Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мильман, Липшицевы продолжения линейно ограниченных функций, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 8, 67–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:27:44

УДК 517.5

В. А. Мильман

Липшицевы продолжения линейно ограниченных функций

Рассматривается задача продолжения действительнзначной функции с подмножества Y метрического пространства (X, d) на все пространство. Известный результат Макшейна позволяет продолжить равномерно непрерывную функцию с сохранением модуля непрерывности. Однако при этом остаются без ответа некоторые естественные вопросы. Предлагается новый вид продолжения для широкого класса функций, включающего ограниченные и липшицевы функции. Доказывается ряд полезных в приложениях свойств продолжения, в том числе, сохранение ограничений на приращения значений функции, если ограничения заданы при помощи квазивогнутых мажорант.

Построенное продолжение позволило усилить и обобщить известные результаты в задаче о следах функций с ограниченным градиентом. Продолжение применяется в двух задачах приближения функций. В частности, дано прямое доказательство теоремы о плотности класса $\text{Lip}(X)$ в классе $\text{lip}(X, \omega)$.

Библиография: 24 названия.

Используемые обозначения и понятия

В работе используются следующие обозначения:

(X, d) – метрическое пространство, Y – замкнутое непустое собственное подмножество X ;

$xy = d(x, y)$ – расстояние между точками $x, y \in X$;

$d(x, Y) = \inf\{xy : y \in Y\}$ – расстояние от точки $x \in X$ до множества Y ;

$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность точек из Y ;

$\text{dom}(h)$ – область определения функции h ;

$h|_Y$ – сужение функции h на подмножество Y .

Все функции в работе предполагаются действительнзначными. Следуя Н. Бурбаки, функцию $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть:

возрастающей, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) \leq h(t_2)$;

строго возрастающей, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) < h(t_2)$;

убывающей, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) \geq h(t_2)$;

строго убывающей, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) > h(t_2)$.

Буквой ω (возможно с индексами) всегда обозначается функция, действующая из $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$.

Функция ω называется *полуаддитивной*, если

$$\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b) \quad \forall a, b \geq 0.$$

Липшицевой полунормой функции $h: Y \rightarrow \mathbb{R}$ называется величина

$$\|h\|_{\text{Lip}} = \sup \left\{ \frac{|h(x) - h(y)|}{xy} : x, y \in Y, x \neq y \right\}.$$

Будем использовать следующие классы функций:

$\text{Lip}(Y) = \{h: Y \rightarrow \mathbb{R} : \|h\|_{\text{Lip}} < +\infty\}$ – класс липшицевых функций,

$K \cdot \text{Lip}(Y) = \{h: Y \rightarrow \mathbb{R} : \|h\|_{\text{Lip}} \leq K\}$,

$\text{Lip}(Y, \omega) = \{h: Y \rightarrow \mathbb{R} : |h(x) - h(y)| \leq \omega(xy) \forall x, y \in Y\}$.

Пусть $Z \subset \text{dom}(h)$, $x \in \text{dom}(h)$. Введем обозначение

$$k[Z]h(x) = \sup \left\{ \frac{|h(y) - h(x)|}{xy} : y \in Z, x \neq y \right\}.$$

Число $k[\text{dom}(h)]h(x)$ называется *коэффициентом Липшица* функции h в точке x . Коэффициент Липшица является точной нижней гранью чисел K таких, что выполняется неравенство

$$|h(y) - h(x)| \leq K \cdot xy \quad \forall y \in \text{dom}(h).$$

Будем говорить, что для функции h в точке x выполняется (нарушается) условие Липшица, если ее коэффициент Липшица в этой точке конечен (бесконечен).

§ 1. Введение

В работе рассматривается задача продолжения функции $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ на все множество X . Известно, что функция $f \in K \cdot \text{Lip}(Y)$ может быть продолжена на X с сохранением константы K , т.е. существует функция $u \in K \cdot \text{Lip}(X)$ такая, что $u|_Y = f$. Имеются два доказательства этого факта [1]. Первое получено Киршб-рауном как частный случай результата о продолжении сжимающих векторнозначных отображений. Доказательство проводится с использованием леммы Цорна по той же схеме, что и традиционное доказательство теоремы Хана–Банаха. Второе доказательство предложил Макшейн [2], указав явную формулу для продолжения:

$$u(x) = \inf \{f(y) + Kxy : y \in Y\}.$$

Оба доказательства неоднократно переоткрывались, например, в [3]–[6]. Продолжение липшицевых функций используется в различных разделах анализа [1], [4]–[13] и в приложениях [14]. Условия непрерывной зависимости продолжений от исходных данных исследованы в [15].

В [2], [3] получено обобщение формулы Макшейна на функции из класса $\text{Lip}(Y, \omega)$, где функция ω возрастает, полуаддитивна и $\omega(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \omega(t) = 0$. Если $f \in \text{Lip}(Y, \omega)$, то функция

$$u(x) = \inf \{f(y) + \omega(xy) : y \in Y\} \tag{1.1}$$

принадлежит классу $\text{Lip}(X, \omega)$. Функцию ω с указанными свойствами называют *модулем непрерывности*. Поэтому говорят, что продолжение (1.1) сохраняет модуль непрерывности ω .

Принадлежность функции f классу $K \cdot \text{Lip}(Y)$ либо $\text{Lip}(Y, \omega)$ накладывает ограничения на приращения функции равномерно по всей области определения. Эти ограничения не учитывают того обстоятельства, что возможно различное поведение функции в разных частях области определения. Поэтому упомянутые результаты о продолжении функций не дают ответы на некоторые естественные вопросы. Например, на такой:

всегда ли существует такое продолжение функции, при котором множество точек, где нарушается условие Липшица, одинаково для исходной функции и для ее продолжения?

ПРИМЕР. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$,

$$f(0, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \leq 0, \\ b^{1/2}, & \text{если } b > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $f \in \text{Lip}(Y, t^{1/2})$. Применение формулы (1.1) дает продолжение

$$u(a, b) = \begin{cases} |a|^{1/2}, & \text{если } b \leq 0, \\ (|a|^2 + |b|^2)^{1/4}, & \text{если } b > 0. \end{cases}$$

Функция u принадлежит классу $\text{Lip}(X, t^{1/2})$. Однако для исходной функции f условие Липшица нарушается только в точке $(0, 0)$, а для продолжения u это условие нарушается на всей полуоси $\{(0, b) : b \leq 0\}$.

Возможен также следующий вопрос:

существует ли продолжение функции, при котором не возрастает коэффициент Липшица в каждой точке множества Y ?

Наконец, возможен вопрос в самой общей форме.

Пусть каждой точке $y \in Y$ поставлены в соответствие две функции $\omega_y^+(t)$ и $\omega_y^-(t)$, ограничивающие приращение значений функции f относительно значения в точке y :

$$-\omega_y^-(y_1 y) \leq f(y_1) - f(y) \leq \omega_y^+(y_1 y) \quad \forall y, y_1 \in Y.$$

Существует ли продолжение функции, при котором сохраняются ограничения на приращения? То есть существует ли продолжение u функции f такое, что

$$-\omega_y^-(xy) \leq u(x) - u(y) \leq \omega_y^+(xy) \quad \forall y \in Y, \forall x \in X?$$

Если продолжение существует, то будет ли для него выполняться условие Липшица в точках множества $X \setminus Y$?

Ответ оказывается положительным для функций, которые мы называли *линейно ограниченными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f , определенная на метрическом пространстве с метрикой d , называется *линейно ограниченной*, если существуют $y_0 \in \text{dom}(f)$, $A, B \in \mathbb{R}^+$ такие, что

$$|f(y)| \leq A + Bd(y_0, y) \quad \forall y \in \text{dom}(f).$$

Линейно ограниченные функции могут быть разрывными. Ограниченная функция заведомо линейно ограничена. Класс всех линейно ограниченных функций, определенных на Y , образует линейное пространство и включает в себя классы $\text{Lip}(Y)$ и $\text{Lip}(Y, \omega)$, где ω – линейно ограниченная возрастающая функция.

В настоящей работе для линейно ограниченной функции f строится продолжение, дающее положительный ответ на сформулированные вопросы. Кроме того, это продолжение обладает рядом полезных свойств, что позволяет в некоторых приложениях усилить результат и/или сократить доказательство.

Работа построена следующим образом. В § 2 приводится неформальная геометрическая конструкция продолжения и доказываются вспомогательные результаты. В § 3 определяется продолжение и устанавливаются его свойства. В § 4 полученные результаты применяются в задаче о следе функции с ограниченным градиентом, рассмотренной в [7] в связи с физическими приложениями. В § 5 продолжение функций применяется в задачах приближения.

Некоторые частные случаи рассматриваемых вопросов ранее излагались в [16], [17].

§ 2. Вспомогательные результаты

2.1. Геометрическая конструкция. Приведем неформальную геометрическую конструкцию продолжения линейно ограниченной функции $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Все приводимые при этом утверждения далее строго доказываются.

Выберем произвольную точку x из $X \setminus Y$ и определим значение продолжения в этой точке. Для этого на плоскости введем систему координат DOF (см. рис.). По горизонтальной оси OD будем откладывать расстояния от точки x до точек множества Y . По вертикальной оси OF будем откладывать значения функции f . На плоскости определим множество

$$G = \{(xy, f(y)) : y \in Y\}.$$

Отметим, что множество G лежит на положительном расстоянии от оси OF , так как множество Y замкнуто и $x \notin Y$.

Возьмем на оси OF произвольную точку $T = (0, t)$. Рассмотрим угол PTQ , под которым видно множество G из точки T . В силу линейной ограниченности функции f этот угол, исключая точку T , лежит строго справа от оси OF . Через $(-p(t))$ обозначим тангенс угла наклона прямой TP , а через $q(t)$ обозначим тангенс угла наклона прямой TQ . Перемещая точку T по оси OF , найдем положение, обозначаемое через $C = (0, c)$, когда $p(c) = q(c)$. В этом случае биссектриса угла PCQ расположена горизонтально. Оказывается, возможны два случая:

такое положение точки $C = (0, c)$ единственно;

такие положения заполняют на вертикальной оси конечный невырожденный отрезок $\{(0, c) : c_- \leq c \leq c_+\}$.

В первом случае искомое значение продолжения функции полагаем равным s , а во втором – равным $(c_- + c_+)/2$. Таким образом, продолжение в произвольно выбранной точке определено.

2.2 Вспомогательные функции. Везде далее предполагается, что функция $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ линейно ограничена. Определим вспомогательные функции $p_{f,x}$, $q_{f,x}$ и исследуем их свойства. Пусть $x \in X \setminus Y$, $t \in \mathbb{R}$,

$$p_{f,x}(t) := \sup \left\{ \frac{t - f(y)}{xy} : y \in Y \right\},$$

$$q_{f,x}(t) := \sup \left\{ \frac{f(y) - t}{xy} : y \in Y \right\}.$$

Из линейной ограниченности функции f сразу следует конечность функций $p_{f,x}$ и $q_{f,x}$. Следующая лемма характеризует зависимость функций $p_{f,x}$ и $q_{f,x}$ от исходной функции f .

ЛЕММА 2.1. Пусть f и g – линейно ограниченные функции, $x \in X \setminus Y$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

- 1) если $f \leq g$, то $p_{f,x} \geq p_{g,x}$, $q_{f,x} \leq q_{g,x}$;
- 2) $p_{f+b,x}(t) = p_{f,x}(t - b)$, $q_{f+b,x}(t) = q_{f,x}(t - b)$;
- 3) при $a \geq 0$ $p_{af,x}(at) = a \cdot p_{f,x}(t)$, $q_{af,x}(at) = a \cdot q_{f,x}(t)$;
- 4) при $a < 0$ $p_{af,x}(at) = -a \cdot q_{f,x}(t)$, $q_{af,x}(at) = -a \cdot p_{f,x}(t)$.

Доказательство непосредственно следует из определений функций $p_{f,x}$ и $q_{f,x}$.

Там, где исходная функция f и/или точка x фиксированы, будем использовать краткие обозначения

$$p(t) = p_x(t) = p_{f,x}(t), \quad q(t) = q_x(t) = q_{f,x}(t).$$

Далее считаем функцию f фиксированной. Возьмем $x \in X \setminus Y$. В случае, когда множество Y неограничено, определим числа

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \left\{ -\frac{f(y)}{xy} : y \in Y, xy \geq t \right\}; \quad (2.1)$$

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \left\{ \frac{f(y)}{xy} : y \in Y, xy \geq t \right\}. \quad (2.2)$$

Очевидно, что пределы существуют, p_0, q_0 не зависят от выбора точки x и выполняются неравенства $p_0 \leq p_x(t), q_0 \leq q_x(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Если множество Y ограничено, положим по определению $p_0 = q_0 = -\infty$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $x \in X \setminus Y$. Функция $p = p_x$ непрерывна, возрастает, выпукла и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty.$$

Возможны два случая:

- 1) существует $t_p(x) \in \mathbb{R}$ такое, что $p(t) = p_0$ при $t \leq t_p(x)$ и $p(t)$ строго возрастает при $t > t_p(x)$;
- 2) $p(t)$ строго возрастает на всем $\mathbb{R}$, в этом случае полагаем по определению $t_p(x) = -\infty$.

При $t \geq t_p(x)$ существует последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ точек из Y такая, что

$$t = \lim_{i \rightarrow \infty} (f(y_i) + p(t)xy_i). \quad (2.3)$$

При $t > t_p(x)$ для каждой такой последовательности выполняются неравенства

$$(D_+ p(t))^{-1} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} xy_i \leq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} xy_i \leq (D_- p(t))^{-1}, \quad (2.4)$$

где D_+, D_- – правая и левая производные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возрастание функции p очевидно. Функция p определена на $\mathbb{R}$ как поточечная точная верхняя грань множества линейных функций, стремящихся к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Выпуклость и непрерывность функции p следуют из [18, гл. 1, § 4]. Оттуда же следует, что возможны два случая:

- 1) существует $t_p(x) \in \mathbb{R}$ такое, что $p(t)$ постоянна при $t \leq t_p(x)$ и $p(t)$ строго возрастает при $t > t_p(x)$;
- 2) $p(t)$ строго возрастает на всем $\mathbb{R}$.

Докажем, что $p(t) = p_0$ при $t < t_p(x)$. Пусть $t < t_p(x)$, $\delta > 0$, $t + \delta < t_p(x)$. Из определения $p(t)$ следует существование последовательности $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что выполняется равенство

$$p(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{t - f(y_i)}{xy_i}. \quad (2.5)$$

Из соотношений

$$p(t + \delta) \geq \frac{t + \delta - f(y_i)}{xy_i} = \frac{t - f(y_i)}{xy_i} + \frac{\delta}{xy_i}$$

и из (2.5) имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} xy_i = +\infty.$$

Следовательно,

$$p(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{t - f(y_i)}{xy_i} \leq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} -\frac{f(y_i)}{xy_i} \leq p_0 \leq p(t),$$

т.е. $p(t) = p_0$.

Докажем (2.3). Пусть $t \geq t_p(x)$. Тогда $p(t) < p(t + \delta) \quad \forall \delta > 0$. Из определения функции p следует, что

$$t - f(y) - p(t)xy \leq 0 \quad \forall y \in Y.$$

Предположим, что для любой последовательности $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ равенство (2.3) не выполняется. С учетом последнего неравенства это означает существование $\delta > 0$ такого, что

$$t - f(y) - p(t)xy \leq -\delta < 0 \quad \forall y \in Y.$$

Тогда

$$\frac{t + \delta - f(y)}{xy} \leq p(t) \quad \forall y \in Y,$$

что противоречит неравенству $p(t + \delta) > p(t)$. Равенство (2.3) доказано.

Докажем первое неравенство в (2.4). Пусть $t > t_p(x)$, $\delta > 0$ и последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что выполняется (2.3). Из (2.3) и $xy_i > d(x, Y) > 0$ следует, что $\lim_{i \rightarrow \infty} (t - f(y_i))/xy_i = p(t)$. Тогда

$$p(t + \delta) \geq \frac{t + \delta - f(y_i)}{xy_i} = \frac{t - f(y_i)}{xy_i} + \frac{\delta}{xy_i}.$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$p(t + \delta) - p(t) \geq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\delta}{xy_i},$$

откуда следует, что $(D_+p(t))^{-1} \leq \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} xy_i$. Вторая часть (2.4) доказывается аналогично. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $x \in X \setminus Y$. Функция $q = q_x$ непрерывна, убывает, выпукла и

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = +\infty.$$

Возможны два случая:

- 1) существует $t_q(x) \in \mathbb{R}$ такое, что $q(t) = q_0$ при $t \geq t_q(x)$ и $q(t)$ строго убывает при $t < t_q(x)$;
- 2) $q(t)$ строго убывает на всем $\mathbb{R}$, в этом случае полагаем по определению $t_q(x) = +\infty$.

При $t \leq t_q(x)$ существует последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ точек из Y такая, что

$$t = \lim_{i \rightarrow \infty} (f(y_i) - q(t)xy_i).$$

При $t < t_q(x)$ для каждой такой последовательности выполняются неравенства

$$(D_-q(t))^{-1} \leq \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} xy_i \leq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} xy_i \leq (D_+q(t))^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства 4) в лемме 2.1 следует, что

$$q_{-f,x}(-t) = p_{f,x}(t).$$

Поэтому свойства функции $q_{f,x}$ получаются из леммы 2.2 как следствия свойств функции $p_{f,x}$. Следствие доказано.

Рассмотрим уравнение

$$p_{f,x}(t) = q_{f,x}(t), \quad (2.6)$$

играющее центральную роль при построении продолжения. Исследуем структуру множества его решений при фиксированном $x \in X \setminus Y$.

ЛЕММА 2.3. *Множество решений уравнения (2.6) представляет собой конечный отрезок $[c_-, c_+]$, который может быть вырожденным, т.е. возможен случай $c_+ = c_-$.*

Если число c является решением уравнения (2.6) и $c_1 \in \mathbb{R}$, то

$$0 \leq p(c) = q(c) = \sup \left\{ \frac{|f(y) - c|}{xy} : y \in Y \right\} \leq \sup \left\{ \frac{|f(y) - c_1|}{xy} : y \in Y \right\}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $p(t) - q(t)$ непрерывна и возрастает. В силу монотонности функций p и q

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} (p(t) - q(t)) &\leq p(0) - \lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = -\infty, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} (p(t) - q(t)) &\geq \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) - q(0) = +\infty. \end{aligned}$$

Значит, множество решений уравнения (2.6) непусто, ограничено, замкнуто и связно, т.е. представляет собой либо конечный невырожденный отрезок, либо единственное число.

Предположим, что $p(c) = q(c) < 0$. Возьмем произвольное $y \in Y$. Тогда $(c - f(y))/xy \leq p(c) < 0$ и, следовательно, $q(c) \geq (f(y) - c)/xy > 0$. Полученное противоречие показывает, что $p(c) = q(c) \geq 0$.

Докажем второе неравенство в (2.7). Очевидно, что

$$\sup \left\{ \frac{|f(y) - t|}{xy} : y \in Y \right\} = \max\{p(t); q(t)\}.$$

Если $c_1 \geq c$, то $p(c_1) \geq p(c) = q(c)$. Если $c_1 < c$, то $q(c_1) \geq q(c) = p(c)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{|f(y) - c_1|}{xy} : y \in Y \right\} &= \max\{p(c_1); q(c_1)\} \\ &\geq p(c) = q(c) = \sup \left\{ \frac{|f(y) - c|}{xy} : y \in Y \right\}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Введем обозначение

$$L(x) = p_{f,x}(c) = q_{f,x}(c),$$

где c — любой корень уравнения (2.6). Непосредственно из определений функций p и q следуют два свойства функции $L(x)$:

1) выполняются неравенства

$$f(y) - L(x)xy \leq c \leq f(y) + L(x)xy \quad \forall y \in Y; \quad (2.8)$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $y_1, y_2 \in Y$ такие, что

$$\frac{c - f(y_1)}{xy_1} \geq L(x) - \varepsilon, \quad \frac{f(y_2) - c}{xy_2} \geq L(x) - \varepsilon. \quad (2.9)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $x \in X \setminus Y$. Справедливо равенство

$$L(x) = \sup \left\{ \frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} : y_1, y_2 \in Y \right\}.$$

Функция $L(x)$ непрерывна в точке x и ограничена в некоторой окрестности этой точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_1, y_2 \in Y$. Из (2.8) следуют неравенства

$$f(y_1) - c \leq L(x)xy_1, \quad c - f(y_2) \leq L(x)xy_2.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$f(y_1) - f(y_2) \leq L(x)(xy_1 + xy_2). \quad (2.10)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Выбрав точки $y_1, y_2 \in Y$, удовлетворяющие условию (2.9), получим неравенства

$$f(y_1) - c \geq (L(x) - \varepsilon)xy_1, \quad c - f(y_2) \geq (L(x) - \varepsilon)xy_2.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$f(y_1) - f(y_2) \geq (L(x) - \varepsilon)(xy_1 + xy_2). \quad (2.11)$$

Учитывая, что ε может быть выбрано произвольно малым, из (2.10) и (2.11) получаем требуемое равенство.

Докажем непрерывность $L(x)$. Возьмем точку x_1 так близко к x , чтобы выполнялось $xx_1 \leq d(x, Y)/2$ и, следовательно,

$$d(x_1, Y) \geq d(x, Y) - xx_1 \geq \frac{d(x, Y)}{2}.$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |L(x) - L(x_1)| &\leq \sup \left\{ (f(y_1) - f(y_2)) \left(\frac{1}{xy_1 + xy_2} - \frac{1}{x_1y_1 + x_1y_2} \right) : y_1, y_2 \in Y \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} \cdot \frac{x_1y_1 + x_1y_2 - xy_1 - xy_2}{x_1y_1 + x_1y_2} : y_1, y_2 \in Y \right\} \\ &\leq L(x) \frac{xx_1}{d(x_1, Y)} \leq L(x) \frac{2xx_1}{d(x, Y)}, \end{aligned}$$

откуда следует непрерывность $L(x)$ в точке x и ограниченность $L(x)$ в некоторой окрестности этой точки. Лемма доказана.

Рассмотрим зависимость множества решений уравнения (2.6) от точки x . Покажем, что функции $c_-(x)$, $c_+(x)$ удовлетворяют условию Липшица на $X \setminus Y$ и их коэффициент Липшица в точке x не превосходит $L(x)$.

ЛЕММА 2.5. Если $x, z \in X \setminus Y$, то

$$\begin{aligned} |c_+(x) - c_+(z)| &\leq \min\{L(x); L(z)\}xz, \\ |c_-(x) - c_-(z)| &\leq \min\{L(x); L(z)\}xz. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только первое неравенство, так как второе доказывается аналогично. Для определенности будем считать, что $L(x) \geq L(z)$. Возможны следующие случаи:

- 1) $L(x) > L(z)$;
 - 1.1) $c_+(x) \geq c_+(z)$;
 - 1.2) $c_+(x) < c_+(z)$;
- 2) $L(x) = L(z)$;
 - 2.1) $L(x) > p_0, L(x) > q_0$;
 - 2.2) $L(x) = p_0 = q_0$;
 - 2.3) $L(x) = q_0 > p_0$;
 - 2.4) $L(x) = p_0 > q_0$.

В случаях 1.2), 2.1), 2.2), 2.3) из леммы 2.2 следует существование последовательности $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ такой, что

$$c_+(x) = f(y_i) + L(x)xy_i + a_i, \quad (2.12)$$

где $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$. Из (2.8) следует неравенство

$$c_+(z) \leq f(y_i) + L(z)zy_i. \quad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) получаем

$$c_+(z) - c_+(x) \leq -L(x)xy_i + L(z)zy_i - a_i \leq L(z)(zy_i - xy_i) - a_i \leq L(z)xz - a_i.$$

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем

$$c_+(z) - c_+(x) \leq L(z)xz.$$

Заметим, что в случае 2) в силу симметрии между x и z можно считать, что $c_+(x) \leq c_+(z)$. Таким образом, в рассмотренных случаях требуемое неравенство доказано.

В случаях 1.1), 2.4) согласно следствию леммы 2.2 существует последовательность $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что

$$c_+(x) = f(y_i) - L(x)xy_i + a_i, \quad (2.14)$$

где $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$. Из (2.8) следует неравенство

$$c_+(z) \geq f(y_i) - L(z)zy_i. \quad (2.15)$$

Из (2.14) и (2.15) получаем

$$c_+(x) - c_+(z) \leq -L(x)xy_i + L(z)zy_i - a_i \leq L(z)(zy_i - xy_i) - a_i \leq L(z)xz - a_i.$$

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем

$$c_+(x) - c_+(z) \leq L(z)xz.$$

Заметим, что в случае 2) в силу симметрии между x и z можно считать, что $c_+(x) \geq c_+(z)$. Таким образом, в случаях 1.1), 2.4) требуемое неравенство доказано. Лемма доказана.

Отметим, что множество решений уравнения (2.6) может быть невырожденным отрезком только в случае 2.2). Во всех остальных случаях решение единственно, т.е. $c_-(x) = c_+(x)$. В частности, если множество Y ограничено, то решение единственно.

Следующая лемма позволяет проследить аналогию между функциями $c_-(x)$, $c_+(x)$ и продолжением (1.1).

ЛЕММА 2.6. Пусть $x \in X \setminus Y$. Если $p_0 > q_0$, то

$$c_+(x) = c_-(x) = \sup\{f(y) - L(x)xy : y \in Y\}. \quad (2.16)$$

Если $p_0 < q_0$, то

$$c_+(x) = c_-(x) = \inf\{f(y) + L(x)xy : y \in Y\}.$$

Если $p_0 = q_0$, то

$$\begin{aligned} c_+(x) &= \inf\{f(y) + L(x)xy : y \in Y\}, \\ c_-(x) &= \sup\{f(y) - L(x)xy : y \in Y\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (2.16). Из (2.8) следует, что

$$c_+(x) \geq c_-(x) \geq \sup\{f(y) - L(x)xy : y \in Y\}.$$

Далее воспользуемся следствием леммы 2.2. Из неравенства $q_x(c_+(x)) \geq p_0 > q_0$ имеем $c_+(x) < t_q(x)$. Из строгого убывания $q_x(t)$ при $t < t_q(x)$ имеем $c_+(x) = c_-(x)$. Из существования последовательности $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ такой, что

$$c_+(x) = c_-(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} (f(y_i) - L(x)xy_i),$$

следует неравенство $c_-(x) \leq \sup\{f(y) - L(x)xy : y \in Y\}$. Равенство (2.16) доказано. Остальные равенства доказываются аналогично. Лемма доказана.

§ 3. Продолжение с минимальным коэффициентом Липшица

3.1. Определение и основные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Продолжение линейно ограниченной функции $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемое формулой

$$u(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in Y, \\ \frac{c_-(x) + c_+(x)}{2}, & \text{если } x \in X \setminus Y, \end{cases}$$

назовем *продолжением с минимальным коэффициентом Липшица* или *МКЛ-продолжением*. Оператор, ставящий в соответствие функции f ее МКЛ-продолжение u , обозначим через E_k :

$$u = E_k f.$$

Оператор E_k нелинейный, что видно из следующего примера.

ПРИМЕР. Пусть $X = [0, 2]$, $xy = |x - y|$, $Y = \{0, 1, 2\}$. На Y заданы две функции f и f_1 : $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f_1(0) = 1$, $f_1(1) = 0$, $f_1(2) = 0$. Тогда

$$E_k f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1-x}{3-2x}, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ x-1, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

$$E_k f_1(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ \frac{x-1}{2x-1}, & \text{если } 1 \leq x < \frac{3}{2}, \\ \frac{1-x}{2}, & \text{если } \frac{3}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $E_k(f + f_1) \neq E_k f + E_k f_1$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть f , f_1 — линейно ограниченные функции, $a, b \in \mathbb{R}$, $u = E_k f$, $u_1 = E_k f_1$. Оператор E_k обладает следующими свойствами:

- 1) сохраняет верхнюю и нижнюю грани значений функции

$$\inf\{f(y) : y \in Y\} \leq u(x) \leq \sup\{f(y) : y \in Y\};$$

- 2) является монотонным

$$f \leq f_1 \Rightarrow u \leq u_1;$$

- 3) однороден и аддитивен по отношению к константам

$$E_k(af + b) = aE_k f + b;$$

- 4) непрерывен относительно равномерной нормы

$$\sup\{|f(y) - f_1(y)| : y \in Y\} \leq \varepsilon \Rightarrow \sup\{|u(x) - u_1(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только второе неравенство в свойстве 1), так как первое доказывается аналогично. Пусть $x \in X \setminus Y$, $y_1 \in Y$. Предположим, что $u(x) > \sup\{f(y) : y \in Y\}$. Тогда

$$\begin{aligned} p_{f,x}(u(x)) &= \sup\left\{\frac{u(x) - f(y)}{xy} : y \in Y\right\} \geq \frac{u(x) - f(y_1)}{xy_1} > 0, \\ q_{f,x}(u(x)) &= \sup\left\{\frac{f(y) - u(x)}{xy} : y \in Y\right\} \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $u(x)$ не является решением уравнения (2.6), что противоречит определению $u(x)$.

Свойства 2) и 3) получаются очевидным образом из леммы 2.1.

Докажем свойство 4). Пусть

$$-\varepsilon \leq f(y) - f_1(y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in Y.$$

Тогда в силу свойств 2) и 3)

$$\begin{aligned} u_1(x) - \varepsilon &\leq u(x) \leq u_1(x) + \varepsilon, \\ -\varepsilon &\leq u(x) - u_1(x) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Свойство 4) и теорема доказаны.

ЛЕММА 3.1. Пусть $u = E_k f$, $x, z \in X \setminus Y$. Тогда

$$|u(x) - u(z)| \leq \min\{L(x); L(z)\}xz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство следует из леммы 2.5.

Следующая теорема устанавливает экстремальное свойство МКЛ-продолжения.

ТЕОРЕМА 3.2. МКЛ-продолжение $u = E_k f$ имеет в каждой точке $x \in X \setminus Y$ конечный, непрерывно зависящий от x и ограниченный в некоторой окрестности x коэффициент Липшица

$$k[X]u(x) = L(x) = \sup\left\{\frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} : y_1, y_2 \in Y\right\}.$$

Справедливо неравенство

$$k[X]u(x) \leq k[X]v(x), \quad (3.1)$$

где v — любое другое продолжение функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения величин $k[X]u(x)$ и $L(x)$ следует, что

$$k[X]u(x) = \max\{k[Y]u(x); k[X \setminus Y]u(x)\} = \max\{L(x); k[X \setminus Y]u(x)\}.$$

Из леммы 3.1 следует, что $k[X \setminus Y]u(x) \leq L(x)$. Значит, $k[X]u(x) = L(x)$. Из этого равенства и леммы 2.3 получается неравенство (3.1). Непрерывность $L(x)$, ограниченность $L(x)$ в некоторой окрестности x и формула для $L(x)$ получены в лемме 2.4. Теорема доказана.

Таким образом, МКЛ-продолжение имеет в каждой точке множества $X \setminus Y$ ко-эффицент Липшица, минимальный среди совокупности всех возможных продолжений. Это оправдывает название введенного продолжения.

3.2. Сохранение ограничений на приращения. Для ограничения приращений значений функций будем использовать квазивогнутые функции. Эти функции в таком качестве используются в [15], [19], [20].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция ω называется *квазивогнутой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\omega(0) = 0$;
- 2) $\omega(t)$ возрастает;
- 3) $\omega(t)/t$ убывает.

Термин введен в [19, гл. 2, §1] и обусловлен тем, что вогнутая возрастающая неотрицательная функция квазивогнута. Если не указано иное, не предполагается, что $\omega(t)$ непрерывна в нуле. Это позволяет мажорировать приращения значений функции при помощи квазивогнутых функций как в точках непрерывности, так и в точках разрыва. Покажем что МКЛ-продолжение сохраняет ограничения на приращения значений функции, заданные с помощью квазивогнутых мажорант.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $x \in X$, u – МКЛ-продолжение функции f , а функции ω_x^+ , ω_x^- квазивогнуты. Если выполняется неравенство

$$f(y) - u(x) \leq \omega_x^+(yx) \quad \forall y \in Y, \quad (3.2)$$

то

$$u(x_1) - u(x) \leq \omega_x^+(x_1x) \quad \forall x_1 \in X.$$

Если выполняется неравенство

$$u(x) - f(y) \leq \omega_x^-(yx) \quad \forall y \in Y, \quad (3.3)$$

то

$$u(x) - u(x_1) \leq \omega_x^-(x_1x) \quad \forall x_1 \in X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1 \in X \setminus Y$, $x_1 \neq x$ и $\varepsilon > 0$. В соответствии с (2.9) выберем y так, что

$$L(x_1) - \varepsilon \leq \frac{f(y) - u(x_1)}{x_1 y}.$$

Воспользовавшись леммой 3.1, получаем

$$\begin{aligned} \frac{u(x_1) - u(x)}{xx_1} - \varepsilon &\leq L(x_1) - \varepsilon \leq \frac{f(y) - u(x_1)}{x_1 y}, \\ (u(x_1) - u(x))x_1 y - \varepsilon \cdot x_1 y \cdot xx_1 &\leq (f(y) - u(x_1))xx_1. \end{aligned}$$

Прибавив к обеим частям неравенства величину $(u(x_1) - u(x))xx_1$, получаем

$$\begin{aligned} (u(x_1) - u(x))(x_1 y + xx_1) - \varepsilon \cdot x_1 y \cdot xx_1 &\leq (f(y) - u(x))xx_1, \\ u(x_1) - u(x) &\leq \frac{(f(y) - u(x))xx_1}{x_1 y + xx_1} + \varepsilon \cdot xx_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Воспользовавшись неравенством (3.2) и возрастанием функции ω_x^+ , получаем

$$f(y) - u(x) \leq \omega_x^+(xy) \leq \omega_x^+(x_1 y + xx_1).$$

Из (3.4), последнего неравенства и убывания функции $\omega_x^+(t)/t$ следует

$$u(x_1) - u(x) \leq \frac{\omega_x^+(x_1 y + xx_1)xx_1}{x_1 y + xx_1} + \varepsilon \cdot xx_1 \leq \omega_x^+(xx_1) + \varepsilon xx_1.$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, первое неравенство доказано. Второе доказывается аналогично. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если в точке $y \in Y$ для функции f выполнено условие Липшица, то это условие в этой же точке выполнено для МКЛ-продолжения u , кроме того,

$$k[Y]f(y) = k[X]u(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 3.3 при

$$\omega_x^+(t) = \omega_x^-(t) = k[Y]f(y) \cdot t.$$

Рассмотрим продолжение функций из класса $\text{Lip}(Y, \omega)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть ω – квазивогнутая функция, u – МКЛ-продолжение функции $f \in \text{Lip}(Y, \omega)$. Тогда $u \in \text{Lip}(X, \omega)$ и для всех $x, x_1 \in X$, $x_1 \neq x$, выполняются неравенство

$$|u(x_1) - u(x)| \leq \frac{\omega(d(x, Y) + xx_1)}{d(x, Y) + xx_1} xx_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из убывания функции $\omega(t)/t$ следует, что правая часть неравенства не превосходит $\omega(x x_1)$. Поэтому выполнение неравенства гарантирует, что $u \in \text{Lip}(X, \omega)$.

Докажем неравенство

$$f(y_1) - u(x) \leq \frac{\omega(d(x, Y) + x y_1)}{d(x, Y) + x y_1} x y_1 \quad (3.5)$$

при $y_1 \in Y$, $x \in X \setminus Y$. В соответствии с (2.9) выберем y так, что

$$L(x) - \varepsilon \leq \frac{u(x) - f(y)}{xy}.$$

Воспользовавшись (2.8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{f(y_1) - u(x)}{x y_1} - \varepsilon &\leq L(x) - \varepsilon \leq \frac{u(x) - f(y)}{xy}, \\ (f(y_1) - u(x))xy - \varepsilon \cdot x y_1 \cdot xy &\leq (u(x) - f(y))x y_1. \end{aligned}$$

Прибавив к обеим частям неравенства величину $(f(y_1) - u(x))x y_1$, получаем

$$\begin{aligned} (f(y_1) - u(x))(x y_1 + xy) - \varepsilon \cdot x y_1 \cdot xy &\leq (f(y_1) - f(y))x y_1, \\ f(y_1) - u(x) &\leq \frac{(f(y_1) - f(y))x y_1}{xy + x y_1} + \varepsilon \cdot x y_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Воспользовавшись неравенством $f(y_1) - f(y) \leq \omega(y y_1)$ и возрастанием функции ω , получаем

$$f(y_1) - f(y) \leq \omega(y y_1) \leq \omega(xy + x y_1).$$

Из (3.6), последнего неравенства и убывания функции $\omega(t)/t$ следует

$$f(y_1) - u(x) \leq \frac{\omega(xy + x y_1)x y_1}{xy + x y_1} + \varepsilon \cdot x y_1 \leq \omega \frac{(d(x, Y) + x y_1)x y_1}{d(x, Y) + x y_1} + \varepsilon \cdot x y_1.$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, неравенство (3.5) доказано.

Рассмотрим функцию

$$\omega_x^+(t) = \frac{\omega(d(x, Y) + t)}{d(x, Y) + t} t.$$

Убывание функции $\omega_x^+(t)/t$ очевидно. Функция ω_x^+ является произведением возрастающих при $t > 0$ функций $\omega(d(x, Y) + t)$ и $t/(d(x, Y) + t)$. Следовательно, ω_x^+ возрастает и является квазивогнутой. Из теоремы 3.3 и неравенства (3.5) следует неравенство

$$u(x_1) - u(x) \leq \frac{\omega(d(x, Y) + x x_1)}{d(x, Y) + x x_1} x x_1 \quad \forall x_1 \in X, \quad x_1 \neq x.$$

Аналогично получается такая же оценка сверху для $u(x) - u(x_1)$ Теорема доказана.

При продолжении функций из класса $\text{Lip}(Y, \omega)$ между оператором МКЛ-продолжения и оператором, задаваемым формулой (1.1), имеется существенное различие. Оператор (1.1) определен для конкретного класса $\text{Lip}(Y, \omega)$ и зависит от функции ω . Оператор МКЛ-продолжения единым образом обеспечивает продолжение функции из любого класса $\text{Lip}(Y, \omega)$, если ω – квазивогнутая функция.

В формуле (1.1) требуется полуаддитивность функции ω , что несколько слабее требования убывания функции $\omega(t)/t$. Однако последнее различие, как правило, не существенно по следующей причине. Если функция ω возрастает, полуаддитивна, непрерывна в нуле и $\omega(0) = 0$, то, как показано в [20, п. 3.2], существует квазивогнутая функция ω_1 такая, что

$$\frac{1}{2}\omega(t) \leq \omega_1(t) \leq \omega(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Рассмотрим вопрос о построении квазивогнутых функций ω_x^+ , ω_x^- , обеспечивающих выполнение условий (3.2) и (3.3). Если ω – неотрицательная, возрастающая, линейно ограниченная функция, то через $(\omega)^*$ будем обозначать функцию, определенную формулой

$$(\omega)^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ t \cdot \sup\left\{\frac{\omega(s)}{s} : s \geq t\right\}, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Построение функций ω_x^+ , ω_x^- основано на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть ω – линейно ограниченная, неотрицательная, возрастающая функция. Тогда $(\omega)^*$ обладает следующими свойствами.

- 1) Функция $(\omega)^*$ является наименьшей квазивогнутой мажорантой для ω , т.е. $(\omega)^*$ – квазивогнута и $\omega_1(t) \geq (\omega)^*(t) \geq \omega(t)$, где ω_1 – любая квазивогнутая функция, превосходящая ω .
- 2) Если $\sup\{\omega(s)/s : s > 0\} = +\infty$, то для некоторого $t_0 > 0$ выполняется следующее: для любого $t \in (0, t_0]$ существует $s_t \geq t$ такое, что

$$\frac{(\omega)^*(t)}{t} = \frac{\omega(s_t + 0)}{s_t}, \quad (\omega)^*(s_t) = \omega(s_t + 0), \quad \lim_{t \rightarrow +0} s_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функции

$$r(t) = \sup\left\{\frac{\omega(s)}{s} : s \geq t\right\}, \quad t > 0,$$

$$r_2(t_1, t_2) = \sup\left\{\frac{\omega(s)}{s} : t_1 \leq s \leq t_2\right\}, \quad t_2 \geq t_1 > 0.$$

Конечность $r(t)$, $r_2(t_1, t_2)$ следует из линейной ограниченности ω . Очевидно, что r убывает и что выполняется неравенство $r_2(t_1, t_2) \leq \omega(t_2)/t_1$.

В свойстве 1) не является очевидным только возрастание функции $(\omega)^*(t)$ при $t > 0$. Пусть $t_2 > t_1 > 0$. Если $r(t_2) = r(t_1)$, то справедливость неравенства

$(\omega)^*(t_2) \geq (\omega)^*(t_1)$ очевидна. Если $r(t_2) < r(t_1)$, то $r(t_1) = r_2(t_1, t_2)$. Следовательно,

$$(\omega)^*(t_1) = t_1 \cdot r_2(t_1, t_2) \leq t_1 \left(\frac{\omega(t_2)}{t_1} \right) = \omega(t_2) \leq (\omega)^*(t_2).$$

Докажем свойство 2). Очевидно, что если $\sup\{\omega(s)/s : s > 0\} = +\infty$, то $r(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$. Так как $r(t)$ убывает и $r(t) \geq 0$, то существует предел $r(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Возьмем $t_0 > 0$ так, чтобы

$$r(t_0) \geq 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t).$$

Пусть $0 < t < t_0$. Возьмем последовательность $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что $s_i \geq t$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(s_i)/s_i = r(t)$. Последовательность ограничена. В противном случае из нее можно выбрать стремящуюся к $+\infty$ подпоследовательность $\{s_i^*\}$, что приводит к противоречию:

$$r(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega(s_i^*)}{s_i^*} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} r(s_i^*) < r(t_0) \leq r(t).$$

Возьмем $s_t = \lim_{i \rightarrow \infty} s_i$. Тогда $s_t \geq t$ и

$$r(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega(s_i)}{s_i} \leq \frac{\omega(s_t + 0)}{s_t}.$$

С другой стороны, из определения $r(t)$ следует, что $r(t) \geq \omega(s_t + 0)/s_t$. Значит, $r(t) = \omega(s_t + 0)/s_t$.

Очевидным образом получаются неравенства

$$\frac{\omega(s_t + 0)}{s_t} \leq r(s_t) \leq r(t) = \frac{\omega(s_t + 0)}{s_t}.$$

Следовательно, $r(s_t) = r(t) = \omega(s_t + 0)/s_t$ и

$$(\omega)^*(s_t) = s_t \cdot r(s_t) = \omega(s_t + 0).$$

Учитывая, что $\lim_{t \rightarrow +0} r(s_t) = \lim_{t \rightarrow +0} r(t) = +\infty$, получаем $\lim_{t \rightarrow +0} s_t = 0$. Теорема доказана.

Из теоремы следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow +0} \omega(t) = \lim_{t \rightarrow +0} (\omega)^*(t) \quad (3.7)$$

и, в частности, непрерывность в нуле $(\omega)^*$, если ω непрерывна в нуле.

Исходя из функций f и u , построим функции

$$\begin{aligned} v_x^+(t) &= \sup(\{0\} \cup \{f(y) - u(x) : xy \leq t, y \in Y\}), \quad t \geq 0, \\ v_x^-(t) &= \sup(\{0\} \cup \{u(x) - f(y) : xy \leq t, y \in Y\}), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Из теоремы 3.5 следует, что для любого $x \in X$ квазивогнутая функция $\omega_x^+ = (v_x^+)^*$ обеспечивает выполнение условия (3.2), а квазивогнутая функция $\omega_x^- = (v_x^-)^*$ обеспечивает выполнение условия (3.3).

Из (3.7) следуют равенства

$$\overline{\lim}_{x_1 \rightarrow y} u(x_1) = \overline{\lim}_{y_1 \rightarrow y} f(y_1), \quad \underline{\lim}_{x_1 \rightarrow y} u(x_1) = \underline{\lim}_{y_1 \rightarrow y} f(y_1), \quad y \in Y,$$

и, в частности, непрерывность МКЛ-продолжения в точках непрерывности исходной функции f .

Таким образом, с помощью МКЛ-продолжения получены положительные ответы на все вопросы, сформулированные в первом параграфе.

§ 4. Задача о следах функций с ограниченным градиентом

В этом параграфе рассматривается задача, в которой использование МКЛ-продолжения вместо продолжения Макшейна позволяет усилить и обобщить результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Нормой градиента* функции $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ будем называть величину

$$\|Du(x)\| = \overline{\lim}_{z \rightarrow x} \frac{|u(z) - u(x)|}{xz}.$$

Отметим, что в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ и u дифференцируема, это определение дает обычную норму градиента. Однако в общем случае градиент не определен, а определенная выше норма градиента служит мерой скорости изменения значения функции в точке.

В [7] рассмотрены функции, удовлетворяющие условию $\|Du(x)\| < 1$. В случае $X = \mathbb{R}^n$ такие функции называются *функциями с пространственноподобными графиками* и имеют физические приложения. Задача заключается в характеристизации следов таких функций на множестве Y . В [7], [21] показано, что ее решение позволяет получить условия существования решения задачи Дирихле для уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского. Сформулируем задачу в терминах продолжения функций:

найти необходимые и достаточные ограничения на функцию $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, обеспечивающие существование продолжения u , непрерывного на X и удовлетворяющего условию

$$\|Du(x)\| < 1 \quad \forall x \in X \setminus Y. \quad (4.1)$$

В этом параграфе будем предполагать выполнение следующих условий:

- 1) для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует отображение $x: [0, 1] \rightarrow X$ (называемое *дугой*) такое, что $x(0) = x_1$, $x(1) = x_2$, $x(t) \in X \setminus Y$ при $0 < t < 1$;
- 2) $d(x_1, x_2)$ есть точная нижняя грань длин дуг, указанных в 1) (определение длины дуги см., например, в [22]).

Из этих условий следует линейная связность X и $X \setminus Y$, а также отсутствие внутренних точек в Y . Будем использовать лемму, которая следует из основного результата работы [22] (см. также [17, лемма 5]).

ЛЕММА 4.1. *При выполнении указанных условий, если $\|Du(x)\| \leq M$ для любого $x \in X$, то*

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq M \cdot x_1 x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

В общем случае получены не совпадающие между собой необходимые и достаточные условия существования непрерывного продолжения со свойством (4.1).

ТЕОРЕМА 4.1. *Для существования непрерывного продолжения со свойством (4.1) необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$a(x) = \sup\{f(y_1) - f(y_2) - (xy_1 + xy_2) : y_1, y_2 \in Y\} < 0 \quad \forall x \in X \setminus Y. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть продолжение u обладает свойством (4.1). Пусть $x \in X \setminus Y$. Из неравенства $\|Du(x)\| < 1$ следует существование $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ таких, что

$$u(z) - u(x) \leq xz(1 - 2\varepsilon) \quad \forall z \in B_r(x) \subset X \setminus Y,$$

где $B_r(x)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в x . Возьмем произвольные $y_1, y_2 \in Y$. Соединим точки x и y_1 дугой γ , длина которой не превышает $xy_1 + r\varepsilon$. Точку пересечения дуги и $\partial B_r(x)$ обозначим через x_1 . Очевидно, что $xx_1 + x_1y_1 \leq xy_1 + r\varepsilon$ и

$$u(x_1) - u(x) \leq xx_1 - 2r\varepsilon.$$

Воспользовавшись леммой 4.1, получаем

$$f(y_1) - u(x_1) \leq y_1x_1, \quad u(x) - f(y_2) \leq xy_2.$$

Складывая три последних неравенства, получаем

$$f(y_1) - f(y_2) \leq y_1x_1 + x_1x + xy_2 - 2r\varepsilon \leq xy_1 + xy_2 - r\varepsilon,$$

откуда следует (4.2). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для существования непрерывного продолжения со свойством (4.1) достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$L(x) = \sup\left\{\frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} : y_1, y_2 \in Y\right\} < 1 \quad \forall x \in X \setminus Y. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условия теоремы МКЛ-продолжение обладает свойством (4.1). Это следует из теоремы 3.2 и очевидного неравенства

$$\|Du(x)\| \leq k[X]u(x) = L(x).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если Y ограничено, то для существования непрерывного продолжения со свойством (4.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (4.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать только достаточность. Пусть $x \in X \setminus Y$. Из (4.2) следует, что для любых $y_1, y_2 \in Y$

$$\frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} = \frac{f(y_1) - f(y_2) - (xy_1 + xy_2)}{xy_1 + xy_2} + 1 \leq 1 + \frac{a(x)}{\sup\{2 \cdot xy : y \in Y\}} < 1.$$

Следовательно, $L(x) < 1$, т.е. выполнено условие теоремы 4.2. Следствие доказано.

Из доказанного утверждения следует теорема 1 из [7]. При этом сняты условия локальной компактности пространства (X, d) и компактности множества Y и значительно сокращено доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если множество Y неограничено, то для существования непрерывного продолжения со свойством (4.1) достаточно, чтобы выполнялось условие (4.2) и неравенства $p_0 < 1$, $q_0 < 1$, где p_0 и q_0 определены формулами (2.1) и (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.2) следует, что $L(x) \leq 1 \forall x \in X \setminus Y$. Предположим, что $L(x) = 1$. Рассмотрим $u = E_k f$. В соответствии с леммой 2.2 и следствием из нее функции $p_x(t)$, $q_x(t)$ строго монотонны в некоторой окрестности точки $t = u(x)$ и существуют последовательности $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ точек из Y такие, что

$$u(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} (f(y_i) + xy_i), \quad u(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} (f(z_i) - xz_i).$$

Отсюда получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f(z_i) - f(y_i) - xy_i - xz_i) = 0,$$

что противоречит условию (4.2). Следовательно, $L(x) < 1$, т.е. выполнено условие теоремы 4.2. Следствие доказано.

Таким образом, между полученными необходимыми и достаточными условиями существования непрерывного продолжения со свойством (4.1) в случае неограниченного Y имеется пробел. Есть основания предполагать, что условие (4.2) является не только необходимым, но и достаточным, однако пока это не доказано.

Рассмотрим случай, когда Y неограничено и $\max\{p_0; q_0\} = 1$, не охваченный полученными результатами. В этом случае при выполнении (4.2) МКЛ-продолжение u имеет вид

$$\begin{aligned} \text{если } p_0 = 1 \text{ и } q_0 < 1, \text{ то } u(x) &= u_-(x) = \sup\{f(y) - xy : y \in Y\}; \\ \text{если } q_0 = 1 \text{ и } p_0 < 1, \text{ то } u(x) &= u_+(x) = \inf\{f(y) + xy : y \in Y\}; \\ \text{если } q_0 = 1 \text{ и } p_0 = 1, \text{ то } u(x) &= u_0(x) = (u_-(x) + u_+(x))/2. \end{aligned}$$

Это легко показывается с помощью леммы 2.6. Наиболее важна ситуация, когда X — неограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Она представляет интерес в связи с началом исследований уравнения максимальных поверхностей в неограниченных областях [23]. В этой ситуации при $\max\{p_0; q_0\} = 1$ продолжение со свойством (4.1) иногда реализуется в виде функции u_0 . Например, когда функции u_- , u_+ дифференцируемы и $Du_-(x) \neq Du_+(x)$ для любого $x \in X \setminus Y$.

ПРИМЕР. Пусть из точки O на плоскости исходят два луча OA и OB под углом $\alpha \geq \pi$. На лучах задана функция

$$f(x) = \begin{cases} \beta \max\{0; (Ox - 1)\}, & \text{если } x \in OA, \\ -\beta \max\{0; (Ox - 1)\}, & \text{если } x \in OB. \end{cases}$$

Расстояние между двумя точками в пределах угла AOB определяется как длина кратчайшей ломаной, лежащей в пределах угла и соединяющей эти точки. Определим значения параметров, при которых возможно непрерывное продолжение функции f на внутренность угла AOB со свойством (4.1).

При $\beta > 1$ не выполняется условие теоремы 4.1, следовательно, требуемого продолжения не существует. При $\beta < 1$ в соответствии со следствием 2 теоремы 4.2 МКЛ-продолжение обладает требуемым свойством. При $\alpha > \pi$, $\beta = 1$ легко видеть, что функция u_0 дает требуемое продолжение. Случай $\alpha = \pi$, $\beta = 1$ полученными результатами не охватывается.

§ 5. Применение продолжения функций в задачах приближения

5.1. Приближение посредством функций, обращающихся в нуль на Y .

Примем обозначения из работы [12]. Определим нормы на множестве ограниченных липшицевых функций:

$$\|h\|_C = \sup\{|h(x)| : x \in \text{dom}(h)\},$$

$$\|h\|_s = \|h\|_C + \|h\|_{\text{Lip}}, \quad \|h\|_m = \max\{\|h\|_C; \|h\|_{\text{Lip}}\}.$$

Через $Y^\perp$ обозначим множество всех функций, определенных на X и обращающихся в нуль на Y . На $\text{Lip}(X) \cap Y^\perp$ липшицева полунорма является нормой.

В этом пункте рассматривается задача приближения функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ посредством функций из $Y^\perp$ в нормах $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$, $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_m$.

Введем функцию $f = g|_Y$. Пусть $f \in \text{Lip}(Y)$ и u — продолжение f на X такое, что $\|f\|_{\text{Lip}} = \|u\|_{\text{Lip}}$. В этом случае, как показано в [12], [13], функция $g_0 = g - u$ является наилучшим приближением функции g в норме $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$. Если, кроме того, функция f ограничена и выполняется условие $\|f\|_C = \|u\|_C$, то функция g_0 является наилучшим приближением функции g в нормах $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_m$.

Если $\|f\|_{\text{Lip}} = +\infty$, то задача поиска наилучшего приближения в традиционной постановке теряет смысл, так как

$$\|g - g_1\|_{\text{Lip}} = +\infty \quad \forall g_1 \in Y^\perp.$$

Однако оказывается возможным построить наилучшее приближение в обобщенном смысле.

Возьмем число $M > 0$. Определим множество

$$Y_M = \{y \in Y : k[Y]f(y) > M\}.$$

Возьмем произвольное подмножество $Z \subset X$ такое, что

$$d_Z = \inf\{d(x, Y_M) : x \in Z\} > 0. \quad (5.1)$$

Исходя из очевидного равенства

$$\|h\|_{\text{Lip}} = \sup\{k[X]h(x) : x \in X\},$$

построим вспомогательные модификации рассматриваемых норм:

$$\|h\|_{\text{Lip}, Z} = \sup\{k[X]h(x) : x \in Z\},$$

$$\|h\|_{s, Z} = \|h\|_C + \|h\|_{\text{Lip}, Z}, \quad \|h\|_{m, Z} = \max\{\|h\|_C; \|h\|_{\text{Lip}, Z}\}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть ω — квазивогнутая функция, $f \in \text{Lip}(Y, \omega)$, u — МКЛ-продолжение функции f , $Z \subset X$ и выполняется (5.1). Тогда функция $g_0 = g - u$ является наилучшим приближением функции g в норме $\|\cdot\|_{\text{Lip}, Z}$. Если при указанных условиях функция f ограничена, то функция g_0 является наилучшим приближением функции g в нормах $\|\cdot\|_{s, Z}$ и $\|\cdot\|_{m, Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in Z \setminus Y$. Из теоремы 3.2 следует

$$k[X]u(x) = \sup \left\{ \frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} : y_1, y_2 \in Y \right\} = \max\{A_1; A_2\},$$

где

$$A_1 = \sup \left\{ \frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} : y_2 \in Y, y_1 \in Y_M \right\},$$

$$A_2 = \sup \left\{ \frac{f(y_1) - f(y_2)}{xy_1 + xy_2} : y_2 \in Y, y_1 \in Y \setminus Y_M \right\}.$$

Оценим A_1 , воспользовавшись возрастанием функции ω и убыванием функции $\omega(t)/t$,

$$A_1 \leq \sup \left\{ \frac{\omega(y_1 y_2)}{xy_1 + xy_2} : y_2 \in Y, y_1 \in Y_M \right\}$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{\omega(xy_1 + xy_2)}{xy_1 + xy_2} : y_2 \in Y, y_1 \in Y_M \right\} \leq \frac{\omega(d_Z)}{d_Z} < +\infty.$$

Оценим A_2 , воспользовавшись следствием теоремы 3.3,

$$A_2 \leq \sup \left\{ \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 y_2} : y_2 \in Y, y_1 \in Y \setminus Y_M, y_1 \neq y_2 \right\} \leq M.$$

В итоге имеем $k[X]u(x) < +\infty$.

Следствие теоремы 3.3 позволяет утверждать, что

$$k[X]u(y) = k[Y]f(y) \leq M \quad \forall y \in Z \cap Y.$$

Следовательно, $\|u\|_{\text{Lip}, Z} < +\infty$. Так как отклонение функции g от функции $g_1 \in Y^\perp$ является продолжением функции f , то из неравенства (3.1) следует

$$k[X]g_0(x) \leq k[X](g - g_1)(x) \quad \forall x \in Z.$$

Отсюда получается требуемый результат для нормы $\|\cdot\|_{\text{Lip}, Z}$. Если функция f ограничена, то из теоремы 3.1 следует, что $\|u\|_C = \|f\|_C$, откуда получается требуемый результат для норм $\|\cdot\|_{s, Z}$ и $\|\cdot\|_{m, Z}$. Теорема доказана.

Таким образом, показано, что наилучшее относительно вспомогательных норм приближение $g_0 = g - u$ не зависит от выбора числа M и множества Z . Поэтому его естественно принять за решение задачи наилучшего приближения в исходных нормах.

5.2. Плотность $\text{Lip}(X)$ в $\text{lip}(X, \omega)$. Пусть $\omega(t) > 0$ при $t > 0$. Определим $\text{lip}(X, \omega)$ как класс всех функций h , определенных на X и удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sup\{h(x_1) - h(x_2) : x_1 x_2 \leq t\}}{\omega(t)} = 0.$$

В [11] доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть (X, d) компактно, ω — непрерывная в нуле, квазивогнутая функция и $\lim_{t \rightarrow +0} \omega(t)/t = +\infty$. Тогда класс $\text{Lip}(X)$ плотен в $\text{lip}(X, \omega)$, т. е. для любой функции $g \in \text{lip}(X, \omega)$ существует функция $u \in \text{Lip}(X)$ сколь угодно близкая к g в норме

$$\|h\|_{C, \omega} = \max\{\|h\|_C; \|h\|_\omega\},$$

где

$$\|h\|_\omega = \sup \left\{ \frac{|h(x_1) - h(x_2)|}{\omega(x_1 x_2)} : x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \right\}.$$

Ранее этот результат был доказан в [24] для $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Доказательства в [11], [24] основаны на рассмотрении сопряженного к $\text{lip}(X, \omega)$ пространства, которое является пространством мер. Используя МКЛ-продолжение, получим прямое доказательство теоремы, указывающее способ построения приближающей функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \text{lip}(X, \omega)$. Определим возрастающую функцию

$$\omega_g(t) = \sup\{|g(x_1) - g(x_2)| : x_1 x_2 \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Из определения класса $\text{lip}(X, \omega)$ и непрерывности в нуле функции ω следует непрерывность функции g . Из компактности пространства (X, d) следует ограниченность g . Поэтому функция ω_g ограничена. Построим в соответствии с теоремой 3.5 квазивогнутую мажоранту этой функции $\omega^* = (\omega_g)^*$.

Пусть Y — конечная ε -сеть в (X, d) , т. е. конечное подмножество множества X такое, что для любого $x \in X$ существует точка $y(x) \in Y$, удаленная от x не более чем на ε . Пусть $f = g|_Y$, u — МКЛ-продолжение функции f на X . Из конечности множества Y следует, что $f \in \text{Lip}(Y)$. Из теоремы 3.4 получаем, что $u \in \text{Lip}(X)$ и $u \in \text{Lip}(X, \omega^*)$.

Оценим близость функций g и u . Пусть $h = g - u$. Тогда $h(y(x)) = 0$ для любого $x \in X$. Оценим сверху величину $\|h\|_C$. Справедливо следующее:

$$\begin{aligned} |h(x)| &= |h(x) - h(y(x))| \leq |g(x) - g(y(x))| + |u(x) - u(y(x))| \\ &\leq \omega_g(\varepsilon) + \omega^*(\varepsilon) \leq 2\omega^*(\varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|h\|_C \leq 2\omega^*(\varepsilon)$ и $\|h\|_C \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |h(x_1) - h(x_2)| &= |h(x_1) - h(y(x_1)) + h(y(x_2)) - h(x_2)| \\ &\leq |h(x_1) - h(y(x_1))| + |h(y(x_2)) - h(x_2)| \leq 4\omega^*(\varepsilon), \\ |h(x_1) - h(x_2)| &\leq |g(x_1) - g(x_2)| + |u(x_1) - u(x_2)| \\ &\leq \omega_g(x_1 x_2) + \omega^*(x_1 x_2) \leq 2\omega^*(x_1 x_2), \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq 4\omega^*(\min\{\varepsilon; x_1 x_2\}).$$

В результате имеем

$$\|h\|_\omega \leq \sup \left\{ \frac{4\omega^*(\min\{\varepsilon; x_1 x_2\})}{\omega(x_1 x_2)} : x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \right\} \leq \sup \left\{ \frac{4\omega^*(t)}{\omega(t)} : t \leq \varepsilon \right\}.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega^*(t)}{\omega(t)} = 0. \quad (5.2)$$

Если $\sup\{\omega_g(s)/s : s > 0\} < +\infty$, то (5.2) следует из условия

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty.$$

Рассмотрим случай $\sup\{\omega_g(s)/s : s > 0\} = +\infty$. Из теоремы 3.5 следует, что для каждого достаточно малого $t > 0$ существует число $s_t \geq t$ такое, что

$$\frac{\omega^*(t)}{t} = \frac{\omega_g(s_t + 0)}{s_t}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} s_t = 0.$$

Получим

$$\frac{\omega^*(t)}{\omega(t)} = \frac{\omega^*(t)}{t} \frac{t}{\omega(t)} = \frac{\omega_g(s_t + 0)}{s_t} \frac{t}{\omega(t)} \leq \frac{\omega_g(s_t + 0)}{s_t} \frac{s_t}{\omega(s_t)} = \frac{\omega_g(s_t + 0)}{\omega(s_t)}. \quad (5.3)$$

Известно [19, гл. 2, § 1], что квазивогнутая функция непрерывна при $t > 0$. Поэтому $\omega(s_t) = \omega(s_t + 0)$. Из определения класса $\text{lip}(X, \omega)$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega_g(t)}{\omega(t)} = 0.$$

Поэтому из (5.3) следует (5.2). Теорема доказана.

Список литературы

1. Wells J. H., Williams L. R. Embeddings and Extensions in Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
2. McShane E. Extension of range of function // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. V. 40. № 12. P. 837–842.
3. Czipser J., Geher L. Extension of functions satisfying a Lipschitz condition // Acta Math. Hungar. 1955. V. 6. № 1–2. P. 213–220.
4. Калябин Г. А. О следах функций с мажорируемыми производными // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 4. С. 499–506.
5. Владимиров Ю. Н. О максимальных функциях Липшица, связанных с задачей оптимального перемещения массы // Оптимизация. 1988. № 44. С. 96–113.
6. Sherbert D. The structure of ideals and point derivations in Banach algebras of Lipschitz functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 111. № 2. P. 240–272.
7. Клячин А. А., Миклюков В. М. Следы функций с пространственноподобными графиками и задача о продолжении функций при ограничениях на градиент // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 49–64.
8. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
9. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
10. Hiriart-Urruty J.-B. Extension of Lipschitz functions // J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 77. № 2. P. 539–555.
11. Hanin L. G. Kantorovich–Rubinshtein norm and its application in the theory of Lipschitz spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115. № 2. P. 345–352.

12. *Mustata C.* Extension of Hölder functions and some related problems of best approximation // Preprint. "Babes-Bolyai" Univ., Fac. Math. Phys., Res. Semin. № 7, 1991. P. 71–86.
13. *Mabizela S.* The relationship between Lipschitz extensions, best approximations, and continuous selections // Quaestiones Math. 1991. V. 14. № 3. P. 261–268.
14. *Moreau P., Ronse C.* Generation of shading-off in images by extrapolation of Lipschitz functions // Graphical Models and Image Processing. 1996. V. 58. № 4. P. 314–333.
15. *Le Gruyer E., Archer J. C.* Stability and convergence of extension schemes to continuous functions in general metric spaces // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. № 1. P. 274–285.
16. *Мильман В. А.* Продолжение функций с сохранением модуля непрерывности // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 4. С. 23–28.
17. *Мильман В. А.* Продолжение функций, сохраняющее модуль непрерывности // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 2. С. 236–245.
18. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.
19. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
20. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
21. *Bartnik R., Simon L.* Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature // Comm. Math. Phys. 1982. V. 87. № 1. P. 131–152.
22. *Sleřak B.* A mean value theorem in metric spaces // Constructive Theory of Functions. Sofia: Publ. House Bulgarian Acad. Sci., 1988. P. 47–49.
23. *Клячин А. А.* Разрешимость задачи Дирихле для уравнения максимальных поверхностей с особенностями в неограниченных областях // Докл. АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 162–164.
24. *Bade W. G., Curtis P. C., Dales H. G.* Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. V. 55. № 2. P. 359–377.

Институт технической кибернетики НАН Беларуси
E-mail: milman@newman.basnet.minsk.by

Поступила в редакцию
19.05.1997