = \varsigma_m(x) \quad \text{при } |x| < r.$$

Таким образом, в области $\{x : |x| < r\} \cap Q$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} \eta_{m,p}(x) \equiv 1;$$

тем самым

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} \eta_{m,p} \xi; \quad (2.5)$$

напомним, что $\xi \in \mathcal{C}_{n-1}^{-\alpha}(\overline{Q})$ и ряд в (2.5), см. лемму 3, сходится в $[C^\alpha(Q)]^*$.

Обозначим через $\Omega_{m,p}$ области

$$\left\{x \in Q_{\frac{9\delta_m}{16}} - \overline{Q_{\frac{15\delta_{m-1}}{16}}} : |x_i - x_i^{m,p}| < 5\delta_m/3, i = 1, \dots, n-1\right\}.$$

Отметим, что

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{p_i=1}^{2^m} \Omega_{m,p} = \Omega_m, \quad \text{supp } \eta_{m,p} \subset Q_{m,p} \subset \Omega_{m,p},$$

причем

$$\text{dist}(Q_{m,p}, \partial\Omega_{m,p}) \geq \varkappa_0 \delta_m \quad (2.6)$$

с некоторой постоянной $\varkappa_0 > 0$. Кроме того, если в наборах (m, p) и (m', p') для некоторого i индексы p_i и p'_i отличаются более, чем на единицу, то области $\Omega_{m,p}$ и $\Omega_{m',p'}$ не пересекаются, а расстояние между ними оценивается снизу положительным числом $\text{const } \delta_m$.

Возьмем теперь произвольную точку $x^0 \in \partial Q$ и произвольное число $r > 0$. Докажем сходимость ряда

$$\sum_{(m,p): \overline{\Omega}_{m,p} \cap S_{x^0}(r) \neq \emptyset} \|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*} \quad (2.7)$$

и оценим его сумму.

Для этого разобьем индексы (m, p) входящих в этот ряд слагаемых на 2^n групп $P_1, \dots, P_{2^n}$, выбирая m и p_i либо четными, либо нечетными. Напомним, что области $\Omega_{m,p}$ с входящими в каждую из таких групп индексами не пересекаются. Фиксируем некоторую группу P_j и выбираем для каждого $(m, p) \in P_j$ такую функцию $v_{m,p} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $\text{supp } v_{m,p} \subset \Omega_{m,p}$, $\|v_{m,p}\|_{C^\alpha(Q)} = 1$, что

$$\langle \xi, v_{m,p} \rangle > \frac{1}{2} \|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*}.$$

Составим из них функции

$$v_k = \sum_{(m,p) \in P_j: m \leq k, \overline{\Omega}_{m,p} \cap S_{x^0}(r) \neq \emptyset} v_{m,p} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n), \quad \text{supp } v_k \subset \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как содержащие носители $v_{m,p}$ области $\Omega_{m,p}$ отделены друг от друга расстоянием, пропорциональным δ_m , то последовательность норм $\|v_k\|_{C^\alpha(Q)}$ ограничена. Поэтому имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{(m,p) \in P_j: m \leq k, \overline{\Omega}_{m,p} \cap S_{x^0}(r) \neq \emptyset} \|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*} \\ & \leq 2 \sum_{(m,p) \in P_j: m \leq k, \overline{\Omega}_{m,p} \cap S_{x^0}(r) \neq \emptyset} \langle \xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}, v_{m,p} \rangle = 2 \langle \xi, v_k \rangle \\ & \leq C \|\xi|_{S_{x^0}((1+\lambda_0)r)}\|_{[C^\alpha(Q; S_{x^0}((1+\lambda_0)r))]^*} \leq C r^{n-1} \|\xi\|_{-\alpha}; \end{aligned}$$

здесь λ_0 — число, оценивающее сверху отношения диаметров областей $\Omega_{m,p}$ к расстоянию от них до ∂Q ; очевидно, что эти отношения ограничены.

Суммируя последнее неравенство по всем группам P_j , получаем сходимость ряда (2.7) и оценку

$$\sum_{(m,p): \Omega_{m,p} \cap S_{x^0}(r) \neq \emptyset} \|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*} \leq C \|\xi\|_{-\alpha} r^{n-1}. \quad (2.7')$$

Оценим теперь значение произведения uv в точке ξ . Напомним, что u и v — решения задачи Дирихле для уравнения (1) с гладкими граничными функциями, и следовательно, $uv \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$.

Так как $\sum_{m=1}^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} \eta_{m,p} \xi \rightarrow \xi$ при $k \rightarrow \infty$ в $[C^\alpha(Q)]^*$, то

$$\begin{aligned} |\langle uv, \xi \rangle| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left\langle \sum_{m=1}^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} \eta_{m,p} \xi, uv \right\rangle \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} |\langle \xi, \eta_{m,p} uv \rangle| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} [\|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*} \|\eta_{m,p} uv\|_{C^\alpha(Q)}]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как носитель функции $\eta_{m,p} uv$ лежит в $Q_{m,p}$ и выполнено условие (2.6), то в силу известных (см., например, [24]) оценок гёльдеровых норм решения эллиптического уравнения второго порядка через максимум его модуля по более широкой области имеем

$$\|\eta_{m,p} uv\|_{C^\alpha(Q)} \leq C \|u\|_{C(\overline{\Omega}_{m,p})} \|v\|_{C(\overline{\Omega}_{m,p})}.$$

Подставляя ее в (2.8), получим

$$|\langle uv, \xi \rangle| \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} [\|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*} |u(x_{m,p})| |v(y_{m,p})|],$$

где $x_{m,p} \in \overline{\Omega}_{m,p}$ и $y_{m,p} \in \overline{\Omega}_{m,p}$ — точки максимума функций $|u|$ и, соответственно, $|v|$ на $\overline{\Omega}_{m,p}$. Возьмем меру μ , сосредоточенную в точках $x_{m,p}$ с плотностью $\|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*}$:

$$\mu(\mathcal{D}) = \sum_{(m,p): x_{m,p} \in \mathcal{D}} \|\xi|_{\overline{\Omega}_{m,p}}\|_{[C^\alpha(Q; \overline{\Omega}_{m,p})]^*};$$

аналогично, ν — мера, сосредоточенная в точках $y_{m,p}$ с той же плотностью. В силу (2.7') эти меры являются мерами Карлесона и для их норм справедливы оценки

$$\|\mu\| \leq C \|\xi\|_{-\alpha}, \quad \|\nu\| \leq C \|\xi\|_{-\alpha}. \quad (2.9)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\langle uv, \xi \rangle| &\leq C \left(\int_Q u^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2} \left(\int_Q v^2(x) d\nu(x) \right)^{1/2} \\ &\leq C \|\xi\|_{-\alpha} \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int_Q u^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\|\nu\|} \int_Q v^2(x) d\nu(x) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Откуда, в силу доказанной в [6] оценки решения задачи (1), (2)

$$\|u\|_{C_{n-1}^0(\overline{Q})} \leq C \|u_0\|_{L_2(\partial Q)} \quad (2.11)$$

получаем требуемую оценку (2.3). Таким образом, лемма 4, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 2 дает, в частности, оценки вида (1.25), (1.26) и свойство (1.36) для квадрата решения задачи (1), (2). Например, при $\alpha = 1$ имеем

$$\int_Q r(x)|u(x)| |\nabla u(x)| d\mu(x) \leq C \|\mu\| \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2. \quad (2.12)$$

Для справедливости этой оценки достаточно дополнительно к (3) и (4) потребовать выполнение условия $a_{i,j} \in C^\beta(Q)$ с каким-нибудь положительным показателем β ; по-видимому, последнее условие является лишним.

Отметим, что оценка (2.12) является в следующем смысле точной. Мера

$$m(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} r(x) d\mu(x), \quad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}_n,$$

по которой интегрируется функция $|u(x)| |\nabla u(x)|$ в (2.12), очевидно, обладает свойством

$$m(S_{x^0}(r)) \leq \text{const } r^n, \quad x^0 \in \partial Q, \quad r > 0. \quad (2.13)$$

Однако напрашивающееся обобщение (2.12) – замена в ней $r(x) d\mu(x)$ на $dm(x)$ с удовлетворяющей (2.13) мерой m , в частности, с мерой Лебега в $\mathbb{R}_n$ – неверно.

Для приложений удобно иметь оценки интегралов не от производных квадратов решений, а от квадратов производных, которые не вытекают из теоремы 2; такие оценки дает следующая теорема 3. В ней мы ограничимся случаем натуральных значений показателя гладкости α . При этом, как и в теореме 2 с $\alpha \geq \alpha_0$, предполагается, дополнительно к (3) и (4), выполнение условия на гладкость коэффициентов, гарантирующего справедливость оценки (2.1) с некоторым $\alpha' > \alpha$ для непрерывных в $\overline{Q}$ решений уравнения (1). Достаточно потребовать

$$a_{i,j} \in C^\beta(Q), \quad \beta > \alpha - 1. \quad (2.14)$$

ТЕОРЕМА 3. Любое решение задачи Дирихле (1), (2) с $u_0 \in L_2(\partial Q)$ удовлетворяет оценке

$$\int_Q r^{2\alpha}(x) \sum_{|l|=\alpha} [D^l u(x)]^2 d\mu(x) \leq C \|\mu\| \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2. \quad (2.15)$$

с произвольной мерой Карлесона μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что доказываемое утверждение, как и теорема 2, имеет локальный характер: достаточно оценить интеграл по пересечению Q с малой окрестностью $\mathcal{U}$ граничной точки. При этом мы будем основываться на использованном в доказательстве леммы 4 построении и пользоваться введенными там обозначениями.

Аналогично (2.10) получаем

$$\begin{aligned}
 \int_Q r^{2\alpha}(x) \sum_{|l|=\alpha} [D^l u(x)]^2 d\mu(x) &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} \int_{Q_{m,p}} \sum_{|l|=\alpha} |D^l u(x)|^2 d\mu(x) \\
 &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} \|u\|_{C(\overline{Q}_{m,p})}^2 \mu(Q_{m,p}) \\
 &= C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p_i=1}^{2^m} u^2(x_{m,p}) \mu(Q_{m,p}) \\
 &= C \int_Q u^2(x) d\nu(x),
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$\nu(\mathcal{D}) = \sum_{(m,p): x_{m,p} \in \mathcal{D}} \mu(Q_{m,p}).$$

А так как покрытие $\{Q_{m,p}\}$ множества $\mathcal{U}$ имеет конечную кратность, то мера ν также является мерой Карлесона и для ее нормы справедлива оценка

$$\|\nu\| \leq C \|\mu\|.$$

Поэтому из (2.16) с помощью оценки (2.11) нормы u и $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ имеем доказываемую оценку (2.15).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для случая $\alpha = 1$ оценка (2.15) теоремы 3 имеет вид

$$\int_Q r^2(x) |\nabla u(x)|^2 d\mu(x) \leq C \|\mu\| \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2. \tag{2.17}$$

Интересно сравнить ее с оценкой (2.12), точность которой обсуждалась в замечании 6. Оценка (2.12) немедленно следует из (2.17) и (2.11). Однако в смысле замечания 6 оценка (2.17) неточна: в ней можно интегрирование по мере $r(x) d\mu(x)$ заменить интегрированием по мере Лебега в $\mathbb{R}_n$. Более того, получаемое таким образом неравенство

$$\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq C \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2$$

справедливо (см. (5)) для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ без дополнительных условий на гладкость коэффициентов.

§3. Применение к нелокальным задачам

В этом параграфе мы приведем некоторые результаты о разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка, в которых значения искомого решения на границе рассматриваемой области Q выражаются через его значения и значения его производных во внутренних точках. Причем пересечение замыкания множества этих внутренних точек с границей ∂Q , как и в работах [6], [22], может иметь весьма сложный вид. Порядок производных, которые входят в нелокальное условие, ограничивается только гладкостью коэффициентов уравнения.

В последнее время появилось большое число работ, посвященных этой тематике. Мы не имеем возможности привести здесь сколько-нибудь подробный их обзор; по этому поводу можно обратиться к работам [27], [6], хотя и имеющуюся там библиографию нельзя считать достаточно полной. Отметим, что в последнее время результаты по разрешимости нелокальных задач нашли применение в задаче об описании инфинитезимальных производящих операторов полугрупп Феллера, по этому поводу см. работы [28], [29].

Пусть $\alpha \geq 1$, коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию (2.14), а u — решение этого уравнения, удовлетворяющее нелокальному условию

$$u|_{\partial Q} = B_c u + B_{b\phi} u + u_0, \quad (2')$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$ — заданная функция, B_c — линейный вполне непрерывный оператор из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$, а оператор $B_{b\phi}$ задается следующим образом.

Пусть ϕ_l , $l = (l_1, \dots, l_n)$, $|l| \leq \alpha$, — меры в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителями в $\partial Q \times \overline{Q}$, а $b_l \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi_l)$. Потребуем выполнение следующих условий.

Проекция меры ϕ_0 , $0 = (0, \dots, 0)$, на пространство первых n переменных является $(n-1)$ -мерной мерой Лебега на ∂Q :

$$\phi_0(G \times \overline{Q}) = \text{mes}_{\partial Q}(G \cap \partial Q) \text{ для всех (борелевских) } G \subset \mathbb{R}_n; \quad (3.1)$$

при $0 < |l| \leq \alpha$

$$\phi_l(G \times Q) = \text{mes}_{\partial Q}(G \cap \partial Q), \quad G \subset \mathbb{R}_n; \quad (3.1')$$

Проекция μ_0 меры $b_0^2 \phi_0$ на пространство последних n переменных является мерой Карлесона:

$$\mu_0(G) = \int_{\partial Q \times G} b_0^2(x, y) d\phi_0(x, y), \quad G \subset \mathbb{R}_n, \quad \|\mu_0\| < \infty; \quad (3.2)$$

аналогично, при $0 < |l| \leq \alpha$

$$\mu_l(G) = \int_{\partial Q \times (G \cap Q)} b_l^2(x, y) d\phi_l(x, y), \quad G \subset \mathbb{R}_n, \quad \|\mu_l\| < \infty. \quad (3.2')$$

Линейный оператор $B_{b\phi}$ определим тождеством

$$(g, B_{b\phi} v)_{L_2(\partial Q)} = \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} g(x) r^{|l|}(y) b_l(x, y) D^l v(y) d\phi_l(x, y), \quad g \in L_2(\partial Q); \quad (3.3)$$

при $|l| > 0$ значения подынтегральной функции $g(x)r^{|l|}(y)b_l(x, y)D^l v(y)$ считаем равными нулю при $y \in \partial Q$. Функция v из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ принадлежит области определения оператора $B_{b\phi}$, если для всех $g \in L_2(\partial Q)$ функции $g(x)r^{|l|}(y)b_l(x, y)D^l v(y)$, $|l| \leq \alpha$, суммируемы по мерам ϕ_l и справедливы оценки

$$\left| \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} g(x)r^{|l|}(y)b_l(x, y)D^l v(y) d\phi_l(x, y) \right| \leq C \|g\|_{L_2(\partial Q)}. \quad (3.4)$$

При этом образом элемента v является тот элемент $B_{b\phi}v \in L_2(\partial Q)$, на котором этот функционал реализуется как скалярное произведение (в $L_2(\partial Q)$).

Заметим, что случай $\alpha = 0$ рассмотрен в работе [6]; в ней доказана (при выполнении условий (3.1) и (3.2)) ограниченность оператора $B_{b\phi}$ из $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$.

Функцию u из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ будем называть *решением задачи* (1), (2'), если она принадлежит области определения оператора $B_{b\phi}$, ее след на ∂Q принадлежит $L_2(\partial Q)$, она удовлетворяет уравнению (1) (в смысле равенства обобщенных функций) и условию (2), понимаемому как равенство элементов $L_2(\partial Q)$.

С помощью оператора $\mathcal{G}$, ставящего в соответствие каждой функции u_0 из $L_2(\partial Q)$ решение $u = \mathcal{G}u_0 \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ задачи Дирихле (1), (2) с этой граничной функцией u_0 , задача (1), (2'), очевидно, сводится к уравнению

$$v = B_c \mathcal{G}v + B_{b\phi} \mathcal{G}v + u_0 \quad (3.5)$$

в пространстве $L_2(\partial Q)$; здесь $v = u|_{\partial Q}$.

ЛЕММА 5. Образ $\mathcal{G}u_0$ произвольного элемента $u_0 \in L_2(\partial Q)$ принадлежит области определения оператора $B_{b\phi}$, а оператор $B_{b\phi}\mathcal{G}$ является ограниченным оператором в $L_2(\partial Q)$ и его норма удовлетворяет оценке

$$\|B_{b\phi}\mathcal{G}\| \leq C \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \|\mu_l\|^{1/2}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, при $\alpha = 0$ это утверждение установлено в работе [6]. Следовательно, нам достаточно рассмотреть случай, когда в определении оператора $B_{b\phi}$ сумма (в (3.3) и в (3.4)) берется по $0 < |l| \leq \alpha$.

Из условия (3.1') для любого такого l имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |r^{|l|}(y)g(x)b_l(x, y)D^l u(y)| d\phi_l(x, y) \\ & \leq \left(\int_{\partial Q \times Q} b_l^2(x, y)r^{2|l|}(y)[D^l u(y)]^2 d\phi_l(x, y) \right)^{1/2} \left(\int_{\partial Q \times Q} g^2(x) d\phi_l(x, y) \right)^{1/2} \\ & = \left(\int_Q r^{2|l|}(y)[D^l u(y)]^2 d\mu_l(y) \right)^{1/2} \|g\|_{L_2(\partial Q)}; \end{aligned}$$

здесь $u = \mathcal{G}v$, $v \in L_2(\partial Q)$, а μ_l определено (3.2'). Так как $\|\mu_l\| < \infty$ (условие (3.2')), то согласно теореме 3

$$\int_Q r^{2|l|}(y)[D^l u(y)]^2 d\mu_l(y) \leq C \|\mu_l\| \|v\|_{L_2(\partial Q)}^2.$$

Поэтому $u = \mathcal{G}v$ принадлежит области определения оператора $B_{b\phi}$ и для всех $v \in L_2(\partial Q)$

$$\|B_{b\phi}\mathcal{G}v\| \leq C \left[\sum_{|l| \leq \alpha} \|\mu_l\|^{1/2} \right] \|v\|_{L_2(\partial Q)},$$

что и доказывает (3.6).

Таким образом, рассматриваемая нелокальная задача (1), (2') сведена к уравнению (3.5) в гильбертовом пространстве $L_2(\partial Q)$; оператор $B_c\mathcal{G}$ в этом уравнении вполне непрерывен, а по лемме 5 оператор $B_{b\phi}\mathcal{G}$ ограничен и его норма оценивается нормами (в степени $1/2$) входящих в его определение мер Карлесона. Более того, в силу условия (2.14) $\mathcal{G}v$ обладает большей, чем α , внутренней гладкостью. Поэтому для любой “срезающей” функции с лежащим внутри Q носителем оператор, получающийся из $B_{b\phi}\mathcal{G}$ заменой функций b_l на произведение этих функций и взятой “срезающей” функции, является вполне непрерывным.

Уравнение (3.5), к которому сведена изучаемая нелокальная задача, полностью аналогично исследованному в работах [6], [22]. Практически дословным повторением рассуждений этих работ доказываются аналоги установленных в них достаточных условий фредгольмовости: теоремы 1 работы [6] и теоремы 1 работы [22].

Сформулируем теорему, аналогичную теореме 1 работы [6].

Пусть $\Gamma \subset \partial Q \times \partial Q$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{z_k\}$ точек $z_k = (x_k, y_k) \in \Gamma$, обладающих следующим свойством

$$y_k = x_{k+1} \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots$$

Множество всех частичных пределов всех таких последовательностей – предельное множество множества Γ – будем, как и в [6], обозначать через Γ^∞ .

Пусть S_0 – пересечение с $\partial Q \times \partial Q$ носителя меры $\sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} b_l^2 \phi_l$, а

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{E}}(G) &= \int_{\partial Q \times G} b_0^2(x, y) \chi_{\mathcal{E}}(x, y) d\phi_0(x, y) \\ &+ \sum_{0 < |l| \leq \alpha} \int_{\partial Q \times (G \cap Q)} b_l^2(x, y) \chi_{\mathcal{E}}(x, y) d\phi_l(x, y), \quad G \subset \mathbb{R}_n, \end{aligned}$$

здесь $\chi_{\mathcal{E}}$ – характеристическая функция множества $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_{2n}$.

Потребуем дополнительно выполнение одного из следующих условий: либо

$$S_0^\infty = \emptyset,$$

либо найдется такое открытое (в топологии $\partial Q \times \partial Q$) множество $\mathcal{U} \subset \partial Q \times \partial Q$, что

$$(S_0 - \mathcal{U})^\infty = \emptyset, \quad \text{и} \quad \|\mu_{\mathcal{U}^\delta}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{U}^\delta = \{z \in \mathbb{R}_{2n} : \text{dist}(z, \mathcal{U}) < \delta\}.$$

Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Задача (1), (2') фредгольмова.*

В заключение отметим, что теорема 4, как и аналогичные теоремы работ [6], [22], дают достаточные условия фредгольмовости нелокальной задачи, если выделен вполне непрерывный оператор B_c . Конечно, всегда можно взять $B_c = 0$; но тогда результат может оказаться весьма грубым: включение в S_0 “массивного” носителя “интегрального оператора”, который можно включить в B_c , конечно, может нарушить выполнение условия (3.7). В связи с этим весьма важной является задача выделения из носителей мер $b_l^2 \phi_l$ “несущественных” точек, т.е. тех подмножеств, соответствующие которым операторы можно отнести в оператор B_c , уменьшая при этом определяющее фредгольмовость задачи множество S_0 . Некоторые условия “несущественности” точек из S_0 можно было бы привести, но это потребовало бы введения новых понятий и существенно увеличило бы объем работы.

Вторым требующим пояснений моментом является выбор множества $\mathcal{U}$ в условии (3.7). Этот вопрос подробно обсужден в работе [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. На случай нелокальных задач, в которых значения решения на границе выражаются через значения во внутренних точках не только самого решения, но и его производных, несложно распространяются результаты, см. [22], о непрерывности в $\bar{Q}$ решения с непрерывной функцией u_0 . Например, если оператор $B_{b\phi}$ (пусть $B_c = 0$) определить тождеством

$$B_{b\phi}u(x) = b(x)\langle u, \phi(x) \rangle, \quad x \in \partial Q, \quad u \in \mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\bar{Q}),$$

в котором ϕ — непрерывное отображение ∂Q в метрическое пространство $\mathcal{B}_1$ (см. § 1, п. 6), а $b \in C(\partial Q)$, то любое решение из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\bar{Q})$ задачи (1), (2') с $u_0 \in C(\partial Q)$ будет непрерывно в $\bar{Q}$ (и, тем самым, будет принадлежать $C^\alpha(Q)$). Легко видеть, что так определенный оператор $B_{b\phi}$ (с $b \in L_2(\partial Q)$) является линейным ограниченным оператором из $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\bar{Q})$ в $L_2(\partial Q)$ и его норма оценивается нормой функции b в $L_2(\partial Q)$.

Список литературы

1. *DeGiorgi E.* Sulla differenziabilita e l'analiticitа delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1957. V. 3. P. 25–43.
2. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 931–954.
3. *Moser J.* A Harnack inequality for parabolic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 101–134.
4. *Гуцин А. К.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). № 1. С. 19–64.
5. *Гуцин А. К., Михайлов В. П.* О существовании граничных значений решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 6. С. 787–810.
6. *Гуцин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
7. *Carleson L.* An interpolation problem for bounded analytic functions // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 921–930.
8. *Hörmander L.* L^p -estimates for (pluri-) subharmonic functions // Math. Scand. 1967. V. 20. P. 65–78.
9. *Розанов Ю. А.* О некоторых обобщениях задачи Дирихле // Матем. сб. 1983. Т. 120. № 3. С. 291–310.

10. Альбеверио С., Лайонс Т., Розанов Ю. О граничных условиях для стохастических эволюционных уравнений с экстремально хаотическим источником // Матем. сб. 1995. Т. 186. №12. С. 3–20.
11. Гущин А. К. Внутренние оценки слабого решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Докл. АН. 1998. Т. 358. №6. С. 1–3.
12. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
13. Михайлов В. П. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. №10. С. 1877–1891.
14. Петрушко И. М. О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). С. 48–77.
15. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Z. 1923. V. 18. P. 87–95.
16. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier series and power series. I, II, III // J. London Math. Soc. 1931. V. 6. P. 230–233; // Proc. London Math. Soc. 1936. V. 42. P. 52–89; 1937. V. 43. P. 105–126.
17. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950.
18. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
19. Гущин А. К., Михайлов В. П. О граничных значениях решений эллиптических уравнений // Обобщенные функции и их применения в математической физике (Тр. Междунар. конференции). М.: ВЦ АН СССР, 1981. С. 189–205.
20. Богоявленский О. И., Владимиров В. С., Волович И. В., Гущин А. К., Дрозжинов Ю. Н., Жаринов В. В., Михайлов В. П. Краевые задачи математической физики // Труды МИАН. 1986. Т. 175. С. 63–102.
21. Нечас И. О решениях эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле // Czechoslovak Math. J. 1960. V. 10. P. 283–298.
22. Гущин А. К., Михайлов В. П. непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. №2. С. 37–58.
23. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
24. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
25. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
26. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
27. Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). С. 279–302.
28. Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. №2. С. 287–291.
29. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями // Матем. сб. 1998. Т. 189. №1. С. 45–78.