Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Каплицкий, Об интегральном уравнении на отрезке с разностным матричным ядром, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 8, 59–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 05:33:32

УДК 517.98

В. М. Каплицкий

Об интегральном уравнении на отрезке с разностным матричным ядром

Рассмотрено уравнение типа свертки на отрезке. Построена реализация расширения соответствующего интегрального оператора в виде некоторого оператора типа Винера–Хопфа, с помощью которой установлен результат о строении собственных подпространств и критерий обратимости исходного оператора.

Получена формула, позволяющая определить резольвенту исходного оператора при наличии факторизации символа вспомогательного оператора Винера–Хопфа.

Библиография: 14 названий.

Введение

В статье предлагается метод исследования оператора свертки с суммируемым ядром на отрезке, основанный на построении вспомогательного эквивалентного оператора Винера–Хопфа специального вида. Исследование последнего опирается на результаты Гохберга–Крейна о факторизации матриц-функций в нормированных кольцах типа $\mathcal{R}_{n \times n}$ [1]–[3]. “Хорошие” свойства символа возникающего оператора Винера–Хопфа позволяют получить для исходного оператора критерий обратимости, оценку спектрального радиуса (точную, как показывают примеры), уточнить и дополнить известные результаты о строении собственных подпространств и структуре резольвентного ядра.

Результаты статьи относятся к уравнению второго рода с суммируемым матричным ядром k

$$\varphi(x) - \int_0^a k(x-y) \cdot \varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

которое исследуется в рамках L_p -пространств, однако используемый подход можно обобщить на интегро-дифференциальные уравнения и некоторые классы интегральных уравнений первого рода.

Вопросу разрешимости различных классов уравнений свертки на отрезке посвящено большое число работ [4]–[8]. В работах Б. В. Пальцева [7], Ю. Ф. Карловича и И. М. Спитковского [8] уравнение

$$\int_{-T}^T k(t-\tau)u(\tau) d\tau = f(t),$$

где k – обобщенная матрица-функция медленного роста, преобразование Фурье $\tilde{k}$ которой имеет степенную асимптотику на бесконечности, сводилось к задаче Римана с матричным коэффициентом

$$G(x) = \begin{pmatrix} e^{-2iT_x} I_n & \tilde{k}(x) \\ 0 & e^{2iT_x} I_n \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Здесь I_n – единичная матрица порядка n (см. также [4]–[6]). Основным результатом работ [7], [8] является вычисление индекса соответствующего оператора в различных парах пространств Соболева. Некоторые случаи разрешимости задачи Римана с коэффициентом (2) в замкнутом виде исследованы в [9]. Уравнения рассматриваемого типа часто возникают в физических задачах (см. [10]–[12]). Подробный обзор приложений дан в [12].

Для интегрального оператора в (1) примем следующее обозначение:

$$(K_a \varphi)(x) = \int_0^a k(x-y) \cdot \varphi(y) dy.$$

Оператор K_a является вполне непрерывным в пространствах $L_p^n(0, a)$, $1 \leq p \leq \infty$. Здесь $L_p^n(0, a)$ – пространство столбцов порядка n с элементами из $L_p(0, a)$.

§ 1. Построение вспомогательного оператора Винера–Хопфа

Продолжим $k(x)$ с отрезка $[-a, a]$ на всю ось с сохранением суммируемости и рассмотрим исходный оператор в пространстве $L_p^n(0, +\infty)$. Этот оператор обозначим $\tilde{K}_a$. Для упрощения записи в дальнейшем под $\mathcal{D}_n^+$ будем понимать одно из пространств $L_p^n(0, +\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Рассмотрим в $\mathcal{D}_{2n}^+$ оператор типа Винера–Хопфа

$$(L_a \varphi)(x) = \int_0^{+\infty} k_a(x-y) \cdot \varphi(y) dy,$$

где

$$k_a(x) = \begin{pmatrix} k(x) & -k(x-a) \\ k(x+a) & -k(x) \end{pmatrix}.$$

Элемент φ из $\mathcal{D}_{2n}^+$ условимся записывать в виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_n^+.$$

Рассмотрим оператор $\tau_a: \mathcal{D}_n^+ \rightarrow \mathcal{D}_{2n}^+$, который переводит вектор $f \in \mathcal{D}_n^+$ в вектор $\varphi \in \mathcal{D}_{2n}^+$ такой, что $\varphi_1(x) = f(x)$, $\varphi_2(x) = f(x+a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Оператор τ_a – сплетающий для пары $\tilde{K}_a, L_a$, т.е.

$$\tau_a \tilde{K}_a = L_a \tau_a. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяется прямым вычислением.

Пусть $V_a = \text{Im } \tau_a$, $\tilde{L}_a$ – сужение оператора L_a на замкнутое подпространство V_a . Тогда

$$\tilde{K}_a = \tau_a^{-1} \tilde{L}_a \tau_a, \quad (4)$$

так как τ_a – изоморфизм $\mathcal{D}_n^+$ и V_a . Как известно (см. [1]), оператор $I - L_a$ – нётеров. Из легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} \ker(I - L_a) &= \ker(I - \tilde{L}_a) \simeq \ker(I - \tilde{K}_a), \\ \text{coker}(I - L_a) &= \text{coker}(I - \tilde{L}_a) \simeq \text{coker}(I - \tilde{K}_a) \end{aligned}$$

вытекает, что у операторов $I - L_a$ и $I - \tilde{K}_a$ одинаковые аналитические свойства. Задача сведена к исследованию оператора Винера–Хопфа $I - L_a$. Однородное уравнение $(I - L_a)\varphi = 0$ приводит к задаче Римана (см. [1]):

$$(I - \mathcal{K}_a(t))\Psi^+(t) = \Psi^-(t), \quad \mathcal{K}_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_a(x)e^{ixt} dx$$

или

$$\Psi^+(t) = \mathcal{Z}_a(t) \cdot \Psi^-(t),$$

где

$$\mathcal{Z}_a(t) = \begin{pmatrix} I_n + \mathcal{K}(t) & -e^{iat}\mathcal{K}(t) \\ e^{-iat}\mathcal{K}(t) & I_n - \mathcal{K}(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{K}(t)$ – преобразование Фурье ядра $k(x)$, I_n – единичная матрица порядка n . Матрица $\mathcal{Z}_a(t)$ обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{Z}_a(\pm\infty) = I, \quad (5)$$

$$\det \mathcal{Z}_a(t) = 1, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (6)$$

Докажем унимодулярность $\mathcal{Z}_a(t)$.

Имеем $\mathcal{Z}_a = I + \mathcal{K}_a$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_a(t) &= \begin{pmatrix} \mathcal{K}(t) & -e^{iat}\mathcal{K}(t) \\ e^{-iat}\mathcal{K}(t) & -\mathcal{K}(t) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K}_a^2(t) &= 0, \quad -\infty < t < +\infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\det \mathcal{Z}_a(t) = \exp(\text{Sp } \ln \mathcal{Z}_a(t)) = \exp(\text{Sp } \mathcal{K}_a(t)) \equiv 1,$$

так как

$$\text{Sp } \mathcal{K}_a(t) \equiv 0.$$

Свойства (5), (6) означают, что $\mathcal{Z}_a(t)$ может рассматриваться как матрица-функция на сомкнутой действительной оси, непрерывная и неособенная.

§ 2. Некоторые понятия и результаты теории факторизации матриц-функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Левой стандартной факторизацией неособенной непрерывной матрицы-функции $A(\xi)$, $|\xi| = 1$, называется представление ее в виде*

$$\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}^+(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \mathcal{A}^-(\xi),$$

где $\Lambda(\xi) = \text{diag}(\xi^{\kappa_j})$, $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ — некоторые целые числа, $\mathcal{A}^+(\xi)$, $\mathcal{A}^-(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в области $|\xi| < 1$ и $|\xi| > 1$, соответственно, $\mathcal{A}^\pm(\xi)$ непрерывны вплоть до границы и $\det \mathcal{A}^+(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \leq 1$, $\det \mathcal{A}^-(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \geq 1$.

Числа κ_j однозначно определяются матрицей $\mathcal{A}(\xi)$ и называются *левыми частными индексами матрицы $\mathcal{A}(\xi)$* (см. [2], [3]). Аналогично вводятся определения правой стандартной факторизации и правых частных индексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *$\mathcal{R}$ -кольцом* называется нормированное кольцо функций, определенных и непрерывных на окружности $|\xi| = 1$, в котором совокупность сужений (на окружность $|\xi| = 1$) рациональных в $\mathbb{C}$ функций с полюсами вне окружности $|\xi| = 1$ является плотным подмножеством.

Через $\mathcal{R}_{n \times n}$ обозначают нормированное кольцо матриц n -го порядка с элементами из $\mathcal{R}$ -кольца и с нормой

$$\|\mathcal{A}\| = n \cdot \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{\mathcal{R}},$$

где $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ — норма в кольце $\mathcal{R}$. Факторизация на вещественной оси (при соответствующих условиях) получается из факторизации на единичной окружности с помощью обычного дробно-линейного преобразования:

$$\xi = \frac{t-i}{t+i}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

К матрице $\mathcal{Z}_a(t)$ применима основная теорема о факторизациях в $\mathcal{R}_{n \times n}$ -кольцах. Пусть $\mathbf{K}$ — кольцо всех функций вида

$$a(t) = \mu + \mathcal{K}(t), \tag{7}$$

где

$$\mathcal{K}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{itx} dx, \quad k \in L(-\infty, +\infty),$$

с нормой $\|a\| = |\mu| + \int_{-\infty}^{+\infty} |k(x)| dx$, $\mathbf{K}^+$, $\mathbf{K}^-$ — подкольца, состоящие из функций вида (7) при условии, что $k(x) = 0$, при $x < 0$ или $x > 0$, соответственно. В силу результатов [2] матрица $\mathcal{Z}_a(t)$ допускает левую стандартную факторизацию:

$$\mathcal{Z}_a(t) = \mathcal{Z}_a^+(t) \cdot \Lambda_a(t) \cdot \mathcal{Z}_a^-(t),$$

где

$$\Lambda_a(t) = \text{diag} \left(\left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{\kappa_j} \right), \quad \kappa_j = \kappa_j(\mathcal{Z}_a),$$

$$\mathcal{Z}_a^\pm \in \mathbf{K}_{n \times n}^\pm, \quad \det \mathcal{Z}_a^\pm(t) \equiv 1.$$

(Здесь $\mathbf{K}_{n \times n}^\pm$ означает кольцо матриц с элементами из $\mathbf{K}^\pm$.)

В следующем параграфе приводится оценка спектрального радиуса оператора K_a и теорема о структуре его собственных подпространств, обобщающая результаты работы [12].

ЗАМЕЧАНИЕ. Введение спектрального параметра λ соответствует замене матрицы $\mathcal{Z}_a$ на матрицу $\mathcal{Z}_{a,\lambda} = I + \lambda^{-1} \cdot \mathcal{K}_a$.

§3. Спектральные свойства оператора K_a

ЛЕММА. Собственные числа матрицы $\text{Re } \mathcal{Z}_{a,\lambda}$ есть

$$\mu_p^\pm = 1 \pm |\lambda|^{-1} \cdot \lambda_p^{1/2} (\mathcal{K}_a^* \mathcal{K}_a), \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где $\lambda_p (\mathcal{K}_a^* \mathcal{K}_a)$ – собственные числа матрицы $\mathcal{K}_a^* \mathcal{K}_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя приведение к жордановой форме, можно показать, что

$$\det(\mu I_{2n} - \text{Re } \mathcal{Z}_{a,\lambda}) = \det((1 - \mu)^2 I_n - |\lambda|^{-2} \mathcal{K}_a^* \mathcal{K}_a),$$

откуда и получается формула (8).

Ниже под нормой непрерывной матрицы-функции $\mathcal{A}(t)$, $-\infty < t < +\infty$, $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t) = 0$, имеется в виду число

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_t \max_i \{ |\lambda_i(t)| : \lambda_i^2(t) \in \sigma(\mathcal{A}^*(t) \mathcal{A}(t)) \}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Для спектрального радиуса оператора K_a справедлива оценка

$$r^2(K_a) \leq \|\mathcal{K}_a^* \mathcal{K}_a\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|\lambda|^2 \geq \|\mathcal{K}_a^* \mathcal{K}_a\|$ все левые частные индексы матрицы $\mathcal{Z}_{a,\lambda}$ равны нулю. Действительно, при этом условии $\mu_p^\pm > 0$ (см. формулу (8)), а значит, $\text{Re } \mathcal{Z}_{a,\lambda}$ – положительно определенная матрица. В [2] доказано, что тогда $\kappa_j(\mathcal{Z}_{a,\lambda}) \equiv 0$. При этом однородная задача Римана имеет лишь тривиальное решение, а неоднородная имеет единственное решение, т.е. при таких λ оператор $L_a - \lambda I$, а значит, и $K_a - \lambda I$ – обратим. Следовательно, спектр оператора лежит в круге радиуса $\|\mathcal{K}_a^* \mathcal{K}_a\|^{1/2}$. Теорема доказана.

В соответствии с [2] назовем *Д-цепочкой длины n* совокупность вектор-функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$, определенных на отрезке $[0, a]$ и обладающих следующими свойствами:

- 1) $\varphi_j, j = 0, \dots, n-1$, – абсолютно непрерывны;
- 2) $\varphi_{j+1}(x) = \varphi_j'(x)$, $\varphi_j(0) = 0, j = 0, \dots, n-2, \varphi_{n-1}(0) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3.2. Число λ принадлежит $\sigma(K_a)$ тогда и только тогда, когда $\kappa_j \equiv \kappa_j(\mathcal{L}_{a,\lambda}) \neq 0$. При этом

- 1) $\dim \ker(K_a - \lambda I) = \sum_{\kappa_j > 0} \kappa_j = \sum_{j=1}^p \kappa_j^+$,
- 2) в $\ker(K_a - \lambda I)$ существует базис, состоящий из p $\mathcal{D}$ -цепочек длины κ_j^+ , $j = 1, 2, \dots, p$, где κ_j^+ – положительные левые индексы матрицы $\mathcal{L}_{a,\lambda}$.

§ 4. Обращение оператора $I - K_a$

Из предыдущего результата вытекает следующая

ТЕОРЕМА 4.1. Для обратимости оператора $I - K_a$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\kappa_j(\mathcal{L}_a) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \quad (9)$$

Пусть выполнено условие (9). Тогда матрица $\mathcal{L}_a$ допускает левую факторизацию с множителями

$$\mathcal{L}_a^\pm = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_a^\pm & \mathcal{B}_a^\pm \\ \mathcal{C}_a^\pm & \mathcal{D}_a^\pm \end{pmatrix}, \quad \Lambda_a = I_{2n},$$

где $\mathcal{A}_a^\pm, \mathcal{B}_a^\pm, \mathcal{C}_a^\pm, \mathcal{D}_a^\pm$ – матрицы порядка n . Ниже под резольвентным ядром оператора K_a имеется в виду ядро $\Gamma_a(x, y)$ интегрального оператора $(I - K_a)^{-1} - I$.

ТЕОРЕМА. Резольвентное ядро оператора K_a допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} \Gamma_a(x, y) &= \Gamma_a^+(x - y) + \Gamma_a^-(x - y) \\ &+ \int_0^{\min\{x, y\}} (\Gamma_a^+(x - z) \cdot \Gamma_a^-(z - y) - \Gamma_a^-(x - a - z) \cdot \Gamma_a^+(z - y + a)) dz, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\Gamma_a^\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A}_a^\pm(t) - I) e^{-ixt} dt, \quad (11)$$

$\mathcal{A}_a^\pm$ – левые верхние $(n \times n)$ -блоки матриц $\mathcal{L}_a^\pm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (3), (4) для нахождения $(I - K_a)^{-1}f$ нужно применить оператор $(I - L_a)^{-1}$ к вектору $\varphi(x) = \{f(x), f(x + a)\}$; компоненты искомого вектора $(I - K_a)^{-1}f$ совпадают с первыми n компонентами вектора $(I - L_a)^{-1}\varphi$. Пусть Γ_a – резольвентное ядро оператора K_a . Тогда из (3), (4) и известного интегрального представления резольвенты оператора Винера–Хопфа можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Gamma_a(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A}_a^+(t) - I) e^{-ixt} dt, \\ \Gamma_a(0, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A}_a^-(t) - I) e^{-ixt} dt. \end{aligned}$$

С другой стороны, известно функциональное соотношение, позволяющее определить функцию $\Gamma_a(x, y)$ по ее значениям на прямых $x = 0$ и $y = 0$. Это соотношение имеет вид (см. [12]–[14]):

$$\Gamma_a(x, y) = \Gamma_a(x - y, 0) + \Gamma_a(0, x - y) + \int_0^{\min\{x; y\}} (\Gamma_a(x - z, 0) \cdot \Gamma_a(0, z - y) - \Gamma_a(0, x - a - z) \cdot \Gamma_a(z - y + a, 0)) dz.$$

Сопоставляя эти формулы, получим (10) и (11). Теорема доказана.

В заключение автор приносит благодарность профессору В. П. Кондакову, профессору Н. К. Карапетянцу и сотрудникам лаборатории прочности и процессов разрушения НИИМ и ПМ при РГУ за обсуждение результатов.

Список литературы

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. № 2. С. 3–72.
2. Гохберг И. Ц. Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения // УМН. 1964. Т. 19. № 1. С. 71–124.
3. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
4. Ганин М. Р. Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов // Изв. вузов. Сер. матем. 1973. № 2 (129). С. 31–43.
5. Пальцев Б. В. Разложения по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны. “Слабо” несамосопряженные регулярные ядра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 3. С. 591–634.
6. Пальцев Б. В. Асимптотика спектра и собственных функций операторов свертки с однородным преобразованием Фурье ядра // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 1. С. 28–31.
7. Пальцев Б. В. Уравнение свертки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 2. С. 322–394.
8. Карлович Ю. Ф., Спитковский И. М. О нётеровости некоторых сингулярных интегральных операторов с матричными коэффициентами класса SAP и связанных с ними системах уравнений свертки на конечном промежутке // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 531–535.
9. Комяк И. И. О решении в квадратурах интегрального уравнения Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1973. Т. 20. № 2. С. 45–52.
10. Крейн М. Г. Об определении потенциала частицы по ее S -функции // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. № 3. С. 433–436.
11. Цвеллик А. М. Точное решение модели одномерных фермионов с симметрией $SU(N) \otimes SU(M)$ // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. № 4. С. 1329–1340.
12. Сажнович Л. А. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке // УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 69–129.
13. Baxter G., Hirschman I. I., Jr. An explicit inversion formula for finite-section Wiener–Hopf operators // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 820–823.

14. *Hirschman I. I., Jr.* Finite section Wiener–Hopf equations on a compact group with ordered dual // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 508–510.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию
17.07.1996 и 15.12.1997